Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, Субримановы геометрии на компактных однородных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 35–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:40:49

УДК 514.765.1+514.752.8

В. В. Горбачевич

Субримановы геометрии на компактных однородных пространствах

Рассматриваются вполне неголономные субримановы структуры на компактных однородных пространствах. Высказана гипотеза о том, что в большинстве случаев наличие такой структуры влечет за собой наличие инвариантной римановой структуры. Эта гипотеза доказана для нескольких важных классов компактных однородных пространств (причем в усиленной форме).

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: инвариантное распределение, субриманова структура, однородное пространство.

Введение

В последнее 10–20 лет на однородных пространствах G/H групп Ли очень часто рассматривают однородные геометрические структуры самых разных типов. При этом часто удается построить контрпримеры к различным предположениям об этих структурах, которые не удавалось построить на других многообразиях. С другой стороны, на однородных пространствах можно иногда построить интересные примеры геометрических структур (инвариантных), расширяющих горизонты изучения этих структур. В настоящей статье на компактных однородных пространствах рассматриваются инвариантные субримановы структуры. Эти структуры представляют значительный интерес в некоторых прикладных задачах (в механике, теории управления и др.). При этом особое внимание уделяется случаю, когда эти субримановы структуры задаются на вполне неголономных распределениях. Именно вполне неголономные субримановы структуры имеют замечательные геометрические свойства, роднящие их с римановыми структурами (хотя понятие субримановой структуры намного более общее, чем понятие римановой структуры на многообразии). Поэтому мы будем использовать для субримановых структур на вполне неголономных распределениях термин “субримановы геометрии” (в отличие от общих субримановых структур). Оказывается, что на компактных однородных пространствах общего вида, принципиально отличных от римановых, инвариантных субримановых структур на вполне неголономных распределениях, видимо, не существует, так что большая часть статьи посвящена “отрицательным” результатам о субримановых геометриях. Отметим, что случай компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой уже был рассмотрен в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00465-а).

© В. В. Горбачевич, 2014

Введем некоторые определения.

Пусть M – некоторое гладкое многообразие размерности n . Гладким p -мерным распределением $\mathcal{P}$ на M называется гладкое сечение расслоения над M со слоем $\text{Gr}_{n,p}$ (грассмановым многообразием p -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$), ассоциированного с касательным расслоением над M . Другими словами, задается семейство p -мерных подпространств $\mathcal{P}_x$ (которые будем называть *листами распределения*) в касательных пространствах $T_x(M)$, гладко зависящее от точки $x \in M$. Часто распределения на многообразиях вводят как объекты, двойственные к системам уравнений Пфаффа (задаваемым системами линейных дифференциальных форм).

Распределение $\mathcal{P}$ называется *голономным* (или *интегрируемым*), если интегрируема соответствующая ему система уравнений Пфаффа. Это означает, что существует разбиение многообразия M на p -мерные подмногообразия, касательные пространства к которым совпадают с листами $\mathcal{P}_x$ распределения $\mathcal{P}$. Отметим, что распределение при $p = 1$ (одномерное распределение) всегда голономно, так как система Пфаффа здесь сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая всегда интегрируема (и мы получаем разбиение многообразия на интегральные линии) в силу теоремы Коши. Однако при $p > 1$ существуют и неголономные распределения. Особый интерес представляют вполне неголономные распределения. Для их определения вначале введем некоторые понятия.

Допустимым векторным полем на многообразии M с заданным на нем распределением $\mathcal{P}$ называется такое гладкое векторное поле, векторы которого в каждой точке x многообразия M принадлежат листам $\mathcal{P}_x$. Коммутатор допустимых векторных полей уже не всегда допустим. Если все такие коммутаторы также всегда допустимы, то распределение называется *инволютивным*. Классическая теорема Фробениуса утверждает, что голономность распределения эквивалентна его инволютивности (необходимость этого условия очевидна).

Распределение $\mathcal{P}$ называется *вполне неголономным*, если допустимые векторные поля и их всевозможные коммутаторы в каждой точке $x \in M$ порождают все касательное пространство $T_x(M)$. В [2] было впервые доказано, что в таких пространствах (если они связны) любые две точки можно соединить кусочно гладкой допустимой кривой (т.е. кривой, касательные векторы которой допустимы; они лежат в листах рассматриваемого распределения). Большинство распределений на фиксированном многообразии вполне неголономны (см., например, [3]).

Если на многообразии M действует некоторая группа (например, конечная группа или группа Ли), то естественно рассматривать инвариантные относительно этого действия распределения. Это часто делается, например, в теории управления (см. [3]). В этих рассмотрениях многообразие M обычно является группой Ли (компактной или некомпактной) или однородным пространством (обычно рассматривали только однородные пространства компактных групп Ли). В настоящей статье мы будем изучать инвариантные распределения на компактных однородных пространствах M произвольных групп Ли. Строение компактных однородных пространств было описано, например, в обзоре [4]. В частности, мы будем использовать сформулированные в [4] понятия

натурального расслоения и структурного расслоения, а также понятия разрешимой и полупростой компонент произвольного компактного однородного пространства (рассматриваемого с точностью до конечнолистного накрытия), о которых кратко изложено также в § 2.

Нас интересуют инвариантные субримановы структуры на компактных однородных пространствах. Кратко, субриманова структура – это семейство римановых структур на всех листах $\mathcal{P}_x$ некоторого распределения $\mathcal{P}$, гладко зависящих от точки многообразия. Отметим, что при изучении инвариантных субримановых структур на компактных однородных пространствах мы при $p = 0$ приходим к произвольным компактным однородным пространствам (о которых см., например, обзор [4]), а при $p = \dim(M)$ – к римановым однородным пространствам (о которых см., например, [5]). Поэтому рассмотрение инвариантных субримановых структур на однородных пространствах включает эти два важных случая и дает возможность существенно расширить область исследования. Мы будем рассматривать только субримановы структуры при $p \geq 1$. Однако окажется, что очень часто мы будем приходить к субримановым структурам, являющимися римановыми (т. е. к случаю, когда $p = \dim(M)$).

Итак, рассмотрим транзитивное действие некоторой связной группы Ли G на гладком многообразии M . Тогда многообразие M диффеоморфно факторпространству G/H , где H – стационарная подгруппа некоторой точки. В дальнейшем мы будем представлять однородные пространства в виде G/H , где G – связная и, обычно, односвязная группа Ли, а H – некоторая замкнутая подгруппа Ли в G . Мы будем всегда предполагать, что действие G на M локально эффективно (и потому в связной компоненте единицы H_0 подгруппы H нет нетривиальных связных нормальных делителей группы Ли G). Если многообразие G/H компактно, то подгруппа Ли H называется *равномерной* в G . Если H при этом еще и дискретна, то она называется *решеткой* (иногда в этом случае говорят о *равномерной решетке*, но нам такая терминология не понадобится).

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое p -мерное распределение на G/H , инвариантное относительно естественного действия группы Ли G на G/H (мы будем такое $\mathcal{P}$ называть *инвариантным распределением*). Для дальнейшего нам будет удобно ввести в рассмотрение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ группы Ли G и ее подгруппы Ли H соответственно.

Инвариантное распределение $\mathcal{P}$ на G/H однозначно определяется, очевидно, подпространством $\mathcal{P}_{x_0}$ для некоторой точки $x_0 \in G/H$. Мы можем в качестве этой точки выбрать eH (где e – единица группы Ли G). Касательное пространство к G/H в этой точке можно естественным образом отождествить с факторпространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по ее подалгебре Ли $\mathfrak{h}$. Через $V = V(\mathcal{P})$ обозначим подпространство в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, соответствующее распределению $\mathcal{P}$. На V естественным образом действует (сохраняя его) подгруппа H (так как рассматриваемое нами распределение G -инвариантно, а H – стационарная подгруппа точки eH). Инвариантную метрику на распределении $\mathcal{P}$ задает скалярное произведение на V , инвариантное относительно действия подгруппы H (т. е. это действие должно быть ортогонально).

Пусть $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ – естественная проекция на факторпространство. Положим $\tilde{V} = p^{-1}(V)$. Подпространство $\tilde{V} \subset \mathfrak{g}$ (содержащее стационарную подал-

гебру h) инвариантно относительно действия подгруппы H , индуцированного присоединенным действием группы Ли G на своей алгебре Ли g .

Как нетрудно понять, инвариантное распределение $\mathcal{P}$ вполне неголономно тогда и только тогда, когда подпространство $\tilde{V}$ порождает алгебру Ли g (это условие порождения называют *условием Хермандера*, использовавшего его при изучении гипоеллиптических операторов). Если же подпространство $\tilde{V}$ является подалгеброй Ли, то соответствующее ему распределение инволютивно (и интегрируемо). Интегральными подмногообразиями при этом будут орбиты действия связной подгруппы Ли в G , соответствующей этой подалгебре Ли. Риманова структура на многообразии – частный случай вполне неголономной субримановой структуры; здесь соответствующее распределение – это всё касательное расслоение.

Мы будем рассматривать инвариантные вполне неголономные субримановы структуры на произвольных компактных однородных пространствах (здесь можно говорить и о компактных однородных субримановых пространствах). Объясним, почему именно этот класс структур на компактных многообразиях представляет значительный интерес. Как известно, нередко в математике те или иные объекты исследуются ради них самих (особенно в самых абстрактных областях математики). Здесь же имеются связи с классическими отраслями математики и механики. Многообразия поначалу были введены как конфигурационные пространства механических систем. Если в этих системах заданы некоторые конечные связи, то они выделяют некоторое подмногообразие (иногда с особенностями) в конфигурационном пространстве. Однако если связи дифференциальные (т. е. в них фигурируют дифференциалы, скажем, в виде производных), то мы приходим к понятию распределения на многообразии. Для произвольного распределения траекториями, касательными к распределению, можно соединить далеко не все точки многообразия. Поэтому понятие оптимизации движения по конфигурационному пространству теряет смысл; здесь нет аналогов понятия геодезических линий, имеющих огромное значение во многих разделах математики, физики, механики и т. п. Если распределение вполне неголономно, то по теореме Рашевского–Чоу (так теперь называют утверждение, впервые доказанное в [2]) любые две точки связного многообразия можно соединить допустимой кривой. Далее, инвариантность распределения – это указание на наличие симметрий. Инвариантность относительно транзитивной группы Ли – это крайний случай наличия симметрии. Такого рода симметрии используют, скажем, в теории управления. Наконец, наличие римановой структуры на листах распределения (что дает нам субриманову структуру на конфигурационном пространстве) порождает тесные связи с классической римановой геометрией и понятием геодезической линии в ее классическом смысле.

Мы видим, что вполне неголономные субримановы структуры имеют ясно выраженный геометрический смысл. Поэтому мы будем называть их *субримановыми геометриями* (в отличие от субримановых структур, которые задаются на произвольном в смысле голономности распределении).

На основании некоторых общих соображений может быть сформулирована следующая гипотеза (которая ниже получит ряд подтверждений).

ГИПОТЕЗА 1. Если на компактном однородном пространстве $M = G/H$ существует инвариантная субриманова геометрия, то оно или некоторое однородное пространство, его конечнолистно накрывающее, диффеоморфно прямому произведению односвязного компактного однородного пространства и тора.

Как известно, на компактном односвязном однородном пространстве всегда транзитивна некоторая компактная полупростая группа Ли K ; оно может быть записано в виде K/L , где L – связная подгруппа Ли в K (см., например, [4]). На таких однородных пространствах иногда существуют вполне неголономные инвариантные субримановы структуры. Например, это верно в случае, когда подгруппа L тривиальна, т. е. такие структуры существуют на группе Ли K . Можно строить инвариантные вполне неголономные субримановы структуры и на некоторых других классах односвязных компактных однородных пространств. Краткое обсуждение такого рода конструкций приведено в [6] (некоторые новые соображения содержатся и далее, в § 3), где также указано, что если на некотором однородном пространстве $M = G/H$ существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура, то такого рода структура существует (причем с листами той же коразмерности, что и на M) и на прямом произведении $M \times T$ многообразия M на произвольный тор T . Это объясняет появление тора в формулировке гипотезы 1. Более того, на прямом произведении компактного односвязного однородного пространства и тора всегда существует инвариантная риманова структура (для которой соответствующее распределение – это полное касательное расслоение). Это указывает на следующую интерпретацию гипотезы 1: если на компактном однородном пространстве $M = G/H$ существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура, то на нем или некотором многообразии, его конечнолистно накрывающем, существует и инвариантная риманова структура.

Необходимость перехода к конечнолистному накрытию в формулировке гипотезы 1 также может быть обоснована. Например, рассмотрим компактное многообразие $M = S^1(S^3/D_{2m})$, где D_{2m} – циклическая подгруппа в $SU(2) = S^3$ порядка $2m$. Это многообразие является S^1 -расслоением над линзовым пространством S^3/D_{2m} . Оно описано в [7] как одно из четырехмерных однородных многообразий. На нем нетрудно построить транзитивное действие группы Ли $G = SU(2) \cdot_\phi \mathbb{R}^n$, являющейся полупрямым произведением, соответствующим неприводимому линейному представлению группы Ли $SU(2)$. Указанное S^1 -расслоение нетривиально, и M не диффеоморфно прямому произведению какого-либо однородного многообразия на S^1 . При этом на M нетрудно построить инвариантное распределение коразмерности 1, на котором существует субриманова структура. Для этого достаточно в качестве подпространства $\tilde{V} \subset g$ взять подходящее подпространство коразмерности 1, содержащее $\mathbb{R}^n$ и инвариантное относительно циклической группы D_{2m} . Построенное распределение будет вполне неголономно, так как любое двумерное подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$ ее порождает.

В одном частном случае (для случая, когда стационарная подгруппа дискретна) гипотеза 1 вытекает из [6]. В настоящей статье будет доказано, что гипотеза 1 верна для асферичных однородных пространств и для некоторых других классов компактных однородных пространств.

В § 1 доказано (теорема 1), что гипотеза 1 справедлива для произвольных асферичных компактных однородных пространств, причем в несколько более сильной форме. В частности, она справедлива для компактных солвмногообразий (однородных пространств разрешимых групп Ли).

В § 2 рассмотрены отдельные классы компактных однородных пространств, построение которых основано на понятиях натурального и структурного расслоений. Для случая компактных однородных пространств с полупростой фундаментальной группой доказана гипотеза 1 (теорема 3) и выдвинута еще одна гипотеза – усиление утверждения гипотезы 1 в этом частном случае.

В § 3 гипотеза 1 доказана для компактных однородных пространств размерности ≤ 6 (теорема 4), а также в некоторых других частных случаях.

§ 1. Компактные асферичные однородные пространства

Напомним, что многообразие называется *асферичным*, если все его гомотопические группы, за исключением, быть может, первой (фундаментальной группы), тривиальны. Асферичными многообразиями являются базы натурального расслоения для компактных однородных пространств (см. § 2). Для компактного асферичного пространства односвязная компонента вырождается в точку, это свойство является характеристическим для асферичных компактных однородных пространств (подробнее см. [4], а также § 2). Отметим, что для асферичного однородного пространства односвязная компонента, фигурирующая в формулировке гипотезы 1, обязательно тривиальна, и потому для асферичного случая утверждение гипотезы 1 (причем в усиленном варианте, без перехода к конечнолистному накрытию) доказывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Если на компактном асферичном однородном пространстве $M = G/H$ существует инвариантная субриманова геометрия, то оно диффеоморфно тору.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство группы Ли G , на котором существует G -инвариантная вполне неголономная субриманова структура. Если M асферично, то и группа Ли G является асферичной [8]. Опишем строение асферичных односвязных групп Ли: их разложение Леви имеет вид $G = S \cdot R$, где R – радикал (являющийся односвязной разрешимой группой Ли), а полупростая часть S изоморфна прямому произведению $\times \mathcal{A}_i$ нескольких экземпляров простой трехмерной группы Ли $\mathcal{A}$ – односвязной накрывающей для группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$.

Говорят, что транзитивное действие группы Ли G на многообразии M *несократимо*, если это действие локально эффективно и в G не существует собственных подгрупп Ли, транзитивных на M . Ясно (по размерностным соображениям), что в любой транзитивной группе Ли, при условии ее локальной эффективности, существует некоторая минимальная (возможно, не единственная) связная подгруппа Ли, транзитивная на M . Она дает транзитивное несократимое действие на M . Если на $M = G/H$ существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура, а подгруппа Ли $G_1 \subset G$ транзитивна

на M , то $M = G_1/H_1$, где $H_1 = H \cap G_1$. Ясно, что G -инвариантное распределение на M , имеющее субриманову структуру, будет также и G_1 -инвариантным и будет иметь субриманову структуру. При этом распределение останется вполне неголономным не зависимо от того, какую транзитивную на M группу Ли мы рассматриваем. В результате оказывается, что в дальнейшем (в частности, при доказательстве и других утверждений статьи) мы можем предполагать транзитивное действие группы Ли G несократимым. Для несократимых действий докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $M = G/H$ – компактное асферичное однородное пространство группы Ли G , транзитивное действие которой на M несократимо. Тогда связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы H действует (действие индуцировано присоединенным действием группы Ли G) на алгебре Ли $L = L(G)$ группы Ли G унипотентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многообразие G/H компактно, нормализатор $P = N_G(H_0)$ связной компоненты единицы H_0 стационарной подгруппы H в G содержит некоторую максимальную связную треугольную подгруппу группы Ли G (см. [4]).

Пусть R – радикал, а N – нильрадикал группы Ли G . Сначала докажем, что $H_0 \cap R \subset N$.

Рассмотрим $H_0 \cap R$ и образ этой подгруппы Ли при естественном эпиморфизме $\alpha: R \rightarrow R/N$. Группа Ли R/N абелева, и естественное действие на ней полупростой части S группы Ли G , как известно, тривиально.

Если $H_0 \cap R$ не содержится в N , то указанный образ подгруппы имеет положительную размерность. Тогда существует нетривиальная связная абелева подгруппа $A \subset R/H$, произведение которой на этот образ дает всю группу Ли R/N . Рассмотрим прообраз $\alpha^{-1}(A)$ – связную подгруппу в G , причем инвариантную относительно S . Пусть $G_1 = S \cdot \alpha^{-1}(A)$ – собственная связная подгруппа Ли в G , транзитивная на M (так как по ее построению имеем $G_1 \cdot H = G$). Однако это противоречит несократимости транзитивной группы Ли G , поэтому должно быть $H_0 \cap R \subset N$. В частности, естественное действие подгруппы Ли $H_0 \cap R$ на алгебре Ли g группы Ли G унипотентно.

Далее, рассмотрим при каждом j естественный эпиморфизм $\pi: G \rightarrow S$ с ядром R и проекции $p_j: S = \times \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$ на прямые сомножители. Тогда подгруппа Ли $P' = p_j \circ \pi(P) \subset \mathcal{A}_j$ нормализует подгруппу Ли $p_j \circ \pi(H_0) \subset \mathcal{A}_j$. При этом P' содержит некоторую максимальную связную треугольную подгруппу Ли T группы Ли $\mathcal{A}_j$. Поскольку подгруппа Ли T двумерна, а группа Ли $\mathcal{A}$ трехмерна, то возможны только два случая: $P' = \mathcal{A}_j$ или $(P')_0 = T$. В первом случае подгруппа $p_j \circ \pi(H_0) \subset \mathcal{A}_j$ должна быть тривиальна, так как группа Ли $\mathcal{A}$ проста (не имеет нетривиальных связных нормальных делителей). Во втором случае подгруппа $p_j \circ \pi(H_0) \subset \mathcal{A}_j$ либо совпадает с T , либо одномерна и унипотентна, так как двумерная разрешимая группа Ли T имеет, как легко проверить, только унипотентные нормальные делители. Если $p_j \circ \pi(H_0) = T$, то, взяв дополнительную для T до $\mathcal{A}_j$ одномерную подгруппу, нетрудно построить собственную подгруппу $G_1 \subset G$, транзитивную на M .

В результате получаем, что подгруппа $p_j \circ \pi(H_0) \subset \mathcal{A}_j$ обязательно унипотентна; но и подгруппа $H_0 \cap R$, как было показано выше, также унипотентна.

Отсюда легко вывести, что и действие всей подгруппы H_0 на алгебре Ли $L(G)$ унитарно, что завершает доказательство леммы.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим подпространство $\tilde{V} \subset g$, задающее инвариантное распределение на G/H . Это подпространство инвариантно относительно действия подалгебры Ли h (соответствующей подгруппе Ли H). Поскольку по условию $\tilde{V}$ задает распределение, на котором существует субриманова структура, то действие подгруппы H_0 на $V = \tilde{V}/h$ должно быть ортогонально (т. е. сохранять некоторую риманову метрику). Однако в силу леммы 1 это действие должно быть и унитарным. Одновременно быть ортогональным и унитарным может быть только тривиальное действие. Этим доказано, что подпространство $\tilde{V}$ содержится в нормализаторе $N_g(h)$. Однако рассматриваемое на G/H распределение вполне неголомомно. Чтобы $\tilde{V}$ порождало всю алгебру Ли g , необходимо, чтобы нормализатор $N_g(h)$ совпадал с g , но это означает, что подалгебра Ли h – идеал в g . В силу локальной эффективности транзитивного действия группы Ли G на M отсюда следует, что h – нулевая подалгебра, или, другими словами, стационарная подгруппа H дискретна, поэтому подпространство $\tilde{V}$ в нашем случае совпадает с V .

Итак, мы уже доказали, что в условиях теоремы стационарная подгруппа H обязательно должна быть дискретна. Далее можно сослаться на статью [1], в которой рассмотрена именно эта ситуация, но для полноты изложения в настоящей статье мы приведем в адаптированной для рассматриваемой здесь ситуации рассуждения, необходимые для завершения доказательства теоремы.

Заметим прежде всего, что в рассматриваемом нами случае полупростая группа $S = \times A_i$ не имеет компактных факторов.

Пусть N – нильрадикал группы Ли G . Его естественное действие (с помощью присоединенного представления Ad_G группы Ли G на ее алгебре Ли) на алгебре Ли g унитарно. Через N^* обозначим алгебраическое замыкание образа N при присоединенном представлении Ad_G .

Образ подгруппы H при присоединенном представлении Ad_G сохраняет подпространство $V \subset g$, но тогда и алгебраическое замыкание этого образа также сохраняет V . В силу [9, лемма 3.1] в этом замыкании содержится унитарный радикал алгебраического замыкания подгруппы $\text{Ad}_G(G)$ (именно здесь – для использования [9] – нам нужен тот факт, что S не имеет компактных факторов). Очевидно, что этот унитарный радикал содержит подгруппу N^* . Следовательно, действие нильрадикала N сохраняет подпространство V (действуя на нем унитарно).

С другой стороны, из существования субримановой структуры на распределении, задаваемом подпространством $\tilde{V} \subset g$, следует, что действие подгруппы H на V ортогонально. Ортогональным будет и действие на V алгебраического замыкания образа $\text{Ad}_G(H)$ при присоединенном представлении. Тогда в силу изложенного выше и действие нильрадикала N на V будет ортогональным, но оно и унитарно, а потому должно быть тривиальным. Итак, мы доказали, что нильрадикал N на V действует тривиально.

Поскольку рассматриваемое нами инвариантное распределение вполне неголомомно, подпространство V порождает алгебру Ли g . Тогда действие N на всей алгебре Ли g будет тривиально. Это означает, что нильрадикал N группы

Ли G централен, т. е. содержится в центре $Z(G)$ группы Ли G . Теперь нам понадобится одно простое утверждение из теории алгебр Ли (оно доказано в [1]).

ЛЕММА 2. *Если нильрадикал некоторой алгебры Ли централен, то она – прямая сумма полупростой части и абелева идеала.*

В силу леммы 2 получаем, что $g = s + a$ – прямая сумма полупростой алгебры Ли s и абелева радикала a . При этом в силу изложенного выше s не имеет компактных факторов. Тогда, как известно (см., например, [9]), подгруппа $D = H/H \cap A$ – равномерная дискретная подгруппа в полупростой группе Ли S . Рассмотрим естественный эпиморфизм $\mu: g \rightarrow s$, индуцированный естественным эпиморфизмом групп Ли $G \rightarrow S$ с ядром R . Подпространство $\mu(V)$ должно быть инвариантно относительно сопряжений элементами подгруппы $H/H \cap A$. Тогда оно будет идеалом в s (см. [10]). Поскольку подпространство V порождает g , подпространство $\mu(V)$ должно порождать s , но это возможно, только если $\mu(V) = s$. Отсюда в силу строения алгебры Ли g , указанного выше, получаем, что подпространство V инвариантно относительно действия S , т. е. имеем $[s, V] \subset V$. С другой стороны, $[s, V] = [s, V + a] = [s, s] = s$ (так как s в нашем случае является идеалом в g , причем полупростым), и потому $V \supset s$. Далее, если подпространство V не содержит a , то оно не может порождать алгебру Ли g , поэтому должно быть $V \supset a$, следовательно, $V = g$.

Действие решетки D на V должно быть ортогональным, поэтому действие полупростой группы S также ортогонально (см. выше), и потому полупростая группа Ли S должна быть компактна. Однако группа Ли $S = \times \mathcal{A}_i$ некомпактна, и потому она должна быть тривиальна. Значит, группа Ли G абелева, а M – тор. Этим доказательство теоремы завершено.

Произвольное солвмнообразие (однородное пространство разрешимой группы Ли) является, как известно, асферичным многообразием. Поэтому гипотеза 1 нами доказана для любого компактного солвмнообразия. Отличие утверждения теоремы 1 от более общей гипотезы 1 состоит в том, что для случая компактных асферичных пространств не требуется перехода к конечнолистному накрытию, многообразие M диффеоморфно тору, а несократимая транзитивная группа Ли всегда абелева.

§ 2. Субримановы структуры и некоторые классы компактных однородных пространств

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые сведения о строении произвольных компактных однородных пространств. Мы дадим здесь краткий обзор этих сведений, а подробности можно найти, например, в [4].

Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство некоторой связной группы Ли G . Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G ; K определена однозначно с точностью до сопряжения в G . Имеется естественное действие K на M . В общем случае орбиты этого действия между собой не изоморфны, они имеют разный орбитный тип (т. е. соответствующие разным точкам многообразия M стационарные подгруппы не всегда сопряжены в K). Действие компактной группы K на многообразии M называется *эквиворбитным*, если все его орбиты одного орбитного типа, т. е. если для любых точек

$m, m' \in M$ соответствующие им стационарные подгруппы $K_m, K_{m'}$ сопряжены в K .

Оказывается, что для произвольного компактного однородного пространства G/H существует некоторое компактное однородное пространство $M' = G/H'$, его конечнолистно накрывающее (H' – некоторая подгруппа конечного индекса в H) и являющееся эквиорбитным относительно естественного действия максимальной компактной подгруппы K . В таком случае пространство орбит $K \backslash M'$ этого действия является гладким многообразием, а естественное отображение $M' \rightarrow K \backslash M'$ – гладким локально тривиальным расслоением. Именно это расслоение и называется *натуральным расслоением* для M (хотя расслаивается не M , а подходящее M' , конечнолистно его накрывающее). В общем случае переход к M' необходим, если мы хотим получить на $K \backslash M'$ структуру гладкого многообразия. Однако и для исходного M также имеется своего рода расслоение – расслоение Зейферта над орбиобразом $K \backslash M$.

Итак, имеется натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$, являющееся гладким, локально тривиальным расслоением для подходящего M' , конечнолистно накрывающего исходное компактное однородное многообразие M . База $M_a = K \backslash M'$ этого расслоения – асферичное многообразие. Слой этого расслоения имеет вид $M_c = K/L$, где $L = K \cap H'$ – замкнутая подгруппа в компактной группе Ли K . Мы предполагаем, что группа Ли G односвязна; тогда и максимальная компактная подгруппа K будет, как хорошо известно, односвязна, а потому она обязательно будет полупростой.

Слой M_c натурального расслоения почти односвязен, т. е. его фундаментальная группа конечна. Важный частный случай – когда этот слой односвязен. Необходимое и достаточное условие односвязности слоя M_c (или, что эквивалентно, связности подгруппы $L = K \cap H$) – это условие отсутствия кручения у фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M .

Рассмотрим теперь некоторые примеры натуральных расслоений.

1. Пусть $M = G/\Gamma$, где Γ – решетка в односвязной группе Ли G (т. е. дискретная подгруппа с компактным факторпространством). Предположим, что решетка Γ не имеет кручения; тогда естественное действие на M максимальной компактной подгруппы $K \subset G$ является свободным (все стационарные подгруппы тривиальны). В этом случае имеем K -главное расслоение $K \rightarrow M \rightarrow K \backslash M$ над многообразием $M_a = K \backslash M = K \backslash G/\Gamma$, оно и будет натуральным расслоением для нашего M .

2. Пусть F_g – замкнутая ориентируемая поверхность некоторого рода $g \geq 2$. Известно, что все такие поверхности F_g не будут однородными. Однако многообразие $M = F_g \times S^3$ – прямое произведение F_g на трехмерную сферу – будет, как оказывается, однородным. Здесь $M_c = S^3$, $M_a = F_g$, а натуральное расслоение тривиально.

Слой M_c натурального расслоения – компактное однородное пространство компактной полупростой группы Ли. Такие многообразия топологически характеризуются среди всех однородных многообразий конечностью фундаментальной группы. Имеется множество результатов о строении такого рода однородных многообразий (см., например, [4] и [11]).

Если база M_a натурального расслоения для M одномерна, то оно, возможно после перехода к конечнолистному накрытию над M , тривиально и потому

дiffeоморфно прямому произведению $M_c \times S^1$. Тем самым для таких M утверждение гипотезы 1 справедливо всегда, без дополнительных предположений о существовании на M каких-либо структур. Поэтому проверять гипотезу 1 интересно только в тех случаях, когда база натурального расслоения имеет размерность не менее 2.

Если база натурального расслоения вырождается в точку, то мы приходим к классу компактных однородных пространств с конечной фундаментальной группой. На таких многообразиях всегда существуют транзитивные действия компактных групп Ли и они конечнолистно накрываются односвязными компактными однородными пространствами. Можно отдельно изучать вопросы о существовании инвариантных распределений на таких однородных пространствах и о наличии на этих распределениях субримановых структур (краткие замечания по этому поводу можно найти в [6]). Если в точку вырождается слой натурального расслоения для компактного однородного пространства M , то M асферично. Именно рассмотрению этого частного случая посвящен § 1 настоящей статьи.

Переходим к изложению новых результатов. Сначала рассмотрим результат для случая компактных однородных пространств M с конечной фундаментальной группой. На таких многообразиях M всегда существует транзитивное действие компактной полупростой группы Ли, поэтому мы можем предполагать, что M имеет вид K/L , где K – компактная полупростая группа Ли (которую при необходимости можно считать односвязной).

Пусть $M = K/L$ – компактное однородное пространство компактной полупростой группы Ли K . Эйлерова характеристика $\chi(M)$ в этом случае неотрицательна, причем она положительна тогда и только тогда, когда ранги компактных групп Ли K и L равны. Особый интерес для геометрии представляет случай, когда l (алгебра Ли подгруппы Ли L) – максимальная подалгебра максимального ранга (равного рангу алгебры Ли k) в k (алгебре Ли группы Ли K). Также интересен случай, когда l – максимальная подалгебра (вне зависимости от ее ранга) в k .

Следующая теорема позволяет дать ответ на вопрос о существовании неримановых инвариантных субримановых структур на нескольких геометрически значимых классах многообразий. В доказательствах такого рода результатов полезно (и почти необходимо) располагать классификацией всех транзитивных действий компактных полупростых групп Ли на рассматриваемых многообразиях. В этом случае можно выяснить, анализируя стационарные подалгебры указанных транзитивных действий, существуют ли на этих многообразиях инвариантные субримановы геометрии. Именно по этой схеме доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть $M = K/L$ – однородное пространство компактной полупростой группы Ли K , диффеоморфное одному из следующих многообразий: S^{2n} , $\mathbb{C}P^m$. Тогда любая инвариантная субриманова геометрия на K/L риманова.

2) На нечетномерных сферах S^{2k-1} существуют инвариантные субримановы геометрии коразмерности 1, а если k четно, то еще и коразмерности 3.

Инвариантные субримановы геометрии других размерностей на S^{2k-1} обязательно римановы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу общих результатов из [11] мы можем считать, что группа Ли K проста (переходя, если нужно, к транзитивной подгруппе).

Как следует из классификаций групп Ли, транзитивных на многообразиях из утверждения 1), действие подалгебры Ли l (алгебры Ли, соответствующей подгруппе L в K) на k/l неприводимо, т. е. однородное пространство K/L в рассматриваемых нами случаях изотропно неприводимо. Поэтому на K/L не существует инвариантных субримановых геометрий (субримановых структур на вполне неголономных распределениях), поскольку такая геометрия задается L -инвариантным подпространством $\tilde{V}$, содержащим l и порождающим k . Однако если K/L изотропно неприводимо, то L -инвариантных подпространств в k , содержащих l , только два: это сама подалгебра l и вся алгебра Ли k . В первом случае $\tilde{V}$ не может порождать k , а во втором мы получаем на K/L риманову структуру. Этим доказано утверждение 1).

Докажем теперь утверждение 2) о нечетномерных сферах. Для них также существует классификация транзитивных действий компактных полупростых групп Ли, но в этом случае оказывается, что, кроме случаев, когда K/L изотропно неприводимо, имеются и действия, для которых действие подалгебры l на k/l приводимо. Рассмотрим данные случаи подробнее. Мы будем при этом использовать классификацию изотропно неприводимых однородных пространств, полученную впервые О. В. Мантуровым (ее описание с некоторыми последующими уточнениями можно найти в [12]). В частности, кроме симметрических однородных пространств (компактных), имеется еще целый ряд изотропно неприводимых однородных пространств, причем некоторые из них диффеоморфны нечетномерным сферам. Кроме классических серий групп Ли, транзитивных на сферах: ортогональных, унитарных и симплектических (при соответствующих ограничениях для размерностей сфер; подробнее см. ниже) – имеют место два исключительных случая: $S^7 = \text{SO}(7)/G_2$ и $S^5 = \text{SO}(9)/\text{SO}(7)$. Оба этих случая изотропно неприводимы, поэтому они не дают на нечетномерных сферах инвариантных неримановых субримановых геометрий, и потому в дальнейшем мы их исключим из рассмотрения.

Как известно, на нечетномерной сфере S^{2k-1} транзитивно и несократимо действуют только группы Ли $\text{SO}(2k)$, $\text{SU}(k)$, а если k четно, то еще симплектическая группа $\text{Sp}(k/2)$ (о двух дополнительных исключительных случаях уже сказано выше). Для транзитивного действия группы Ли $\text{SO}(2k)$ имеем изотропно неприводимый случай, и потому здесь инвариантных распределений не существует. Для действий унитарной группы $\text{SU}(k)$ и симплектической $\text{Sp}(k)$ ситуация существенно иная.

Рассмотрим транзитивное действие на S^{2k-1} группы Ли $\text{SU}(k)$. Имеем $S^{2k-1} = \text{SU}(k)/\text{SU}(k-1)$. Действие подгруппы $\text{SU}(k-1)$ на $\mathfrak{su}(k)/\mathfrak{su}(k-1)$, индуцированное присоединенным действием группы $\text{SU}(k)$ на ее алгебре Ли, приводимо. Оно разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений: тривиального на $\mathfrak{u}(1)$ и неприводимого на некотором подпространстве W ; последнее представление изоморфно представлению на $\mathfrak{su}(k)/(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(k-1) \oplus \mathfrak{u}(1)))$.

Положим $\tilde{V} = \mathfrak{su}(k-1) + W$. Полученное подпространство $\tilde{V} \subset k$ содержит стационарную подалгебру и инвариантно относительно нее. Более того, оно еще и порождает всю алгебру Ли $\mathfrak{su}(k)$ (это легко показать непосредственно, но можно вывести и из общих соображений: в унитарной алгебре Ли размерности ≥ 5 не существует подалгебр коразмерности 1 или 2). Построенное подпространство $\tilde{V}$ порождает на $SU(k)/SU(k-1)$ инвариантную субриманову структуру коразмерности 1 (и потому – не риманову).

Аналогичны рассуждения при четных k . Здесь используется симплектическая транзитивная группа и строится подходящее подпространство $\tilde{V}$ коразмерности 3. Теорема доказана.

Продолжим рассмотрение общих результатов о строении компактных однородных пространств. База M_a натурального расслоения не обязательно однородна, однако и она допускает довольно подробное описание. Для этого используется еще одно важное расслоение – структурное расслоение для M_a . Оно строится при подходящем выборе M' , конечнолистно накрывающем исходное компактное однородное многообразие M , и имеет вид $M_r \rightarrow M_a \rightarrow M_s$. База M_s этого расслоения может быть записана в виде $K \setminus S/D$, где D – решетка в полупростой группе Ли S , а K – максимальная компактная подгруппа в S (отметим, что здесь K не обязательно полупроста, так как S не всегда односвязна). Такое M_s имеет структуру локально симметрического пространства отрицательной кривизны. Слой M_r структурного расслоения – солвмногообразие (т. е. однородное пространство разрешимой группы Ли), имеющее вид R/Γ , где Γ – решетка в некоторой разрешимой группе Ли R . Структурное расслоение можно рассматривать как топологический аналог разложения Леви для групп Ли (представления односвязной группы Ли в виде полупрямого произведения полупростой части и разрешимого радикала).

В результате для компактного однородного многообразия мы получаем три составляющие его “компоненты”: многообразия M_c , M_r , M_s . Если одна из этих компонент вырождается в точку, то получаются три специальных класса компактных однородных многообразий. Опишем их.

Если $M_c = \{*\}$ – точка, то $M = M_a$ – асферичное однородное многообразие (о которых см. § 1). При $M_s = \{*\}$ получаем класс разрешимых однородных многообразий, они характеризуются тем, что их фундаментальная группа имеет разрешимую подгруппу конечного индекса (не нужно путать их с солвмногообразиями – однородными пространствами разрешимых групп Ли). Топологическое строение таких однородных многообразий может быть довольно подробно описано (хотя оно и нетривиально).

При вырождении в точку компоненты M_r приходим к классу полупростых компактных однородных многообразий (они характеризуются тем, что любая разрешимая нормальная подгруппа в их фундаментальной группе конечна). Подробное описание таких однородных многообразий содержится в [13].

Для компактных однородных пространств M с полупростой фундаментальной группой гипотеза 1, сформулированная во введении, может быть сформулирована (и доказана – см. далее) в формально более сильной форме, поскольку для такого пространства M или пространства, его конечнолистно накрывающего, не существует диффеоморфизма с прямым произведением некоторого

многообразия на нетривиальный тор. Это вытекает из полупростоты фундаментальной группы (отсутствия в ней бесконечных разрешимых нормальных делителей).

ТЕОРЕМА 3. *На компактном однородном пространстве с бесконечной полупростой фундаментальной группой не существует инвариантных вполне неголономных субримановых структур.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = G/H$ – компактное однородное пространство односвязной группы Ли G с полупростой фундаментальной группой $\pi_1(M)$. В [13] доказано, что на M транзитивна любая максимальная полупростая подгруппа группы Ли G (все такие подгруппы сопряжены; они называются факторами Леви группы Ли G или ее полупростыми частями). При рассмотрении вполне неголономных субримановых структур, как уже было отмечено при доказательстве теоремы 1, можно при необходимости переходить от транзитивной группы к любой ее транзитивной подгруппе Ли. В нашем случае это означает, что мы можем (и будем) в силу [13] предполагать, что группа Ли G полупроста.

Пусть $\tilde{V}$ – подпространство в алгебре Ли g , задающее вполне неголономную субриманову структуру на G/H . Как было отмечено выше, подпространство $\tilde{V}$ обладает следующими свойствами: $\tilde{V}$ содержит h , $\tilde{V}$ инвариантно относительно естественного действия h , это действие индуцирует на $\tilde{V}/h$ ортогональное действие, $\tilde{V}$ порождает алгебру Ли g .

Рассмотрим нормализатор $N_G(H_0)$ связной компоненты единицы стационарной подгруппы H , а также нормализатор соответствующей ей подалгебры Ли h в алгебре Ли g группы Ли G . Поскольку однородное пространство G компактно, то $N_G(H_0)$ содержит некоторую максимальную связную треугольную подгруппу T группы Ли G (см., например, [4]); говорят, что $N_G(H_0)$ – t -подгруппа в G . Подалгебра p – t -подалгебра в полупростой алгебре Ли g . Все t -подалгебры могут быть описаны (см., например, [4]). Каждая t -подалгебра связана с некоторым множеством Γ простых “белых” (или некомпактных) корней алгебры Ли g . Другими словами, Γ – это некоторое допустимое подмножество корней в схеме Сатаке алгебры Ли g . Радикал t -подалгебры имеет вид $z + \mathfrak{c}_\Gamma + \mathfrak{n}_\Gamma$. Здесь $\mathfrak{n}_\Gamma$ – нильрадикал нашей t -подалгебры Ли p (он однозначно определяется по системе корней Γ), $\mathfrak{c}_\Gamma$ – расщепимая над $\mathbb{R}$ абелева подалгебра Ли, а z – некоторая компактная абелева подалгебра. При этом подалгебра $\mathfrak{c}_\Gamma + \mathfrak{n}_\Gamma$ треугольна и является максимальной треугольной подалгеброй в рассматриваемом нами радикале r .

Рассмотрим $F = P_0/H_0$ – связную группу Ли, содержащую в качестве решетки дискретную равномерную подгруппу $D = (P_0 \cap H)/H_0$. Как показано в [12], из полупростоты фундаментальной группы $\pi_1(M)$ вытекает, что группа Ли F редуктивна, причем ее радикал компактен. Отсюда следует, что факторгруппа $C_\Gamma \cdot N_\Gamma / (H_0 \cap C_\Gamma \cdot N_\Gamma)$ компактна и потому абелева (здесь C_Γ , N_Γ – связные подгруппы Ли в G , соответствующие подалгебрам Ли $\mathfrak{c}_\Gamma$, $\mathfrak{n}_\Gamma$ соответственно). Это означает, что H_0 содержит коммутант N_1 подгруппы $C_\Gamma \cdot N_\Gamma$. Отметим, что коммутант N_1 нильпотентен.

Действие подгруппы H на $\tilde{V}/h$ ортогонально, но нильпотентная подгруппа Ли N_1 , содержащаяся в H , действует ортогонально, только если ее действие

тривиально. Поэтому получаем, что подпространство $\tilde{V}$ лежит в нормализаторе группы Ли N_1 . Поскольку подпространство $\tilde{V}$ должно порождать алгебру Ли g , а нормализатор подалгебры Ли n_1 – подалгебра Ли в g , то этот нормализатор должен совпадать с g . Итак, получаем, что подалгебра Ли n_1 (соответствующая подгруппе Ли N_1) должна быть идеалом в g . Однако из условия локальной эффективности действия G на M вытекает, что n_1 – нулевая подалгебра. Тем самым, максимальная треугольная подалгебра Ли в радикале нашей t -подалгебры Ли p должна быть абелевой. Однако из описания параболических подалгебр Ли в полупростых алгебрах Ли (на котором основано описание t -подалгебр) следует, что это возможно, только если g компактна. Таким образом, мы доказали, что полупростая группа Ли G компактна (и $\Gamma = \emptyset$). Тогда фундаментальная группа однородного пространства G/H конечна, что противоречит предположению о том, что $\pi_1(M)$ – бесконечная полупростая группа. Теорема доказана.

На произвольном компактном многообразии с полупростой фундаментальной группой, как было отмечено в доказательстве теоремы 3, всегда транзитивна и некоторая полупростая группа Ли (фактически можно взять полупростую часть исходной транзитивной группы Ли). Тем самым, компактные однородные многообразия с полупростой фундаментальной группой – это подкласс однородных пространств, на которых транзитивны полупростые группы Ли (или, что то же, подкласс класса однородных пространств полупростых групп Ли). Однако компактное однородное пространство полупростой группы Ли не всегда имеет полупростую фундаментальную группу. Например, на двумерном торе (с абелевой фундаментальной группой) нетрудно построить транзитивное действие простой группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. При этом, однако, оказывается, что на получившемся однородном пространстве (диффеоморфном тору) не существует инвариантных вполне неголономных субримановых структур. Поэтому возникает предположение, что справедлива следующая гипотеза, обобщающая в одном частном случае гипотезу 1.

ГИПОТЕЗА 2. Если на компактном однородном пространстве $M = G/H$ полупростой группы Ли G существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна.

Для компактных однородных пространств с разрешимой фундаментальной группой отметим только один факт – невозможность использовать здесь то их описание, которое было дано в [14]. А именно, в [14] была приведена конструкция элементарных однородных пространств, которая с точностью до диффеоморфизма и конечнолистного накрытия дает все компактные однородные пространства с разрешимой фундаментальной группой. При этом используются весьма специального вида транзитивные группы Ли и стационарные подгруппы, а именно рассматриваются группы Ли – прямые произведения компактных групп Ли и разрешимых односвязных групп Ли, причем предполагается, что в этих разрешимых группах Ли существуют решетки (дискретные подгруппы с компактным факторпространством). Именно эти решетки, как можно показать, препятствуют построению на элементарных однородных пространствах инвариантных субримановых структур. Поэтому справедливость гипотезы 1

в этом частном случае элементарных однородных пространств и для произвольных компактных однородных пространств пока не установлена. Простейший пример компактного разрешимого однородного пространства, для которого пока не удастся проверить гипотезу 1, – это семимерное однородное многообразие, которое расслаивается над двумерным тором T^2 со слоем $S^2 \times S^3$; расслоение это задается ненулевым характеристическим классом.

§ 3. Компактные однородные пространства малой размерности

Здесь мы докажем, что утверждение сформулированной во введении гипотезы 1 справедливо для случая, когда компактное однородное многообразие M имеет размерность ≤ 6 . Сделаем предварительно одно замечание.

Пусть однородное пространство K/L компактной группы Ли K однородно разложимо, т. е. оно представляется в виде прямого произведения $K_1/L_1 \times K_2/L_2$ двух (нетривиальных, т. е. имеющих положительную размерность) однородных пространств компактных групп Ли. Если одно из них, скажем K_1/L_1 , имеет инвариантную нериманову субриманову геометрию, то такого же рода субриманову геометрию имеет и K/L . Чтобы убедиться в этом, нужно взять прямую сумму $\tilde{V}_1 \oplus k_1$ (где подпространство $\tilde{V}_1 \subset k_1$ задает инвариантную субриманову геометрию на K_1/L_1) и проверить, что это подпространство в $k = k_1 \oplus k_2$ задает нериманову инвариантную субриманову геометрию на K/L . Это замечание позволит нам далее уделять основное внимание однородно неразложимым однородным пространствам.

ТЕОРЕМА 4. *Если на компактном однородном пространстве $M = G/H$ размерности ≤ 6 существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура, то оно или некоторое однородное пространство, его конечнолистно накрывающее, диффеоморфно прямому произведению односвязного компактного однородного пространства и тора.*

Более точно, любое такое M конечнолистно накрывается произведением на некоторый тор одного из следующих однородных односвязных многообразий (транзитивные группы Ли мы при этом уточнять не будем): S^3 , S^5 , $S^3 \times S^2$, $S^3 \times S^3$, $SU(3)/T^2$, где T^2 – максимальный тор в $SU(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем классификации, полученные в [7], [15], [16]. С точностью до конечнолистного накрытия компактное однородное пространство размерности ≤ 6 диффеоморфно одному из принадлежащих к следующим трем семействам однородных пространств.

1. Асферичные многообразия M (см. теорему 1), в этом случае M всегда диффеоморфно тору.

2. Односвязные многообразия S^k ($k = 2, \dots, 6$), $\mathbb{C}P^k$ ($k = 2, 3$), $S^2 \times S^k$ ($k = 2, 3, 4$), $S^3 \times S^3$, $S^2 \times S^2 \times S^2$, $S^2 \times \mathbb{C}P^2$, $SU(3)/SO(3)$, $SU(3)/T$, где T – двумерный тор (максимальный тор в $SU(3)$).

Пусть $M = G/H$. Взяв группу Ли G несократимой, можем считать, что группа Ли G компактна. Обозначим $M = K/L$. Чтобы на таком M существовало вполне неголономное распределение, нужно, чтобы выполнялись два условия:

а) естественное действие подалгебры Ли l (алгебры Ли группы Ли L) на k/l приводимо (обозначим некоторое нетривиальное l -инвариантное подпространство, содержащее l , через $\tilde{V}$);

б) подпространство $\tilde{V}$ порождает алгебру Ли k .

Если подалгебра Ли l действует на k/l неприводимо, то условие а) не может выполняться. Поэтому сразу (как и выше, в § 2) исключаем из рассмотрения многообразия S^2 , S^4 и $\mathbb{C}P^k$, $k = 2, 3$, $SU(3)/SO(3)$ (очевидно, что для стандартно вложенной $so(3)$ это однородное пространство изотропно неприводимо).

Прямые произведения $S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^4$, $S^2 \times \mathbb{C}P^2$ имеют нетривиальные инвариантные подпространства в k/l , но они, как нетрудно проверить, никогда не дают нужного подпространства $\tilde{V}$, порождающего k . Подходят, очевидно, прямые произведения $S^3 \times S^3$ и $S^2 \times S^3$ (так как на S^3 имеются неримановы субримановы геометрии).

Случаи многообразий S^3 , S^5 уже были рассмотрены выше. Остается только рассмотреть многообразия $S^3 \times S^3$, $S^2 \times S^3$, $SU(3)/T$. Первые два многообразия – прямые произведения на многообразии S^3 , которое имеет нериманову инвариантную субриманову геометрию коразмерности 1. Поэтому и прямые произведения S^3 на любые односвязные однородные пространства компактных групп Ли также имеют неримановы инвариантные субримановы геометрии.

Остается рассмотреть пространство $SU(3)/T$. Пусть $\tilde{V}$ задает на нем инвариантную субриманову структуру. Поскольку это подпространство инвариантно относительно присоединенного действия максимального тора t , это подпространство разлагается в прямую сумму некоторых корневых подпространств (причем обязательно двумерных). Корней (точнее, пар корней) здесь три. Возьмем в качестве $\tilde{V}$ прямую сумму тора t и двух корневых подпространств, соответствующих простым корням. Очевидно, что это подпространство не является подалгеброй и потому порождает $\mathfrak{su}(3)$. Оно удовлетворяет также всем другим требованиям, необходимым для построения инвариантной субримановой структуры на $SU(3)/T$. В результате получаем на $SU(3)/T$ нериманову инвариантную субриманову геометрию коразмерности 2.

3. Многообразия общего вида $S^3 \times F_g$, $SL(2, \mathbb{C})/D$ и прямые произведения тора на односвязные однородные многообразия.

Сначала рассмотрим $S^3 \times F_g$, $SL(2, \mathbb{C})/D$. Здесь фундаментальная группа всегда полупроста, и потому применима теорема 3.

Для произведения торов на односвязные компактные однородные пространства теорема очевидна.

Список литературы

1. В. В. Горбачевич, “Об инвариантных субримановых структурах на компактных однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой”, *Матем. заметки* (в печати).
2. П. К. Рашевский, “О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией”, *Учен. зап. Моск. госуд. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ-мат.*, **3** (1938), 83–94.
3. А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.

4. В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240; англ. пер.: V. V. Gorbatsевич, A. L. Onishchik, “Lie transformation groups”, *Lie groups and Lie algebras I. Foundations of Lie theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **20**, 1993, 95–229.
5. Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982; пер. с англ.: J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Univ. of California, Berkeley, CA, 1972.
6. В. В. Горбацевич, “Инвариантные распределения на компактных однородных пространствах”, *Матем. сб.*, **204**:12 (2013), 15–30; англ. пер.: V. V. Gorbatsевич, “Invariant distributions on compact homogeneous spaces”, *Sb. Math.*, **204**:12 (2013), 1712–1727.
7. В. В. Горбацевич, “О классификации четырехмерных компактных однородных пространств”, *УМН*, **32**:2 (1977), 207–208.
8. В. В. Горбацевич, “Об асферических однородных пространствах”, *Матем. сб.*, **100(142)**:2(6) (1976), 248–265; англ. пер.: V. V. Gorbatsевич, “On aspherical homogeneous spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:2 (1976), 223–238.
9. G. D. Mostow, “Arithmetic subgroups of groups with radical”, *Ann. of Math.* (2), **93** (1971), 409–438.
10. G. D. Mostow, “On the topology of homogeneous spaces of finite measure”, *Symposia Mathematica* (INDAM, Roma, Gennaio, 1974), **16**, Academic Press, London, 1975, 375–398.
11. А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Barth, Leipzig, 1994.
12. А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
13. В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах с полупростой фундаментальной группой. I”, *Сиб. матем. журн.*, **22**:1 (1981), 47–67; “II”, **27**:5 (1986), 38–49; англ. пер.: V. V. Gorbatsевич, “Compact homogeneous spaces with a semisimple fundamental group. I”, *Siberian Math. J.*, **22**:1 (1981), 34–49; “II”, **27**:5 (1986), 660–669.
14. В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. I”, *Геометрические методы в задачах анализа и алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 71–87; “II”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1982, 13–28; “III”, 1985, 93–103; “IV”, 1991, 88–98.
15. В. В. Горбацевич, “О трехмерных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **18**:2 (1977), 280–293; англ. пер.: V. V. Gorbatsевич, “Three-dimensional homogeneous spaces”, *Siberian Math. J.*, **18**:2 (1977), 200–210.
16. В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах малой размерности”, *Геом. методы в задачах алгебры и анализа*, ЯрГУ, Ярославль, 1980, 37–60.

Владимир Витальевич Горбацевич
(VLADIMIR V. GORBATSEVICH)

Российский государственный
технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступило в редакцию
28.01.2013