Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, Оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 полиномами и частными суммами рядов по системам Хаара и Фабера–Шaudера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 45–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:12:30

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов

Оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 полиномами и частными суммами рядов по системам Хаара и Фабера–Шаудера

Найдены точные оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 полиномами, построенными по системе Хаара и частными суммами рядов Фабера–Шаудера в метриках пространств L_p . Получены оценки погрешностей приближения функций $f \in L_p^1$, выраженные через нормы первых производных $\|f^{(1)}\|_{L_p}$ и $\|f^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_p}$ и являющиеся неулучшаемыми для некоторых n .

Библиография: 37 наименований.

Ключевые слова: система функций Хаара, система функций Фабера–Шаудера, наилучшее приближение функций полиномами, односторонняя аппроксимация функций полиномами.

DOI: 10.4213/im8094

§ 1. Введение

В работе изучаются вопросы приближения функций из классов L_p^1 полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов Фабера–Шаудера.

Система функций Хаара, введенная в 1909 г. в работе [1], является ортонормированной на $[0, 1]$. Свойства этой системы функций в разное время изучались П. Л. Ульяновым, Б. И. Голубовым, Г. Г. Ониани, В. Ш. Цагарейшвили, Г. А. Чхаидзе, Т. С. Копалиани, В. М. Бугадзе, И. И. Шарапудиновым и многими другими (см., например, [2]–[15]).

На сегодняшний день известно большое количество работ, посвященных решению задач теории аппроксимации функций одной и нескольких переменных полиномами, построенными по системе Хаара, и частными суммами рядов Фурье–Хаара. Некоторые результаты по этой тематике имеются в работах Б. И. Голубова [10] и Л. В. Жижиашвили [11]. Отметим, что все известные авторам окончательные результаты получены на классах непрерывных функций одной и нескольких переменных и на классах функций ограниченной вариации. Например, в работах Н. П. Хорошко [12], [13], П. В. Задерея и Н. Н. Задерей [14], С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [15] на классах непрерывных функций в равномерной и интегральной метриках получены точные оценки погрешностей приближения полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов Фурье–Хаара. В работах Н. П. Хорошко [12], С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [16] получены точные оценки наилучшего приближения полиномами по системе Хаара функций ограниченной вариации в интегральной метрике. Однако авторам неизвестны работы, в которых бы изучались вопросы приближения дифференцируемых функций полиномами по системе Хаара.

В § 2 и § 3 данной статьи приведены определения, необходимые обозначения и получен ряд вспомогательных утверждений. В § 4 найдены оценки величин $E_n(f)_{L_p}$ – наилучших приближений функций f из классов L_p^1 , $1 \leq p < \infty$, полиномами n -го порядка, построенными по системе Хаара, в метриках пространств L_p . Из доказанных результатов вытекают неулучшаемые для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и любого $1 \leq p \leq \infty$ оценки величин $E_n(f)_{L_p}$, выраженные через норму первой производной $\|f^{(1)}\|_{L_p}$ и являющиеся своеобразным аналогом одного известного результата для тригонометрической системы функций (см., например, [17, с. 162])

$$e_{n-1}(f)_{L_p([0,2\pi])} \leq K_r n^{-r} \|f^{(r)}\|_{L_p([0,2\pi])}, \quad r, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1.1)$$

где $e_{n-1}(f)_{L_p([0,2\pi])}$ – величина наилучшего приближения 2π -периодической функции $f \in L_p^r([0,2\pi])$ подпространством тригонометрических полиномов порядка $n - 1$ в метрике пространств $L_p([0,2\pi])$, а K_r – константы Фавара. Неравенство (1.1) является неулучшаемым при $p = 1, \infty$. Также имеет место следующее утверждение [17, с. 162]: *для любой 2π -периодической функции $f \in L_p^r([0,2\pi])$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливо неравенство*

$$e_{n-1}(f)_{L_p([0,2\pi])} \leq K_r n^{-r} e_{n-1}(f^{(r)})_{L_p([0,2\pi])}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

которое неулучшаемо при $p = 1$ и $p = \infty$.

Исследования, связанные с наилучшим односторонним приближением функций, были начаты в работах Г. Фрейда [18] и Т. Ганелиуса [19]. Проблемой односторонних приближений тригонометрическими, алгебраическими полиномами и сплайнами в разное время занимались многие математики. Некоторые из полученных в этом направлении результатов содержатся в монографии Н. П. Корнейчука, А. А. Лигуна и В. П. Доронина [20]. Ряд окончательных результатов для величин наилучших односторонних приближений полиномами по системе Хаара был получен в работах авторов [21]–[22] на классах непрерывных функций и функций ограниченной вариации.

В § 5 изучаются вопросы получения точных оценок величин наилучших односторонних приближений дифференцируемых функций из классов L_p^1 , $1 \leq p \leq \infty$, полиномами n -го порядка, построенными по системе Хаара.

Система функций Фабера–Шаудера, определяемая с помощью системы функций Хаара, была введена в 1910 г. в работе [23] и стала первым примером базиса в пространстве функций, непрерывных на $[0, 1]$. Аппроксимативные свойства системы Фабера–Шаудера исследовали, например, З. Чисельский [24], [25], В. А. Матвеев [26], А. С. Логинов [27]. В их работах были получены оценки сверху погрешностей приближения непрерывных на $[0, 1]$ функций f частными суммами рядов Фабера–Шаудера $\bar{S}_n(f)$ в равномерной метрике, выраженные через модули непрерывности первого и второго порядков. Точные оценки погрешностей приближения частными суммами рядов Фабера–Шаудера на некоторых классах дифференцируемых функций, заданных модулем непрерывности, в равномерной и интегральной метриках были получены в работе авторов [28].

В § 6 найдены точные оценки погрешностей приближения дифференцируемых функций $f \in L_p^1$, где $1 \leq p < \infty$, частными суммами их рядов Фабера–Шаудера $\bar{S}_n(f)$ в метриках пространств L_p . Из полученных результатов вытекает неулучшаемая при определенных условиях оценка сверху величины $\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_p}$, $1 \leq p \leq \infty$, через норму $\|f^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_p}$, являющаяся, в некотором смысле, распространением неравенства (1.2) на систему функций Фабера–Шаудера.

§ 2. Определения и необходимые обозначения

Пусть $C \equiv C([0, 1])$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций f с нормой $\|f\|_C \stackrel{\text{df}}{=} \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$, а $L_p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$, – пространство измеримых и суммируемых с p -й степенью на отрезке $[a, b]$ функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p([a, b])} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Через $L_\infty([a, b])$ обозначим пространство измеримых и существенно ограниченных на $[a, b]$ функций f с нормой

$$\|f\|_{L_\infty([a, b])} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Рассмотрим множество $L_p^r([a, b])$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, определенных на отрезке $[a, b]$ функций f , у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} \equiv f$) абсолютно непрерывны на $[a, b]$, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_p([a, b])$. Полагаем далее $L_p^r \equiv L_p^r([0, 1])$, $L_p \equiv L_p([0, 1])$.

На отрезке $[0, 1]$ введем двоичные интервалы

$$\delta_m^k = \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad k = \overline{1, 2^m}.$$

Система функций Хаара определяется на отрезке $[0, 1]$ следующим образом (см., например, [29]): $\chi_1(x) \equiv \chi_0^{(0)}(x) \equiv 1$, а для любого $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$,

$$\chi_n(x) \equiv \chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2k-1}, \\ -2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2k}, \\ 0, & \text{если } x \notin \overline{\delta_m^k}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ – замыкание множества $\mathcal{M}$. В точках разрыва функции Хаара равны полусумме пределов справа и слева. На концах отрезка $[0, 1]$ они равны своим предельным значениям изнутри отрезка.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – подпространство, состоящее из множества полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_k(x), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n},$$

построенных по первым n функциям системы Хаара. Для произвольной функции f , принадлежащей некоторому пространству X , где X есть L_p , $1 \leq p < \infty$, L_∞ или C , через

$$E_n(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf \{ \|f - P_n\|_X : P_n \in \mathcal{P}_n \}, \quad n \in \mathbb{N},$$

обозначаем величину ее наилучшего приближения в метрике пространства X подпространством полиномов порядка n , построенных по системе Хаара.

Сопоставим функции f из некоторого пространства X следующие подмножества полиномов (см., например, [17, с. 33]):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^+ &= \{ P_n \in \mathcal{P}_n : P_n(t) \leq f(t), 0 \leq t \leq 1 \}, \\ \mathcal{P}_n^- &= \{ P_n \in \mathcal{P}_n : P_n(t) \geq f(t), 0 \leq t \leq 1 \}, \end{aligned}$$

где неравенства понимаются в смысле почти всюду. Величина

$$\widehat{E}_n^+(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf \{ \|f - P_n\|_X : P_n \in \mathcal{P}_n^+ \} \quad (\widehat{E}_n^-(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf \{ \|f - P_n\|_X : P_n \in \mathcal{P}_n^- \})$$

называется наилучшим односторонним приближением снизу (сверху) функции $f \in X$ в метрике пространства X подмножеством полиномов $\mathcal{P}_n^+$ ($\mathcal{P}_n^-$) порядка n . Исходя из [18], также введем в рассмотрение величину

$$\widetilde{E}_n(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf \{ \|P_n - p_n\|_X : P_n \in \mathcal{P}_n^-, p_n \in \mathcal{P}_n^+ \}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для измеримой на отрезке $[0, 1]$ функции f частную сумму ее ряда Фурье–Хаара обозначим через

$$S_n(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^n c_k(f) \chi_k(x),$$

где $c_k(f) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^1 f(x) \chi_k(x) dx$, $k = \overline{1, n}$, – коэффициенты Фурье–Хаара функции f .

Используя систему функций Хаара, в 1910 г. Фабер [23] ввел в рассмотрение систему функций $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где

$$\psi_0(x) \equiv 1, \quad \psi_n(x) = \int_0^x \chi_n(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.2)$$

В [23] было показано, что произвольную функцию $f \in C$ можно представить в виде равномерно сходящегося на отрезке $[0, 1]$ ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \psi_k(x), \quad (2.3)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0(f) \stackrel{\text{df}}{=} f(0), \quad a_k(f) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^1 \chi_k(x) df(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Интеграл в (2.4) понимают в смысле Лебега–Стилтьеса. В 1927 г. результат вида (2.3) о равномерном разложении функции $f \in C$ в ряд был передоказан

Шаудером [30] с использованием функций $\{\tilde{\psi}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, отличающихся от соответствующих функций $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ лишь постоянными множителями. Через

$$\overline{S}_n(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^n a_k(f) \psi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

обозначим частную сумму n -го порядка ($n \in \mathbb{N}$) разложения (2.3).

Введем также следующие обозначения: $h \stackrel{\text{df}}{=} 2^{-(m+1)}$,

$$n' \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 2^m, & \text{если } n = 2^m + k, \ m \in \mathbb{N}, \ k = \overline{1, 2^m - 1}, \\ 2^{m+1}, & \text{если } n = 2^{m+1}, \ m \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \quad (2.6)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 3.1. Пусть $f \in L_1^1([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) = 0$. Тогда верно неравенство

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \int_a^b |f^{(1)}(x)| dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in L_1^1([a, b]) \subset C([a, b])$, то найдется такая точка $x_1 \in [a, b]$, что $|f(x_1)| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &\leq |f(x_1)|(b-a) = |f(x_1) - f(x_0)|(b-a) \\ &\leq (b-a) \text{Var } f|_a^b = (b-a) \int_a^b |f^{(1)}(x)| dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\varkappa_p \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } p = 1 \text{ или } p = \infty, \\ \frac{p \sin(\pi/p)}{\pi(p-1)^{1/p}}, & \text{если } 1 < p < \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.2 (В. И. Левин [31, § 3]). Пусть $p > 1$, $g \in L_p^1([0, 1])$, $g(0) = 0$, $g^{(1)}(x) \geq 0$ почти всюду на $(0, 1)$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_0^1 (g(x))^p dx \leq \varkappa_p^p \int_0^1 (g^{(1)}(x))^p dx. \quad (3.3)$$

Равенство в (3.3) достигается только на функциях вида $g = C\varphi_p$, где C – константа, а функция φ_p определена посредством интеграла

$$\frac{\pi x}{p \sin(\pi/p)} = \int_0^{\varphi_p(x)} (1-t^p)^{-1/p} dt. \quad (3.4)$$

Из леммы 3.2 мы выведем более общее утверждение, сняв условие знакопостоянства производной $g^{(1)}(x)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, функция $f \in L_p^1([a, b])$ равна нулю в одном из концов отрезка $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p([a, b])} \leq \varkappa_p(b-a) \|f^{(1)}\|_{L_p([a, b])}. \quad (3.5)$$

Равенство в (3.5) при $p \in (1, \infty)$ достигается только на функциях вида $f(x) = C\varphi_p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, если $f(a) = 0$, и на функциях $f(x) = C\varphi_p\left(\frac{b-x}{b-a}\right)$, если $f(b) = 0$. При $p = \infty$ равенство достигается только на функциях $f(x) = C(x-a)$, если $f(a) = 0$, и на функциях $f(x) = C(b-x)$, если $f(b) = 0$. (Всюду здесь C – константа, а функция φ_p определена в (3.4).) При $p = 1$ равенство в (3.5) достигается только на функции $f(x) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p = 1$ неравенство (3.5) доказано в лемме 3.1. Оно обращается в равенство, только если $\int_a^b |f(x)| dx = |f(x_1)|(b-a) = \|f\|_{L_\infty([a, b])}(b-a)$. Для этого требуется постоянство $|f(x)|$ почти всюду, а так как f непрерывна и обращается в нуль в одном из концов отрезка $[a, b]$, это возможно, лишь если $f(x) \equiv 0$. В случае $p = \infty$ согласно (3.1) имеем

$$\|f\|_{L_\infty([a, b])} = |f(x_1)| \leq \|f^{(1)}\|_{L_1([a, b])} \leq (b-a) \|f^{(1)}\|_{L_\infty([a, b])}, \quad (3.6)$$

что и требовалось доказать. Для того чтобы первое неравенство в (3.6) обращалось в равенство, необходимо, чтобы функция f была монотонной, а для обращения в равенство второго неравенства необходимо постоянство почти всюду $|f^{(1)}(x)|$. Такая функция может быть только линейной.

Далее $p \in (1, \infty)$. Разберем сначала случай $f(a) = 0$. Рассмотрим функцию

$$g(y) = \int_a^{a+y(b-a)} |f^{(1)}(x)| dx, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Она абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и неотрицательна,

$$g(0) = 0, \quad g^{(1)}(y) = (b-a) |f^{(1)}(a+y(b-a))| \geq 0 \quad (3.7)$$

при почти всех $y \in (0, 1)$. По лемме 3.2 (она применима к функции g вследствие соотношений (3.7)) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g(y))^p dy &\leq \varkappa_p^p \int_0^1 (g^{(1)}(y))^p dy = \varkappa_p^p (b-a)^p \int_0^1 |f^{(1)}(a+y(b-a))|^p dy \\ &= \varkappa_p^p (b-a)^{p-1} \int_a^b |f^{(1)}(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценим сверху $|f(x)|$ через $|g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)|$. Согласно формуле Ньютона–Лейбница и (3.7) верно соотношение

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f^{(1)}(t) dt, \quad |f^{(1)}(t)| = \frac{1}{b-a} g^{(1)}\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^x f^{(1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^x g^{(1)}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \\ \int_a^b |f(x)|^p dx &\leq \int_a^b \left(g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)^p dx = (b-a) \int_0^1 (g(y))^p dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) получаем неравенство (3.5). Случай, когда $f(b) = 0$, сводится к рассмотренному. Полагаем $f_1(x) = f(a + b - x)$, $a \leq x \leq b$. Из определения этой функции, осуществив замену переменной $t = a + b - x$, находим

$$\int_a^b |f_1(x)|^p dx = \int_a^b |f(t)|^p dt, \quad \int_a^b |f_1^{(1)}(x)|^p dx = \int_a^b |f^{(1)}(t)|^p dt.$$

Применив к функции f_1 уже доказанное для функций, обращающихся в нуль в точке a , неравенство (3.5), получим неравенство (3.5) для функций, обращающихся в нуль в точке b .

Из соотношений (3.7), (3.8) видно, что для достижимости равенства в неравенстве (3.5) необходимо и достаточно, чтобы функция f была монотонной и выполнялось бы равенство $\int_0^1 (g(y))^p dy = \varkappa_p \int_0^1 (g^{(1)}(y))^p dy$. Тогда согласно лемме 3.2 имеем $g(y) = C\varphi_p(y)$, а из (3.7) и условия $f(a) = 0$ находим $f(x) = C\varphi_p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. При переходе к случаю $f(b) = 0$ необходимо заменить x на $a + b - x$, и мы получаем, что равенство в (3.6) достигается только на функциях $f(x) = C\varphi_p\left(\frac{b-x}{b-a}\right)$. Лемма полностью доказана.

§ 4. Наилучшее приближение функций полиномами по системе Хаара

Введем следующее обозначение:

$$\Delta(X_n(f)_{L_p}) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{X_n(f)_{L_p}}{\left\{ \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}}, \quad (4.1)$$

где $X_n(f)_{L_p}$ есть $E_n(f)_{L_p}$, либо $\widehat{E}_n^\pm(f)_{L_p}$, либо $\widetilde{E}_n(f)_{L_p}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Для любого $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq p < \infty$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(E_n(f)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+2}} \varkappa_p. \quad (4.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Для произвольных функций f из класса L_p^1 , $1 \leq p \leq \infty$, и натурального числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливо неравенство

$$E_n(f)_{L_p} \leq \frac{1}{2n'} \varkappa_p \|f^{(1)}\|_{L_p}. \quad (4.3)$$

Данное неравенство является неумлучшаемым для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, при $1 \leq p < \infty$ и для любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ при $p = \infty$ в том смысле, что существуют функции $f \neq \text{const}$ из класса L_p^1 , для которых неравенство (4.3) превращается в равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Учитывая результаты теоремы 4.1, следствия 4.1, а также используя неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_{L_p} \leq 2E_n(f)_{L_p}$$

(см., например, [2, с. 389]), можно получить для $1 \leq p \leq \infty$ оценку сверху величины $\|f - S_n(f)\|_{L_p}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\sup_{\substack{f \in L^1_\infty \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - S_n(f)\|_C}{\|f^{(1)}\|_{L_\infty}} = \frac{1}{2n'}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Известно [32, с. 142], что полином по системе Хаара порядка $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, $m \in \mathbb{N}$, совпадает с некоторой функцией, постоянной на интервалах δ_{m+1}^i , $i = \overline{1, 2k}$, и δ_m^j , $j = \overline{k+1, 2^m}$, а при $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, — с функцией, постоянной на δ_{m+1}^i , $i = \overline{1, 2^{m+1}}$. Во внутренних точках разрыва полиномы Хаара равны полусумме пределов справа и слева и непрерывны на концах отрезка $[0, 1]$. Тогда для произвольной функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p < \infty$ ($f \neq \text{const}$), имеем

$$E_n^p(f)_{L_p} = \sum_{i=1}^{2k} \inf_{c_i \in \mathbb{R}} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(x) - c_i|^p dx + \sum_{j=k+1}^{2^m} \inf_{d_j \in \mathbb{R}} \int_{\delta_m^j} |f(x) - d_j|^p dx. \quad (4.5)$$

Зафиксируем отрезок $\overline{\delta_{m+1}^i} = [(i-1)h, ih]$ и запишем

$$\begin{aligned} \inf_{c_i \in \mathbb{R}} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(x) - c_i|^p dx &\leq \int_{(i-1)h}^{(i-\frac{1}{2})h} \left| f(x) - f\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) \right|^p dx \\ &\quad + \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{ih} \left| f(x) - f\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) \right|^p dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть

$$G(f; a, b; x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) - f\left(a + \frac{b-a}{2}\right), \quad a \leq x \leq b.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $G(f; (i-1)h, ih) \in L_p^1([(i-1)h, ih])$. На отрезках $[(i-1)h, (i-\frac{1}{2})h]$ и $[(i-\frac{1}{2})h, ih]$ она удовлетворяет условиям леммы 3.3. Тогда, применяя указанную лемму, для любого $i = \overline{1, 2k}$ из неравенства (4.6) получаем

$$\begin{aligned} \inf_{c_i \in \mathbb{R}} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(x) - c_i|^p dx &\leq \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \int_{(i-1)h}^{(i-\frac{1}{2})h} |f^{(1)}(x)|^p dx \\ &\quad + \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{ih} |f^{(1)}(x)|^p dx = \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \int_{\delta_{m+1}^i} |f^{(1)}(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя на множествах δ_m^j , $j = \overline{k+1, 2^m}$, рассуждения, аналогичные проведенным выше, получаем

$$\inf_{d_j \in \mathbb{R}} \int_{\delta_m^j} |f(x) - d_j|^p dx \leq (h\kappa_p)^p \int_{\delta_m^j} |f^{(1)}(x)|^p dx. \quad (4.8)$$

Тогда из соотношений (4.5) и (4.7), (4.8) следует оценка сверху величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_n^p(f)_{L_p} \leq \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \left\{ \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x)|^p dx \right\}.$$

Из последнего неравенства и формулы (4.1) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(E_n(f)_{L_p}) \leq \frac{1}{2^{m+2}} \varkappa_p. \quad (4.9)$$

Перейдем к получению оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (4.9). Пусть сначала $p = 1$. Для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon \in L_1^1$, определенную равенствами

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (-1)^{i+1} \widehat{f}_\varepsilon((i-1)h, ih; x), & \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, i = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{j+1-k} \widehat{f}_\varepsilon(2(j-1)h, 2jh; x), & \text{если } 2(j-1)h \leq x \leq 2jh, \\ & j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (4.10)$$

где

$$\widehat{f}_\varepsilon(a, b; x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } a \leq x \leq a + \frac{b-a}{2}(1-\varepsilon), \\ \frac{x-a}{(b-a)\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{если } a + \frac{b-a}{2}(1-\varepsilon) \leq x \leq a + \frac{b-a}{2}(1+\varepsilon), \\ \frac{1}{2}, & \text{если } a + \frac{b-a}{2}(1+\varepsilon) \leq x \leq b. \end{cases} \quad (4.11)$$

Используя определение (4.10), (4.11) функции f_ε , нетрудно убедиться в том, что для любых $i = \overline{1, 2k}$ и $j = \overline{k+1, 2^m}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} |f_\varepsilon(x)| dx &= \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), & \int_{\delta_m^j} |f_\varepsilon(x)| dx &= h \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \int_{\delta_{m+1}^i} |f_\varepsilon^{(1)}(x)| dx &= \int_{\delta_m^j} |f_\varepsilon^{(1)}(x)| dx = 1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Покажем, что $\widetilde{p}_n(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$, является полиномом наилучшего приближения n -го порядка функции f_ε в метрике пространства L_1 . Для этого, учитывая приведенный в [33, с. 55] критерий элемента наилучшего приближения в пространстве L_1 , достаточно для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, построенного по системе Хаара, доказать справедливость равенства

$$\int_0^1 p_n(x) \text{sign}[f_\varepsilon(x) - \widetilde{p}_n(x)] dx = 0. \quad (4.13)$$

Из соотношений (4.10), (4.11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} \text{sign}[f_\varepsilon(x) - \widetilde{p}_n(x)] dx &= 0, & i &= \overline{1, 2k}, \\ \int_{\delta_m^j} \text{sign}[f_\varepsilon(x) - \widetilde{p}_n(x)] dx &= 0, & j &= \overline{k+1, 2^m}. \end{aligned}$$

Поскольку любой полином порядка $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, построенный по системе Хаара, постоянен на интервалах вида δ_{m+1}^i , $i = \overline{1, 2k}$, и δ_m^j ,

$j = \overline{k+1, 2^m}$ [32, с. 142], то последние два равенства фактически означают выполнение соотношения (4.13).

Учитывая формулы (4.5) и (4.12), несложно убедиться в том, что

$$E_n(f_\varepsilon)_{L_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Тогда из соотношений (4.1) и (4.12) получаем

$$\Delta(E_n(f_\varepsilon)_{L_1}) = \frac{1}{2^{m+2}} - \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}. \quad (4.14)$$

Из равенства (4.14) следует, что для любых $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и достаточно малого $\delta > 0$ существует функция $f_{\varepsilon_*} \in L_1^1$ такая, что

$$\Delta(E_n(f_{\varepsilon_*})_{L_1}) \geq \frac{1}{2^{m+2}} - \delta.$$

В силу определения верхней грани множества, неравенства (4.9), а также формул (3.2), (4.1) и последнего соотношения убеждаемся в справедливости равенства (4.2) при $p = 1$.

Перейдем к рассмотрению случая $1 < p < \infty$. На отрезке $[0, b]$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-(p-1) \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{p-2} \varphi^{1-p} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \theta, \quad (4.15)$$

где $\varphi(x) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(0, b; x)$, $\theta \stackrel{\text{df}}{=} \theta(b) = (b\kappa_p)^{-p}$, решение которого удовлетворяет начальным условиям $\varphi(b) = \left(\frac{p}{2b\theta}\right)^{1/p}$, $\varphi^{(1)}(b) = 0$. При этом полагаем, что функция φ почти всюду на $[0, b]$ имеет производную второго порядка $\varphi^{(2)}$, которая принимает неположительные значения и тождественно не равна нулю. Отсюда следует, что функция φ должна быть возрастающей на $[0, b]$, т. е. $\max\{\varphi(x) : 0 \leq x \leq b\} = \varphi(b)$.

Общий интеграл уравнения (4.15) представим в виде

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{(p/(2b\theta) - t^p)^{1/p}} = \int_{x_0}^x \left(\frac{\theta}{p-1} \right)^{1/p} dx + c, \quad (4.16)$$

где c – произвольная постоянная, $\varphi_0 \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(x_0)$. Полагая $c = 0$, из (4.16) получаем частный интеграл, в котором полагаем $x_0 = b$:

$$\int_{\varphi}^{(p/(2b\theta))^{1/p}} \frac{dt}{(p/(2b\theta) - t^p)^{1/p}} = \left(\frac{\theta}{p-1} \right)^{1/p} (b-x).$$

При $x = 0$ отсюда, с учетом значения величины θ , имеем

$$\int_{\varphi(0)(2b\theta/p)^{1/p}}^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}} = \frac{\pi}{p \sin(\pi/p)}.$$

Поскольку (см., например, [34, с. 309])

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}} = \frac{\pi}{p \sin(\pi/p)},$$

очевидно, что $\varphi(0) = 0$. С учетом этого из (4.16) при $x_0 = 0$ получаем частный интеграл

$$\int_0^{\varphi(x)} \frac{dt}{(p/(2b\theta) - t^p)^{1/p}} = \left(\frac{\theta}{p-1} \right)^{1/p} x. \quad (4.17)$$

Выражая из дифференциального уравнения (4.15) функцию φ^p и интегрируя обе части полученного таким образом соотношения по переменной x в пределах от 0 до b , имеем

$$\int_0^b \varphi^p(x) dx = -\frac{p-1}{\theta} \int_0^b \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{p-2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \varphi(x) dx.$$

Интегрируя по частям правую часть данного равенства и используя начальные условия для дифференциального уравнения (4.15), получаем

$$\int_0^b \varphi^p(x) dx = \frac{1}{\theta} \int_0^b (\varphi^{(1)}(x))^p dx.$$

Дифференцируя по переменной x обе части равенства (4.17), возводя их в степень p , выражая $(\varphi^{(1)})^p$ и интегрируя полученное соотношение в пределах от 0 до b , с учетом последней формулы имеем

$$\int_0^b (\varphi^{(1)}(x))^p dx = \frac{p}{2(p-1)} - \frac{1}{p-1} \int_0^b (\varphi^{(1)}(x))^p dx,$$

т. е.

$$\int_0^b (\varphi^{(1)}(x))^p dx = \frac{1}{2}. \quad (4.18)$$

Используя (4.18) и значение величины θ , получаем

$$\int_0^b \varphi^p(x) dx = \frac{1}{2} (b\kappa_p)^p. \quad (4.19)$$

Пусть

$$f_0(a, b; \gamma; x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} -\gamma \left(\frac{a+b}{2} - x \right), & \text{если } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ \gamma \left(x - \frac{a+b}{2} \right), & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases} \quad (4.20)$$

Введем в рассмотрение функцию $F_0 \in L_p^1$, $1 < p < \infty$, заданную равенствами

$$F_0(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (-1)^{i+1} f_0\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right), & \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, \\ & i = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{j+1-k} f_0(2(j-1)h, 2jh; \varphi(0, h); x) \\ + \varphi(0, h; h) - \varphi\left(0, \frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right), & \text{если } 2(j-1)h \leq x \leq 2jh, \\ & j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (4.21)$$

где функция $\varphi(0, b; x)$, $0 \leq x \leq b$, определена формулой (4.17).

Покажем, что кусочно постоянная функция

$$\hat{p}_n(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 2kh, \\ \frac{1}{2} \left(\varphi(0, h; h) - \varphi\left(0, \frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right) \right), & \text{если } x = 2kh, \\ \varphi(0, h; h) - \varphi\left(0, \frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right), & \text{если } 2kh < x \leq 1, \end{cases} \quad (4.22)$$

является полиномом наилучшего приближения n -го порядка, построенным по системе Хаара, для функции F_0 . Используя геометрические соображения, связанные с соотношением (4.21), можно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} \left| f_0\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right) \right|^{p-1} \\ \times \text{sign}\left((-1)^{i+1} f_0\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right)\right) dx = 0, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ \int_{\delta_m^j} |f_0(2(j-1)h, 2jh; \varphi(0, h); x)|^{p-1} \\ \times \text{sign}\left((-1)^{j+1-k} f_0(2(j-1)h, 2jh; \varphi(0, h); x)\right) dx = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \end{aligned}$$

Учитывая, что произвольный полином n -го порядка p_n , построенный по системе Хаара, постоянен на интервалах δ_{m+1}^i , $i = \overline{1, 2k}$, и δ_m^j , $j = \overline{k+1, 2^m}$ (см., например, [32, с. 142]), а также используя последние равенства и формулу (4.22), получаем

$$\int_0^1 p_n(x) |F_0(x) - \hat{p}_n(x)|^{p-1} \text{sign}(F_0(x) - \hat{p}_n(x)) dx = 0.$$

Согласно критерию элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_p , $1 < p < \infty$ (см., например, [33, с. 53]), полученное равенство означает, что $\hat{p}_n$ является полиномом наилучшего приближения порядка n , построенным по системе Хаара, для функции F_0 .

Используя формулы (4.20)–(4.22), а также равенство (4.19), имеем

$$\begin{aligned} E_n^p(F_0)_{L_p} &= \|F_0 - \hat{p}_n\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} \left| f_0\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right) \right|^p dx \\ &+ \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} |f_0(2(j-1)h, 2jh; \varphi(0, h); x)|^p dx = 4k \int_0^{h/2} \varphi^p\left(0, \frac{h}{2}; x\right) dx \\ &+ 2(2^m - k) \int_0^h \varphi^p(0, h; x) dx = \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p (2k + 2^p(2^m - k)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $1 < p < \infty$.

Используя формулы (4.20), (4.21) и равенство (4.18), вычислим значение выражения, записанного в знаменателе правой части формулы (4.1) в случае $f \equiv F_0$:

$$\int_0^{2^{-m}k} |F_0^{(1)}(x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |F_0^{(1)}(x)|^p dx = 2k + 2^p(2^m - k). \quad (4.24)$$

Требуемая оценка снизу следует из формул (4.1) и (4.23), (4.24):

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \not\equiv \text{const}}} \Delta(E_n(f)_{L_p}) \geq \Delta(E_n(F_0)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+2}} \kappa_p,$$

где $1 < p < \infty$. Сравнивая теперь полученную оценку снизу и оценку сверху (4.9), убеждаемся в справедливости (4.2) для любых $1 < p < \infty$ и $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.1. В случае $1 \leq p < \infty$ из соотношений (4.2) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{L_p} &\leq \frac{1}{2^{m+1}} \kappa_p \left\{ \frac{1}{2^p} \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \frac{1}{2n} \kappa_p \|f^{(1)}\|_{L_p}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для функции $F_0 \in L_p^1$, определенной формулами (4.20) и (4.21), в силу равенств (4.23), (4.24) при $n = 2^{m+1}$ (т. е. $k = 2^m$), где $m \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$E_n(F_0)_{L_p} = \frac{1}{2n} \kappa_p \|F_0^{(1)}\|_{L_p}.$$

Следовательно, неравенство (4.3) является неулучшаемым для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq p < \infty$.

Покажем справедливость неравенства (4.3) в случае $p = \infty$. Поскольку

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \kappa_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(p-1)^{1/p}} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/p)}{\pi/p} = 1,$$

для произвольной функции $f \in L_\infty^1$ предельным переходом при $p \rightarrow \infty$ в формуле (4.25) получаем оценку сверху величины ее наилучшего полиномиального приближения

$$E_n(f)_{L_\infty} \leq \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \quad (4.26)$$

Покажем неулучшаемость данного неравенства на классе L_∞^1 . На отрезке $[0, 2h]$ введем функцию

$$f_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{h} \begin{cases} x - \frac{h}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq h, \\ \frac{3}{2}h - x, & \text{если } h \leq x \leq 2h. \end{cases}$$

В случае $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, на отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию $F_1 \in L_\infty^1$, являющуюся $2h$ -периодическим продолжением функции f_1 с отрезка $[0, 2h]$ на отрезок $[0, 1]$.

В случае $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$, функцию $F_1 \in L_\infty^1$ определяем следующим образом. На отрезке $0 \leq x \leq 2h$ полагаем

$$f_2(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{h}(x - h) + \frac{1}{2}, \quad f_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} 1 - f_2(x) = \frac{1}{h}(2h - x) - \frac{1}{2}.$$

Также введем функцию целочисленного аргумента j

$$\zeta(j) \stackrel{\text{df}}{=} \{2, \text{ если } j = 2k; 3, \text{ если } j = 2k + 1\},$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$F_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} f_1(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leq x \leq 2(i+1)h, \ i = \overline{0, k-1}, \\ f_{\zeta(j)}(x - 2(k+j)h), & \text{если } 2(k+j)h \leq x \leq 2(k+1+j)h, \\ & j = \overline{0, 2^m - k - 1}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Путем несложных вычислений можно убедиться в том, что для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливо равенство

$$\|F_1^{(1)}\|_{L_\infty} = \frac{1}{h}. \quad (4.28)$$

Обозначим

$$\alpha_m^{(i)}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\{f(x) : x \in \delta_m^i\}, \quad \beta_m^{(i)}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \inf\{f(x) : x \in \delta_m^i\}, \\ \omega_m^{(i)}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha_m^{(i)}(f) - \beta_m^{(i)}(f).$$

Из одного результата Б. И. Голубова (см., например, [29, с. 1274]) следует, что для $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, величина наилучшего полиномиального приближения $E_n(f)_C$ имеет вид

$$E_n(f)_C = \frac{1}{2} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2k} \omega_{m+1}^{(i)}(f), \max_{k < j \leq 2^m} \omega_m^{(j)}(f) \right\}. \quad (4.29)$$

Тогда для $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, $m \in \mathbb{N}$, в силу формул (4.27) и (4.29) имеем

$$E_n(F_1)_{L_\infty} = E_n(F_1)_C \geq \frac{1}{2} \omega_m^{(2^m)}(F_1) = 1. \quad (4.30)$$

Для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, на основании аналогичных соображений получаем

$$E_n(F_1)_{L_\infty} = E_n(F_1)_C \geq \frac{1}{2} \omega_{m+1}^{(1)}(F_1) = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

Используя неравенства (4.30), (4.31) и формулы (4.26), (4.28) и (2.6), убеждаемся в неулучшаемости неравенства (4.3) на классе L_∞^1 для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в указанном ранее смысле. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4.1. Пусть $f \in L_\infty^1$ и $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, $m \in \mathbb{N}$. Известно (см., например, [35, с. 71–72], [36, с. 21]), что частная сумма ряда Фурье–Хаара функции f имеет следующий вид:

$$S_n(f, x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{\delta_{m+1}^i} f(t) dt, & \text{если } (i-1)h < x < ih, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ \frac{1}{2h} \int_{\delta_m^j} f(t) dt, & \text{если } 2(j-1)h < x < 2jh, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \end{cases}$$

Отметим, что во внутренних точках разрыва частная сумма $S_n(f)$ равна полусумме пределов справа и слева и $S_n(f)$ непрерывна на концах отрезка $[0, 1]$. Запишем

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(f, x)| &= \frac{1}{h} \left| \int_{\delta_{m+1}^i} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(t) - f(x)| dt \\ &\leq \frac{1}{h} \|f^{(1)}\|_{L_\infty} \int_{\delta_{m+1}^i} |t - x| dt \leq \frac{h}{2} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если $2(j-1)h < x < 2jh$, $j = \overline{k+1, 2^m}$, то с помощью аналогичных рассуждений получаем

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq h \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \quad (4.33)$$

Тогда из формул (2.6) и (4.32), (4.33) следует справедливость неравенства

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty} \quad (4.34)$$

для любых $x \in \delta_{m+1}^i$, $i = \overline{1, 2k}$, и $x \in \delta_m^j$, $j = \overline{k+1, 2^m}$.

Покажем, что неравенство (4.34) имеет место и во внутренних точках разрыва частной суммы $S_n(f)$. Для этого достаточно рассмотреть, например, точку $x^* = 2kh$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, $m \in \mathbb{N}$. Учитывая свойства частной суммы ряда Фурье–Хаара $S_n(f)$ и неравенства (4.32), (4.33), запишем

$$\begin{aligned} |f(x^*) - S_n(f, x^*)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h} \left| \int_{\delta_{m+1}^{2k}} [f(t) - f(x^*)] dt \right| + \frac{1}{2h} \left| \int_{\delta_m^{k+1}} [f(t) - f(x^*)] dt \right| \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{2} \|f^{(1)}\|_{L_\infty} + h \|f^{(1)}\|_{L_\infty} \right\} \leq h \|f^{(1)}\|_{L_\infty} = \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Пусть теперь $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку в этом случае

$$S_n(f, x) = \frac{1}{h} \int_{\delta_{m+1}^i} f(t) dt, \quad (4.36)$$

где $(i-1)h < x < ih$, $i = \overline{1, 2^{m+1}}$, согласно формуле (4.32) для указанных значений x имеем

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{h}{2} \|f^{(1)}\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \quad (4.37)$$

Покажем, что неравенство (4.37) будет справедливым и во внутренних точках разрыва функции $S_n(f)$. Используя формулы (4.36) и (4.32), для $x^* = kh$, где $k = \overline{1, 2^m - 1}$, $m \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} |f(x^*) - S_n(f, x^*)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h} \left| \int_{\delta_{m+1}^k} [f(t) - f(x^*)] dt \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \left| \int_{\delta_{m+1}^{k+1}} [f(t) - f(x^*)] dt \right| \right\} \leq \frac{h}{2} \|f^{(1)}\|_{L_\infty} = \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Очевидно, что оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_\infty^1 \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - S_n(f)\|_C}{\|f^{(1)}\|_{L_\infty}} \leq \frac{1}{2n'}, \quad (4.39)$$

следует из неравенств (4.34), (4.35) и (4.37), (4.38).

Используя формулы (2.6), (4.28) и (4.30), (4.31), запишем

$$\sup_{\substack{f \in L_\infty^1 \\ f \neq \text{const}}} \frac{\|f - S_n(f)\|_C}{\|f^{(1)}\|_{L_\infty}} \geq \sup_{\substack{f \in L_\infty^1 \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_C}{\|f^{(1)}\|_{L_\infty}} \geq \frac{E_n(F_1)_C}{\|F_1^{(1)}\|_{L_\infty}} \geq \frac{1}{2n'}. \quad (4.40)$$

Из соотношений (4.39) и (4.40) получаем равенство (4.4). Утверждение доказано.

§ 5. Наилучшие односторонние приближения полиномами, построенными по системе Хаара

В утверждениях данного параграфа устанавливаются оценки величин наилучших односторонних приближений функций из заданных классов полиномами n -го порядка, построенными по системе Хаара.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любых чисел $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq p < \infty$ имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(\widehat{E}_n^\pm(f)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+1}} \varkappa_p, \quad (5.1)$$

где величина $\varkappa_p$ определяется формулой (3.2).

ТЕОРЕМА 5.2. Для произвольных $1 \leq p < \infty$ и $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(\tilde{E}_n(f)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+1}}. \quad (5.2)$$

Из соотношений (5.1), (5.2) и (2.6) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для произвольной функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p \leq \infty$, и любых натуральных чисел $n \geq 2$ имеют место неравенства

$$\widehat{E}_n^\pm(f)_{L_p} \leq \frac{1}{n'} \kappa_p \|f^{(1)}\|_{L_p}, \quad \tilde{E}_n(f)_{L_p} \leq \frac{1}{n'} \|f^{(1)}\|_{L_p}. \quad (5.3)$$

Для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, при $1 \leq p < \infty$, а также для любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ при $p = \infty$ неравенства (5.3) являются неулучшаемыми в том смысле, что существуют функции $f \neq \text{const}$ из L_p^1 , для которых неравенства (5.3) превращаются в равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть $f \in L_p^1$, $1 \leq p < \infty$, и $f \neq \text{const}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vartheta_i^+(f, x) &\stackrel{\text{df}}{=} f(x) - \inf\{f(t) : t \in \delta_{m+1}^i\}, & x \in \delta_{m+1}^i, & i = \overline{1, 2k}, \\ \mu_j^+(f, x) &\stackrel{\text{df}}{=} f(x) - \inf\{f(t) : t \in \delta_m^j\}, & x \in \delta_m^j, & j = \overline{k+1, 2^m}. \end{aligned}$$

Учитывая кусочно постоянный характер поведения полиномов, построенных по системе Хаара (см., например, [32, с. 142]), и введенные ранее обозначения, для $1 \leq p < \infty$ запишем

$$(\widehat{E}_n^+(f)_{L_p})^p = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} |\vartheta_i^+(f, x)|^p dx + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} |\mu_j^+(f, x)|^p dx. \quad (5.4)$$

Зафиксируем для некоторого $i = \overline{1, 2k}$ множество $\overline{\delta_{m+1}^i}$ и доопределим на его концах функцию $\vartheta_i^+(f, x)$ по непрерывности. Тогда найдется такая точка $\xi_i \in \overline{\delta_{m+1}^i}$, что $\vartheta_i^+(f, \xi_i) = 0$. Запишем, далее,

$$\int_{\delta_{m+1}^i} |\vartheta_i^+(f, x)|^p dx = \int_{(i-1)h}^{\xi_i} |\vartheta_i^+(f, x)|^p dx + \int_{\xi_i}^{ih} |\vartheta_i^+(f, x)|^p dx. \quad (5.5)$$

На отрезках $[(i-1)h, \xi_i]$ и $[\xi_i, ih]$ функция $\vartheta_i^+(f)$ удовлетворяет условиям леммы 3.3. Применяя соответствующим образом указанную лемму, для любого $i = \overline{1, 2k}$ из (5.5) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} |\vartheta_i^+(f, x)|^p dx &\leq \kappa_p^p \left\{ (\xi_i - (i-1)h)^p \int_{(i-1)h}^{\xi_i} |f^{(1)}(x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + (ih - \xi_i)^p \int_{\xi_i}^{ih} |f^{(1)}(x)|^p dx \right\} \leq (h\kappa_p)^p \int_{\delta_{m+1}^i} |f^{(1)}(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (5.6)$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при получении соотношений (5.5), (5.6), имеем

$$\int_{\delta_m^j} |\mu_j^+(f, x)|^p dx \leq (2h\kappa_p)^p \int_{\delta_m^j} |f^{(1)}(x)|^p dx. \quad (5.7)$$

Тогда из формул (4.1), (5.4) и (5.6), (5.7) получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(\widehat{E}_n^+(f)_{L_p}) \leq \frac{1}{2^{m+1}} \kappa_p. \quad (5.8)$$

Покажем, что в формуле (5.8) имеет место знак равенства. Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Полагаем

$$f_{1,\varepsilon}^+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon}, & \text{если } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{если } \varepsilon \leq x \leq 2h - \varepsilon, \\ \frac{2h - x}{\varepsilon}, & \text{если } 2h - \varepsilon \leq x \leq 2h, \end{cases} \quad (5.9)$$

где $0 < \varepsilon < h$. Если $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то на отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию $F_{1,\varepsilon}^+ \in L_1^1$, которая является $2h$ -периодическим продолжением функции $f_{1,\varepsilon}^+$ с отрезка $[0, 2h]$ на отрезок $[0, 1]$. При этом имеем

$$\int_{\delta_m^j} |F_{1,\varepsilon}^+(x)| dx = 2h - \varepsilon, \quad \int_{\delta_m^j} |(F_{1,\varepsilon}^+(x))^{(1)}| dx = 2, \quad j = \overline{1, 2^m}. \quad (5.10)$$

В случае $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$, функцию $F_{1,\varepsilon}^+ \in L_1^1$ определяем следующим образом. Обозначим

$$f_{2,\varepsilon}^+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon}, & \text{если } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{если } \varepsilon \leq x \leq 2h, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$f_{3,\varepsilon}^+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 2h - \varepsilon, \\ \frac{2h - x}{\varepsilon}, & \text{если } 2h - \varepsilon \leq x \leq 2h, \end{cases} \quad (5.12)$$

где $0 < \varepsilon < h$, и воспользуемся функцией целочисленного аргумента $\zeta(j)$, введенной при доказательстве следствия 4.1. Тогда

$$F_{1,\varepsilon}^+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} f_{1,\varepsilon}^+(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leq x \leq 2(i+1)h, \quad i = \overline{0, k-1}, \\ f_{\zeta(j),\varepsilon}^+(x - 2(k+j)h), & \text{если } 2(k+j)h \leq x \leq 2(k+1+j)h, \\ & j = \overline{0, 2^m - k - 1}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Используя соотношения (5.9) и (5.11), (5.12), из (5.13) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} |F_{1,\varepsilon}^+(x)| dx &= h - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_{m+1}^i} |(F_{1,\varepsilon}^+(x))^{(1)}| dx = 1, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ \int_{\delta_m^j} |F_{1,\varepsilon}^+(x)| dx &= 2h - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{\delta_m^j} |(F_{1,\varepsilon}^+(x))^{(1)}| dx = 1, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из данного в § 2 определения наилучшего одностороннего приближения снизу $\widehat{E}_n^+(f)_X$ получаем, что $p_n^+ \equiv 0$ является полиномом наилучшего одностороннего приближения снизу функции $F_{1,\varepsilon}^+$ в метрике пространства L_1 . Следовательно, из формул (5.10) и (5.14) имеем

$$\widehat{E}_n^+(F_{1,\varepsilon}^+)_{L_1} = \|F_{1,\varepsilon}^+\|_{L_1} = 1 - \varepsilon \cdot \frac{n}{2}, \quad (5.15)$$

если $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$, а также находим

$$\int_0^{2^{-m}k} |(F_{1,\varepsilon}^+(x))^{(1)}| dx + 2 \int_{2^{-m}k}^1 |(F_{1,\varepsilon}^+(x))^{(1)}| dx = 2k + 2(2^m - k) = 2^{m+1}. \quad (5.16)$$

Используя (4.1) и (5.15), (5.16), получаем

$$\Delta(\widehat{E}_n^+(F_{1,\varepsilon}^+)_{L_1}) = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{\varepsilon n}{2^{m+2}}. \quad (5.17)$$

Из равенства (5.17) следует, что для любых натуральных $n \geq 2$ и произвольного достаточно малого числа $\delta > 0$ существует функция $F_{1,\varepsilon_*}^+ \in L_1^1$, где $\varepsilon_* = o(h)$ – произвольное положительное число, для которой

$$\Delta(\widehat{E}_n^+(F_{1,\varepsilon_*}^+)_{L_1}) \geq \frac{1}{2^{m+1}} - \delta. \quad (5.18)$$

В силу определения верхней грани множества, соотношений (3.2), (4.1) и неравенств (5.8), (5.18) убеждаемся в справедливости равенства (5.1) в случае $p = 1$.

Пусть далее $1 < p < \infty$. Полагаем

$$\eta_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \varphi(0, h; x), & \text{если } 0 \leq x \leq h, \\ \varphi(0, h; 2h - x), & \text{если } h \leq x \leq 2h, \end{cases} \quad (5.19)$$

и обозначаем

$$\eta_2(x) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(0, 2h; x), \quad 0 \leq x \leq 2h, \quad (5.20)$$

$$\eta_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(0, 2h; 2h - x), \quad 0 \leq x \leq 2h, \quad (5.21)$$

где функция $\varphi(0, b; x)$, $0 \leq x \leq b$, определена равенством (4.17).

Если $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то рассмотрим функцию $F_*^+ \in L_p^1$, $1 < p < \infty$, являющуюся $2h$ -периодическим продолжением функции η_1 с отрезка $[0, 2h]$ на отрезок $[0, 1]$. В случае $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$, функцию $F_*^+ \in L_p^1$, $1 < p < \infty$, определяем в силу (5.19)–(5.21) следующим образом:

$$F_*^+(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \eta_1(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leq x \leq 2(i+1)h, \quad i = \overline{0, k-1}, \\ \eta_{\zeta(j)}(x - 2(k+j)h), & \text{если } 2(k+j)h \leq x \leq 2(k+1+j)h, \\ & j = \overline{0, 2^m - k - 1}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Здесь ζ – функция целочисленного аргумента j , введенная при доказательстве следствия 4.1. Из формул (5.19)–(5.22) и определения наилучшего одностороннего приближения снизу получаем, что $p_n^+ \equiv 0$ является полиномом

наилучшего одностороннего приближения снизу функции F_*^+ в метрике пространства L_p , $1 < p < \infty$. Не уменьшая общности, полагаем $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$. Используя соотношения (4.19), (5.4) и (5.19)–(5.22), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{E}_n^+(F_*^+)_{L_p} &= \|F_*^+\|_{L_p} = \left\{ 2k \int_0^h \varphi^p(0, h; x) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi^p(0, 2h; x) dx \right\}^{1/p} \\ &= h \varkappa_p [k + 2^{p-1}(2^m - k)]^{1/p}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Учитывая формулы (4.18) и (5.19)–(5.22), запишем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_0^{2^{-m}k} |(F_*^+(x))^{(1)}|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |(F_*^+(x))^{(1)}|^p dx \right\}^{1/p} \\ &= \left\{ 2k \int_0^h (\varphi^{(1)}(0, h; x))^p dx + (2^m - k) 2^p \int_0^{2h} (\varphi^{(1)}(0, 2h; x))^p dx \right\}^{1/p} \\ &= \{k + 2^{p-1}(2^m - k)\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Используя формулу (4.1) и равенства (5.23), (5.24), имеем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(\widehat{E}_n^+(f)_{L_p}) \geq \Delta(\widehat{E}_n^+(F_*^+)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+1}} \varkappa_p. \quad (5.25)$$

Требуемое равенство (5.1) для случая $1 < p < \infty$ следует из сопоставления неравенств (5.8) и (5.25). Заметим, что справедливость равенства (5.1) для величины $\widehat{E}_n^-(f)_{L_p}$, $1 \leq p < \infty$, доказывается с помощью рассуждений, аналогичных вышеизложенным. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Поскольку произвольный полином порядка $n = 2, 3, \dots$, построенный по системе Хаара, почти всюду на отрезке $[0, 1]$ совпадает с некоторой кусочно постоянной функцией, для функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p < \infty$, и $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, исходя из данного в § 2 определения величины $\widetilde{E}_n(f)_{L_p}$, запишем

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_n^p(f)_{L_p} &= \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} \left| \sup_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x) - \inf_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x) \right|^p dt \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} \left| \sup_{x \in \delta_m^j} f(x) - \inf_{x \in \delta_m^j} f(x) \right|^p dt. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Зафиксируем некоторый отрезок $\overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$. Очевидно, что найдутся точки $\alpha_i, \beta_i \in \overline{\delta_{m+1}^i}$ такие, что

$$f(\alpha_i) = \sup_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x), \quad f(\beta_i) = \inf_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x).$$

Применяя неравенство Гёльдера для $1 \leq p < \infty$ и произвольного $i = \overline{1, 2k}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \sup_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x) - \inf_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x) \right|^p &= |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p = \left| \int_{\beta_i}^{\alpha_i} f^{(1)}(x) dx \right|^p \\ &\leq |\alpha_i - \beta_i|^{p-1} \int_{\beta_i}^{\alpha_i} |f^{(1)}(x)|^p dx \leq h^{p-1} \int_{\delta_{m+1}^i} |f^{(1)}(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\left| \sup_{x \in \delta_m^j} f(x) - \inf_{x \in \delta_m^j} f(x) \right|^p \leq (2h)^{p-1} \int_{\delta_m^j} |f^{(1)}(x)|^p dx, \quad j = \overline{k+1, 2m}. \quad (5.28)$$

Из соотношений (5.26)–(5.28) имеем оценку сверху величины $\widetilde{E}_n^p(f)_{L_p}$:

$$\widetilde{E}_n^p(f)_{L_p} \leq h^p \left\{ \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x)|^p dx \right\}.$$

Используя формулу (4.1) и последнее неравенство, получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \Delta(\widetilde{E}_n(f)_{L_p}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (5.29)$$

Получим оценку снизу величины из левой части неравенства (5.29). Для этого рассмотрим функцию f_1 , введенную при доказательстве следствия 4.1. В случае $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, на отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию $\widetilde{F}_1 \in L_p^1$, являющуюся $2h$ -периодическим продолжением функции f_1 с отрезка $[0, 2h]$ на отрезок $[0, 1]$.

В случае $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$, функцию $\widetilde{F}_1 \in L_p^1$ представим следующим образом. Полагаем

$$\widetilde{f}_2(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2h}(x - h), \quad \widetilde{f}_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2h}(h - x),$$

где $0 \leq x \leq 2h$. Воспользовавшись функцией целочисленного аргумента $\zeta(j)$, введенной при доказательстве следствия 4.1, полагаем

$$\widetilde{F}_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} f_1(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leq x \leq 2(i+1)h, \quad i = \overline{0, k-1}, \\ \widetilde{f}_{\zeta(j)}(x - 2(k+j)h), & \text{если } 2(k+j)h \leq x \leq 2(k+1+j)h, \\ & j = \overline{0, 2^m - k - 1}. \end{cases} \quad (5.30)$$

Не уменьшая общности, рассмотрим случай $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$. Из формулы (5.30) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} |\widetilde{F}_1^{(1)}(x)|^p dx &= h^{1-p}, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ \int_{\delta_m^j} |\widetilde{F}_1^{(1)}(x)|^p dx &= (2h)^{1-p}, \quad j = \overline{k+1, 2m}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Используя равенство (5.26) и определение (5.30) функции $\tilde{F}_1$, запишем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n^p(\tilde{F}_1)_{L_p} &= 2kh \left| \sup_{x \in \delta_{m+1}^1} f_1(x) - \inf_{x \in \delta_{m+1}^1} f_1(x) \right|^p \\ &+ (2^m - k)2h \left| \sup_{x \in \delta_m^{k+1}} \tilde{f}_2(x) - \inf_{x \in \delta_m^{k+1}} \tilde{f}_2(x) \right|^p = 2kh + (2^m - k)2h = 1. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Поскольку в силу формулы (5.31) имеем

$$\int_0^{k/2^m} |\tilde{F}_1^{(1)}(x)|^p dx + 2^p \int_{k/2^m}^1 |\tilde{F}_1^{(1)}(x)|^p dx = 2kh^{1-p} + 2^p(2^m - k)(2h)^{1-p} = h^{-p}, \quad (5.33)$$

на основании соотношений (4.1) и (5.32), (5.33) для $1 \leq p < \infty$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f(x) \neq \text{const}}} \Delta(\tilde{E}_n(f)_{L_p}) \geq \Delta(\tilde{E}_n(\tilde{F}_1)_{L_p}) = \frac{1}{2^{m+1}}. \quad (5.34)$$

Из соотношений (5.29) и (5.34) следует справедливость равенства (5.2), на чем и завершаем доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.1. В случае $1 \leq p < \infty$ из (5.1), (5.2) и (2.6) получаем неравенства (5.3). Неулучшаемость неравенств (5.3) при $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq p < \infty$ для величины $\hat{E}_n^\pm(\cdot)_{L_p}$ проверяется на функции F_*^+ , заданной в (5.22), а для величины $\tilde{E}_n(\cdot)_{L_p}$ — на функции $\tilde{F}_1$, введенной в ходе доказательства теоремы 5.2.

Учитывая, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \varkappa_p = 1$, и применяя в неравенствах (5.3) предельный переход при $p \rightarrow \infty$, для произвольной функции $f \in L_\infty^1$ получаем

$$\hat{E}_n^\pm(f)_C \leq \frac{1}{n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}, \quad \tilde{E}_n(f)_C \leq \frac{1}{n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}. \quad (5.35)$$

Для функции $F_1 \in L_\infty^1$, заданной в (4.27), в силу данного в § 2 определения величин $\hat{E}_n^\pm(\cdot)_X$ и $\tilde{E}_n(\cdot)_X$ для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\hat{E}_n^\pm(F_1)_C = \tilde{E}_n(F_1)_C = 1. \quad (5.36)$$

Для $n = 2^m + k$, где $k = \overline{1, 2^m - 1}$ и $m \in \mathbb{N}$, из формулы (4.27) получаем

$$\hat{E}_n^\pm(F_1)_C = \tilde{E}_n(F_1)_C = 2. \quad (5.37)$$

Используя равенства (4.28), (5.36), (5.37) и данные в § 2 определения чисел h и n' , запишем

$$\hat{E}_n^\pm(F_1)_C = \tilde{E}_n(F_1)_C = \frac{1}{n'} \|F_1^{(1)}\|_{L_\infty}. \quad (5.38)$$

Сопоставляя соотношения (5.35) и (5.38), убеждаемся в неулучшаемости неравенства (5.3) на классе L_∞^1 для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Следствие доказано.

§ 6. Приближение функций частными суммами их рядов, построенных по системе Фабера–Шаудера

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{L}_{n,p}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_p}}{\left\{ \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(f, x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(f, x)|^p dx \right\}^{1/p}}, \quad (6.1)$$

где $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < \infty$.

ТЕОРЕМА 6.1. Если $1 \leq p < \infty$, то для любых $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеют место равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \mathcal{L}_{n,p}(f) = \frac{1}{2^{m+2}} \varkappa_p. \quad (6.2)$$

Из данной теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Для любой функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p \leq \infty$, и произвольного числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливо неравенство

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_p} \leq \frac{1}{2^{n'}} \varkappa_p \|f^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_p}. \quad (6.3)$$

Данное неравенство является неулучшаемым для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, при $1 \leq p < \infty$ и для любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ при $p = \infty$ в том смысле, что существуют функции $f \neq \text{const}$ из L_p^1 , для которых неравенство (6.3) становится равенством.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. Для произвольной функции $f \in L_\infty^2$ и любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ выполняется неравенство

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{8(n')^2} \|f^{(2)}\|_{L_\infty}, \quad (6.4)$$

которое для любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ является неулучшаемым в том смысле, что существует $f \neq \text{const}$ из L_∞^2 , для которой неравенство (6.4) становится равенством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Введем следующее обозначение:

$$\mu(f) \stackrel{\text{df}}{=} f - \bar{S}_n(f). \quad (6.5)$$

Известно (см., например, [26], [35]), что функция $\bar{S}_n(f)$, представленная формулой (2.5), является линейной на отрезках $\overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$, и $\overline{\delta_m^j}$, $j = \overline{k+1, 2^m}$, и интерполирует функцию f в точках множества $\mathcal{D}_n$:

$$\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{df}}{=} \{0\} \cup \{1\}, \quad \mathcal{D}_n \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \frac{j}{2^m} \right\}_{j=0}^{2^m} \cup \left\{ \frac{2j-1}{2^{m+1}} \right\}_{j=1}^k, \quad n = 2, 3, \dots$$

Тогда из формулы (6.5) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\mu(f, (i-1)h) &= \mu(f, ih) = 0, & i = \overline{1, 2k}, \\ \mu(f, 2(j-1)h) &= \mu(f, 2jh) = 0, & j = \overline{k+1, 2^m}.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Для произвольной функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p < \infty$, запишем

$$\|f - \overline{S}_n(f)\|_{L_p}^p = \|\mu(f)\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} |\mu(f, x)|^p dx + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} |\mu(f, x)|^p dx. \quad (6.7)$$

Зафиксируем отрезок $\overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$, и запишем

$$\int_{\delta_{m+1}^i} |\mu(f, x)|^p dx = \int_{(i-1)h}^{(i-\frac{1}{2})h} |\mu(f, x)|^p dx + \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{ih} |\mu(f, x)|^p dx. \quad (6.8)$$

Из формулы (6.6) следует, что функция $\mu(f)$ удовлетворяет условиям леммы 3.3 на отрезках $[(i-1)h, (i-\frac{1}{2})h]$ и $[(i-\frac{1}{2})h, ih]$. Применяя указанную лемму, из формулы (6.8) имеем

$$\begin{aligned}\int_{\delta_{m+1}^i} |\mu(f, x)|^p dx &\leq \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \left\{ \int_{(i-1)h}^{(i-\frac{1}{2})h} |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{ih} |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx \right\} = \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p \int_{\delta_{m+1}^i} |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx, \quad (6.9)\end{aligned}$$

где $i = \overline{1, 2k}$. С помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно показать, что для любого $j = \overline{k+1, 2^m}$ справедливо неравенство

$$\int_{\delta_m^j} |\mu(f, x)|^p dx \leq (h\kappa_p)^p \int_{\delta_m^j} |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx. \quad (6.10)$$

Тогда из соотношений (6.7)–(6.10) получаем

$$\|f - \overline{S}_n(f)\|_{L_p} \leq \frac{h}{2} \kappa_p \left\{ \int_0^{k/2^m} |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx + 2^p \int_{k/2^m}^1 |\mu^{(1)}(f, x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $1 \leq p < \infty$. Учитывая формулы (6.1) и (6.5), из последнего неравенства имеем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \mathcal{L}_{n,p}(f) \leq \frac{1}{2^{m+2}} \kappa_p, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (6.11)$$

Получим оценку снизу величины из левой части неравенства (6.11). Пусть $p = 1$. Рассмотрим для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ функцию $\mathfrak{G}_\varepsilon \in L_1^1$, определенную равенствами

$$\mathfrak{G}_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-1)^{i+1} \widehat{\mu}_\varepsilon((i-1)h, ih; x), & \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, \ i = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{j+1-k} \widehat{\mu}_\varepsilon(2(j-1)h, 2jh; x), & \text{если } 2(j-1)h \leq x \leq 2jh, \\ & j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (6.12)$$

где

$$\hat{\mu}_\varepsilon(a, b; x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{x-a}{\varepsilon}, & \text{если } a \leq x \leq a + \varepsilon, \\ 1, & \text{если } a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon, \\ 1 - \frac{x + \varepsilon - b}{\varepsilon}, & \text{если } b - \varepsilon \leq x \leq b. \end{cases} \quad (6.13)$$

Из формул (6.12), (6.13) следуют равенства

$$\mathfrak{G}_\varepsilon(ih) = 0, \quad i = \overline{1, 2k}, \quad \mathfrak{G}_\varepsilon(2jh) = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}.$$

Учитывая интерполяционный характер частных сумм ряда, построенного по системе Фабера–Шаудера, имеем $\bar{S}_n(\mathfrak{G}_\varepsilon, x) \equiv 0$ для любого $x \in [0, 1]$. Используя формулы (6.12), (6.13), также получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m+1}^i} |\mathfrak{G}_\varepsilon(x)| dx &= h - \varepsilon, & \int_{\delta_m^j} |\mathfrak{G}_\varepsilon(x)| dx &= 2h - \varepsilon, \\ \int_{\delta_{m+1}^i} |\mathfrak{G}_\varepsilon^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\mathfrak{G}_\varepsilon, x)| dx &= \int_{\delta_m^j} |\mathfrak{G}_\varepsilon^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\mathfrak{G}_\varepsilon, x)| dx = 2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $i = \overline{1, 2k}$, $j = \overline{k+1, 2^m}$. Используя формулы (6.14), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_\varepsilon - \bar{S}_n(\mathfrak{G}_\varepsilon)\|_{L_1} &= \|\mathfrak{G}_\varepsilon\|_{L_1} = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} |\mathfrak{G}_\varepsilon(x)| dx + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} |\mathfrak{G}_\varepsilon(x)| dx \\ &= 2k(h - \varepsilon) + (2^m - k)(2h - \varepsilon) = 1 - \varepsilon n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $n = 2^m + k$, $h = 2^{-(m+1)}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2^{-m}k} |\mathfrak{G}_\varepsilon^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\mathfrak{G}_\varepsilon, x)| dx + 2 \int_{2^{-m}k}^1 |\mathfrak{G}_\varepsilon^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\mathfrak{G}_\varepsilon, x)| dx \\ = 2(2k + 2(2^m - k)) = 2^{m+2}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

В силу формул (6.1) и (6.15), (6.16) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_1^1 \\ f \neq \text{const}}} \mathcal{L}_{n,1}(f) \geq \mathcal{L}_{n,1}(\mathfrak{G}_\varepsilon) = \frac{1}{2^{m+2}} - \varepsilon \frac{n}{2^{m+2}}. \quad (6.17)$$

Учитывая произвольность выбора числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и определение верхней грани множества, из формул (3.2), (6.11) и (6.17) получаем в случае $p = 1$ требуемое равенство (6.2).

Рассмотрим случай $1 < p < \infty$. Для функции $q \in C([a, b])$ полагаем

$$Q(a, b; q; x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} q(x-a), & \text{если } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ q(b-x), & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases} \quad (6.18)$$

Используя представление (6.18), рассмотрим функцию $\Xi \in L_p^1$, $1 < p < \infty$, заданную равенствами

$$\Xi(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (-1)^{i+1} Q\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right), & \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, \\ & i = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{j+1-k} Q(2(j-1)h, 2jh; \varphi(0, h); x), & \text{если } 2(j-1)h \leq x \leq 2jh, \\ & j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (6.19)$$

где функция $\varphi(0, b; x)$, $0 \leq x \leq b$, задана равенством (4.17). Учитывая свойства функции φ , в силу формул (6.18), (6.19) имеем

$$\Xi(ih) = 0, \quad i = \overline{1, 2k}, \quad \Xi(2jh) = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \quad (6.20)$$

Поскольку частная сумма $\bar{S}_n(\Xi)$ ряда Фабера–Шаудера функции Ξ является ломаной с вершинами в точках $x_i = ih$, $i = \overline{1, 2k}$, и $x_j = 2jh$, $j = \overline{k+1, 2^m}$, в которых она интерполирует Ξ , то в силу формулы (6.20) получаем $\bar{S}_n(\Xi) \equiv 0$. Используя формулы (4.19) и (6.18), (6.19), для произвольного $1 < p < \infty$ запишем

$$\begin{aligned} \|\Xi - \bar{S}_n(\Xi)\|_{L_p}^p &= \|\Xi\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i}^{2^m} \left| Q\left((i-1)h, ih; \varphi\left(0, \frac{h}{2}\right); x\right) \right|^p dx \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j}^{2^m} |Q((j-1)2h, 2jh; \varphi(0, h); x)|^p dx \\ &= 4k \int_0^{h/2} \varphi^p\left(0, \frac{h}{2}; x\right) dx + 2(2^m - k) \int_0^h \varphi^p(0, h; x) dx \\ &= \left(\frac{h\kappa_p}{2}\right)^p (2k + 2^p(2^m - k)). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Из соотношений (4.18) и (6.18), (6.19) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2^{-m}k} |\Xi^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\Xi, x)|^p dx + 2^p \int_{2^{-m}k}^1 |\Xi^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(\Xi, x)|^p dx \\ &= 4k \int_0^{h/2} \left(\varphi^{(1)}\left(0, \frac{h}{2}; x\right)\right)^p dx + 2^{p+1}(2^m - k) \int_0^h (\varphi^{(1)}(0, h; x))^p dx \\ &= 2k + 2^p(2^m - k). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Используя формулы (6.1) и (6.21), (6.22), запишем для $1 < p < \infty$

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \neq \text{const}}} \mathcal{L}_{n,p}(f) \geq \mathcal{L}_{n,p}(\Xi) = \frac{1}{2^{m+2}} \kappa_p. \quad (6.23)$$

Сравнивая оценку сверху (6.11) с оценкой снизу (6.23), убеждаемся в справедливости равенства (6.2) для любого $1 < p < \infty$ и $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6.1. Для произвольной функции $f \in L_p^1$, где $1 \leq p < \infty$, из формул (6.1), (6.2) получаем оценку сверху

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_p} \leq \frac{1}{2^{m+1}} \varkappa_p \left\{ \frac{1}{2^p} \int_0^{2^{-m}k} |f^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(f, x)|^p dx + \int_{2^{-m}k}^1 |f^{(1)}(x) - \bar{S}_n^{(1)}(f, x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \frac{1}{2^{n'}} \varkappa_p \|f^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_p}. \quad (6.24)$$

Для функции $\Xi \in L_p^1$, определенной соотношениями (6.18), (6.19), в силу равенств (6.21), (6.22), где $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $k = 2^m$, и (3.2) имеем

$$\|\Xi - \bar{S}_n(\Xi)\|_{L_p} = \frac{1}{2^{n'}} \varkappa_p \|\Xi^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(\Xi)\|_{L_p}.$$

Отсюда вытекает, что неравенство (6.24) является неулучшаемым для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $1 \leq p < \infty$.

Для любой функции $f \in L_\infty^1$, $f \not\equiv \text{const}$, предельным переходом при $p \rightarrow \infty$ в неравенстве (6.24) получаем

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{2^{n'}} \|f^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_\infty}, \quad (6.25)$$

где $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Покажем неулучшаемость неравенства (6.25) в сформулированном в следствии смысле. Для этого полагаем

$$f_3(a, b; x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{2(x-a)}{h}, & \text{если } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ \frac{2(b-x)}{h}, & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \end{cases} \quad (6.26)$$

и в случае $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$, рассмотрим функцию

$$F_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (-1)^{i+1} f_3((i-1)h, ih; x), & \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{j+1-k} f_3(2(j-1)h, 2jh; x), & \text{если } 2(j-1)h \leq x \leq 2jh, \\ & j = \overline{k+1, 2^m}. \end{cases} \quad (6.27)$$

Нетрудно видеть, что $F_3(ih) = F_3(2jh) = 0$, $i = \overline{1, 2k}$, $j = \overline{k+1, 2^m}$.

Если $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то полагаем

$$F_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} (-1)^{i+1} f_3((i-1)h, ih; x), \quad \text{если } (i-1)h \leq x \leq ih, \quad i = \overline{1, 2^{m+1}}. \quad (6.28)$$

При этом $F_3(ih) = 0$, $i = \overline{1, 2^{m+1}}$.

В силу упомянутого ранее интерполяционного характера частных сумм ряда Фабера–Шаудера имеем $\bar{S}_n(F_3) \equiv 0$. Тогда для функции $F_3 \in L_\infty^1$ из соотношений (6.27), (6.28) получаем

$$\|F_3 - \bar{S}_n(F_3)\|_{L_\infty} = \|F_3\|_{L_\infty} = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 2^m + k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, 2^m - 1}, \\ 1, & \text{если } n = 2^{m+1}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\|F_3^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(F_3)\|_{L_\infty} = \|F_3^{(1)}\|_{L_\infty} = \frac{2}{h}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (6.30)$$

Используя формулы (2.6) и (6.29), (6.30), имеем

$$\|F_3 - \bar{S}_n(F_3)\|_{L_\infty} = \frac{1}{2n'} \|F_3^{(1)} - \bar{S}_n^{(1)}(F_3)\|_{L_\infty}. \quad (6.31)$$

Таким образом, из соотношений (6.25) и (6.31) убеждаемся в неулучшаемости неравенства (6.3) на классе L_∞^1 для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из формул (2.1), (2.2) и (2.5) вытекает, что на множестве $[0, 1] \setminus \mathcal{D}_n$ имеет место представление

$$\bar{S}_n^{(1)}(f, x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{\delta_{m+1}^i} f^{(1)}(t) dt, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^i, i = \overline{1, 2k}, \\ \frac{1}{2h} \int_{\delta_m^j} f^{(1)}(t) dt, & \text{если } x \in \delta_m^j, j = \overline{k+1, 2^m}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Тогда, с учетом формул (6.3) и (6.32), для произвольной функции $f \in L_p^1$, $1 \leq p < \infty$, получаем

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_p} \leq \frac{1}{2n'} \kappa_p \|f^{(1)}\|_{L_p}. \quad (6.33)$$

Используя непрерывность нормы в пространстве L_p и переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, из (6.33) имеем

$$\|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{2n'} \|f^{(1)}\|_{L_\infty}.$$

Отметим, что в случае $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, данное неравенство совпадает с результатом, полученным в работе [37, с. 44].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 6.1. Для функции $f \in L_\infty^2([a, b])$ имеет место формула Тейлора с остатком в интегральной форме:

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x - a) + \int_a^x (x - v) f^{(2)}(v) dv. \quad (6.34)$$

Пусть $x \in \overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$. Полагая $u \stackrel{\text{df}}{=} (x - (i - 1)h)/h$ и используя представление

$$\bar{S}_n(f, x) = f((i - 1)h) + \frac{1}{h} (x - (i - 1)h) (f(ih) - f((i - 1)h)),$$

где $(i - 1)h \leq x \leq ih$, $i = \overline{1, 2k}$, запишем

$$|f(x) - \bar{S}_n(f, x)| = |f(x) - (1 - u)f((i - 1)h) - uf(ih)|. \quad (6.35)$$

Применяя формулу Тейлора (6.34), для любого $x \in \overline{\delta_{m+1}^i}$ имеем

$$f((i - 1)h) = f(x) - huf^{(1)}(x) + \int_x^{(i-1)h} ((i - 1)h - v) f^{(2)}(v) dv, \quad (6.36)$$

$$f(ih) = f(x) + (1 - u)hf^{(1)}(x) + \int_x^{ih} (ih - v) f^{(2)}(v) dv. \quad (6.37)$$

Подставляя правые части равенств (6.36), (6.37) в формулу (6.35), получаем

$$|f(x) - \bar{S}_n(f, x)| = \left| (1-u) \int_x^{(i-1)h} ((i-1)h-v) f^{(2)}(v) dv + u \int_x^{ih} (ih-v) f^{(2)}(v) dv \right|. \quad (6.38)$$

Применяя к интегралам, записанным в правой части равенства (6.38), неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x) - \bar{S}_n(f, x)| \leq \frac{1}{2} u(1-u) h^2 \|f^{(2)}\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{8} h^2 \|f^{(2)}\|_{L_\infty}, \quad (6.39)$$

где $x \in \overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в (6.35)–(6.39), для любого $x \in \overline{\delta_m^j}$, $j = \overline{k+1, 2^m}$, имеем

$$|f(x) - \bar{S}_n(f, x)| \leq \frac{1}{8} (2h)^2 \|f^{(2)}\|_{L_\infty}. \quad (6.40)$$

Поскольку частная сумма $\bar{S}_n(f)$ ряда Фабера–Шаудера функции f линейна на отрезках вида $\overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$, и $\overline{\delta_m^j}$, $j = \overline{k+1, 2^m}$, то в силу соотношений (6.39), (6.40) получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \|f - \bar{S}_n(f)\|_{L_\infty} &= \max \left\{ \max_{\substack{x \in \overline{\delta_{m+1}^i} \\ (i=\overline{1, 2k})}} |f(x) - \bar{S}_n(f, x)|, \max_{\substack{x \in \overline{\delta_m^j} \\ (j=\overline{k+1, 2^m})}} |f(x) - \bar{S}_n(f, x)| \right\} \\ &\leq \frac{1}{8(n')^2} \|f^{(2)}\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Покажем неулучшаемость неравенства (6.4) в указанном в утверждении смысле. Пусть $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда полагаем

$$\widehat{f}_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2, & \text{если } 0 \leq x \leq h, \\ \left(x - \frac{3}{2}h\right)^2 - \frac{h^2}{4}, & \text{если } h \leq x \leq 2h. \end{cases} \quad (6.42)$$

Через $\widehat{F}_1$ обозначим $2h$ -периодическое продолжение функции $\widehat{f}_1$ на отрезок $[0, 1]$. Очевидно, что $\widehat{F}_1 \in L_\infty^2$. Поскольку $\widehat{F}_1(ih) = 0$, $i = \overline{1, 2^{m+1}}$, то $\bar{S}_n(\widehat{F}_1) \equiv 0$. Используя формулу (6.42), получаем

$$\|\widehat{F}_1 - \bar{S}_n(\widehat{F}_1)\|_{L_\infty} = \|\widehat{F}_1\|_{L_\infty} = \frac{h^2}{4}.$$

Учитывая, что $\|\widehat{F}_1^{(2)}\|_{L_\infty} = 2$, на основании соотношения (2.6) отсюда имеем

$$\|\widehat{F}_1 - \bar{S}_n(\widehat{F}_1)\|_{L_\infty} = \frac{1}{8(n')^2} \|\widehat{F}_1^{(2)}\|_{L_\infty}. \quad (6.43)$$

Пусть теперь $n = 2^m + k$, где $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cap [1, 2^m - 1]$. Полагаем

$$\widehat{f}_2(x) \stackrel{\text{df}}{=} h^2 - (x - h)^2, \quad (6.44)$$

$$\widehat{f}_3(x) \stackrel{\text{df}}{=} -\widehat{f}_2(x) = (x - h)^2 - h^2, \quad (6.45)$$

если $0 \leq x \leq 2h$. В данном случае под $\widehat{F}_1 \in L_\infty^2$ понимаем следующую функцию:

$$\widehat{F}_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \widehat{f}_1(x - 2ih), & \text{если } 2ih \leq x \leq 2(i+1)h, \ i = \overline{0, k-1}, \\ \widehat{f}_{\zeta(j)}(x - 2(k+j)h), & \text{если } 2(k+j)h \leq x \leq 2(k+1+j)h, \\ & j = \overline{0, 2^m - k - 1}, \end{cases} \quad (6.46)$$

где функция ζ целочисленного аргумента j определена при доказательстве следствия 4.1. Из формул (6.44)–(6.46) получаем $\widehat{F}_1(ih) = 0$, $i = \overline{1, 2k}$, и $\widehat{F}_1(2jh) = 0$, $j = \overline{k+1, 2^m}$. Следовательно, $\overline{S}_n(\widehat{F}_1) \equiv 0$. Поскольку $\|\widehat{F}_1^{(2)}\|_{L_\infty} = 2$ и

$$\|\widehat{F}_1 - \overline{S}(\widehat{F}_1)\|_{L_\infty} = \|\widehat{F}_1\|_{L_\infty} = h^2,$$

с учетом формулы (2.6) из последнего равенства получаем

$$\|\widehat{F}_1 - \overline{S}_n(\widehat{F}_1)\|_{L_\infty} = \frac{1}{8(n')^2} \|\widehat{F}_1^{(2)}\|_{L_\infty}. \quad (6.47)$$

Из соотношений (6.41), (6.43) и (6.47) следует, что неравенство (6.4) является неулучшаемым для любого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Утверждение доказано.

В заключение выражаем благодарность рецензенту за ряд ценных замечаний и пожеланий.

Список литературы

1. A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Inaugural Dissertation, Georg-August-Universitat, Göttingen, 1909, 48 pp.
2. П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
3. Б. И. Голубов, “Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша”, *Матем. сб.*, **87(129)**:2 (1972), 254–274; англ. пер.: B. I. Golubov, “Best approximations of functions in the L_p metric by Haar and Walsh polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **16**:2 (1972), 265–285.
4. Г. Г. Ониани, “О сходимости кратных рядов Хаара”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 99–116; англ. пер.: G. G. Oniani, “On the convergence of multiple Haar series”, *Izv. Math.*, **78**:1 (2014), 90–105.
5. В. Ш. Цагарейшвили, “О рядах по системе Хаара”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **60**:1 (1970), 37–39.
6. Г. А. Чхаидзе, “О кратных рядах по системе Хаара”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **66**:3 (1972), 541–544.
7. Т. С. Копалиани, “О сходимости кратных рядов Фурье по системе Хаара в пространствах $H^{p,\omega}$, $H_{p,\Omega}$ ”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **135**:2 (1989), 245–247.
8. В. М. Бугадзе, *Ряды Фурье–Хаара суперпозиций функций*, Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1988, 219 с.

9. И. И. Шарапудинов, “Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье–Хаара”, *Матем. сб.*, **205**:2 (2014), 145–160; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation of functions in variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces by finite Fourier–Haar series”, *Sb. Math.*, **205**:2 (2014), 291–306.
10. Б. И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ.* 1970, ВИНТИ, М., 1971, 109–146; англ. пер.: B. I. Golubov, “Series with respect to the Haar system”, *J. Soviet Math.*, **1**:6 (1973), 704–726.
11. Л. В. Жижиашвили, *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа*, 3-е изд., Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 2005, 196 с.
12. Н. П. Хорошко, “О наилучшем приближении в метрике L некоторых классов функций полиномами по системе Хаара”, *Матем. заметки*, **6**:1 (1969), 47–54; англ. пер.: N. P. Khoroshko, “On the best approximation in the metric of L to certain classes of functions by Haar-system polynomials”, *Math. Notes*, **6**:1 (1969), 487–491.
13. Н. П. Хорошко, “Равномерное приближение полиномами по системе Хаара на классах непрерывных функций”, *Укр. матем. журн.*, **22**:5 (1970), 705–712; англ. пер.: N. P. Khoroshko, “Uniform approximation in classes of continuous functions by polynomials in the Haar system”, *Ukrainian Math. J.*, **22**:5 (1971), 611–618.
14. П. В. Задерей, Н. Н. Задерей, “Равномерные приближения полиномами по системе Хаара на классах непрерывных функций многих переменных”, *Теория приближения функций и ее приложения*, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1984, 60–66.
15. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Равномерное приближение некоторых классов функций нескольких переменных полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов Фурье–Хаара”, *Проблемы теории приближения функций и смежные вопросы*, Сб. трудов Ин-та матем. НАН Украины, **1**, № 1, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2004, 42–59.
16. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “О наилучшем приближении функций ограниченной p -вариации полиномами, построенными по системе Хаара”, *Вестн. Днепропетровского ун-та. Математика*, **11** (2004), 28–34.
17. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987, 424 с.; англ. пер.: N. Korneichuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, xii+452 pp.
18. G. Freud, “Über einseitige Approximation durch Polynome. I”, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16**:1-2 (1955), 12–28.
19. T. Ganelius, “On one-sided approximation by trigonometrical polynomials”, *Math. Scand.*, **4** (1956), 247–258.
20. Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Наукова думка, Киев, 1982, 251 с.
21. А. Н. Щитов, *Экстремальные задачи полиномиальной аппроксимации функций одной и нескольких действительных переменных*, Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2005, 18 с.
22. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Оценки наилучшего одностороннего приближения некоторых классов функций полиномами, построенными по системе Хаара”, Сб. трудов Ин-та матем. НАН Украины, **4**, № 1, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2007, 7–22.
23. G. Faber, “Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **19** (1910), 104–112.
24. Z. Ciesielski, “On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{(0,1)}$ ”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **7**:4 (1959), 227–232.
25. Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system”, *Studia math.*, **23** (1963), 141–157.

26. В. А. Матвеев, “О рядах по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **2:3** (1967), 267–278; англ. пер.: V. A. Matveev, “On Schauder system series”, *Math. Notes*, **2:3** (1967), 646–652.
27. А. С. Логинов, “Приближение непрерывных функций ломаными”, *Матем. заметки*, **6:2** (1969), 149–160; англ. пер.: A. S. Loginov, “Approximation of continuous functions by broken lines”, *Math. Notes*, **6:2** (1969), 549–555.
28. С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера–Шаудера”, *Матем. сб.*, **197:3** (2006), 3–14; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, A. N. Shchitov, “Estimates for the error of approximation of classes of differentiable functions by Faber–Schauder partial sums”, *Sb. Math.*, **197:3** (2006), 303–314.
29. Б. И. Голубов, “О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28:6** (1964), 1271–1296.
30. J. Schauder, “Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen”, *Math. Z.*, **26:1** (1927), 47–65.
31. В. И. Левин, “О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств”, *Матем. сб.*, **4(46):2** (1938), 309–324.
32. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958, 507 с.; пер. с нем.: S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, **VI**, Chelsea Publishing Company, New York, 1951, viii+296 pp.
33. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976, 320 с.
34. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 5-е изд., Наука, М., 1971, 1108 с.; англ. и нем. пер.: I. S. Gradstein, I. M. Ryshik, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln [Tables of series, products and integrals]*, v. 1, 2, German and English dual language edition, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1982, 667 pp., 504 pp.
35. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, x+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
36. И. М. Соболев, *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара*, Наука, М., 1969, 288 с.
37. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, М., 1980, 352 с.

СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ ВАКАРЧУК
(SERGEY B. VAKARCHUK)
Днепропетровский университет им. А. Нобеля,
Украина
E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило в редакцию
21.01.2013
31.07.2014

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ ЩИТОВ
(ALEKSANDR N. SHCHITOV)
Академия таможенной службы Украины,
г. Днепропетровск, Украина
E-mail: an_shchitov@rambler.ru