Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Очаковская, Радиальные мажоранты функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 161–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:05:20

УДК 517.444

О. А. Очаковская

Радиальные мажоранты функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса

Изучается проблема существования ненулевой функции, имеющей заданную радиальную мажоранту и нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Рассмотрен случай, когда функция задана в области, содержащей полупространство.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: сферические средние, периодичность в среднем.

DOI: 10.4213/im8096

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Для всякой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ и фиксированного $r > 0$ через $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , лежащих в $\mathcal{O}$ (если $\mathcal{O}$ не содержит таких шаров, то мы полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$). Описание классов $V_r(\mathcal{O})$ для различных $\mathcal{O}$ было получено в [1, гл. 2] (см. также [2], [3] и [4, теорема 16.4.1]). Класс $V_r(\mathbb{R}^n)$ является достаточно широким, однако он не содержит ненулевых функций с достаточно быстрым убыванием на бесконечности (см. [1, гл. 2]). В связи с этим представляет интерес следующая проблема (см. [1, гл. 2, проблема 4.15]).

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $\mathcal{O}$ – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $r > 0$ фиксировано. Предположим, что $f \in V_r(\mathcal{O})$ и для почти всех $x \in \mathcal{O}$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq F(|x|), \quad (1)$$

где F – заданная положительная функция на $[0, +\infty)$. Для каких F , $\mathcal{O}$, r отсюда следует, что $f = 0$?

Первый точный результат в этом направлении был получен Д. Смитом [5] для случая $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. Он установил, что если $f \in (V_r \cap C)(\mathbb{R}^n)$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)t^{\frac{n-1}{2}} = 0, \quad (2)$$

то $f = 0$. При этом условие (2) нельзя заменить условием

$$F(t) = O(t^{\frac{1-n}{2}}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (3)$$

(см. [5]). Известен также ряд результатов, в которых вместо условия (2) рассматриваются оценки сверху для различных интегральных средних функции F .

Например, если $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$

$$\int_0^\infty t^{n-1}(F(t))^p dt < +\infty,$$

то $f = 0$, а при $p > \frac{2n}{n-1}$ это уже неверно (см. [6], где утверждение сформулировано для сферических средних). Более общие и точные результаты в этом направлении были получены в [7], где условия убывания F на бесконечности определяются ростом величины

$$\int_0^R t^{n-1}(F(t))^p dt$$

при $R \rightarrow +\infty$ и $p \in [1, \frac{2n}{n-1}]$. Для случая $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ рассматривались также аналоги проблемы 1, в которых поведение функции в правой части неравенства (1) различно по разным переменным (см. [8]).

Для областей $\mathcal{O}$, отличных от $\mathbb{R}^n$, проблема 1 исследована мало. Все имеющиеся результаты касаются случая, когда $\mathcal{O}$ содержит внешность шара

$$\mathcal{U}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R\}$$

при некотором $R > 0$ (см. [1]–[3], [9], [10]). Наиболее сильные результаты окончательного характера для широкого класса таких $\mathcal{O}$ получены В. В. Волчковым в [1, гл. 3], где рассмотрена более общая ситуация, когда класс $V_r(\mathcal{O})$ заменяется пространством решений уравнения свертки специального вида. Следуя [1, гл. 3, определение 2.1], введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ называется r -областью, если выполнены следующие условия:

- а) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором замкнутом шаре радиуса r , содержащемся в $\mathcal{O}$;
- б) множество центров всех замкнутых шаров радиуса r , содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Результаты работ [1]–[3] показывают, в частности, что если $\mathcal{O}$ содержит $\mathcal{U}_R$ при некотором $R > 0$ и является r -областью, то для функции $f \in V_r(\mathcal{O})$ из условий (1) и (2) следует, что $f = 0$. При этом (2) нельзя заменить условием (3). Таким образом, в случае $\mathcal{U}_R \subset \mathcal{O}$ требуется такое же убывание F , как и в случае $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. Этот факт интересно сравнить с аналогом проблемы 1 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, где вместо класса $V_r(\mathcal{O})$ рассматривается класс голоморфных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$. Хорошо известно, что условие $F(|z|) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ влечет равенство $f = 0$ для любой целой функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющей оценке $|f(z)| \leq F(|z|)$. Вместе с тем для области $\mathcal{O} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ситуация меняется, как показывает пример функции $f(z) = \frac{1}{z}$. Для ненулевых голоморфных функций известен ряд результатов о связи допустимой скорости убывания функции с ростом размера ее области задания на бесконечности (см. [11, § 3.5]).

В настоящей работе получено решение проблемы 1 для широкого класса областей, содержащих полупространство

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

(см. далее теоремы 1, 2). Кроме того, показано, что требования, налагаемые на область $\mathcal{O}$ в теореме 1, нельзя существенно ослабить (см. теорему 3 и обсуждение после нее).

§ 1. Формулировки основных результатов

Перейдем к формулировкам основных результатов настоящей работы. Напомним, что всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и $r > 0$ фиксировано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{O}$ содержит полупространство H и является r -областью. Пусть также

$$F(t) = O\left(\exp\left(-\frac{t}{\varphi(t)}\right)\right) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где φ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varphi(t)} = +\infty, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)}{\varphi(t)} = 1. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $f \in V_r(\mathcal{O})$ из условия (1) следует, что $f = 0$.

Отметим, что условия (5) и (6) имеют место для многих медленно растущих функций φ . Например, они выполнены, если при достаточно больших t функция φ совпадает с произведением логарифма и нескольких его различных итераций. Основным в теореме 1 является условие (5), измеряющее скорость убывания F . Следующая теорема показывает, что это условие неулучшаемо.

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ и ψ – положительные возрастающие функции на интервале $[0, +\infty)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varphi(t)} dt < +\infty, \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t\psi(t)} dt < +\infty. \quad (7)$$

Тогда для любого $c > 0$ и всякой r -области $\mathcal{O}$, содержащейся во множестве

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > -\left(c + \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right)\psi\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right)\right\},$$

существует ненулевая функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathcal{O})$, удовлетворяющая неравенству (1) при $F(t) = \exp\left(-\frac{t}{\varphi(t)}\right)$.

Для положительной функции $\varphi \in C[0, +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}$ объединение всех замкнутых шаров радиуса r , содержащихся во множестве

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \varepsilon \frac{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}}{\varphi\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right)}\right\}.$$

Из определения 1 следует, что $\mathcal{O}_{\varphi,\varepsilon}$ является r -областью. Следующий результат показывает, что в теореме 1 полупространство H нельзя уменьшить в некотором смысле.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой положительной возрастающей функции $\varphi \in C[0, +\infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ненулевая функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathcal{O}_{\varphi,\varepsilon})$, удовлетворяющая (1) при $F(t) = \exp(-\frac{t}{\varphi(t)})$.*

Таким образом, утверждение теоремы 1 станет неверным, если в ее формулировке заменить полупространство H на множество $\mathcal{O}_{\varphi,\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Обсудим теперь требования, налагаемые на $\mathcal{O}$ в теореме 1. В условии теоремы 1 требуется, чтобы область $\mathcal{O}$ удовлетворяла условиям а) и б) из определения 1. Покажем, что ни одно из этих условий убрать нельзя. Необходимость условия а) очевидна. Для доказательства необходимости условия б) положим $\mathcal{O} = H \cup B_{r+\varepsilon}(y)$, где $B_{r+\varepsilon}(y)$ – открытый шар радиуса $r+\varepsilon$ с центром $y = (0, \dots, 0, -r) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $H \subset \mathcal{O}$ и выполнено условие а). Кроме того, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует ненулевая функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathcal{O})$ с носителем в шаре $B_\varepsilon(y)$. Действительно, в этом случае всякий замкнутый шар радиуса r , лежащий в $\mathcal{O}$, либо содержит $B_\varepsilon(y)$, либо не пересекается с $B_\varepsilon(y)$. Поэтому всякая ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathcal{O})$ такая, что $f = 0$ в $\mathcal{O} \setminus B_\varepsilon(y)$ и $\int_{B_\varepsilon(y)} f(x) dx = 0$, принадлежит классу $V_r(\mathcal{O})$. Таким образом, утверждение теоремы 1 становится неверным, если $\mathcal{O}$ не удовлетворяет условию б) из определения 1.

§ 2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Далее, как обычно, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}$,

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad m, k \in \mathbb{Z}_+, \quad m \geq k.$$

Мы используем стандартные обозначения Γ и J_ν для соответственно гамма-функции и функции Бесселя первого рода порядка ν (см., например, [12, § 1]). Для $z > 0$ положим

$$I_\nu(z) = J_\nu(z)z^{-1}.$$

Функция I_ν допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Кроме того,

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \quad (8)$$

(см. [12, формула (7.3)]). Из равенства (8) и интегрального представления Пуассона для I_ν (см. [12, формула (14.6)]) следует, что для всех $z > 0$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ имеют место оценки

$$|J_\nu(z)| \leq C_1, \quad (9)$$

$$\left| \left(\frac{d}{dz} \right)^q I_\nu(\alpha z) \right| \leq C_2 \alpha^q, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha > 0, \quad (10)$$

с постоянными $C_1, C_2 > 0$, зависящими только от ν .

Для $r > 0, \eta > 0$ рассмотрим функцию

$$\psi_\eta(t) = \begin{cases} (r^2 - t^2)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}}(\eta\sqrt{r^2 - t^2}), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geq r. \end{cases} \quad (11)$$

Ее преобразование Фурье

$$\widehat{\psi}_\eta(z) = \int_{-r}^r \psi_\eta(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

является четной целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей оценке

$$|\widehat{\psi}_\eta(z)| \leq C_3 e^{r|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

где $C_3 > 0$ не зависит от z . Используя (8), (11) и формулу Сонина (см. [12, формула (20.10)]), из (12) находим

$$\widehat{\psi}_\eta(z) = \sqrt{2\pi} r^{n-1} \eta^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n}{2}}(r\sqrt{\eta^2 + z^2}). \quad (14)$$

Далее в этом параграфе предполагается, что $n \geq 3$. Пусть $\mathbb{S}^{n-2} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| = 1\}$; ω_{n-2} – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-2}$; ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^{n-1}$ (для любого $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеем $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = \frac{x}{\rho} \in \mathbb{S}^{n-2}$). Пусть $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник на $\mathbb{S}^{n-2}$, рассматриваемое как подпространство в $L^2(\mathbb{S}^{n-2})$ (см. [13, гл. 4, §2]), d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. В частности, для $k=0$ имеем $d_0 = 1$ и $Y_1^{(0)}(\sigma) = \omega_{n-1}^{-1/2}$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}^{n-2}$. При $n=3, k \geq 1$ в дальнейшем используется следующий базис в $\mathcal{H}_k$:

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma_1 - i\sigma_2)^k \quad (15)$$

(в этом случае $d_k = 2$ для всех $k \geq 1$).

Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}^1(H)$ соответствует ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f^{k,l}, \quad (16)$$

где $f^{k,l}(x) = f_{k,l}(\rho, x_n) Y_l^{(k)}(\sigma)$ и

$$f_{k,l}(\rho, x_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} f(\rho\sigma_1, \dots, \rho\sigma_{n-1}, x_n) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\omega(\sigma), \quad (17)$$

$d\omega$ – поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-2}$. Если для почти всех (по мере Лебега) $x_n > 0$ функция f принадлежит классу $L(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \dots, x_{n-1}$, то из соотношения (17) и теоремы Фубини имеем

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} |f_{k,l}(\rho, x_n)| d\rho < +\infty. \quad (18)$$

Для возрастающей функции φ на интервале $[0, +\infty)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6), обозначим через $V_{r,\varphi}(H)$ множество всех $f \in V_r(H)$ таких, что выполнены условия (1) и (4).

Из соотношения (6) следует, что

$$\varphi(t) = O(t^\varepsilon) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (19)$$

для любого $\varepsilon > 0$ (см. [14, п. 1.5]). В частности, всякая функция $f \in V_{r,\varphi}(H)$ принадлежит классу $L(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \dots, x_{n-1}$ для почти всех $x_n > 0$, и выполнено условие (18).

Далее нам потребуются некоторые свойства класса $V_{r,\varphi}(H)$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in V_{r,\varphi}(H)$. Тогда $f^{k,l} \in V_{r,\varphi}(H)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d_k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $SO(n-1)$ – группа вращений $\mathbb{R}^{n-1}$ и $d\tau$ – мера Хаара на $SO(n-1)$, нормированная условием $\int_{SO(n-1)} d\tau = 1$. Для любого замкнутого шара $B \subset H$ радиуса r и любого $\tau \in SO(n-1)$ выполнено равенство

$$\int_B f(\tau^{-1}x) dx = 0, \quad (20)$$

в котором вращение τ действует на переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$. Пусть $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $SO(n-1)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [15, гл. 9, § 2, п. 7]) и $\{t_{l,p}^k\}_{1 \leq l, p \leq d_k}$ – матрица представления $T^k(\tau)$ в базисе $\{Y_l^{(k)}\}$, т. е.

$$(T^k(\tau)Y_l^{(k)})(\zeta) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\zeta) = \sum_{p=1}^{d_k} t_{l,p}^k(\tau)Y_p^{(k)}(\zeta), \quad \tau \in SO(n-1), \quad \zeta \in \mathbb{S}^{n-2}.$$

При $k=0$ имеем $t_{1,1}^0(\tau) = 1$ для всех $\tau \in SO(n-1)$. Если $n=3$ и τ – вращение на угол Θ в $\mathbb{R}^2$, то

$$t_{1,1}^k(\tau) = \overline{t_{2,2}^k(\tau)} = e^{-ik\Theta}, \quad t_{1,2}^k(\tau) = t_{2,1}^k(\tau) = 0$$

(см. (15)). Тогда для членов ряда (16) из формулы (17) имеем равенство

$$f^{k,l}(x) = \int_{SO(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,l}^k(\tau)} d\tau. \quad (21)$$

При $n > 3$ из неприводимости $T^k(\tau)$ (см. [15, гл. 9, § 2, п. 10]) следует, что при всех $1 \leq l, p \leq d_k$

$$f_{k,l}(\rho, x_n)Y_p^{(k)}(\sigma) = d_k \int_{SO(n-1)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau \quad (22)$$

(см. [1, гл. 1, формула (5.19)]). Из равенств (21), (22), (20) и произвольности $B \subset H$ получаем, что $f^{k,l} \in V_r(H)$ при всех k, l . Кроме того, из соотношений (17) и (1) имеем

$$|f_{k,l}(\rho, x_n)| \leq F(|x|) \int_{\mathbb{S}^{n-2}} |\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}| d\omega(\sigma). \quad (23)$$

Таким образом, $f^{k,l} \in V_{r,\varphi}(H)$, и лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in V_{r,\varphi}(H)$, $t > 0$ и

$$M_q(t) = 1 + \int_0^\infty \rho^{n+k+q-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M_q(t))^{1/q} \right)^{-1} = +\infty. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φ возрастает, из условия (6) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\alpha t)}{\varphi(t)} = 1$$

для любого $\alpha > 0$. Используя [14, теорема 12], получаем, что существует число $c_1 > 1$ такое, что при всех $t \geq c_1$ имеет место равенство

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_{c_1}^t \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta + v(t) \right), \quad (25)$$

где $u \in C([c_1, +\infty))$, $u(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ и v — ограниченная функция на $[c_1, +\infty)$, для которой существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Положим

$$g(t) = \exp \left(\int_{c_1}^t \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right), \quad t \geq c_1. \quad (26)$$

Тогда $g \in C^1([c_1, +\infty))$, $g > 0$ и

$$tg'(t) = o(g(t)) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Кроме того, из (25), (26) и свойств v следует, что существуют постоянные $c_2, c_3 > 0$ такие, что

$$c_2 \varphi(t) \leq g(t) \leq c_3 \varphi(t), \quad t \geq c_1. \quad (28)$$

Далее, имеем

$$|M_q(t)| \leq 1 + c_1^q \int_0^{c_1} \rho^{n+k-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho + G_q(t), \quad (29)$$

где

$$G_q(t) = \int_{c_1}^\infty \rho^{n+k+q-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho.$$

Оценим $G_q(t)$ сверху. Используя соотношения (23), (4) и (28), получаем

$$G_q(t) = \int_{c_1}^\infty \rho^{n+k+q-2} \exp \left(-c_4 \frac{\rho}{g(\rho)} \right) d\rho, \quad (30)$$

где $c_4 > 0$ не зависит от q . Положим

$$U_q(\rho) = (n+k+q) \ln \rho - c_4 \frac{\rho}{g(\rho)}, \quad \rho \geq c_1. \quad (31)$$

Из (28) и (19) видно, что $U_q(\rho) \rightarrow -\infty$ при $\rho \rightarrow +\infty$. Если $U_q(\rho) \leq U_q(c_1)$ для всех $\rho \geq c_1$, то из (30) следует, что

$$G_q(t) \leq c_5 c_1^q, \quad (32)$$

где $c_5 > 0$ не зависит от q . В противном случае существует хотя бы одна точка $\rho_q \in (c_1, +\infty)$ в которой функция U_q достигает максимума на $[c_1, +\infty)$. Тогда $U'_q(\rho_q) = 0$, т. е.

$$n + k + q = \frac{c_4 \rho_q}{g(\rho_q)} \left(1 - \frac{g'(\rho_q)}{g(\rho_q)} \right).$$

Из этого равенства и (27) вытекает, что $\rho_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow \infty$ и

$$c_4 \rho_q \sim qg(\rho_q) \quad \text{при } q \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Кроме того, из определения ρ_q и равенства (31) имеем

$$U_q(\rho) \leq (n + k + q) \ln \rho_q - c_4 \frac{\rho_q}{g(\rho_q)}, \quad \rho \geq c_1.$$

Учитывая (6), отсюда и из (33), (28), (32) находим

$$G_q(t) \leq (c_6 q \varphi(q))^q, \quad q \in \mathbb{N},$$

где $c_6 > 0$ не зависит от q . Используя монотонность φ , из последнего неравенства и (29) получаем утверждение леммы.

Далее, пусть $f \in V_{r,\varphi}(H)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d_k\}$. Для любого $\eta > 0$ и почти всех $t \in (0, +\infty)$ положим

$$\Phi(\eta, t) = \int_0^\infty \rho^{k+n-2} f_{k,l}(\rho, t) I_{\frac{n-3}{2}+k}(\rho\eta) d\rho. \quad (34)$$

Оценки (9) и (18) показывают, что функция Φ непрерывна на $(0, +\infty)$ по переменной η для почти всех $t > 0$.

ЛЕММА 3. *Для любых $\eta > 0$, $h > r$ выполнено равенство*

$$\int_{-r}^r \Phi(\eta, t+h) \psi_\eta(t) dt = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем $f^{k,l} \in V_{r,\varphi}(H)$. Следовательно, получаем

$$\int_{|x| \leq r} f^{k,l}(x_1 + \xi_1, \dots, x_{n-1} + \xi_{n-1}, x_n + h) dx = 0 \quad (35)$$

для любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $h > r$. Пусть $\eta > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 = \eta^2$, $(\lambda, \xi) = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-1} \xi_{n-1}$. Для элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Умножим равенство (35) на $e^{i(\lambda, \xi)}$ и проинтегрируем его по ξ на $\mathbb{R}^{n-1}$. После перемены порядка интегрирования и элементарных преобразований находим

$$\int_{|x| \leq r} e^{-i(\lambda, x')} g_\lambda(x_n + h) dx = 0, \quad (36)$$

где

$$g_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{k,l}(x', t) e^{i(\lambda, x')} dx', \quad t > 0.$$

Переходя в (36) к повторному интегрированию, получаем

$$\int_{-r}^r g_\lambda(x_n + h) \int_{|x'| \leq r^2 - x_n^2} e^{i(\lambda, x')} dx' dx_n = 0.$$

Используя (11) и [13, гл. 4, теорема 4.15], отсюда имеем равенство

$$\int_{-r}^r g_{\lambda}(t+h)\psi_{\eta}(t) dt = 0.$$

Из последнего равенства и (34) следует (см. [1, гл. 1, формула (5.29)]) утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $b > a > \lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $w \in C^m([a, b])$ и

$$w^{(j)}(a) = w^{(j)}(b) = 0, \quad j \in \{0, \dots, m-1\}. \quad (37)$$

Пусть также $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $z \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, и

$$g(z, \xi) = \int_a^b w(t) \exp(itz - \xi \sqrt{t^2 - \lambda^2}) dt. \quad (38)$$

Тогда существует $\delta \in (0, \frac{a-\lambda}{2})$, зависящее только от a, b, λ и такое, что

$$|g(z, \xi)| \leq G(\xi) \frac{(b-a)m!}{|z|^m e^{a \operatorname{Im} z}} \sum_{j=0}^m \frac{\|w^{(j)}\|_{C([a,b])}}{j! \delta^{m-j}},$$

где

$$G(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi \sqrt{(b+\delta)^2 - \lambda^2}), & \text{если } \xi \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\xi}{2} \sqrt{(a-\delta)^2 - \lambda^2}\right), & \text{если } \xi > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $u(t, \xi) = w(t) \exp(-\xi \sqrt{t^2 - \lambda^2})$. Интегрируя по частям в (38) с использованием (37), получаем неравенство

$$|g(z, \xi)| \leq \frac{e^{-a \operatorname{Im} z}}{|z|^m} \int_a^b \left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t, \xi) \right| dt. \quad (39)$$

Из формулы Лейбница следует, что

$$\left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m}(t, \xi) \right| \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |w^{(j)}(t) (\exp(-\sqrt{t^2 - \lambda^2}))_t^{(m-j)}|. \quad (40)$$

Далее, при достаточно малых $\delta \in (0, \frac{a-\lambda}{2})$ и всех $\zeta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\zeta - t| \leq \delta$ при некотором $t \in [a, b]$, имеем оценки

$$\frac{1}{2} \sqrt{(a-\delta)^2 - \lambda^2} \leq \operatorname{Re} \sqrt{\zeta^2 - \lambda^2} \leq \sqrt{(b+\delta)^2 - \lambda^2}, \quad (41)$$

где выбрана ветвь квадратного корня, принимающая положительные значения при $\zeta > \lambda$. Применяя формулу Коши для окружности $|\zeta - t| = \delta$, где $t \in [a, b]$, получаем

$$|(\exp(-\xi \sqrt{t^2 - \lambda^2}))_t^{m-j}| \leq \frac{(m-j)!}{\delta^{m-j}} \max_{|\zeta-t|=\delta} |\exp(-\xi \sqrt{\zeta^2 - \lambda^2})|.$$

Отсюда и из оценок (39)–(41) следует утверждение леммы.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть r -область $\mathcal{O}$ содержит полупространство H . Предположим, что $f \in V_r(\mathcal{O})$ и выполнены условия (1), (4), где φ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая (5) и (6). Докажем, что $f = 0$. Сначала рассмотрим случай $n \geq 3$. Из равенства (14) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\eta \in (0, \varepsilon)$ все нули функции $\widehat{\psi}_\eta$ являются вещественными и простыми (см. [12, § 23]). Обозначим $Z_\eta = \{z \in \mathbb{R} : \widehat{\psi}_\eta(z) = 0\}$. Для любого $\lambda \in Z_\eta$ из оценки (13) и теоремы Пэли–Винера (см. [13, гл. 3, теорема 4.1]) следует, что существует функция $\psi_{\eta, \lambda} \in L^2(\mathbb{R})$ с носителем на $[-r, r]$ такая, что

$$\widehat{\psi}_{\eta, \lambda}(z)(z - \lambda) = \widehat{\psi}_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Последнее равенство означает, что

$$\left(-i \frac{d}{dt} - \lambda\right) \psi_{\eta, \lambda} = \psi_\eta, \quad (42)$$

где дифференцирование понимается в смысле распределений. Решая уравнение (42), находим

$$\psi_{\eta, \lambda}(t) = \int_{-r}^t \psi_\eta(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (43)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\psi_{\eta, \lambda} \in C^1(\mathbb{R})$.

Далее, пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d_k\}$. Для $\eta \in (0, \varepsilon)$ и $\lambda \in Z_\eta$ рассмотрим функцию

$$g_{\lambda, \eta}(h) = \int_{-r}^r \Phi(\eta, t+h) \psi_{\eta, \lambda}(t) dt, \quad h > r,$$

где Φ определяется равенством (34). Из (42) и леммы 3 имеем $ig'_{\lambda, \eta} + \lambda g_{\lambda, \eta} = 0$. Это означает, что $g_{\lambda, \eta}(h) = c_1 e^{i\lambda h}$, где постоянная $c_1 \in \mathbb{C}$ не зависит от h . Поскольку $\lambda \in \mathbb{R}$, отсюда и из (34) получаем

$$|c_1| = |g_{\lambda, \eta}(h)| \leq \int_{-r}^r |\psi_{\eta, \lambda}(t)| \int_0^\infty \rho^{n+k-2} |f_{k, l}(\rho, t+h) I_{\frac{n-3}{2}+k}(\rho\eta)| d\rho dt. \quad (44)$$

Из соотношений (17) и (19) следует, что

$$|f_{k, l}(\rho, t+h)| \leq c_2 \exp(-(\rho^2 + (h-r)^2)^{1/3}) \quad \text{при } h \rightarrow +\infty,$$

где $c_2 > 0$ не зависит от $\rho > 0$, $t \in [-r, r]$. Переходя в (44) к пределу при $h \rightarrow +\infty$ и используя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем $c_1 = 0$. Таким образом,

$$\int_{-r}^r \Phi(\eta, t+h) \psi_{\eta, \lambda}(t) dt = 0 \quad (45)$$

для любых $\eta \in (0, \varepsilon)$, $\lambda \in Z_\eta$, $h > r$. Пусть теперь $\Lambda \subset (0, \varepsilon)$ – счетное множество, всюду плотное на $(0, \varepsilon)$. Из (45), (43) и [16, теорема 2.1] следует, что для любого $\eta \in \Lambda$ существует множество $A_\eta \subset (0, +\infty)$ с нулевой лебеговой мерой такое, что $\Phi(\eta, t) = 0$ при всех $t \in (0, +\infty) \setminus A_\eta$. Полагая $A = (0, +\infty) \setminus (\bigcup_{\eta \in \Lambda} A_\eta)$, имеем $\Phi(\eta, t) = 0$ при любых $\eta \in \Lambda$, $t \in A$. В силу

свойств Λ и непрерывности функции Φ по переменной $\eta \in (0, \varepsilon)$ при всех $t \in A$ (см. (34), (18) и (9)) имеем

$$\Phi(\eta, t) = 0, \quad \eta \in (0, \varepsilon), \quad t \in A. \quad (46)$$

С другой стороны, для любых $q \in \mathbb{Z}_+$, $\eta \in (0, +\infty)$ из (34) и (10) получаем

$$\left| \left(\frac{d}{d\eta} \right)^q \Phi(\eta, t) \right| \leq c_3 \int_0^\infty \rho^{n+k-2+q} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho,$$

где $c_3 > 0$ не зависит от q . По теореме Данжуа–Карлемана (см. [4, теорема 1.3.8]) отсюда и из леммы 2 следует, что для почти всех $t > 0$ функция $\Phi(\eta, t)$ принадлежит квазианалитическому классу функций по переменной η на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Тогда равенство (46) показывает, что $\Phi(\eta, t) = 0$ для всех $\eta > 0$ и почти всех $t > 0$. В силу (34) и произвольности k, l это означает (см., например, [13, гл. 4, следствие 2.3]), что $f = 0$ в H . Применяя теперь теорему единственности для класса $V_r(\mathcal{O})$ (см. [1, гл. 2, теорема 1.2]), получаем $f = 0$ в $\mathcal{O}$. Тем самым требуемое утверждение доказано при $n \geq 3$.

Пусть теперь $n = 2$. В этом случае положим

$$\Phi(\eta, t) = \int_0^\infty f(x_1, t) e^{i\eta x_1} dx_1, \quad \eta > 0, \quad t > 0. \quad (47)$$

В силу доказательства леммы 3 имеем

$$\int_{-r}^r \Phi(\eta, t+h) \psi_\eta(t) dt = 0, \quad \eta > 0, \quad h > r.$$

Далее, пусть

$$M_q(t) = 1 + \int_0^\infty x_1^q |f(x_1, t)| dx_1.$$

Из доказательства леммы 2 видно, что выполнено условие (24). Повторяя теперь приведенные выше рассуждения для случая $n > 2$ с функцией Φ , определенной в (47), получаем утверждение теоремы 1 и при $n = 2$.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть φ и ψ – положительные возрастающие функции на $[0, +\infty)$, удовлетворяющие условию (7). Положим

$$\mu(t) = \min(\varphi(t), \psi(t), \sqrt{t}), \quad t \geq 0. \quad (48)$$

Тогда μ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Пусть

$$\begin{aligned} E_1 &= \{t \geq 1: \mu(t) = \varphi(t)\}, & E_2 &= \{t \geq 1: \mu(t) = \psi(t)\}, \\ E_3 &= \{t \geq 1: \mu(t) = \sqrt{t}\}. \end{aligned}$$

В силу условия (7) имеем

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\mu(t)} \leq \int_{E_1} \frac{dt}{t\mu(t)} + \int_{E_2} \frac{dt}{t\mu(t)} + \int_{E_3} \frac{dt}{t\mu(t)} < +\infty. \quad (49)$$

Нетрудно видеть, что существует последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k\mu(k)} < +\infty, \quad (50)$$

и последовательность $\frac{k\mu(k)}{\xi_k}$ возрастает. Обозначим

$$m_k = \left(\frac{k\mu(k)}{\xi_k} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Поскольку

$$\frac{\xi_k}{\mu(k)} \leq \sum_{\frac{k}{2} \leq j \leq k} \frac{2\xi_j}{j\mu(j)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

из (50) получаем, что

$$m_k > c_1^k k^k \quad (52)$$

для некоторого $c_1 > 0$, не зависящего от k . Кроме того, для всех $k, l \in \mathbb{N}$ имеем

$$m_k m_l = (m_k^{1/k})^k (m_l^{1/l})^l \leq (m_{k+l}^{1/(k+l)})^k (m_{k+l}^{1/(k+l)})^l = m_{k+l}. \quad (53)$$

Пусть $b > a > \lambda$, где λ – некоторый положительный корень уравнения $J_{n/2}(r\lambda) = 0$. Из (50), (51) и [4, теоремы 1.3.5, 1.3.8] следует, что существует ненулевая неотрицательная функция $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ с носителем на $[a, b]$, для которой

$$\|h^{(q)}\|_{C([a, b])} \leq m_q, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (54)$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = x_1 \int_a^b I_{\frac{n-1}{2}}(t\rho) \exp(-x_n \sqrt{t^2 - \lambda^2}) h(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (55)$$

где, как и выше, $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. При достаточно малых ρ имеем $I_{\frac{n-1}{2}}(t\rho) > 0$ для всех $t \in [a, b]$. Отсюда и из неотрицательности h следует, что функция f_1 положительна на некотором открытом подмножестве H . Используя формулы для дифференцирования функций Бесселя (см. [12, формулы (6.1), (6.2), (6.5)]), из (55) заключаем, что f_1 удовлетворяет уравнению $\Delta f_1 + \lambda^2 f_1 = 0$. Следовательно, по теореме о среднем для решения уравнения Гельмгольца (см. [1, гл. 1, формула (7.9)]) для любого $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\int_{|x| \leq r} f_1(x+y) dx = (2\pi)^{n/2} r^n J_{n/2}(\lambda r) f_1(y) = 0.$$

Это означает, что $f_1 \in V_r(\mathbb{R}^n)$. Оценим теперь $|f_1|$ сверху на множестве

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_n > -\left(c + \frac{\rho}{\mu(\rho)} \right) \right\}, \quad c > 0.$$

Для этого нам потребуется следующая

ЛЕММА 5. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда существуют постоянные $c_2 > 0$, $c_3 > \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a+\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2}$, $0 < c_4 < \sqrt{\left(b + \frac{a-\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2}$, не зависящие от x , q и такие, что

$$|f_1(x)| \leq m_q \left(\frac{c_2}{\rho}\right)^q \Phi(x), \quad (56)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} |x_1|e^{-c_3 x_n}, & \text{если } x_n \geq 0, \\ |x_1|e^{-c_4 |x_n|}, & \text{если } x_n < 0. \end{cases} \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим односвязную область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, полученную удалением из $\mathbb{C}$ лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Затем выберем ту ветвь функции $(1 - z^2)^{\frac{n-2}{2}}$, определенной в этой области, которая положительна на интервале $(-1, 1)$. Используя [13, гл. 4, лемма 3.1], для любых $t \in [a, b]$, $\rho \geq 1$ имеем равенство

$$I_{\frac{n-1}{2}}(t\rho) = \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^\infty e^{it\rho(iu-1)} (u^2 + 2iu)^{\frac{n-2}{2}} du - \int_0^\infty e^{it\rho(1+iu)} (u^2 - 2iu)^{\frac{n-2}{2}} du \right),$$

где $\alpha_n = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}$ (см. [13, гл. 4, доказательство леммы 3.11]). Отсюда и из (55) находим

$$f_1(x) = \frac{x_1}{\alpha_n} \left(\int_0^\infty (u^2 + 2iu)^{\frac{n-2}{2}} \int_a^b h(t) \exp(it\rho(iu-1) - x_n \sqrt{t^2 - \lambda^2}) dt du - \int_0^\infty (u^2 - 2iu)^{\frac{n-2}{2}} \int_a^b h(t) \exp(it\rho(1+iu) - x_n \sqrt{t^2 - \lambda^2}) dt du \right).$$

Учитывая, что

$$(u^2 \pm 2iu)^{\frac{n-2}{2}} = \begin{cases} O(u^{\frac{n-2}{2}}), & \text{если } 0 < u < 1, \\ O(u^{n-2}), & \text{если } u \geq 1, \end{cases}$$

и используя соотношения (52)–(54), из леммы 4 получаем требуемое утверждение.

Продолжим доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию $t(u)$, заданную при $u \geq 0$ следующим образом:

$$t(u)\mu(t(u)) = u. \quad (58)$$

Поскольку μ возрастает, функция t определена корректно. Кроме того, функция t возрастает на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} t(u) = +\infty. \quad (59)$$

Из (58), (59) и (49) следует, что существует $R_1 > 0$ такое, что $t(u) < u$ при всех $u \geq R_1$. Отсюда и из (58) имеем

$$t(u) = \frac{u}{\mu(t(u))} > \frac{u}{\mu(u)}, \quad u \geq R_1. \quad (60)$$

Пусть теперь $x \in E$, $\rho \geq R_1$, $q = [t(\rho)]$, $A > c_4 + 1$. Из (59) и первого условия в (50) делаем вывод, что существует $R_2 > R_1$ такое, что

$$q_1 \geq 1, \quad \ln \frac{\xi_q}{c_2} > 8A, \quad \rho \geq R_2. \quad (61)$$

Учитывая, что $qM(q) \leq t(\rho)\mu(t(\rho)) = \rho$, из (56) и (61) получаем $|f_1(x)| \leq \Phi(x)e^{-4Aq}$ при $x \in E$, $\rho \geq R_2$. Поскольку $q > \frac{1}{2}t(\rho)$, отсюда и из соотношений (60), (48) следует, что

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &\leq \Phi(x) \exp\left(-4A \frac{\rho}{\mu(\rho)}\right) \\ &\leq \Phi(x) \exp\left(-2A \left(\sqrt{\rho} + \frac{\rho}{\mu(\rho)}\right)\right), \quad x \in E, \quad \rho \geq R_2. \end{aligned} \quad (62)$$

Далее, в силу возрастания μ и соотношения (49) существует $R_3 > R_2$ такое, что

$$\mu(\rho) \min(c_3, \sqrt{a^2 - \lambda^2}) > 2, \quad c + \frac{\rho}{\mu(\rho)} < \rho, \quad \rho \geq R_3. \quad (63)$$

Оценим теперь $|f_1(x)|$ при $x \in E$, $\rho \geq R_3$. Если $\rho \geq \frac{1}{2}|x|$, из (62) имеем

$$|f_1(x)| \leq \Phi(x) \exp\left(-A \left(\sqrt{|x|} + \frac{|x|}{\mu(|x|)}\right)\right). \quad (64)$$

Это же неравенство выполнено при $\rho \geq R_3$, $x_n \leq 0$, ибо в этом случае из второго неравенства в (63) и определения E следует, что $\rho \geq \frac{1}{2}|x|$. Если же $\rho < \frac{1}{2}|x|$ и $x_n > 0$, то из равенства $|x|^2 = \rho^2 + x_n^2$ имеем $x_n > \frac{\sqrt{3}}{2}|x|$. Учитывая первое неравенство в (63), из (62) и (57) находим

$$|f_1(x)| \leq |x_1| \exp\left(-\sqrt{\rho} - \frac{|x|}{\mu(|x|)}\right). \quad (65)$$

Пусть теперь $\rho \leq R_3$ и $x_n > 0$. Тогда при $|x| > 2R_3$ имеем $|x| > 2\rho$ и, как и выше, $x_n > \frac{\sqrt{3}}{2}|x|$. Кроме того, $\mu(|x|)\sqrt{a^2 - \lambda^2} > 2$ в силу первого неравенства в (63). Из этих оценок и (55) получаем, что при указанных условиях

$$|f_1(x)| \leq c_5 \exp\left(-\frac{|x|}{\mu(|x|)}\right), \quad (66)$$

где $c_5 > 0$ не зависит от x . Наконец, если $\rho \leq R_3$ и $x_n \leq 0$, то из определения E вытекает, что $|x| \leq R_4$ для некоторого $R_4 > R_3$. Объединяя оценки (64)–(66) и соотношение (57), делаем вывод, что при любом $x \in E$ выполнено неравенство

$$|f_1(x)| \leq c_6 \exp\left(-\frac{|x|}{\mu(|x|)}\right),$$

где $c_6 > 0$ не зависит от x . Отсюда и из (48) следует, что функция $f(x) = \frac{1}{c_6}f_1(x)$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Пусть $\varphi \in C[0, +\infty)$ – положительная возрастающая функция, и пусть $\varepsilon > 0$. Для любого $x \in \mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}$ имеем

$$|x| = \sqrt{x_n^2 + \rho^2} < \sqrt{x_n^2 + (\varepsilon^{-1}x_n\varphi(\rho))^2} \leq c_1 x_n \varphi(\rho),$$

где $c_1 = \frac{1}{\varepsilon\varphi(0)}\sqrt{\varphi^2(0) + \varepsilon^2}$. Следовательно,

$$x_n > \frac{|x|}{c_1\varphi(|x|)}, \quad x \in \mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}. \quad (67)$$

Пусть $\lambda > 0$, $J_{n/2}(\lambda r) = 0$ и $b > a > \lambda$, причем число a выбрано настолько большим, чтобы

$$\sqrt{\left(\frac{a+\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2} > 2c_1. \quad (68)$$

При указанных a , b , λ рассмотрим функцию f_1 , заданную в (55). Как и в доказательстве теоремы 2, заключаем, что $f_1 \in (V_r \cap C^\infty)(\mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon})$ и f_1 является положительной на некотором открытом подмножестве $\mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}$. Кроме того, при $x \in \mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}$ и $\rho \leq 1$ из (55), (67) и (68) следует, что

$$|f_1(x)| \leq c_2 \exp(-x_n \sqrt{a^2 - \lambda^2}) \leq c_2 \exp\left(-\frac{|x|}{\varphi(|x|)}\right), \quad (69)$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от x .

Предположим теперь, что $x \in \mathcal{O}_{\varphi, \varepsilon}$ и $\rho > 1$. Применяя лемму 5 при $q = 1$ и используя (67) и (68), получаем

$$|f_1(x)| \leq c_3 \exp\left(-\frac{x_n}{2} \sqrt{\left(\frac{a+\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2}\right) \leq c_3 \exp\left(-\frac{|x|}{\varphi(|x|)}\right) \quad (70)$$

для некоторого $c_3 > 0$, не зависящего от x . Оценки (69) и (70) показывают, что функция $f(x) = \frac{1}{c}f_1(x)$, где $c = \max(c_2, c_3)$, удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.

Список литературы

1. V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
2. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, London, 2009.
3. В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Solution of the support problem for several function classes”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.
4. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, 2, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vols. 1, 2, Grundlehren Math. Wiss., **256–257**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. J. D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72**:3 (1972), 403–416.

6. S. Thangavelu, “Spherical means and CR functions on the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **63** (1994), 255–286.
7. В. В. Волчков, “Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 59–65; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Uniqueness theorems for some classes of functions with zero spherical means”, *Math. Notes*, **62**:1 (1997), 50–55.
8. О. А. Очаковская, “Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними”, *Матем. сб.*, **199**:1 (2008), 47–66; англ. пер.: O. A. Ochakovskaya, “Precise characterizations of admissible rate of decrease of a non-trivial function with zero ball means”, *Sb. Math.*, **199**:1 (2008), 45–65.
9. A. Sitaram, “Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ ”, *Illinois J. Math.*, **28**:2 (1984), 339–347.
10. M. Shahshahani, A. Sitaram, “The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces”, *Integral geometry* (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 267–277.
11. М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, М., 1979; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Evgrafov, *Asymptotic estimates and entire functions*, Gordon and Breach, New York, 1961.
12. Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, М., 1971.
13. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
14. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: Eu. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
15. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
16. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **105** (2008), 43–123.

ОКСАНА АЛЕКСАНДРОВНА ОЧАКОВСКАЯ
(OKSANA A. OSCHAKOVSKAYA)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ochakovskaja@yandex.ua

Поступило в редакцию
21.01.2013