Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев, Геометрические свойства множества банаховых пределов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 177–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:22:47

УДК 517.982.22

Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев

Геометрические свойства множества банаховых пределов

Изучается геометрия и крайние точки множества $\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} \subset l_\infty^*$ – множество всех положительных нормированных функционалов, инвариантных относительно сдвига и l_∞ – множество всех ограниченных последовательностей с равномерной нормой. В частности, вычислен радиус множества $\mathfrak{B}$ и описана орбита элемента x относительно крайних точек множества $\mathfrak{B}$ для широкого класса последовательностей x .

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: банахов предел, крайняя точка, почти сходящаяся последовательность.

DOI: 10.4213/im8092

§ 1. Введение

Существование банаховых пределов, т.е. положительных нормированных функционалов на l_∞ , инвариантных относительно сдвига, было доказано С. Банахом [1]. Банаховы пределы зарекомендовали себя как удобный и полезный инструмент в различных областях анализа (см., например, [2]–[4]). О различных применениях банаховых пределов в некоммутативной геометрии см. [5].

В § 3 работы мы вводим и исследуем понятие разделяющих множеств (определение 5). Разделяющие множества впервые были введены (неявно) в [6], где было показано, что множество $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (всех элементов $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_\infty$ таких, что $x_k = 0, 1$ и $k \in \mathbb{N}$) является разделяющим. Теорема 7 дает необходимое и достаточное условие того, что произвольное линейное подмножество $G \subset l_\infty$ является разделяющим. С помощью этих результатов мы выделяем строгое подмножество $U \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, которое является разделяющим. В § 4, используя понятие независимых последовательностей (определение 18), мы показываем, что любое разделяющее множество обязательно несчетно (следствие 22). В § 5, используя результаты о крайних точках множества $\mathfrak{B}$, мы показываем, что множество V , состоящее из характеристических функций всех строгих множеств Фёльнера (см. определение в § 3), не является разделяющим.

В § 4 проводится исследование геометрических свойств множества банаховых пределов. В банаховом пространстве E для любого подмножества $F \subset E$ можно определить его диаметр и радиус в E следующим образом:

$$d(F, E) = \sup_{x, y \in F} \|x - y\|_E, \quad r(F, E) = \inf_{x \in F} \sup_{y \in F} \|x - y\|_E.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00614-а) и Австралийского исследовательского совета.

В работе [6] было установлено, что диаметр множества $\mathfrak{B}$ равен 2. В настоящей статье мы показываем, что радиус множества $\mathfrak{B}$ также равен 2, что является следствием из более общего результата теоремы 15. Кроме того, в теореме 24 мы показываем, что множество $\mathfrak{B}$ можно представить как объединение континуального семейства непересекающихся подмножеств таких, что радиус каждого из них равен 2.

Обозначим через $\text{ext } \mathfrak{B}$ множество всех крайних точек множества $\mathfrak{B}$. Исследованию множества $\text{ext } \mathfrak{B}$ посвящены, в частности, работы [7]–[12]. Отвечая на вопрос Р. Дугласа, Ч. Чоу доказал, что существует банахов предел, который не представим в виде выпуклой комбинации счетного числа элементов множества $\text{ext } \mathfrak{B}$ [13]. Это результат был усилен в работе [11], где показано, что этим свойством обладает любой банахов предел, инвариантный относительно оператора Чезаро ($x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$).

Напомним, что из результатов М. Талагранна [12] и Р. Нильсена [10] (см. также [8]) следует, что множество $\text{ext } \mathfrak{B}$ не является слабо* замкнутым. Отметим также, что в [11] было показано, что любая последовательность B_k , $k \geq 1$, различных элементов из $\text{ext } \mathfrak{B}$ не содержит слабо* сходящихся подпоследовательностей.

В § 5 проводится дальнейшее изучение множества $\text{ext } \mathfrak{B}$. В частности, при обобщении результата Келлера–Мура [8] в следствии 29 дано описание орбиты

$$\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) := \{Bx : B \in \text{ext } \mathfrak{B}\}$$

элемента x для широкого класса ограниченных последовательностей x , более точно, для класса W всех $x = \chi_e \in l_\infty$ (χ_e – характеристическая функция множества e) таких, что

$$e = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{2k-1}, n_{2k}),$$

где $\{n_k \in \mathbb{N}\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = \infty \quad (1)$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Этот результат можно сравнить с результатом Л. Сачестона (см. теорему 4), описывающим орбиту

$$\mathfrak{B}(x) := \{Bx : B \in \mathfrak{B}\}$$

любого элемента $x \in l_\infty$. Более точно, теорема Сачестона утверждает, что $\mathfrak{B}(x) = [q(x), p(x)]$ для любого $x \in l_\infty$, где p и q – сублинейные функционалы на l_∞ (см. далее теорему 4), в то время как мы показываем, что $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = \{q(x), p(x)\}$ для любого $x \in W$.

Некоторые результаты настоящей работы были анонсированы в [14].

Авторы признательны С. В. Конягину, Е. А. Алехно и рецензенту за помощь и ценные рекомендации при подготовке рукописи.

§ 2. Предварительные результаты

Через l_∞ обозначается множество ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ называется *банаховым пределом*, если:

- 1) $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для $x \geq 0$;
- 2) $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$;
- 3) $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in l_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Отметим, что в некоторых работах банаховы пределы называют также *пределами Банаха–Мазура*.

Из определения 1 вытекает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq Bx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

для всех $x \in l_\infty$ и, в частности, $Bx = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для любой сходящейся последовательности $x \in l_\infty$, $\|B\|_{l_\infty^*} = 1$. Множество всех банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ – замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства l_∞^* .

Следующее понятие было введено в работе [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $x \in l_\infty$ называется *почти сходящейся* (к числу $a \in \mathbb{R}$), если $Bx = a$ для любого банахова предела B .

Множество всех почти сходящихся последовательностей обозначим через as , а множество всех последовательностей, почти сходящихся к нулю, обозначим через as_0 . Следующий критерий почти сходимости был доказан Г.Г. Лоренцем [15].

ТЕОРЕМА 3. Последовательность $x \in l_\infty$ почти сходится к числу $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Предыдущий результат был усилен Л. Сачестоном [16] следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $x \in l_\infty$

$$\mathfrak{B}(x) := \{Bx : B \in \mathfrak{B}\} = [q(x), p(x)],$$

где

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Приведем примеры почти сходящихся последовательностей и будем записывать $\text{Lim } x_n = a$, если $Bx = a$ для всех $B \in \mathfrak{B}$:

- 1) $\text{Lim}(-1)^n = 0$;
- 2) если $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, то $\text{Lim } x_n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$;
- 3) $\text{Lim} \sin nt = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 4) $\text{Lim} \sin^2 nt = \begin{cases} 0, & t = m\pi, m - \text{целое число}, \\ \frac{1}{2} & \text{для остальных } t \in \mathbb{R}; \end{cases}$
- 5) $\text{Lim} |\sin nt| = \begin{cases} \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \sin \frac{k\pi}{q}, & |t| = \frac{p}{q}\pi, p, q - \text{целые числа}, q \neq 0, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{если } \frac{t}{\pi} \text{ иррационально}; \end{cases}$

6) система Радемахера $r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t)$ рассматривается на $[0, 1]$, для почти всех $t \in [0, 1]$ имеем $q(r_n(t)) = -1$ и $p(r_n(t)) = 1$, следовательно, $\{r_n(t)\} \notin ac$ для почти всех t , однако для всех двоично-рациональных $t \in [0, 1]$ последовательность $\{r_n(t)\}$ принадлежит ac и $\text{Lim } r_n(t) = 0$.

Примеры 1), 2) легко проверить, применив теорему 3; примеры 3)–6) приведены в работе [17].

Далее мы перечислим важные свойства функционалов p и q , которые следуют непосредственно из определения функционала p (мы будем часто использовать эти свойства без дополнительных ссылок):

- (i) функционалы p и q положительно однородны;
- (ii) равенство $p(-x) = -q(x)$ справедливо для любого $x \in l_\infty$;
- (iii) функционал p является выпуклым.

§ 3. Разделяющие множества

Следующее понятие было введено в работе [6], где использовалась несколько иная терминология.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $G \subset l_\infty$ является *разделяющим*, если для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ верна импликация

$$B_1|_G = B_2|_G \implies B_1 = B_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Непосредственно из определения 5 вытекает, что множество $G \subset l_\infty$ является разделяющим тогда и только тогда, когда его линейная оболочка $\text{Lin } G$ является разделяющим множеством.

Следующая теорема является критерием того, что линейное множество $G \subset l_\infty$ является разделяющим.

ТЕОРЕМА 7. *Линейное множество $G \subset l_\infty$ является разделяющим тогда и только тогда, когда для любого $x \in l_\infty$ и любого $B \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство*

$$\inf_{y, z \in G} (p(x + y) + p(-x + z) - B(y + z)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B – банахов предел, то по теореме 4 неравенство $B(x) \leq p(x)$ выполнено для любого $x \in l_\infty$. По теореме Хана–Банаха сужение $B|_G$ можно продолжить до линейного функционала $\tilde{B}$ на l_∞ с сохранением неравенства $\tilde{B} \leq p$. Хорошо известно (см., например, [16]), что предыдущее неравенство эквивалентно тому, что $\tilde{B}$ – банахов предел. Однако продолжение $\tilde{B}$, вообще говоря, не единственно.

В [18, теорема 3.2] показано, что продолжение $\tilde{B}$ линейного функционала B с подпространства $G \subset l_\infty$ на элемент $x \notin G$ с сохранением неравенства $\tilde{B} \leq p$ единственно тогда и только тогда, когда

$$\inf_{y \in G} (p(x + y) - B(y)) = \sup_{z \in G} (-p(-x + z) + B(z)).$$

Если левая часть последнего равенства строго больше правой, то продолжение не единственно и справедливы точные равенства

$$\max \tilde{B}(x) = \inf_{y \in G} (p(x + y) - B(y)), \quad \min \tilde{B}(x) = \sup_{z \in G} (-p(-x + z) + B(z)), \quad (2)$$

где $\max$ и $\min$ берутся по всевозможным продолжениям $\tilde{B}$, т. е. по всем таким $\tilde{B} \in \mathfrak{B}$, что $\tilde{B} = B$ на G .

Из (2) мы заключаем, что G – разделяющее множество (т. е. любой банахов предел B продолжается единственным образом с G на все l_∞) тогда и только тогда, когда

$$\inf_{y \in G} (p(x + y) - B(y)) = \sup_{z \in G} (-p(-x + z) + B(z)) \quad \forall x \in l_\infty, \quad B \in \mathfrak{B},$$

или, эквивалентно,

$$\inf_{y, z \in G} (p(x + y) + p(-x + z) - B(y + z)) = 0 \quad \forall x \in l_\infty, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что схожие рассуждения и равенства (2) будут использованы в теореме 19.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Пусть G – линейное подмножество в l_∞ .*

1) *Если G является разделяющим множеством, то для любого $x \in l_\infty$ справедливо равенство*

$$\inf_{y, z \in G} (p(x + y) + p(-x + z) - p(y + z)) = 0. \quad (3)$$

2) *Если условие*

$$\inf_{y, z \in G} (p(x + y) + p(-x + z) + p(-y - z)) = 0 \quad (4)$$

справедливо для любого $x \in l_\infty$, то G является разделяющим множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 7 следует, что линейное множество $G \subset l_\infty$ является разделяющим тогда и только тогда, когда

$$\inf_{y, z \in G} (p(x+y) + p(-x+z) - B(y+z)) = 0 \quad \forall x \in l_\infty, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

В силу выпуклости функционала p получаем $p(x+y) + p(-x+z) \geq p(y+z)$ для любых $x, y, z \in l_\infty$ и, поскольку $-p(-y-z) \leq B(y+z) \leq p(y+z)$ для любых $y, z \in l_\infty$ (что немедленно следует из теоремы 4 и свойства (ii) функционала p), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(x+y) + p(-x+z) - p(y+z) \\ &\leq p(x+y) + p(-x+z) - B(y+z) \\ &\leq p(x+y) + p(-x+z) + p(-y-z). \end{aligned}$$

Отсюда следует доказательство требуемых утверждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Условие (4) может быть записано в более простой (однако не эквивалентной) форме, если брать инфимум по всем $y = -z \in G$. Действительно,

$$0 \leq \inf_{y, z \in G} (p(x+y) + p(-x+z) + p(-y-z)) \leq \inf_{y \in G} (p(x+y) + p(-x-y)).$$

Таким образом, если

$$\inf_{y \in G} (p(x+y) + p(-x-y)) = 0 \quad \forall x \in l_\infty, \quad (5)$$

то условие (4) выполнено и G является разделяющим множеством.

Как показано в работах [19], [20], расстояние от произвольного элемента $x \in l_\infty$ до подпространства ac почти сходящихся последовательностей вычисляется по формуле

$$\text{dist}(x, ac) = \frac{1}{2}(p(x) - q(x)).$$

Используя эту формулу, можно записать условие (5) в виде

$$\inf_{y \in G} \text{dist}(x+y, ac) = 0 \quad \forall x \in l_\infty.$$

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $F(\{n_k\})$ множество ограниченных последовательностей вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{[n_k, n_{k+1})}, \quad x \in l_\infty.$$

Например, если $n_k = k$, $k \in \mathbb{N}$, то $F(\{n_k\}) = l_\infty$. Если $n_k = m(k-1) + 1$, где $m \in \mathbb{N}$, то $F(\{n_k\})$ состоит из всех ограниченных последовательностей таких, что $x_{mk+1} = x_{mk+2} = \dots = x_{mk+m}$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 10. Множество $F(\{n_k\})$ является разделяющим тогда и только тогда, когда

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует последовательность $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (n_{k_i+1} - n_{k_i}) = \infty. \quad (6)$$

Положим $m_i = \frac{n_{k_i+1} + n_{k_i}}{2}$ и

$$x_k = \begin{cases} 1, & n_{k_i} \leq k < m_i, \\ -1, & m_i \leq k < n_{k_i+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (n_{k_i+1} - m_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (m_i - n_{k_i}) = \infty,$$

для любых $y, z \in F(\{n_k\})$ получаем

$$p(x + y) \geq 1 + \limsup_{i \rightarrow \infty} y_{k_i}, \quad p(-x + z) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} z_{k_i}.$$

Из условия (6) следует, что $p(\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty [n_{k_i}, n_{k_i+1})}) = 1$. Следовательно, по теореме 4 существует банахов предел $B \in \mathfrak{B}$ такой, что

$$B(\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty [n_{k_i}, n_{k_i+1})}) = 1.$$

Тогда для любых $y, z \in F(\{n_k\})$ мы получаем

$$\begin{aligned} B(y + z) &= B\left(\sum_{k=1}^\infty (y_k + z_k) \chi_{[n_k, n_{k+1})}\right) = B\left(\sum_{i=1}^\infty (y_{k_i} + z_{k_i}) \chi_{[n_{k_i}, n_{k_i+1})}\right) \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} (y_{k_i} + z_{k_i}). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} p(x + y) + p(-x + z) - B(y + z) &\geq 1 + \limsup_{i \rightarrow \infty} y_{k_i} + \limsup_{i \rightarrow \infty} z_{k_i} - \limsup_{i \rightarrow \infty} (y_{k_i} + z_{k_i}) \\ &\geq 1 + \limsup_{i \rightarrow \infty} (y_{k_i} + z_{k_i}) - \limsup_{i \rightarrow \infty} (y_{k_i} + z_{k_i}) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку $F(\{n_k\})$ является линейным множеством, $F(\{n_k\})$ не является разделяющим множеством по теореме 7. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (6).

Пусть теперь

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (n_{k+1} - n_k) < \infty. \quad (7)$$

Рассмотрим оператор $P: l_\infty \rightarrow F(\{n_k\})$, заданный по формуле

$$(Px)_i = \frac{1}{n_{k+1} - n_k} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} x_j, \quad n_k \leq i < n_{k+1}.$$

Ввиду условия (7) мы получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (x_i - (Px)_i) = 0$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, по теореме 3 имеем $Bx = BPx$ для любых $x \in l_\infty$ и банахова предела $B \in \mathfrak{B}$. Пусть $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ такие, что $B_1 = B_2$ на $F(\{n_k\})$. Для любого $x \in l_\infty$ имеем

$$B_1x = B_1(Px) = B_2(Px) = B_2x.$$

Следовательно, $F(\{n_k\})$ является разделяющим множеством. Теорема доказана.

Хотя следствие 8 не дает единого критерия, когда произвольное множество является разделяющим, оно полезно в некоторых конкретных ситуациях.

Обозначим через $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ множество всех последовательностей $x \in l_\infty$ таких, что $x_k = 0$ или $x_k = 1$. В статье [6] было показано, что $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ является разделяющим множеством. Следующая теорема усиливает этот факт.

ТЕОРЕМА 11. *Множество*

$$U := \{x \in \{0, 1\}^\mathbb{N} : q(x) = 0, p(x) = 1\}$$

является разделяющим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 6 достаточно показать, что $\text{Lin } U$ (линейная оболочка U) является разделяющим множеством. Легко видеть, что условие (4) выполняется для любого $x \in \text{Lin } U$ (для $y = -x$ и $z = x$) и любого $x \in ac$ (для $y = z = 0$). Поскольку $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ – разделяющее множество, достаточно показать, что $\{0, 1\}^\mathbb{N} \subset \text{Lin } U + ac$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ такой, что $0 = q(x) < p(x) \leq 1$. По теореме 4 условие $q(x) = 0$ влечет существование последовательности непересекающихся интервалов $I_n \subset \mathbb{N}$, $|I_n| \rightarrow \infty$, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} x_i = 0.$$

Положим

$$u_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{2n}, \\ x_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} 1 - x_i, & i \in I_{2n}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. $x = u - v$. Непосредственно из определения функционалов p и q следует, что $p(u) = p(v) = 1$ и $q(u) = q(v) = 0$, т. е. $u, v \in U$ и $x \in \text{Lin } U$.

2. Пусть $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ такой, что $0 < q(x) < p(x) \leq 1$. По теореме 4 существует последовательность непересекающихся интервалов $I_n \subset \mathbb{N}$, $|I_n| \rightarrow \infty$, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} x_i = p(x).$$

Положим

$$u_i = \begin{cases} 0, & i \in I_{2n}, \\ x_i & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad v_i = \begin{cases} x_i, & i \in I_{2n}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, $x = u + v$. По определению функционала q имеем $0 = q(u) < p(u) \leq 1$ и $0 = q(v) < p(v) \leq 1$, т. е. u и v удовлетворяют условиям случая 1. Следовательно, $u, v \in \text{Lin } U$ и $x \in \text{Lin } U$.

3. Пусть $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ такой, что $0 < q(x) = p(x) \leq 1$, т. е. $x \in ac$, очевидно, удовлетворяет (4) при $y = z = 0$.

Теорема доказана.

Следуя работе [8] (см. также [21]), введем следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. 1) Множество $e \subset \mathbb{N}$ называется *множеством Фёльнера*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ оно содержит интервал длины k .

2) Множество Фёльнера $e \subset \mathbb{N}$ называется *строгим множеством Фёльнера*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ оно содержит лишь конечное число интервалов длины не больше k .

Непосредственно из определения 12 следует, что $p(\chi_e) = 1$, если $e \subset \mathbb{N}$ – множество Фёльнера. Следовательно, любой элемент из множества U является характеристической функцией некоторого множества Фёльнера. Тогда из теоремы 11 мы заключаем, что семейство характеристических функций всех множеств Фёльнера является разделяющим.

Также из определения 12 следует, что e – строгое множество Фёльнера, если оно представимо в виде

$$e = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{2k-1}, n_{2k}),$$

где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty$.

Обозначим

$$V := \{\chi_e : e - \text{строгое множество Фёльнера}\},$$

где χ_e – характеристическая функция множества e . (Используя результаты из § 5, мы докажем в следствии 37, что V , в отличие от U , не является разделяющим множеством.)

Ядро любого банахова предела пересекается с V . Более того, справедлива следующая

ЛЕММА 13. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ множество $\{x \in V : Bx = 0\}$ имеет мощность континуума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty$. Заметим, что для любой строго возрастающей последовательности $k_j \in \mathbb{N}$ имеем $\chi_e \in V$, где $e = \bigcup_{j=1}^{\infty} [n_{2k_j-1}, n_{2k_j})$.

Обозначим через $\mathfrak{I}$ множество всех двоично-иррациональных чисел интервала $(0, 1)$. Тогда для любого $t \in \mathfrak{I}$ существует единственная последовательность $i_j(t) = 0, 1$ такая, что

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} i_j(t) 2^{-j}.$$

Рассмотрим новую последовательность $\{k_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$, определенную следующим образом: $k_1(t) = 2$ и $k_{j+1}(t) = 2k_j(t) - i_j(t)$ для любого $j \geq 1$. Далее, для каждого $t \in \mathfrak{I}$ положим

$$e(t) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [n_{2k_j(t)-1}, n_{2k_j(t)}).$$

Тогда $\chi_{e(t)} \in V$.

Если $t, s \in \mathfrak{I}$, $t \neq s$, то $k_j(t) \neq k_j(s)$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Более того, множества $\{k_m(t), m \geq j\}$ и $\{k_m(s), m \geq j\}$ не пересекаются. Действительно, пусть $k_m(t) > k_m(s)$. Тогда

$$k_{m+1}(t) = 2k_m(t) - i_m(t) \geq 2k_m(t) - 1 \geq 2k_m(s) + 1 \geq k_{m+1}(s) + 1 > k_{m+1}(s).$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что для всех $l > m > j$ имеем $k_l(t) \neq k_m(s)$. Таким образом, множество

$$\{k_m(t), m \in \mathbb{N}\} \cap \{k_m(s), m \in \mathbb{N}\}$$

конечно для любых $t, s \in \mathfrak{I}$, $t \neq s$. Тогда для каждого $B \in \mathfrak{B}$ мы получаем

$$B \max\{\chi_{e(t)}, \chi_{e(s)}\} = B(\chi_{e(t)} + \chi_{e(s)}) = B\chi_{e(t)} + B\chi_{e(s)}.$$

Ясно, что подобные аргументы верны для любого конечного набора элементов из $\mathfrak{I}$, т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t_i \in \mathfrak{I}$ таких, что $t_i \neq t_j$ для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, мы получаем

$$B \max_{1 \leq i \leq n} \chi_{e(t_i)} = \sum_{i=1}^n B\chi_{e(t_i)}.$$

Поскольку $B\chi_{e(t_i)} \geq 0$ и $B \max_{1 \leq i \leq n} \chi_{e(t_i)} \leq 1$, мы заключаем, что множество $\{t \in \mathfrak{I} : B\chi_{e(t)} > 0\}$ конечно либо счетно. Следовательно, множество $\{t \in \mathfrak{I} : B\chi_{e(t)} = 0\}$ имеет мощность континуума. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 14. Для любого счетного семейства $B_i \in \mathfrak{B}$, $i \in \mathbb{N}$, множество

$$\{x \in V : B_i x = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

имеет мощность континуума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{B}$ (в обозначениях из леммы 13) множество

$$\left\{t \in \mathfrak{T}: \sup_{i \in \mathbb{N}} B_i \chi_{e(t)} > 0\right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{t \in \mathfrak{T}: B_i \chi_{e(t)} > 0\}$$

конечно или счетно. Следовательно, множество $\{t \in \mathfrak{T}: B_i \chi_{e(t)} = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}\}$ имеет мощность континуума. Следствие доказано.

В § 5, используя конструкцию из леммы 13, мы оценим мощность множества крайних точек банаховых пределов.

В работе [6] было установлено, что диаметр множества $\mathfrak{B}$ есть

$$d(\mathfrak{B}, l_{\infty}^*) = \sup_{B_1, B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{l_{\infty}^*} = 2.$$

Далее мы покажем, что радиус множества $\mathfrak{B}$

$$r(\mathfrak{B}, l_{\infty}^*) = \inf_{B_1 \in \mathfrak{B}} \sup_{B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{l_{\infty}^*}$$

также равен 2. Это вытекает из следующей теоремы, которая, в частности, показывает, что для любого $B \in \mathfrak{B}$ можно построить счетное число банаховых пределов, находящихся от него на расстоянии 2.

ТЕОРЕМА 15. *Для любого $B_1 \in \mathfrak{B}$ существует такая последовательность $B_i \in \mathfrak{B}$, $i \geq 2$, что*

$$\|B_i - B_j\|_{l_{\infty}^*} = 2 \quad (8)$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $B_1, B_2, \dots, B_n$, удовлетворяющая условию (8) для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, уже построена. По следствию 14 существует элемент $x \in V$ такой, что $B_i x = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку $x \in V$, то $p(x) = 1$, и тогда по теореме 4 существует такой функционал $B_{n+1} \in \mathfrak{B}$, что $B_{n+1}x = 1$. Тогда для элемента $2x - \mathbb{1} \in l_{\infty}$, $\|2x - \mathbb{1}\|_{l_{\infty}} = 1$, и всех $i = 1, 2, \dots, n$ мы получаем

$$(B_{n+1} - B_i)(2x - \mathbb{1}) = 2B_{n+1}x - 2B_i x - B_{n+1}\mathbb{1} + B_i\mathbb{1} = 2 - 0 - 1 + 1 = 2.$$

Следовательно, $\|B_{n+1} - B_i\|_{l_{\infty}^*} = 2$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 16. *Радиус множества $\mathfrak{B}$ в l_{∞}^* равен 2.*

§ 4. Независимые последовательности

В настоящем параграфе мы введем понятие независимой последовательности и, используя его, покажем, что любое разделяющее множество несчетно. Также мы покажем, что множество $\mathfrak{B}$ всех банаховых пределов может быть представлено в виде объединения континуального числа подмножеств радиуса 2.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots)$ – ограниченная последовательность элементов из l_{∞} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Последовательность чисел $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_\infty$ называется *допустимой* для $X \in l_\infty(l_\infty)$, если существует $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $Bx_k = b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Элемент $x_0 \in l_\infty$ и последовательность $X \in l_\infty(l_\infty)$ называются *независимыми*, если для любой допустимой для X последовательности $b \in l_\infty$ и любого $b_0 \in [q(x_0), p(x_0)]$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $Bx_k = b_k$ для всех $k = 0, 1, \dots$.

Следующая теорема является критерием независимости, выраженным в терминах функционала p из теоремы 4.

ТЕОРЕМА 19. Элемент $x_0 \in l_\infty$ и последовательность $X \in l_\infty(l_\infty)$ являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$p\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) = p(\lambda_0 x_0) + p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \quad (9)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $x_0 \in l_\infty$ и последовательность $X \in l_\infty(l_\infty)$ независимы. По теореме 4 для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ существует такой $B_1 \in \mathfrak{B}$, что

$$B_1\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right).$$

Поскольку $x_0 \in l_\infty$ и $X \in l_\infty(l_\infty)$ независимы, существует $B_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $B_2 x_k = B_1 x_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $B_2(\lambda_0 x_0) = p(\lambda_0 x_0)$. Таким образом, имеем

$$B_2\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) = B_2(\lambda_0 x_0) + B_1\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = p(\lambda_0 x_0) + p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right).$$

Следовательно,

$$p\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) \geq B_2\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) = p(\lambda_0 x_0) + p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right).$$

С другой стороны, так как функционал p выпуклый, то

$$p\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) \leq p(\lambda_0 x_0) + p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right).$$

Таким образом, равенство (9) доказано.

Пусть теперь выполнено равенство (9), и пусть B – некоторый банахов предел. Обозначим через $\bar{B}$ сужение функционала B на множество $Q = \text{Lin } X$ (линейную оболочку последовательности X). Можно предполагать, что $x_0 \notin Q$.

Заметим, что $\overline{B}x \leq p(x)$ для всех $x \in Q$. По теореме Хана–Банаха функционал $\overline{B}$ продолжается с Q на $Q \oplus \lambda x_0$ с сохранением неравенства $\overline{B} \leq p$. Из доказательств теоремы Хана–Банаха (см., например, [18, теорема 3.2]) мы заключаем, что множество тех $b_0 \in \mathbb{R}$, для которых возможно равенство $\overline{B}x_0 = b_0$, совпадает с замкнутым интервалом

$$\left[\sup_{y \in Q} (-p(-x_0 + y) + \overline{B}y), \inf_{y \in Q} (p(x_0 + y) - \overline{B}y) \right].$$

Далее мы упростим полученные выражения. Из равенства (9) следует, что $p(x_0 + y) = p(x_0) + p(y)$ для любого $y \in Q$. Также имеем $\overline{B}y \leq p(y)$. Тогда

$$p(x_0 + y) - \overline{B}y = p(x_0) + p(y) - \overline{B}y \geq p(x_0)$$

для любого $y \in Q$. Следовательно, $\inf_{y \in Q} (-\overline{B}y + p(x_0 + y))$ равен $p(x_0)$ и достигается в точке $y = 0$. Аналогично,

$$\sup_{y \in Q} (\overline{B}y - p(-x_0 + y)) = -p(-x_0) = q(x_0).$$

Следовательно,

$$\left[\sup_{y \in Q} (-p(-x_0 + y) + \overline{B}y), \inf_{y \in Q} (p(x_0 + y) - \overline{B}y) \right] = [q(x_0), p(x_0)].$$

Таким образом, функционал $\overline{B}$ продолжается с Q на $Q \oplus \lambda x_0$ с сохранением неравенства $\overline{B}x \leq p(x)$. Для $b_0 \in [q(x_0), p(x_0)]$ положим $\overline{B}x_0 = b_0$ и по теореме Хана–Банаха продолжим $\overline{B}$ с $Q \oplus \lambda x_0$ на l_∞ с сохранением неравенства $\overline{B}x \leq p(x)$. Полученный функционал мы также будем обозначать $\overline{B}$. Далее мы покажем, что $\overline{B} \in \mathfrak{B}$. Поскольку $\overline{B}x = -\overline{B}(-x) \geq -p(-x) = q(x)$ для всех $x \in l_\infty$, то

$$q(x) \leq \overline{B}x \leq p(x) \quad (10)$$

для любого $x \in l_\infty$.

В частности, $\overline{B}\mathbb{I} = q(\mathbb{I}) = p(\mathbb{I}) = 1$ и $\overline{B} \geq 0$. Непосредственная проверка показывает, что

$$p(x - Tx) = q(x - Tx) = 0$$

для любого $x \in l_\infty$, т. е. из неравенств (10) следует, что $\overline{B}$ инвариантен относительно сдвига. Следовательно, $\overline{B} \in \mathfrak{B}$.

По построению $\overline{B}x_k = Bx_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\overline{B}x_0 = b_0$, где b_0 – любое наперед заданное число из отрезка $[q(x_0), p(x_0)]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 20. Пусть $X \in l_\infty(l_\infty)$. Элемент $x_k \in X$ и последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{N}, i \neq k\}$ независимы для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда

$$p\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n p(\lambda_i x_i)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим дискретный аналог системы Радемахера

$$(r_k)_l = \begin{cases} 1, & 2^k j < l \leq 2^k j + 2^{k-1}, \\ -1, & 2^k j + 2^{k-1} < l \leq 2^k(j+1), \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Система Радемахера дает “тривиальный” пример независимой последовательности. Действительно, для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность r_k периодическая с периодом 2^k и почти сходится к нулю, т. е. $[q(r_k), p(r_k)] = \{0\}$. Таким образом, из определения 18 следует, что элемент r_k и последовательность $\{r_i, i \in \mathbb{N}, i \neq k\}$ независимы для любого $k \in \mathbb{N}$.

Чтобы построить более интересный пример независимой последовательности, мы “растянем” последовательности Радемахера r_k . Для этого рекуррентным образом построим последовательность $\{b_n\}$, положив $b_1 = 0$ и $b_{n+1} = b_n + 2^n n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n r_k) \chi_{(b_n, b_{n+1}]}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где χ_e – характеристическая функция множества $e \subset \mathbb{N}$, т. е. $(\chi_e)_l = 1$ для $l \in e$ и $(\chi_e)_l = 0$ для $l \notin e$, и σ_n – оператор растяжения, определяемый по формуле

$$\sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_n, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_n, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_n, \dots).$$

Заметим, что поскольку длина интервала $(b_n, b_{n+1}]$ равна $2^n n$, то по построению $(x_k)_l = 1$ для всех $1 \leq l \leq b_{k+1}$.

Покажем, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 19 и следствия 20. Действительно, если $k \geq 1$, то каждый интервал постоянства последовательности x_k содержит два интервала, на которых x_{k+1} принимает значения 1 и -1 . Поэтому для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$, найдется такой интервал $I_m \subset \mathbb{N}$, что $|I_m| \geq m$ и $\lambda_k(x_k)_l = |\lambda_k|$ для всех $l \in I_m$. Отсюда вытекает, что

$$p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_m|} \sum_{l \in I} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right)_l = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = \sum_{k=1}^n p(\lambda_k x_k).$$

Противоположное неравенство справедливо всегда в силу выпуклости функционала p . Следовательно, последовательность $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ является независимой, т. е. элемент x_k и последовательность $\{x_i, i \in \mathbb{N}, i \neq k\}$ независимы для любого $k \in \mathbb{N}$.

Для любых $X \in l_{\infty}(l_{\infty})$ и $b \in l_{\infty}$ обозначим через $\mathfrak{B}(X, b)$ множество всех $B \in \mathfrak{B}$ таких, что $Bx_k = b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Из определения следует, что $\mathfrak{B}(X, b) \neq \emptyset$, если последовательность b допустима для X . Следующая лемма усиливает теорему 6 из работы [6], в которой доказано, что $d(\mathfrak{B}, l_{\infty}^*) = 2$.

ЛЕММА 21. Пусть $X \in l_{\infty}(l_{\infty})$ и $b \in l_{\infty}$. Если $\mathfrak{B}(X, b) \neq \emptyset$, то

$$d(\mathfrak{B}(X, b), l_{\infty}^*) = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = (x_1, x_2, \dots)$ и $b = (b_1, b_2, \dots)$. Через $x_{i,j}$ обозначим j -ю координату последовательности x_i . Мы построим последовательность $x_0 = \{x_{0,j}\}_{j=1}^\infty$ такую, что:

- 1) $x_{0,j} = \pm 1$ для любых $j \in \mathbb{N}$;
- 2) $q(x_0) = -1$, $p(x_0) = 1$;
- 3) x_0 и X независимы.

Согласно теореме 19 для проверки условия 3) достаточно доказать равенство (9) для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Поскольку обе части (9) положительно однородны, достаточно доказать равенство (9) при дополнительном предположении

$$\sum_{k=0}^n |\lambda_k| = 1,$$

т. е. вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ принадлежит единичной сфере пространства l_1^{n+1} .

Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется счетное множество A_n , плотное в единичной сфере пространства l_1^{n+1} . Без ограничения общности предположим, что каждый элемент из A_n встречается в A_n бесконечно много раз. Множество $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ счетно, и каждый элемент из A встречается в нем бесконечно много раз. Пусть $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A_n$ и $\lambda_0 \neq 0$ (если $\lambda_0 = 0$, то (9) тривиально).

Построим последовательности $\{r_i\}_{i=1}^\infty$, $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ по индукции. Положим $r_1 = 1$, $s_1 = 2$. Если элементы $r_1, s_1, \dots, r_{i-1}, s_{i-1}$ уже построены и набор $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ имеет номер i в A , то можно найти $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ такие, что $r_i \geq s_{i-1} + i$, $s_i \geq r_i + i$, и по определению функционала p получить

$$\frac{1}{s_i - r_i} \sum_{m=r_i+1}^{s_i} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{k,m} \geq p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) - \frac{1}{i}.$$

Положим

$$x_{0,j} = \begin{cases} \text{sign} \lambda_0, & r_i \leq j \leq s_i, \\ -\text{sign} \lambda_0, & s_i < j < r_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда $q(x_0) = -1$, $p(x_0) = 1$, т. е. последовательность x_0 удовлетворяет условиям 1) и 2). Ясно, что

$$\lambda_0 x_{0,j} = \begin{cases} |\lambda_0|, & r_i \leq j \leq s_i, \\ -|\lambda_0|, & s_i < j < r_{i+1}, \end{cases}$$

и $p(\lambda_0 x_0) = |\lambda_0|$. По определению функционала p получаем

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_k\right) &\geq \frac{1}{s_i - r_i} \sum_{m=r_i+1}^{s_i} \sum_{k=0}^n \lambda_k x_{k,m} = |\lambda_0| + \frac{1}{s_i - r_i} \sum_{m=r_i+1}^{s_i} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{k,m} \\ &\geq p(\lambda_0 x_0) + p\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) - \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Поскольку набор $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ встречается в A бесконечно много раз, то в последнем неравенстве выражение $\frac{1}{i}$ может быть заменено сколь угодно малым числом. В силу выпуклости функционала p мы получаем (9), т.е. равенство (9) выполнено на плотном подмножестве единичной сферы пространства l_1^{n+1} .

Для любого $x \in l_\infty$ верна равномерная оценка

$$-\|x\|_{l_\infty} \leq p(x) \leq \|x\|_{l_\infty}.$$

Тогда в силу непрерывности функционала p равенство (9) выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и по теореме 19 построенный элемент $x_0 \in l_\infty$ и последовательность X независимы. Поскольку $\mathfrak{B}(X, b) \neq \emptyset$, то $\{Bx_0 : B \in \mathfrak{B}(X, b)\} = [-1, 1]$ и, следовательно, существуют такие $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, что $B_1x_0 = q(x_0) = -1$, $B_2x_0 = p(x_0) = 1$. Тогда

$$2 \geq d(\mathfrak{B}(X, a), l_\infty^*) \geq \|B_1 - B_2\|_{l_\infty^*} \geq B_2x_0 - B_1x_0 = 2.$$

Лемма доказана.

Следующий результат показывает, что из совпадения двух банаховых пределов на счетном числе последовательностей их равенство, вообще говоря, не следует.

СЛЕДСТВИЕ 22. *Каждое разделяющее множество несчетно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть некоторая ограниченная последовательность $X = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_\infty(l_\infty)$ является разделяющим множеством. Из доказательства леммы 21 следует, что существует $x_0 \in l_\infty$ такой, что элемент x_0 и последовательность $\{x_1, x_2, \dots\}$ независимы и $q(x_0) < p(x_0)$. Это противоречит тому факту, что X является разделяющим множеством. Следствие доказано.

Используя лемму 21, мы докажем более сильный результат.

ТЕОРЕМА 23. *Пусть $X \in l_\infty(l_\infty)$, $b \in l_\infty$ и $B_1 \in \mathfrak{B}$. Если множество $\mathfrak{B}(X, b)$ непусто, то*

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}(X, b)} \|B - B_1\|_{l_\infty^*} = 2, \quad r(\mathfrak{B}(X, b), l_\infty^*) = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения и конструкции из леммы 21. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Каждое из множеств A_n можно представить в виде объединения m попарно непересекающихся подмножеств $Q_{n,k}$, $1 \leq k \leq m$, обладающих теми же свойствами, что и A_n :

- 1) $Q_{n,k} \cap Q_{n,j} = \emptyset$ для всех $k \neq j$;
- 2) $\bigcup_{k=1}^m Q_{n,k} = A_n$;
- 3) $Q_{n,k}$ плотно в единичной сфере пространства l_1^{n+1} ;
- 4) каждый элемент из $Q_{n,k}$ встречается в $Q_{n,k}$ бесконечно много раз.

Как показано в лемме 21, можно построить такие последовательности $y_k = \{y_{k,i}\}_{i=1}^\infty$, $1 \leq k \leq m$, что $y_{k,i} = \pm 1$, $q(y_k) = -1$, $p(y_k) = 1$, y_k и X независимы. Снова используя индуктивный процесс, который был применен при построении элемента x_0 в лемме 21, можно дополнительно предполагать, что множества

$$e_k = \{i : i \in \mathbb{N}, y_{k,i} = 1\}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

попарно не пересекаются. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ мы получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \max(y_k, 0) \right)_i &= 0, 1, \\ \left(\sum_{k=1}^m \min(y_k, 0) \right)_i &= -m, -m+1. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^m y_k \right)_i = \left(\sum_{k=1}^m \max(y_k, 0) \right)_i + \left(\sum_{k=1}^m \min(y_k, 0) \right)_i = -m, -m+2, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$-m \leq B_1 \left(\sum_{k=1}^m y_k \right) = \sum_{k=1}^m B_1 y_k \leq -m+2$$

и $-1 \leq B_1 y_k \leq -1 + 2/m$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Поскольку y_k и X независимы, существует $B_2 \in \mathfrak{B}(X, b)$ такой, что $B_2 y_k = 1$. Следовательно,

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}(X, b)} \|B - B_1\|_{l_\infty^*} \geq (B_2 - B_1) y_k \geq 1 - \left(-1 + \frac{2}{m} \right) = 2 - \frac{2}{m}$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$r(\mathfrak{B}(X, b), l_\infty^*) = \sup_{B \in \mathfrak{B}(X, b)} \|B - B_1\|_{l_\infty^*} = 2$$

для любого $B_1 \in \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 24. Множество $\mathfrak{B}$ может быть представлено как континуальное объединение непересекающихся подмножеств радиуса 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную последовательность $x \in U$. Докажем, что

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{b \in [0,1]} \mathfrak{B}(x, b), \quad (11)$$

где $\mathfrak{B}(x, b) := \{B \in \mathfrak{B} : Bx = b\}$. Очевидно, что $B \in \mathfrak{B}(x, Bx)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. По теореме 4 для любого $b \in [0, 1]$ существует $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $Bx = b$. Следовательно, имеем

$$\mathfrak{B} \subseteq \bigcup_{b \in [0,1]} \mathfrak{B}(x, b).$$

Обратное включение очевидно.

Непосредственно из определения следует, что множества $\mathfrak{B}(x, a)$ и $\mathfrak{B}(x, b)$ не пересекаются, если $a \neq b$. По теореме 23 имеем

$$r(\mathfrak{B}(x, b), l_\infty^*) = 2.$$

Таким образом, равенство (11) означает, что множество $\mathfrak{B}$ разбито на континуально много непересекающихся частей таких, что радиус каждой части равен 2. Теорема доказана.

Теорема 23 утверждает, что множество всех банаховых пределов, удовлетворяющих конечному или счетному множеству условий вида $Bx = b$, $q(x) \leq b \leq p(x)$, имеет тот же радиус и диаметр, что и все множество $\mathfrak{B}$. Для несчетного множества ограничений такого типа ситуация может измениться кардинально. А именно, зафиксируем $B_0 \in \mathfrak{B}$ и положим $b_\alpha = B_0 x_\alpha$ для всех $x_\alpha \in U$ (так как множество U континуально, мы имеем несчетное множество ограничений). Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B}(U, \{b_\alpha\}_\alpha) = \{B \in \mathfrak{B} : Bx_\alpha = b_\alpha \ \forall x_\alpha \in U\}.$$

Поскольку $b_\alpha = B_0 x_\alpha$, то $\mathfrak{B}(U, \{b_\alpha\}_\alpha)$ – множество всех банаховых пределов $B \in \mathfrak{B}$ таких, что $B|_U = B_0|_U$ для всех $x \in U$. По теореме 11 множество U является разделяющим, т. е. $\mathfrak{B}(U, \{b_\alpha\}_\alpha) = \{B_0\}$. Следовательно, и диаметр, и радиус множества $\mathfrak{B}(U, \{b_\alpha\}_\alpha)$ равны нулю.

§ 5. Крайние точки множества банаховых пределов

Настоящий параграф посвящен изучению множества $\text{ext } \mathfrak{B}$. В частности, обобщая результаты из работы [8], мы описываем орбиту элемента x (по отношению к $\text{ext } \mathfrak{B}$) для широкого класса последовательностей x и показываем, что мощность множества $\text{ext } \mathfrak{B}$ не меньше континуума.

Также, используя результаты этого параграфа, мы показываем, что $V := \{\chi_e : e \text{ – строгое множество Фёльнера}\}$ (см. § 3) не является разделяющим множеством, и даем более конструктивное описание “части” стабилизатора пространства ac_0 , введенного в работе [9] (см. также [22]). Мы будем использовать те же обозначения, что и в предыдущих параграфах.

Пусть W – множество всех последовательностей χ_e , где $e = \bigcup_{k=1}^\infty [n_{2k-1}, n_{2k})$ и $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k+j} - n_k}{j} = 0 \quad (12)$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$.

Если условие (12) выполнено для множества $e \subset \mathbb{N}$, то оно, очевидно, справедливо и для множества $se \subset \mathbb{N}$, где $se = \mathbb{N} \setminus e$ – дополнение множества e . Следовательно, $\chi_e \in W$ тогда и только тогда, когда $\chi_{se} \in W$.

Для любого $\chi_e \in W$ имеем

$$\max\{p(\chi_e), p(\chi_{se})\} = 1, \quad \min\{q(\chi_e), q(\chi_{se})\} = 0.$$

Непосредственно из определения множества W следует, что $V \subset W$. Далее, в качестве $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возьмем последовательность $\{2^i + 2^j : 0 \leq i < j\}$ чисел, упорядоченных по возрастанию, и положим $e = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{2k-1}, n_{2k}]$. Прямой подсчет показывает, что $\chi_e \in W$, но $\chi_e \notin V$. Таким образом, V является строгим подмножеством множества W . Первый пример множества e такого, что $\chi_e \in W \setminus V$, был построен С. В. Конягиным.

Заметим, что W содержит почти сходящиеся последовательности. Например, рассмотрим последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\{n_{k+1} - n_k\}_{k=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots, m, 1, \dots),$$

и положим $e = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{2k-1}, n_{2k}]$. Прямой подсчет показывает, что условие (12) выполнено, т. е. $\chi_e \in W$, но $\chi_e \in ac$, поскольку $q(\chi_e) = p(\chi_e) = 1$.

Однако если $x \in W \setminus ac$, то $p(x) = 1$ и $q(x) = 0$, т. е. $x \in U$. Таким образом,

$$V \subsetneq W \setminus ac \subsetneq U.$$

Следующая теорема показывает естественность возникновения множества W .

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, и пусть

$$e = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{2k-1}, n_{2k}].$$

Для любого банахова предела B такого, что $B\chi_e \neq 0$, определим функционал $B_e \in l_{\infty}^*$ по формуле

$$B_e x = \frac{B(x\chi_e)}{B\chi_e}, \quad x \in l_{\infty}.$$

ТЕОРЕМА 25. *Функционал B_e является банаховым пределом для любого $B \in \mathfrak{B}$ такого, что $B\chi_e \neq 0$, тогда и только тогда, когда $\chi_e \in W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $B_e \geq 0$ и $B_e \mathbf{1} = 1$. Следовательно, осталось доказать только, что B_e инвариантен относительно сдвига, т. е. $B_e(x - Tx) = 0$ для любого $x \in l_{\infty}$. Поскольку

$$B_e(x - Tx) = \frac{B((x - Tx)\chi_e)}{B\chi_e},$$

то $B_e(x - Tx) = 0$ тогда и только тогда, когда $B((x - Tx)\chi_e) = 0$ для всех $B \in \mathfrak{B}$ таких, что $B\chi_e \neq 0$. С другой стороны, если $B\chi_e = 0$, то $B((x - Tx)\chi_e) = 0$ для всех $x \in l_{\infty}$. Следовательно, инвариантность относительно сдвига функционала B_e эквивалентна тому, что $B((x - Tx)\chi_e) = 0$ для всех банаховых пределов B и всех $x \in l_{\infty}$. Последнее эквивалентно тому, что последовательность $(x - Tx)\chi_e$ почти сходится к нулю для всех $x \in l_{\infty}$, т. е. по теореме 3 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (x_i - x_{i+1})\chi_e = 0 \quad (13)$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, достаточно показать, что условие (12) эквивалентно условию (13). Предположим, что (13) выполнено. Тогда для любого $x \in l_\infty$ имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_{k+j} - n_k} \sum_{i=n_k}^{n_{k+j}} (x_i - x_{i+1}) \chi_e = 0 \quad (14)$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$. В частности, для $x = \chi_e$ получаем

$$\sum_{i=n_k}^{n_{k+j}} (x_i - x_{i+1}) \chi_e \geq \frac{j-1}{2}, \quad j \geq 1.$$

Из последнего неравенства и (14) вытекает равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{n_{k+j} - n_k} = 0$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$, что эквивалентно условию (12).

Пусть теперь (12) выполнено. Предположим что условие (13) неверно. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n > N$ такое, что

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_n+n} (x_i - x_{i+1}) \chi_e > n\varepsilon$$

для некоторой последовательности $\{m_n\}$. Выберем такие числа $k_0 < k_1 < \dots < k_j$, что

$$m_n + 1 \leq n_{k_0} < n_{k_1} < \dots < n_{k_j} \leq m_n + n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} n\varepsilon &< \left| \sum_{i=m_n+1}^{m_n+n} (x_i - x_{i+1}) \chi_e \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=m_n+1}^{n_{k_0}-1} (x_i - x_{i+1}) \right| + \sum_{r=0}^{j-1} \left| \sum_{i=n_{k_r}}^{n_{k_{r+1}}-1} (x_i - x_{i+1}) \right| + \left| \sum_{i=n_{k_j}}^{m_n+n} (x_i - x_{i+1}) \right| \\ &= |x_{m_n+1} - x_{n_{k_0}}| + \sum_{r=0}^{j-1} |x_{n_{k_r}} - x_{n_{k_{r+1}}}| + |x_{n_{k_j}} - x_{m_n+n+1}| \leq 2\|x\|_\infty (j+2). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили $n\varepsilon < 2\|x\|_\infty (j+2)$. По построению $k_0 + j \leq k_j$. Тогда

$$\frac{n_{k_0+j} - n_{k_0}}{j} \leq \frac{n_{k_j} - n_{k_0}}{j+2} \frac{j+2}{j} \leq \frac{n}{j+2} \frac{j+2}{j} \leq \frac{2\|x\|_\infty}{\varepsilon} \frac{j+2}{j} \leq \frac{6\|x\|_\infty}{\varepsilon},$$

что противоречит условию (12).

Полученное противоречие доказывает, что условие (12) эквивалентно условию (13) и $B_e \in \mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что для любого $x \in l_\infty$ множество $\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$ непусто. Очевидно, что оно также выпукло и компактно в слабой* топологии. По теореме Крейна–Мильмана оно совпадает со слабым* замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек. Следующая лемма описывает крайние точки множества $\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$.

ЛЕММА 26. *Для любого $x \in l_\infty$ справедливо равенство*

$$\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\} \cap \text{ext } \mathfrak{B} = \text{ext}\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение

$$\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\} \cap \text{ext } \mathfrak{B} \subseteq \text{ext}\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$$

очевидно. Пусть теперь $B_0 \in \text{ext}\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$ и $B_0 = \frac{B_1+B_2}{2}$ для некоторых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Поскольку $B(x) \leq p(x)$ для всех банаховых пределов B , то выполнено

$$p(x) = B_0x = \frac{B_1x + B_2x}{2} \leq p(x).$$

Следовательно, $B_1x = B_2x = p(x)$, и по предположению имеем $B_0 = B_1 = B_2$. Это означает, что $B_0 \in \text{ext } \mathfrak{B}$. В частности, $B_0 \in \{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\} \cap \text{ext } \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Следующая лемма сформулирована в работе [8, с. 11] (см. также [8, предложение 2.6]) без доказательства. Ради полноты изложения мы приведем доказательство более сильного результата.

ЛЕММА 27. *Для каждого $x \in l_\infty$ существуют $B_1, B_2 \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такие, что $B_1x = p(x)$ и $B_2x = q(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_1 \in \text{ext}\{B \in \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$. По лемме 26 имеем $B_1 \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $B_1x = p(x)$. Более того, также по лемме 26 для $y = -x \in l_\infty$ существует $B_2 \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такой, что $B_2y = p(y)$. В частности,

$$B_2x = B_2(-y) = -p(y) = -p(-x) = q(x).$$

Лемма доказана.

Далее в теореме 31 результат леммы 27 будет усилен. Нам понадобятся вспомогательные результаты.

Для фиксированного $x \in l_\infty$ обозначим через $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = \{Bx : B \in \text{ext } \mathfrak{B}\}$ орбиту элемента x по отношению к множеству $\text{ext } \mathfrak{B}$. Следующая теорема описывает множество $\mathfrak{B}_{\text{ext}}$ для некоторого класса ограниченных последовательностей.

ТЕОРЕМА 28. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $e_i \subset \mathbb{N}$ такие, что $\chi_{e_i} \in W$, $p(\chi_{e_i}) = 1$, $1 \leq i \leq n$, и $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^n e_i$, $e_i \cap e_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Если*

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{e_i},$$

то $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p(\chi_{e_i}) = 1$, по лемме 27 существуют $B_i \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такие, что $B_i(\chi_{e_i}) = 1$ для любого $1 \leq i \leq n$. Обозначим $se := \mathbb{N} \setminus e$. Тогда $B_i(\chi_{se_i}) = B_i(\mathbb{1} - \chi_{e_i}) = 1 - 1 = 0$. В частности, так как e_i дизъюнкты, $B_i(\chi_{e_j}) = 0$ для всех $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Следовательно, имеем

$$B_i x = B_i \left(\sum_{k=1}^n a_k \chi_{e_k} \right) = B_i(a_i \chi_{e_i}) = a_i$$

и $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathfrak{B}_{\text{ext}}(x)$.

Пусть теперь $a \neq a_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. Предположим противное, т. е. существует $B_0 \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такой, что $B_0 x = a$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^n B_0 \chi_{e_k} = B_0 \left(\sum_{k=1}^n \chi_{e_k} \right) = B_0 \mathbb{1} = 1,$$

то $I = \{i: 1 \leq i \leq n, B_0 \chi_{e_i} > 0\} \neq \emptyset$ и, более того, множество I содержит по крайней мере два элемента (в противном случае $B_0 x = a_i$ для некоторого $1 \leq i \leq n$).

Далее, для любого $y \in l_\infty$ имеем

$$B_0 y = B_0 \left(\sum_{i=1}^n y \chi_{e_i} \right) = \sum_{i=1}^n B_0(y \chi_{e_i}) = \sum_{i \in I} B_0(y \chi_{e_i}) = \sum_{i \in I} B_0 \chi_{e_i} \frac{B_0(y \chi_{e_i})}{B_0 \chi_{e_i}}.$$

Из теоремы 25 следует, что $\frac{B_0(\cdot \chi_{e_i})}{B_0 \chi_{e_i}} \in \mathfrak{B}$ для всех $i \in I$. Это означает, что (так как I содержит по крайней мере два элемента) B_0 представлен как выпуклая комбинация банаховых пределов. Это противоречит предположению $B_0 \in \text{ext } \mathfrak{B}$. Полученное противоречие доказывает вложение $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Теорема доказана.

Можно доказать, что конечность n в теореме 28 существенна.

В [8, предложение 2.4] доказано, что $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = \{0, 1\}$ для любого $x \in V$. Следующий результат описывает орбиту элемента $x \in W$ по отношению ко множеству $\text{ext } \mathfrak{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 29. Если $x \in W$, то

$$\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } p(x) = q(x) = 0, \\ \{1\} & \text{при } p(x) = q(x) = 1, \\ \{0, 1\} & \text{при } x \notin ac. \end{cases}$$

Более того, в отличие от классических результатов Лоренца [15] и Сачестона [16], описывающих орбиту $\mathfrak{B}(x)$ любого элемента $x \in l_\infty$ как замкнутый интервал в $\mathbb{R}$, в [8, теорема 4.4] показано, что для любого ограниченного замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}$ существует такой $x \in l_\infty$, что $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x) = A$. Однако пример 4.5 из [8] показывает, что орбита $\mathfrak{B}_{\text{ext}}(x)$ может быть и не замкнута.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Рассматривая элементы $x = (0, 1, 0, 1, \dots)$ и $Tx = (1, 0, 1, 0, \dots)$, мы видим, что $B(x \cdot Tx) \neq Bx B(Tx)$. Иными словами, B не является мульти-

пликативным функционалом на l_∞ . Как показывает следующая лемма, крайние точки множества банаховых пределов мультипликативны на W .

ЛЕММА 30. *Для любого $e \in \mathbb{N}$ такого, что $\chi_e \in W$, и любого $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ справедливо равенство*

$$B(x\chi_e) = Bx\chi_e \quad (15)$$

для всех $x \in l_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 29 для любых $\chi_e \in W$ и $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ имеем $B\chi_e = 0, 1$.

1. Пусть $B\chi_e = 0$. Тогда так как

$$-\|x\|_{l_\infty}\chi_e \leq x\chi_e \leq \|x\|_{l_\infty}\chi_e,$$

то $B(x\chi_e) = 0$.

2. Пусть $B\chi_e = 1$. Тогда $B\chi_{ce} = 0$. Поскольку (15) эквивалентно равенству

$$B(x\chi_{ce}) = Bx\chi_{ce},$$

результат следует из п. 1. Лемма доказана.

Другие результаты о мультипликативных свойствах банаховых пределов содержатся в [8], [22], [24] (см. также [23]).

Следующая теорема усиливает лемму 27.

ТЕОРЕМА 31. *Для любого $x \in l_\infty$ каждое из множеств $\{B \in \text{ext } \mathfrak{B} : Bx = p(x)\}$, $\{B \in \text{ext } \mathfrak{B} : Bx = q(x)\}$ содержит подмножество мощности континуума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что утверждение теоремы достаточно доказать для элемента $x + \|x\|$. Таким образом, можно предполагать, что $x \geq 0$ и $p(x) > 0$.

По определению функционала p (см. теорему 4) существует последовательность дизъюнктивных интервалов $I_n \subset \mathbb{N}$ таких, что $|I_n| \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} x_i = p(x).$$

Для любого $t \in \mathfrak{I}$ (множество всех двоично-иррациональных чисел интервала $(0, 1)$) существует единственная последовательность $i_j(t) = 0, 1$ такая, что

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} i_j(t) 2^{-j}.$$

Как и в лемме 13, рассмотрим новую последовательность $\{k_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$, определенную следующим образом: $k_1(t) = 2$ и $k_{j+1}(t) = 2k_j(t) - i_j(t)$ для любого $j \geq 1$. Далее, для каждого $t \in \mathfrak{I}$ положим

$$e(t) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{2k_j(t)}.$$

Тогда $\chi_{e(t)} \in V$. Для любого $t \in \mathcal{I}$ имеем $p(x\chi_{e(t)}) = p(x)$. Из леммы 27 следует, что существует функционал $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такой, что $B(x\chi_{e(t)}) = p(x)$. По лемме 30 имеем $B(x\chi_{e(t)}) = BxB\chi_{e(t)}$ и

$$p(x) = B(x\chi_{e(t)}) = BxB\chi_{e(t)} \leq p(x)p(\chi_{e(t)}) = p(x).$$

Следовательно, $Bx = p(x)$ и $B\chi_{e(t)} = 1$ для каждого $t \in \mathcal{I}$.

Таким образом, для любого $t \in \mathcal{I}$ существует $B_t \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такой, что $B_tx = p(x)$. Далее мы покажем, что $B_t \neq B_s$ для $t \neq s$.

В лемме 13 было показано, что множество $e(t) \cap e(s)$ конечно для любых $t, s \in \mathcal{I}$, $t \neq s$. Тогда для каждого $B \in \mathfrak{B}$ мы получаем

$$B \max\{\chi_{e(t)}, \chi_{e(s)}\} = B(\chi_{e(t)} + \chi_{e(s)}) = B\chi_{e(t)} + B\chi_{e(s)}.$$

Поскольку $B_t\chi_{e(t)} = 1$, то $B_t\chi_{e(s)} = 0$ для всех $s \neq t$. Следовательно, $B_t \neq B_s$ для $t \neq s$. Так как множество двоично-иррациональных чисел континуально, то и построенное множество банаховых пределов континуально.

Далее, для любого $x \in l_\infty$ имеем $q(x) = -p(-x)$. Тогда

$$\{B \in \text{ext } \mathfrak{B} : Bx = q(x)\} = \{B \in \text{ext } \mathfrak{B} : B(-x) = p(-x)\}$$

и результат следует из первой части доказательства. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 32. *Мощность множества $\text{ext } \mathfrak{B}$ не меньше континуума.*

По теореме Крейна–Мильмана $\mathfrak{B}$ совпадает со слабым* замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек. Следующий результат показывает, что даже если исключить счетное число крайних точек, то слабое* замыкание выпуклой оболочки получившегося множества по-прежнему дает все $\mathfrak{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 33. *Для любой последовательности $B_k \in \text{ext } \mathfrak{B}$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо равенство*

$$\overline{\text{conv}\left\{\text{ext } \mathfrak{B} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\}} = \mathfrak{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. существует банахов предел

$$B_0 \notin \overline{\text{conv}\left\{\text{ext } \mathfrak{B} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\}}.$$

Тогда, применяя теорему отделимости [18, теорема 3.4], получаем, что существуют $f \in l_\infty^{**}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$f(B_0) < \alpha \leq f\left(\overline{\text{conv}\left\{\text{ext } \mathfrak{B} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\}}\right).$$

Однако любой непрерывный функционал на пространстве l_∞^* , снабженном слабой* топологией, порожден элементом $x \in l_\infty$. Следовательно, теорема

отделимости запишется в следующем виде: существуют $x \in l_\infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$B_0x < \alpha \leq Bx$$

для любого $B \in \overline{\text{conv}\{\text{ext } \mathfrak{B} \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\}}$.

По теореме 31 множество $\{B \in \text{ext } \mathfrak{B} : Bx = q(x)\}$ содержит подмножество мощности континуума. Следовательно, существует $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ такой, что $B \neq B_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $Bx = q(x)$. Таким образом,

$$q(x) \leq B_0x < \alpha \leq Bx = q(x).$$

Полученное противоречие доказывает следствие.

Теперь, используя полученные результаты, мы дадим дополнительное описание множества W и также докажем, что множество W (и, следовательно, множество V характеристических функций всех строгих множеств Фёльнера) не является разделяющим множеством.

Рассмотрим множество

$$\text{St}(ac_0) := \{z \in l_\infty : zx \in ac_0 \ \forall x \in ac_0\}.$$

В статье [9] данное множество называлось стабилизатором множества ac_0 (см. также [22]).

Следующая теорема 35 выявляет неожиданную связь между стабилизатором множества ac_0 и множеством W . Нам понадобится следующий результат, доказанный в работе [22, с. 623–624]. Для полноты изложения мы приведем короткое доказательство в частном случае.

ЛЕММА 34. *Для любого $0 \leq z \in \text{St}(ac_0)$ и любого $B \in \mathfrak{B}$ такого, что $B(z) \neq 0$, функционал*

$$l_{B,z}(x) = \frac{B(zx)}{B(z)}, \quad x \in l_\infty,$$

является банаховым пределом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению имеем $l_{B,z} \geq 0$ и $l_{B,z}(\mathbb{1}) = 1$. Далее, по определению множества $\text{St}(ac_0)$ имеем $zx \in ac_0$ для каждого $x \in ac_0$. Следовательно, $B(zx) = 0$ и $l_{B,z} = 0$ на ac_0 .

Поскольку $x - Tx \in ac_0$, то $l_{B,z}(x - Tx) = 0$ для любых $x \in l_\infty$ и $l_{B,z} \in \mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА 35. *Имеем $W = (\text{St}(ac_0) \cap \{0, 1\}^\mathbb{N}) \setminus \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $z \in (\text{St}(ac_0) \cap \{0, 1\}^\mathbb{N}) \setminus \{0\}$. По лемме 34 для любого $B \in \mathfrak{B}$ такого, что $B(z) \neq 0$, функционал $l_{B,z}$ – банахов предел. С другой стороны, по теореме 25 для $z \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ функционал $l_{B,z}$ – банахов предел тогда и только тогда, когда $z \in W$. Таким образом, $z \in W$.

2. Пусть $z \in W$. По лемме 30 для любых $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $x \in l_\infty$ справедливо равенство

$$B(zx) = BzBx.$$

В частности, для любых $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $x \in ac_0$ мы получаем $B(zx) = 0$.

Поскольку по теореме Крейна–Мильмана $\mathfrak{B} = \overline{\text{conv}(\text{ext } \mathfrak{B})}$ (замыкание берется в слабой* топологии), то $B(zx) = 0$ для всех $B \in \mathfrak{B}$ и $x \in ac_0$. Таким образом, $zx \in ac_0$ при условии, что $x \in ac_0$, т. е. $z \in \text{St}(ac_0)$. Теорема доказана.

Следующий результат был доказан в работе [22, с. 625]. Мы приведем короткое и более простое доказательство.

ТЕОРЕМА 36. *Множество $\text{St}(ac_0)$ не является разделяющим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [22, утверждение 2.3] следует, что для любых $B \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $x \in \text{St}(ac_0)$ справедливо равенство

$$B(|x - Bx \cdot \mathbb{1}|) = 0.$$

По теореме Талагранна [12] (см. также [8], [10]) множество $\text{ext } \mathfrak{B}$ не является слабо* замкнутым. Таким образом, существуют сеть $B_\alpha \in \text{ext } \mathfrak{B}$ и $B \in \mathfrak{B} \setminus \text{ext } \mathfrak{B}$ такие, что

$$B_\alpha \xrightarrow{w^*} B.$$

Поскольку $B_\alpha(|x - B_\alpha x \cdot \mathbb{1}|) = 0$ для любого α и $x \in \text{St}(ac_0)$, то

$$B(|x - Bx \cdot \mathbb{1}|) = 0 \quad \forall x \in \text{St}(ac_0).$$

Так как $B \notin \text{ext } \mathfrak{B}$, то

$$B = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

для некоторых различных $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда $B_1(|x - Bx \cdot \mathbb{1}|) = 0$ для всех $x \in \text{St}(ac_0)$. Поскольку $-|y| \leq y \leq |y|$, то $B_1(x - Bx \cdot \mathbb{1}) = 0$ для всех $x \in \text{St}(ac_0)$, т. е.

$$B_1 x = Bx \quad \forall x \in \text{St}(ac_0).$$

Аналогично,

$$B_2 x = Bx \quad \forall x \in \text{St}(ac_0).$$

Следовательно, $B_1 = B_2$ на $\text{St}(ac_0)$, однако $B_1 \neq B_2$. Теорема доказана.

Следующий результат является прямым следствием вложений $V \subset W \subset \text{St}(ac_0)$, установленных в теореме 35 и в начале настоящего параграфа.

СЛЕДСТВИЕ 37. *Множества V и W не являются разделяющими.*

Список литературы

1. С. Банах, *Теория линейных операций*, РХД, М.–Ижевск, 2001; пер. с фр.: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Jacques Gabay, Sceaux, 1993.
2. П. Г. Доддс, Б. де Партер, А. А. Седаев, Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, “Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 111–136; англ. пер.: P. G. Dodds, B. de Pagter, A. A. Sedaev, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Singular symmetric functionals and Banach limits with additional invariance properties”, *Izv. Math.*, **67**:6 (2003), 1187–1212.

3. E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Invariant Banach limits and applications”, *J. Funct. Anal.*, **259**:6 (2010), 1517–1541.
4. Y. Peres, “Application of Banach limits to the study of sets of integers”, *Israel J. Math.*, **62**:1 (1988), 17–31.
5. А. Кэри, Ф. Сукочев, “Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии”, *УМН*, **61**:6 (2006), 45–110; англ. пер.: A. L. Carey, F. A. Sukochev, “Dixmier traces and some applications in non-commutative geometry”, *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1039–1099.
6. Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, “Характеристические функции банаховых пределов”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 904–910; англ. пер.: E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Characteristic functions of Banach limits”, *Siberian Math. J.*, **51**:4 (2010), 723–727.
7. D. H. Fremlin, M. Talagrand, “A decomposition theorem for additive set-functions, with applications to Pettis integrals and ergodic means”, *Math. Z.*, **168**:2 (1979), 117–142.
8. G. Keller, L. C. Moore, Jr., “Invariant means on the group of integers”, *Analysis and geometry*, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1992, 1–18.
9. W. A. J. Luxemburg, “Nonstandard hulls, generalized limits and almost convergence”, *Analysis and geometry*, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1992, 19–45.
10. R. Nilsen, “Nets of extreme Banach limits”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **55**:2 (1976), 347–352.
11. E. Semenov, F. Sukochev, “Extreme points of the set of Banach limits”, *Positivity*, **17**:1 (2013), 163–170.
12. M. Talagrand, “Géométrie des simplexes de moyennes invariantes”, *J. Funct. Anal.*, **34**:2 (1979), 304–337.
13. C. Chou, “Minimal sets and ergodic measures for $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ”, *Illinois J. Math.*, **13**:4 (1969), 777–788.
14. Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев, “Структурные свойства множества банаховых пределов”, *Докл. РАН*, **84**:3 (2011), 802–803; англ. пер.: E. M. Semenov, F. A. Sukochev, A. S. Usachev, “Structure properties of the Banach limit set”, *Dokl. Math.*, **84**:3 (2011), 802–803.
15. G. G. Lorentz, “A contribution to the theory of divergent sequences”, *Acta Math.*, **80** (1948), 167–190.
16. L. Sucheston, “Banach limits”, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 308–311.
17. Е. М. Семенов, А. С. Усачев, “Коэффициенты Фурье–Хаара и банаховы пределы”, *Докл. РАН*, **425**:2 (2009), 172–173; англ. пер.: E. M. Semenov, A. S. Usachev, “Fourier–Haar coefficients and Banach limits”, *Dokl. Math.*, **79**:2 (2009), 191–192.
18. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
19. N. Kalton, F. Sukochev, “Rearrangement-invariant functionals with applications to traces on symmetrically normed ideals”, *Canad. Math. Bull.*, **51**:1 (2008), 67–80.
20. Е. М. Семенов, А. С. Усачев, О. О. Хорпяков, “Пространство почти сходящихся последовательностей”, *Докл. РАН*, **409**:6 (2006), 754–755; англ. пер.: E. M. Semenov, A. S. Usachev, O. O. Khorpyakov, “The space of almost convergent sequences”, *Dokl. Math.*, **74**:1 (2006), 587–588.
21. Ф. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, London, 1969.
22. E. Alekhno, “Superposition operator on the space of sequences almost converging to zero”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:2 (2012), 619–645.

23. J. Appell, E. De Pascale, P. P. Zabrejko, “Some remarks on Banach limits”, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **42**:1 (1994), 273–278.
24. F. Balibrea, G. Vera, “On the sublinear functional associated to a family of invariant means”, *Manuscripta Math.*, **55**:1 (1986), 101–109.

ЕВГЕНИЙ МИХАЙЛОВИЧ СЕМЁНОВ

(EVGENII M. SEMENOV)

E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

Поступило в редакцию

16.01.2013

ФЕДОР АНАТОЛЬЕВИЧ СУКОЧЕВ

(FEDOR A. SUKOCHEV)

University of New South Wales, Sydney, Australia

E-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ УСАЧЕВ

(ALEKSANDR S. USACHEV)

University of New South Wales, Sydney, Australia

E-mail: a.usachev@unsw.edu.au