Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шмелькин, О несвязных простых линейных группах со свободной алгеброй инвариантов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 4, 159–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:38:24

УДК 512.74

Д. А. Шмелькин

О несвязных простых линейных группах со свободной алгеброй инвариантов

В работе изучаются несвязные корегулярные (со свободной алгеброй инвариантов) линейные группы. Получен критерий корегулярности полупростой группы $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ в терминах действия группы G/G^0 на фактормногообразии $V//G^0$. Найдена классификация связных некорегулярных простых линейных групп, допускающих конечное корегулярное расширение, и в каждом случае описаны такие расширения.

Библиография: 25 наименований.

§ 1. Введение

Всюду в данной работе основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $G \subseteq \mathrm{GL}(U)$ – редуктивная линейная группа. Группа G называется *корегулярной*, если алгебра $\mathbb{C}[U]^G$ регуляльна, т.е. порождается системой алгебраически независимых образующих. К настоящему моменту получены полные описания всех корегулярных групп в классах конечных, связных простых и связных неприводимых полупростых групп. Усилиями разных исследователей получены многочисленные примеры бесконечных и несвязных корегулярных групп, однако классификационная работа в этом направлении до последнего времени не велась. Поставив своей целью получение классификационных результатов, автор начал с того, что описал в работе [4] все корегулярные линейные группы, локально изоморфные группе SL_2 . При этом, к сожалению, имели место ошибки, исправленные в настоящей работе (см. замечание к теореме 1). Кроме этого автору известны еще только две работы по данной тематике ([6] и [22]), в которых описываются некоторые корегулярные несвязные линейные группы, связная компонента единицы которых есть алгебраический тор.

Пусть группа G несвязна, а связная компонента единицы G^0 группы G корегулярна. В этом случае вопрос о корегулярности группы G не сложен. Именно, существует естественный изоморфизм $U//G \cong (U//G^0)/(G/G^0)$, и согласно известному критерию Шевалле группа G корегулярна тогда и только тогда, когда образ группы G/G^0 при естественном представлении в пространстве $U//G^0$, рассматриваемом как линейное, порожден отражениями. Группа H называется *конечным расширением* своей подгруппы G , если индекс $[H : G]$ конечен. При желании можно легко получить полный список корегулярных конечных расширений для каждой

Автор благодарит за финансовую поддержку исследований фонд PRO MATHEMATICA, Международный научный фонд (грант MQZ000) и Академию естественных наук.

связной корегулярной группы, если образующие алгебры ее инвариантов известны (см. пример решения такой задачи в [4]). Дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейная алгебраическая группа G называется *квазикорегулярной*, если она допускает конечное корегулярное расширение.

Представление $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ будем называть *корегулярным* (квазикорегулярным), если таков его образ.

Таким образом, с учетом вышесказанного, задача классификации несвязных корегулярных групп сводится к нахождению всех некорегулярных квазикорегулярных связных групп в каждом данном классе групп, например в классе линейных групп, имеющих простую алгебру Ли (такие группы мы для краткости называем *простыми*). За вычетом трех линейных групп, для которых к моменту написания статьи вопрос о корегулярности не прояснен, эта задача в классе простых групп решена. Именно, основным результатом данной работы является список всех (за вышеупомянутым исключением) квазикорегулярных, но не корегулярных связных простых линейных групп, и для каждой такой группы – список всех ее корегулярных конечных расширений.

План статьи таков. В § 2 формулируются основные результаты. В § 3 будут получены критерий корегулярности для несвязной полупростой группы и важные следствия из него, а также доказана теорема 2.3. В § 4 будут представлены необходимые условия корегулярности, позволяющие устанавливать ее отсутствие, и доказана лемма 2.1. В § 5 разбирается случай неприводимых групп. В § 6 доказывается корегулярность, а в § 7 – ее отсутствие для конкретных групп.

Основные результаты данной работы были опубликованы в кратком сообщении [25].

Автор приносит благодарность своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Д. И. Панюшеву за полезные советы, сильно упростившие решение задачи во многих конкретных случаях. Кроме того, автор благодарит Дж. Шварца за полезную беседу о проблемах, связанных с данной работой, а также М. ван Леувена за сделанные им по просьбе автора компьютерные вычисления и П. Литтельмана за оказанное содействие.

§ 2. Формулировки результатов

Система обозначений. Простые алгебраические группы мы обозначаем одним из символов SL_n , Sp_n , Spin_n (или SO_n , если это возможно по контексту), G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 . Алгебраический тор размерности d обозначается через T_d . Простые линейные группы суть образы простых алгебраических групп при (конечномерных) линейных представлениях, причем разные представления, сопряженные при помощи некоторого автоморфизма схемы Дынкина, задают одну и ту же линейную группу. Это надо иметь в виду во всех нижеследующих результатах, содержащих списки линейных групп, так как в них указывается только одно из представлений, задающих описываемую группу. Нумерация простых корней простых алгебр Ли используется такая же, как в книге [21]. Неприводимое представление простой группы Ли ранга r , старший вес которого имеет отметку a_i на i -м корне при $i = 1, \dots, r$, обозначается через $\varphi_1^{a_1} \dots \varphi_r^{a_r}$. Неприводимое представление редуктивной группы $G = G_1 \times \dots \times G_m \times T$ всегда может быть разложено в

тензорное произведение неприводимых представлений ρ_i своих простых компонент G_i , $i = 1, \dots, m$, и некоторого одномерного представления (характера) χ тора T и соответственно обозначается через $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_m \otimes \chi$. Приводимое представление обозначается аддитивной комбинацией символов, отвечающих неприводимым компонентам (например, $\varphi_1^2 + 2\varphi_1$).

(G, ρ) или $\rho(G)$ – образ группы G при представлении ρ .

Ad – присоединенное представление любой группы.

$V(\rho)$ – пространство представления ρ .

$\mathbb{C}[\rho]$ – алгебра $\mathbb{C}[V(\rho)]$.

ρ^τ – представление связной полупростой группы G , получающееся действием на отметках представления ρ автоморфизма τ схемы Дынкина.

$\text{Aut } \rho$ – подгруппа всех автоморфизмов τ схемы Дынкина таких, что $\rho^\tau = \rho$.

θ (θ_l) – тривиальное одномерное (размерности l) представление любой группы.

$S^m(\rho)$ ($\bigwedge^l(\rho)$) – индуцированное представление группы в симметрической (внешней) степени пространства $V(\rho)$.

$\text{Lie } G$ – алгебра Ли группы G .

$\text{Aut}(\mathfrak{g})$ ($\text{Int}(\mathfrak{g})$) – группа автоморфизмов (внутренних автоморфизмов) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$N_H(G)$ ($Z_H(G)$) – нормализатор (централизатор) подгруппы G в группе H .

$N(G)$ ($Z(G)$) – то же, что и $N_{\text{GL}(V)}(G)$ ($Z_{\text{GL}(V)}(G)$).

$\widetilde{\text{SL}}_n \doteq \{g \in \text{GL}_n \mid \det(g) = \pm 1\}$. Каждое рассматриваемое ниже представление ρ группы SL_n (соответственно SO_n) в пространстве тензоров над пространством тавтологического представления естественно продолжается на группу $\widetilde{\text{SL}}_n$ (соответственно O_n); такое продолжение будет обозначаться также через ρ .

$\text{diag}(c_1, \dots, c_l)$ – диагональный оператор с указанными собственными значениями.

$\{c_1; c_2; \dots; c_l\}$ – элемент группы $\text{GL}(V(\rho))$, где $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_l$, который действует в пространстве $V(\rho_i)$ умножением на скаляр c_i , $i = 1, \dots, l$, при некотором (вообще говоря, не однозначно определенном) разложении: $V(\rho) = V(\rho_1) \oplus \dots \oplus V(\rho_l)$, пространства $V(\rho)$ в прямую сумму неприводимых.

μ_n – циклическая группа порядка n .

$I(M)$ – идеал всех регулярных функций, обращающихся в нуль на подмножестве $M \subseteq \mathbb{A}^n$.

(S) или AS – идеал, порожденный подмножеством S алгебры A .

Пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^s} A_\alpha$ – $\mathbb{Z}_+^s$ -градуированная алгебра, причем такая, что $A_{0, \dots, 0} = \mathbb{C}$. Тогда положим:

A_+ – однородный максимальный идеал, состоящий из всех элементов положительной суммарной степени;

$\widetilde{A}_\alpha \doteq A_+^2 \cap A_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^s$.

Формулировка основных результатов. Прежде чем перейти к формулировке основного результата, заметим, что в некоторых случаях расширение группы не приводит к изменению алгебры инвариантов. Для представления ρ группы G в пространстве V положим

$$I(\rho) \doteq \{g \in N(\rho(G)) \mid \mathbb{C}[\rho]^G \subseteq \mathbb{C}[\rho]^g\}.$$

Для квазикорегулярных и некорегулярных простых групп это расширение группы $\rho(G)$ почти всегда тривиально:

ЛЕММА 2.1. Пусть (G, ρ) – квазикорегулярная и некорегулярная связная простая линейная группа, $V(\rho)^G = \{0\}$, причем $I(\rho) \neq \rho(G)$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- 1) $(G, \rho) = (\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + 2\varphi_1)$, $n \geq 3$, $I(\rho) = \rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$;
- 2) $(G, \rho) = (\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + \varphi_{n-2} + \varphi_1)$, $n = 2m + 1$, $m \geq 2$,
 $I(\rho) = \rho(G)\langle\{1; -1; (-1)^m\}\rangle$.

Доказательство леммы будет обсуждаться в § 4. Основной результат данной работы таков:

ТЕОРЕМА 2.2. Все квазикорегулярные, но не корегулярные связные простые линейные группы $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ такие, что $V^G = \{0\}$, за исключением, может быть, лишь групп $(\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + \varphi_2)$, $(\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + \varphi_5)$, $(\mathrm{SL}_8, \varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_7)$, суть группы, перечисленные в табл. 1 (в первой колонке)¹. Во всех случаях факторногообразия $V//G$ есть гиперповерхность, обладающая таким инволютивным автоморфизмом σ , что многообразие $(V//G)//\langle\sigma\rangle$ изоморфно аффинному пространству. Для каждой такой группы в таблице указаны образующие алгебры инвариантов, вид соотношения между ними и все корегулярные конечные расширения. Последние суть группы, указанные в последней колонке, а также (для номеров 1 и 3 табл. 1) их расширения группами $I(\rho)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [4] допущены ошибки. Именно, в списке связных квазикорегулярных линейных групп, локально изоморфных SL_2 , отсутствуют группы $(\mathrm{SL}_2, \varphi^4 + \varphi)$, $(\mathrm{SL}_2, \varphi^4 + \varphi^2)$ (см. номера 12 и 6 табл. 1). Эти ошибки были позже повторены в [22, теорема 3.3]. Там же имеются ошибочные утверждения (теоремы 3.6, 3.7), противоречащие квазикорегулярности номеров 25 и 1 табл. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если какая-нибудь из трех линейных групп, упомянутых в теореме, квазикорегулярна, то для нее также справедливо последнее утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. Пусть G – связная редуктивная группа, $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – представление, $\rho = \rho_+ + \rho_0$, причем ρ_0 тривиально, а ρ_+ не содержит тривиальных компонент, $V_+ = V(\rho_+)$, $V_0 = V(\rho_0)$, $V = V_+ \oplus V_0$. Очевидно, что группа (G, ρ) квазикорегулярна и некорегулярна в точности тогда же, когда и группа (G, ρ_+) . Если H – конечное расширение группы (G, ρ) , то пространства V_+ и V_0 H -инвариантны. Для $r \in H$ определим новый оператор $r_+ \in \mathrm{GL}(V)$ следующим образом: $r_+(v_+ + v_0) = r(v_+) + v_0$ при любых $v_+ \in V_+$, $v_0 \in V_0$. Положим $H_+ \doteq \{r_+ \mid r \in H\}$. Симметричным образом определим оператор r_0 и группу H_0 . Заметим, наконец, что пространства V_+ и V_0 инвариантны относительно группы $I(\rho)$, причем она действует тривиально на V_0 , а ее ограничение на V_+ совпадает с $I(\rho_+)$.

¹Прим. автора: к моменту рабочей корректуры автор доказал, что линейные группы $(\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + \varphi_2)$, $(\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + \varphi_5)$ и $(\mathrm{SL}_8, \varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_7)$ также являются квазикорегулярными.

Таблица 1

	(G, ρ)	Сведения об образующих алгебры $C[\rho]^G$ и соотношениях между ними	Корегулярные расширения
1	$(\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + 2\varphi_1),$ $n \geq 3$	$d(n, 0, 0), f(n-1, 1, 1), g(n-1, 2, 0),$ $h(n-1, 0, 2), e(n-2, 2, 2), f^2 = gh + de$	Γ – любая конечная группа, порожденная элементами вида $\{1; 1; -1\}$
2	$(\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + \varphi_1 +$ $+(n-1)\varphi_{n-1}),$ $n \geq 3$	$d \in S^n(\varphi_1^2), e \in S^{n-1}(\varphi_1^2) \otimes S^2(\varphi_1),$ $q_{ij} \in \varphi_1^2 \otimes [S^2(\varphi_{n-1}) \text{ или } \varphi_{n-1} \otimes \varphi_{n-1}],$ $1 \leq i \leq j \leq n-1, l_i \in \varphi_1 \otimes \varphi_{n-1},$ $p \in S^{n-1}(\varphi_1^2) \otimes \varphi_1 \otimes S^{n-1}((n-1)\varphi_{n-1}),$ $p^2 = P(d, e, l_i, q_{kj})$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$
3	$(\mathrm{SL}_n, \varphi_{n-1}^2 + \varphi_2 +$ $+\varphi_{n-1}),$ $n = 2m+1, m \geq 2$	$d(n, 0, 0), e(n-1, 0, 2), f_k(2k, 2k, 0),$ $g_k(2k-1, 2k, 2), k = 1, \dots, m,$ $a(2m, m, 1), a^2 = A(d, e, f_k, g_l)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$
4	$(\mathrm{SL}_n, 2\varphi_1^2 + \varphi_1),$ $n \geq 2$	$f_i(i, n-i, 0), i = 0, \dots, n, g_j(j, n-1-j, 2),$ $j = 0, \dots, n-1, h(n(n-1)/2, n(n-1)/2, n),$ $h^2 = H(f_i, g_j)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$
5	$(\mathrm{SL}_n, 2\varphi_{n-1}^2 + \varphi_1),$ $n \geq 3$	$f_i(i, n-i, 0), i = 0, \dots, n, g_1(1, 0, 2),$ $g_j(j, n+1-j, 2), j = 2, \dots, n-1, g_n(0, 1, 2),$ $h(n(n-1)/2, n(n-1)/2, n), h^2 = H(f_i, g_j)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$
6	$(\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 +$ $+\varphi_{n-1}^2 + \varphi_1),$ $n \geq 3$	$f_0(n, 0, 0), f_n(0, n, 0), f_i(i, i, 0), g_i(i-1, i, 2),$ $i = 1, \dots, n-1, g_n(n-1, 0, 2), h(n(n-1)/2,$ $n(n-1)/2, n), h^2 = H(f_i, g_j)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$

(см. продолжение)

ТЕОРЕМА 2.3. 1) Группа H корегулярна тогда и только тогда, когда она совпадает с произведением таких своих подгрупп H^+ и $H^{(0)}$, что H^+ есть корегулярное расширение группы $\rho(G)$, тривиально действующее в пространстве V_0 , а ограничения группы $H^{(0)}$ на пространства V_0 и V_+ являются соответственно группой, порожденной отражениями, и подгруппой в $I(\rho_+)$.

2) Если дополнительно известно, что $I(\rho) = \rho(G)$, то можно считать, что $H^+ = H_+$, $H^{(0)} = H_0$, и, следовательно, имеем

$$H = H_+ \times H_0.$$

Таблица 1 (продолжение)

7	$(\mathrm{SL}_n, \varphi_1 \varphi_{n-1} + \varphi_1 + \varphi_{n-1}),$ $n \geq 3$	$\sigma_i(i, 0, 0), i = 2, \dots, n, F_j(j, 1, 1),$ $j = 0, \dots, n-1, d(n(n-1)/2, n, 0),$ $e(n(n-1)/2, 0, n), de = P(\sigma_i, F_j)$	см. поясн. к табл. 1.
8	$(\mathrm{SO}_n, n\varphi_1),$ $n \geq 3$	$f_{ij} \in S^2(\varphi_1)$ или $\varphi_1 \otimes \varphi_1, 1 \leq i \leq j \leq n$ $d \in S^n(n\varphi_1), d^2 = D(f_{ij})$	$\rho(O_n),$
9	$(\mathrm{SO}_n, \varphi_1^2 + \varphi_1),$ $n \geq 3$	$f_i(i, 0), i = 2, \dots, n,$ $g_j(j, 2), j = 0, \dots, n-1,$ $h(n(n-1)/2, n), h^2 = H(f_i, g_j)$	$\rho(O_n)$
10	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^3 + \varphi)$	$D(4, 0), f(1, 3), H(2, 2), G(3, 3),$ $G^2 + H^3 = Df^2$	Г порождена любым подмножеством набора: $r_1 = \{i; -i\},$ $r_2 = \{i; i\},$ $r_3 = \{1; e^{2\pi i/3}\},$ $\Gamma \not\subseteq \langle r_1 \rangle$
11	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^2 + \varphi^3)$	$f(2, 0), g(0, 4), h(1, 2), p(3, 2),$ $q(3, 4), q^2 = Q(f, g, h, p)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_2)$
12	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^4 + \varphi)$	$S(2, 0), T(3, 0), U(1, 4), H(2, 4),$ $J(3, 6), J^2 = -4H^3 + U^2HS - U^3T$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_2)$
13	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^2 + 2\varphi)$	$p(2, 0, 0), q(0, 1, 1), f(1, 2, 0), g(1, 0, 2),$ $h(1, 1, 1), pq^2 = fg - h^2$	Г – любая конечная группа, порожденная элементами вида $\{-1; i; -i\}$ и, возможно, расширенным эл-том $\{-1; i; i\}$
14	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^5)$	$f(4), g(8), h(12), p(18), p^2 = P(f, g, h)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_2)$
15	$(\mathrm{SL}_2, \varphi^6)$	$f(2), g(4), h(8), p(10), q(15),$ $q^2 = Q(f, g, h, p)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_2)$
16	$(\mathrm{SL}_3, 2\varphi_1\varphi_2)$	$f_1(2, 0), f_2(1, 1), f_3(0, 2), f_4(3, 0),$ $f_5(2, 1), f_6(1, 2), f_7(0, 3), f_8(2, 2),$ $f_9(3, 3), f_9^2 = F(f_1, \dots, f_8)$	см. пояснение к табл. 1.
17	$(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_1)$	$d(4, 0), e(6, 0), f(3, 3), g(5, 3), h(4, 6),$ $p(12, 9), p^2 = P(d, e, f, g, h)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_3)$

(см. продолжение)

Таблица 1 (продолжение)

18	$(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_2)$	$d(4, 0), e(6, 0), f(1, 3), g(3, 3), h(8, 6),$ $p(12, 9), p^2 = P(d, e, f, g, h)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_3)$
19	$(\mathrm{SL}_4, \varphi_1^3)$	$f(8), g(16), h(24), p(32), q(40),$ $r(100), r^2 = R(p, q, f, g, h)$	$\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_4)$
20	$(\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + 3\varphi_1)$	$d \in S^7(\varphi_3), f_i \in S^4(\varphi_3) \otimes [S^2(\varphi_1)$ или $\varphi_1 \otimes \varphi_1], i = 1, \dots, 6, e(6, 1, 1, 1),$ $g(5, 2, 2, 2), e^2 = dg + R(f_1, \dots, f_6)$	$\Gamma = \langle \{1; -1; -1; -1\} \rangle$
21	$(\mathrm{SL}_8, \varphi_3 + 2\varphi_1)$	$d(16, 0, 0), f_{ij}(10, i, j), i + j = 2,$ $f_{kl}(7, k, l), k + l = 3, f_{22}(4, 2, 2),$ $h(22, 3, 3), h^2 = H(d, f_{ij})$	$\Gamma = \langle \{\lambda^3; -\lambda; -\lambda\},$ $\lambda^{16} = 1$
22	$(\mathrm{Spin}_7, \varphi_3 + \varphi_2)$	$d(2, 0), f_2(0, 2), f_4(0, 4), f_6(0, 6),$ $g_2(2, 2), g_4(2, 4), g_6(2, 6), h_6(4, 6),$ $e(4, 9), e^2 = E(d, f_i, g_j, h_6)$	$\Gamma = \langle \{1; -1\} \rangle$
23	$(\mathrm{Sp}_4, 3\varphi_2 + \varphi_1)$	$f_1, \dots, f_6 \in S^2(\varphi_2)$ или $\varphi_2 \otimes \varphi_2,$ $g_1, g_2, g_3 \in \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes S^2(\varphi_1),$ $h(1, 1, 1, 2), h^2 = H(f_i, g_j)$	$\Gamma = \langle \{-1; -1; -1; 1\} \rangle$
24	$(\mathrm{Sp}_6, \varphi_2 + \varphi_3)$	$d(2, 0), e(3, 0), f_1(0, 4), f_2(2, 4),$ $f_3(3, 4), f_4(4, 4), f_5(6, 4), h(6, 6),$ $h^2 = H(d, e, f_i)$	$\Gamma = \langle \{1; i\} \rangle$
25	$(G_2, \varphi_2 + \varphi_1)$	$f_1(2, 0), f_2(6, 0), f_3(0, 2), f_4(2, 2),$ $f_5(4, 2), f_6(3, 1), f_7(3, 3), h(6, 3),$ $h^2 = H(f_i)$	$\Gamma = \langle \{-1; -1\} \rangle$

Применение теоремы 2.3 к квазикорегулярным связным простым линейным группам, имеющим нетривиальные неподвижные точки, дает описание их конечных корегулярных расширений, причем для большей части некорегулярных групп оно будет очень простым ввиду леммы 2.1.

Пояснения к таблице 1. В третьей колонке приведены наборы степеней полиоднородных (т.е. однородных по каждой неприводимой компоненте представления) образующих алгебры инвариантов и вид соотношения между ними. В тех случаях, когда представление имеет много одинаковых неприводимых компонент, информация о степенях дается в следующем сокращенном виде: полиоднородный инвариант представления $\rho_1 + \dots + \rho_l$ степени $(k_1, \dots, k_l)$ соответствует тривиальным компонентам представления $S^{k_1}(\rho_1) \otimes \dots \otimes S^{k_l}(\rho_l)$. В таблице приведены тензорные произведения, содержащие в каждом случае единственный инвариант, который является образующим алгебры инвариантов некоторого подпредставления. Все образующие, описываемые данным тензорным произведением, получа-

ются путем перебора всех таких подпредставлений. В четвертой колонке – информация о всех корегулярных расширениях группы $\rho(G)$; при этом описываются либо сами несвязные группы, либо такие конечные подгруппы $\Gamma \subseteq N(\rho(G))$, что группы $\rho(G)\Gamma$ корегулярны. В случаях 7 и 16 табл. 1 группа Γ порождена оператором r , действующим так: считаем, что точка пространства представления есть набор (A, v, f) (соответственно (A, B)), где A (соответственно A и B) – матрица размерности $n \times n$ (3×3) со следом нуль, v и f – столбец и строка длины n (причем действие группы SL_n (SL_3) определено в этих терминах естественным образом), и полагаем $r(A, v, f) = (A^\top, f^\top, v^\top)$ (соответственно $r(A, B) = (A^\top, B^\top)$).

§ 3. Критерий корегулярности несвязной группы

Пусть G – полупростая подгруппа в группе $\mathrm{GL}(V)$. Следующее утверждение дает удобную форму представления группы G , если она несвязна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Существует такая конечная подгруппа Γ группы G , что $G = G^0\Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из теории полупростых алгебр Ли (см. [21]), утверждение предложения верно для группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G))$ и ее связной компоненты единицы – группы $\mathrm{Int}(\mathrm{Lie}(G))$. Пусть H – такая конечная группа автоморфизмов алгебры $\mathrm{Lie}(G)$, что $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Lie}(G))H$. Положим

$$\Gamma = \{g \in G \mid d_e(\sigma_g) \in H\},$$

где $\sigma_g: h \rightarrow g^{-1}hg$ – автоморфизм группы G , d_e – дифференциал в единице автоморфизма группы G . Из свойств группы H ясно, что так определенная группа Γ удовлетворяет условиям предложения. $\square$

Пусть, далее, группа G связна, редуктивна, $\Gamma \subseteq N(G)$, и мы интересуемся корегулярностью группы $G\Gamma$. Градуированная алгебра $\mathbb{C}[V]^G$ инвариантна относительно действия группы Γ в алгебре $\mathbb{C}[V]$, и, более того, можно выбрать минимальную систему $f_1, \dots, f_n$ полиоднородных образующих этой алгебры так, чтобы линейное подпространство $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ было Γ -инвариантным. Положим $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle^*$. Пространство W также может быть описано как касательное пространство к фактормногообразию $V//G$ в вершине этого квазиконуса – образе начала координат в пространстве V . Рассмотрим естественно возникающее линейное представление $\varepsilon: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(W)$. Можно следующим образом уточнить замечание, сделанное во введении: если группа G корегулярна, то группа $G\Gamma$ корегулярна тогда и только тогда, когда группа $\varepsilon(\Gamma)$ порождена отражениями. В общем случае фактормногообразие $V//G$ естественно вкладывается в пространство W в виде некоторого Γ -инвариантного квазиконуса K , однородного относительно градуировки, возникающей в алгебре $\mathbb{C}[W]$, если положить, что отвечающая многочлену f_i линейная форма на W однородна и имеет полистепень, равную полистепени многочлена f_i при $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что многообразия $V//G\Gamma$ и $K//\Gamma$ изоморфны. Автоморфизм r многообразия X называется *отражением* (на X), если $\mathrm{codim}_X(X^r) = 1$. Хорошо известен (см., например, [7]) следующий факт:

Пусть Γ – конечная группа автоморфизмов неприводимого аффинного комплексного многообразия X . Если множество особых точек фактормногообразия $X//\Gamma$ односвязно, то группа Γ порождена отражениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Сохраняем обозначения, введенные перед формулировкой теоремы. Из сформулированного выше факта следует, что фактор-группа $H/\rho(G)$ порождена смежными классами таких элементов r , что $\text{codim}_{V//G}(V//G)^r = 1$. Но пространства V_+ и V_0 H -инвариантны и $V//G = V_0 \times K$, где $K = V_+//G$. Отсюда следует, что группа $H/\rho(G)$ порождена смежными классами элементов двух типов: элементы первого типа действуют тривиально на K и как отражения на V_0 ; элементы второго типа действуют тривиально на V_0 и как отражения на K . Положим теперь, что группа $H^{(0)}$ порождена элементами первого типа, а группа H^+ есть расширение группы $\rho(G)$ элементами второго типа. Отсюда следует, что

$$V//H \cong (V_+//H^+) \times (V_0//H^{(0)}),$$

и тем доказана первая часть теоремы. Если же дополнительно имеем, что $I(\rho_+) = \rho_+(G)$, то за счет домножения элементов первого типа на подходящие элементы группы $\rho(G)$ можно добиться того, чтобы они действовали тривиально на пространстве V_+ , и тогда будем иметь

$$H^+ = H_+, \quad H^{(0)} = H_0, \quad H = H_+ \times H_0.$$

□

В вышеприведенном факте утверждается, что группа Γ порождена отражениями в своем действии на X . Однако в случае, когда многообразие X факториально и квазиконично (а этими свойствами всегда обладают фактормногообразия по действию связных полупростых линейных групп), оказывается, что автоморфизм X , являющийся на нем отражением, является также отражением на касательном пространстве к вершине (как линейный оператор). Установивший это автор работы [8] доказал тем самым следующую лемму:

ЛЕММА 3.2 [8]. *Если группа $G\Gamma$ корегулярна, то группа $\varepsilon(\Gamma)$ порождена отражениями в пространстве W .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть W – линейное пространство, координатная алгебра $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ градуирована таким образом, что линейные формы x_i однородны и имеют положительную степень, K – квазиконус в W относительно данной градуировки. Если для некоторого s имеется изоморфизм $K \cong \mathbb{A}^s$, то существуют такие полиномы $F_1, \dots, F_{n-s} \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_s]$, что идеал $I(K)$ порожден (с точностью до нумерации) полиномами $x_{s+i} - F_i(x_1, \dots, x_s)$, $i = 1, \dots, n-s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1, \dots, f_s$ – система алгебраически независимых образующих алгебры $\mathbb{C}[K]$, существующая по условию. Можно считать, что $f_i \in A_+$ для $i = 1, \dots, s$. Как хорошо известно, образы этих образующих при факторизации должны порождать линейное пространство A_+/A_+^2 , в частности $s \geq \dim A_+/A_+^2$. Но первое число равно $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[K]$, а второе – числу элементов в любой минимальной системе однородных образующих, значит, имеется равенство $s = \dim A_+/A_+^2$, и любая минимальная система однородных образующих алгебраически независима. Поэтому можно считать, что функции $x_1, \dots, x_s$ алгебраически независимы в $\mathbb{C}[K]$ и существуют такие многочлены F_i ,

что $G_i = x_{s+i} - F_i(x_1, \dots, x_s) \in I(K)$ при $i = 1, \dots, n - s$. Ясно, что K совпадает со множеством нулей многочленов $G_1, \dots, G_{n-s}$. Отдельное простое рассуждение показывает, что любой многочлен f , обращающийся в нуль на множестве нулей многочленов $G_1, \dots, G_{n-s}$, лежит в идеале, порожденном ими, т.е. $I(K) = \mathbb{C}[W](G_1, \dots, G_{n-s})$. $\square$

Напомним, что аффинное алгебраическое многообразие $X \subseteq \mathbb{A}^n$ размерности s называется *полным пересечением*, если идеал $I(X)$ порожден $n - s$ элементами.

Из предложения 3.3 вытекает нижеследующее утверждение, которое устанавливает, ввиду леммы 3.2, необходимое и достаточное условия корегулярности не связной полупростой группы.

ЛЕММА 3.4. Пусть W и K такие, как в предложении 3.3, причем многообразие K неприводимо, его линейная оболочка совпадает с пространством W и имеется конечная группа $\Gamma \subseteq \text{GL}(W)$, порожденная отражениями, такая, что $\Gamma(K) \subseteq K$.

Тогда следующие условия равносильны:

- 1) фактор K/Γ изоморфен $\mathbb{A}^s$;
- 2) для любой системы $g_1, \dots, g_n$ однородных образующих алгебры $\mathbb{C}[W]^\Gamma$ идеал $I(K)$ порождается однородными элементами вида (с точностью до нумерации)

$$g_{s+i} - F_i(g_1, \dots, g_s), \quad i = 1, \dots, n - s;$$

- 3) существует такая система $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ однородных образующих алгебры $\mathbb{C}[W]^\Gamma$, что $I(K) = (\bar{g}_{s+1}, \dots, \bar{g}_n)$.

Кроме того, если эти условия выполнены, то K – полное пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)$ и $3) \Rightarrow 1)$ очевидны. Для доказательства импликации $1) \Rightarrow 3)$ применим предложение 3.3 к пространству W/Γ , рассматриваемому как линейное, и его квазиконическому подмногообразию K/Γ . При этом получается, что идеал $I(K/\Gamma) \triangleleft \mathbb{C}[W/\Gamma]$ порождается многочленами вида, указанного в 2), или, что равносильно, в 3). Но $I(K/\Gamma) = I(K)^\Gamma$, и получается, что $\mathbb{C}[W]I(K)^\Gamma = (\bar{g}_{s+1}, \dots, \bar{g}_n)$. С другой стороны, поскольку идеал $I(K)$ Γ -инвариантен, он имеет те же нули в пространстве W , что и его подмножество $I(K)^\Gamma$. Таким образом, K совпадает со множеством совместных нулей многочленов $\bar{g}_{s+1}, \dots, \bar{g}_n$. Из того, что $\langle K \rangle = W$, следует существование на K простой точки v с тривиальным стабилизатором в группе Γ . Применяя к точке v Γ -пространства W теорему Луны о слайсе, получаем, что морфизм факторизации $\pi: W \rightarrow W/\Gamma \cong \mathbb{C}^n$, $x \rightarrow (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ является этальным в точке v ; следовательно, якобиан $J(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ отличен от нуля в точке v и в некотором открытом в топологии Зарисского и, ввиду неприводимости K , плотном подмножестве в K . Одновременно на этом же множестве ранг якобиевой матрицы подсистемы $\bar{g}_{s+1}, \dots, \bar{g}_n$ равен $n - s$. Согласно известному результату из алгебраической геометрии (см., например, [24, приложение 1, § 6.2]) отсюда следует, что $I(K) = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ и K является полным пересечением. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение о том, что фактормногообразие по действию связной полупростой квазикорегулярной линейной группы является полным пересечением, было доказано в работе [8]. Вместо леммы 3.4 там использовался более

общий и сложный факт: в условиях леммы 3.4 многообразие K является полным пересечением в точности тогда же, когда и $K//\Gamma$. В той же работе [8] автор ставит вопрос о том, обобщается ли это утверждение на редуктивные группы. Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

ПРИМЕР (связной квазикорегулярной редуктивной линейной группы, фактор-многообразия по действию которой не является полным пересечением). Рассмотрим представление ρ группы $H = T_2 \times S_3$, при котором $\rho(t, s) = \text{diag}(t, s, (ts)^{-1})$, а группа S_3 представлена матрицами, мономияльными в соответствующем базисе. Оказывается, что группа $(H, 2\rho)$ корегулярна, тогда как многообразие $V(2\rho)//T_2$ не является полным пересечением. Второе следует из леммы 4.11 (см. ниже), а первое может быть легко установлено непосредственно либо выведено с помощью теоремы Луны и Ричардсона о стабилизаторах общего положения (см., например, [7, теорема 7.13]) из корегулярности группы $(\text{SL}_3 \times \text{SL}_3, 2\varphi_1 \otimes \varphi_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $G \subseteq \text{GL}(V)$, группа G полупроста и не корегулярна, а группа $G\Gamma$ корегулярна, $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[V]^G = s$. Тогда:

1) если группа $\varepsilon(\Gamma)$ циклическая простого порядка p , то алгебра $\mathbb{C}[V]^G$ имеет систему образующих $f_1, \dots, f_s, g$ с единственным соотношением между ними, имеющим вид

$$g^p = F(f_1, \dots, f_s);$$

2) если группа $\varepsilon(\Gamma)$ абелева, то $\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_k]$, причем система соотношений между образующими имеет вид

$$g_i^{q_i} = F_i(f_1, \dots, f_s), \quad i = 1, \dots, k;$$

3) если группа Γ абелева и коммутирует с G , то имеется такая подгруппа $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, что группа $G\tilde{\Gamma}$ корегулярна и все образующие алгебр инвариантов всех корегулярных ограничений группы G на инвариантные подпространства в V инвариантны относительно группы $\tilde{\Gamma}$. В частности, число таких образующих не больше, чем s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Любой нетривиальный элемент $r \in \varepsilon(\Gamma)$ – образующий этой группы, и ввиду леммы 3.2 должен быть отражением. Это значит, что если взять базис в W из собственных векторов оператора r , то все его элементы, кроме одного, будут Γ -инвариантны и им отвечают $\dim W - 1$ линейных форм на пространстве W (образующих алгебры $\mathbb{C}[W]^\Gamma$); следовательно, $\dim W - 1 \leq s$. И, поскольку группа G некорегулярна, имеем $\dim W = s + 1$. Утверждение о виде соотношения следует из леммы 3.4 и того очевидного факта, что в соотношении между образующими градуированной алгебры не может быть мономов первой степени по вхождению образующих.

2) Поскольку группа $\varepsilon(\Gamma)$ абелева, можно выбрать систему $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_k$ образующих алгебры $\mathbb{C}[V]^G$ так, чтобы все операторы из группы $\varepsilon(\Gamma)$ были диагональными в соответствующем базисе W . Из леммы 3.2 следует, что существуют такие натуральные числа $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_k$, что $\mathbb{C}[W]^G = \mathbb{C}[f_1^{p_1}, \dots, f_s^{p_s}, g_1^{q_1}, \dots, g_k^{q_k}]$, и лемма 3.4 дает требуемый вид соотношений.

3) Из условия и из линейно-алгебраических соображений следует, что можно выбрать такое разложение пространства V в прямую сумму неприводимых, что

каждый элемент группы Γ действует скалярно на каждой неприводимой компоненте (ср. с предложением 4.4, приведенным ниже). Выберем образующие инварианты полиоднородными относительно этого разложения. Тогда такая система образующих удовлетворяет свойству, потребованному при доказательстве п. 2); с другой стороны, в нее обязаны входить образующие алгебр инвариантов всех инвариантных подпространств. Причем те из последних, что отвечают корегулярным подпространствам, могут в силу соображений однородности соотношений принадлежать лишь множеству $\{f_1, \dots, f_s\}$. Тогда в качестве $\tilde{\Gamma}$ возьмем группу, порожденную всеми отражениями группы Γ , которые сохраняют многочлены $f_1, \dots, f_s$. $\square$

§ 4. Необходимые условия корегулярности

Начнем с утверждения, имеющего большое значение в изучении корегулярных линейных групп. Рассмотрим редуктивную группу G , действующую на аффинном многообразии X , $v \in X$ – простая точка многообразия X , полупростая относительно G (т.е. орбита Gv замкнута). Слайс-представлением σ_v точки v называется представление стабилизатора G_v в факторпространстве $T_v(X)/T_v(Gv)$. В случае, если X – линейное пространство V и действие $G : X$ осуществляется с помощью линейного представления $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, вложение $G_v \subseteq G$ полностью определяет слайс-представление σ_v ввиду тождества

$$\sigma_v + (\mathrm{Ad} G)|_{G_v} = \rho|_{G_v} + \mathrm{Ad} G_v.$$

ЛЕММА 4.1 [1]. Пусть G – редуктивная группа, а $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – ее корегулярное представление. Тогда:

- 1) любое подпредставление представления ρ корегулярно;
- 2) если точка $v \in V$ полупроста (т.е. орбита Gv замкнута), то слайс-представление σ_v точки v корегулярно.

По поводу доказательства леммы 4.1 см. [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ – алгебраическая подгруппа, $v \in V$. Тогда:

- 1) свойства полупростоты точки v относительно групп G и G^0 равносильны;
- 2) $(G_v)^0 = (G_v^0)^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно. $\square$

Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Если G – квазикорегулярная группа и v – полупростая точка, то слайс-представление группы G_v квазикорегулярно.

Таким образом, свойство квазикорегулярности сохраняется при редукции к слайс-представлению. Однако с редукцией к подпредставлению дело обстоит не так просто, так как пространство, приводимое относительно какой-нибудь группы, может быть неприводимым относительно ее конечного расширения. С другой стороны, сильные ограничения, накладываемые на конечные корегулярные расширения леммой 3.2, как мы увидим ниже, делают нереальной эту априорную возможность для простых групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть G – связная простая группа, ρ – ее представление, r – полупростой элемент в группе $N(\rho(G))$.

1) Если $r \in Z(\rho(G))$, то существует такое разложение пространства представления в сумму неприводимых, что оператор r действует скалярно на каждой неприводимой компоненте.

2) Если группа $\text{Aut } \rho$ тривиальна, то существует такой элемент $g \in G$, что $\rho(g)r \in Z(\rho(G))$.

3) Если $G = \text{SL}_n$, $\rho = k\varphi_1\varphi_{n-1} + \varphi_1 + \varphi_{n-1}$, то существует элемент $r' \in r\rho(G)$, который принадлежит либо группе $Z(\rho(G))$ (и описан в 1)), либо множеству Tr . Множество Tr состоит из таких операторов h , которые при некотором G -эквивариантном отождествлении ψ_h точек пространства V с наборами $(A_1, \dots, A_k, v, f)$, где A_i – матрица $n \times n$ со следом нуль, v – столбец, f – строка длины n , действуют так:

$$h(A_1, \dots, A_k, v, f) = (\lambda_1 A_1^\top, \dots, \lambda_k A_k^\top, \mu f^\top, \nu v^\top), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu, \nu \in \mathbb{C}^*.$$

Кроме того, оператор $r_0 \in \text{Tr}$, который при некотором ψ_{r_0} имеет вышеприведенный вид с условием $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu = \nu = 1$, единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1), 2) и первая часть 3) представляют собой известные факты, доказываемые методами линейной алгебры и рассуждениями в духе предложения 3.1. Для доказательства единственности оператора r_0 заметим, что если $h, h' \in \text{Tr}$, то $h'h^{-1} \in Z(\rho(G))$. Запишем теперь оператор r_0 в каноническом для него виде и, взяв произвольный элемент $e \in Z(\rho(G))$, положим $\tilde{r} = r_0 e$. Оказывается, что элемент $\tilde{r}$ будет диагонализуемым и иметь спектр, совпадающий со спектром оператора r_0 , только если $e = \text{Id}$. $\square$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 2.1. Считаем теорему 2.2 доказанной, и, следовательно, надо проверить лишь линейные группы из табл. 1 и три группы из формулировки теоремы 2.2. Сначала рассматриваем те представления ρ , для которых группа $\text{Aut } \rho$ тривиальна. С учетом 4.4, 1) и 4.4, 2), рассматривая каждый раз оператор r , действующий умножением на скаляр на каждой неприводимой компоненте представления, и беря систему образующих, полиоднородных относительно данного разложения, получаем, что оператор $\varepsilon(r)$ диагонален в соответствующем базисе пространства W и его спектр полностью определяется упомянутыми скалярами и степенями образующих алгебры инвариантов, приведенными в табл. 1. Случаи, когда группа $\text{Aut } \rho$ нетривиальна: 7, 16 и 8, 9 при четном n – рассматриваются так. Первые два – с помощью 4.4, 3). В случаях 8, 9 имеем

$$N(\rho(\text{SO}_n)) = \rho(O_n)Z(\rho(\text{SO}_n)).$$

Отсюда легко вывести, используя информацию табл. 1, что $I(\rho) = \rho(\text{SO}_n)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть G – связная редуктивная группа, ρ и π – ее представления. Если у алгебры $\mathbb{C}[\rho + \pi]^G$ имеется образующий бистепени (p, t) , то у алгебры $\mathbb{C}[\rho + 2\pi]^G$ имеется по меньшей мере $t + 1$ образующих полистепеней $(p, i, t - i)$, $i = 0, \dots, t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – образующий алгебры $\mathbb{C}[\rho + \pi]^G$ степени (p, m) . Тогда процессом поляризации (см., например, [7]) по координатам в пространстве $V(\pi)$ можно получить многочлен F из алгебры $\mathbb{C}[\rho + m\pi]^G$ полистепени $(p, 1, \dots, 1)$ такой, что для $u \in V(\rho)$, $w \in V(\pi)$ имеем $F(u, w, \dots, w) = f(u, w)$. Пусть ψ_i , $i = 0, \dots, m$, – G -эквивариантное отображение, действующее так:

$$\psi_i: V(\rho + 2\pi) \rightarrow V(\rho + m\pi), \quad \psi_i(u, v, w) = (u, v, \dots, v, w, \dots, w),$$

где в правой части i символов v и $m - i$ символов w . Если положить $f_i = F(\psi_i)$, то все эти $m + 1$ многочленов лежат в алгебре $\mathbb{C}[\rho + 2\pi]^G$. Если бы при каком-нибудь i многочлен f_i выражался через инварианты младших степеней, то, ограничив такое тождество на пространство $\{(u, v, w) \in V(\rho + 2\pi) \mid v = w\}$, мы получили бы, что многочлен f выражается в алгебре $\mathbb{C}[\rho + \pi]^G$ через инварианты младших степеней. Из этого и из соображений полистепеней следует искомое. $\square$

Как мы убедились выше, предложение 4.4 позволяет изучать спектр оператора $\varepsilon(r)$ для элемента r из группы $Z(\rho(G))$. Именно, можно считать, что оператор r имеет вид $r = \{c_1; \dots; c_l\}$ для некоторого разложения $V(\rho) = V(\rho_1) \oplus \dots \oplus V(\rho_l)$ пространства $V(\rho)$ на неприводимые. Далее, пусть $\Delta \doteq \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^l \mid \alpha \text{ – полистепень образующего алгебры } \mathbb{C}[\rho]^G\}$. В этих терминах имеем

$$\text{Spec } \varepsilon(r) = \left\{ \prod_{i=1}^l c_i^{k_i} \mid (k_1, \dots, k_l) \in \Delta \right\}.$$

Это наблюдение позволяет изучать операторы r из группы $N(\rho(G))$ такие, что $\varepsilon(r)$ – отражение, а во многих случаях доказывать их отсутствие. Положим $e(r)$ равным числу неединичных собственных значений оператора $\varepsilon(r)$.

ЛЕММА 4.6. Пусть G – связная простая алгебраическая группа, ρ – ее некорегулярное представление, причем $V(\rho)^G = \{0\}$; оператор r из группы $Z(\rho(G))$ таков, что $e(r) \leq 1$. Тогда если $(G, \rho) \neq (\text{SL}_n, \varphi_1^2 + 2\varphi_1)$, то оператор r действует скалярно на каждой изотипной компоненте представления ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho = \alpha + k\pi$, причем $k \geq 2$ и представление π неприводимо и не входит в α . По предложению 4.4 можно считать, что оператор r действует скалярно на каждой неприводимой компоненте и достаточно доказать, что если для каких-нибудь двух компонент со старшим весом π эти скаляры различны, то $e(r) \geq 2$. Разберем несколько возможных случаев.

Случай а). Стабилизатор точки общего положения (далее применяется сокращенная запись – с.о.п.) относительно группы G в пространстве $V(\alpha)$ конечен. Тогда имеем

$$\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha + \pi]^G = \text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha]^G + \dim \pi \geq \text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha]^G + 2.$$

Следовательно, имеются по меньшей мере два образующих алгебры $\mathbb{C}[\alpha + \pi]^G$, зависящих от координат в пространстве $V(\pi)$, каждый из которых по предложению 4.5 порождает серию образующих алгебры $\mathbb{C}[\alpha + 2\pi]^G$, причем в соответствующих сериях собственных значений обязательно найдется по одному неединичному.

Пусть далее с.о.п. в пространстве $V(\alpha)$ бесконечен. Если тем не менее существуют два образующих алгебры $\mathbb{C}[\alpha + \pi]^G$, зависящие от координат в пространстве $V(\pi)$, то все получается, как в п. а). Если это не так, то дальнейшее применение предложения 4.5 дает, что реализуется один из следующих случаев.

Случай б). $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\pi]^G = 0$, $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha + \pi]^G = \text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha]^G$.

Случай в). $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\pi]^G = 0$, $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha + \pi]^G = \text{tr. deg. } \mathbb{C}[\alpha]^G + 1$, причем единственный образующий первой алгебры, зависящий от координат в пространстве $V(\pi)$, имеет степень d по этой компоненте; $d = 1$ или $d = k = 2$; рассматриваем два подслучая: в1) $d = 1$ и в2) $d = 2$.

Случай г). $\mathbb{C}[\pi]^G = \mathbb{C}[f]$, $\deg f = k = 2$, f – единственный образующий алгебры $\mathbb{C}[\alpha + \pi]^G$, не лежащий в $\mathbb{C}[\alpha]^G$.

Далее необходимо проделать перебор многих троек (G, α, π) , причем для выяснения того, что некоторое представление попадает в один из случаев, требуется использовать только таблицы работы [17] – для нахождения с.о.п. в компоненте α , и результаты работ [2] и [3], содержащие, в частности, сведения о степенях образующих инвариантов корегулярных представлений простых групп. Этой информации оказывается также достаточно для того, чтобы, найдя списки представлений, отвечающих случаям б), в), г), проверить затем справедливость для них утверждения предложения. Эти списки таковы (ниже для всех случаев описываются группа G , представления α и π , а для случаев б) и в1) еще минимально возможное k такое, что представление $\alpha + k\pi$ некорегулярно).

Случай б). $\alpha = 0$, $(G, \pi, k) = (\text{SL}_n, \varphi_1, n + 2)$, $(\text{SL}_{2m+1}, \varphi_2, 3)$, $(\text{Sp}_{2n}, \varphi_1, 2n)$, $(\text{Spin}_{10}, \varphi_5, 4)$; $G = \text{SL}_n$, $\pi = \varphi_1$, $(n, \alpha, k) = (\text{любое}, \varphi_{n-2}, n)$, $(2m, \varphi_2, 4)$, $(2m, i\varphi_2 + j\varphi_{n-2}, 3)$, $i + j = 2$; $(G, \alpha, \pi, k) = (\text{Sp}_{2n}, \varphi_2, \varphi_1, 4)$, $(\text{SL}_{2m+1}, \varphi_1, \varphi_{n-2}, 3)$.

Случай в1). $G = \text{SL}_n$, $\pi = \varphi_1$, $(n, \alpha, k) = (\text{любое}, \varphi_{n-1}, n + 1)$, $(2m + 1, \varphi_2, 4)$, $(2m + 1, \varphi_2 + \varphi_{n-2}, 3)$, $(2m, \varphi_2 + \varphi_{n-1}, 4)$, $(2m, \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}, 2m - 1)$; $(G, \pi, \alpha, k) = (\text{SL}_{2m+1}, \varphi_2, 2\varphi_{n-1}, 3)$, $(\text{Spin}_{10}, \varphi_4, \varphi_5, 3)$.

Случай в2). $(G, \pi, \alpha) = (\text{SL}_n, \varphi_1, \varphi_1^2)$, $(\text{Sp}_4, \varphi_1, 2\varphi_2)$.

Случаю г) не отвечает ни одно представление. $\square$

Назовем расширение групп $H \subseteq G$ *центральным*, если $G = \text{HZ}_G(H)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Если представление ρ связной простой группы G квазикорегулярно, причем группа $\rho(G)$ имеет центральное корегулярное расширение (что всегда верно, если группа $\text{Aut } \rho$ тривиальна), то любое его подпредставление квазикорегулярно.*

Важнейшим методом доказательства некорегулярности является утверждение, доказанное в [1] (как следствие полученной там же оценки на множество квазикорегулярных представлений SL_2 – см. [4]), которое с помощью предложения 4.2 обобщается на свойство квазикорегулярности. Для представления ρ редуктивной группы G и одномерного тора $T \subseteq G$ положим $G^T = Z_G(T)/T$, ρ^T – представление группы G^T в пространстве $V(\rho)^T$. Определим также число $q(\rho, T)$ формулой

$$q(\rho, T) = (\dim V(\rho) - \dim V(\rho)^T)/2.$$

ЛЕММА 4.8. Пусть T – одномерный тор, содержащийся в простой трехмерной подгруппе редуктивной группы G , $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – представление. Предположим, что

- а) с.о.п. для действия группы G^T в пространстве V^T конечен;
- б) действие $G^T: V^T$ стабильно;
- в) $q(\rho, T) - q(\mathrm{Ad} G, T) \geq 3$.

Тогда представление ρ неквазикорегулярно.

В некоторых случаях, применяя предложения 4.1 и 4.3, приходится сталкиваться с вопросом о корегулярности алгебраических торов и их конечных расширений. В этом случае очень удобна следующая лемма.

ЛЕММА 4.9 [1]. Пусть G – линейная алгебраическая группа такая, что $G^0 = \mathrm{diag}(t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n})$. Тогда если группа G корегулярна, то среди чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ либо не более одного положительного, либо не более одного отрицательного, либо в точности два положительных и два отрицательных, причем в последнем случае расширение $G^0 \subseteq G$ не является центральным.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, сделаем такое замечание: в алгебре инвариантов линейного алгебраического тора всегда можно выбрать систему образующих, состоящую из мономов.

Из результатов работы [6] следует

ЛЕММА 4.10 [6]. Линейный алгебраический тор допускает центральное корегулярное конечное расширение тогда и только тогда, когда в системе образующих алгебры инвариантов, состоящей из мономов, содержится некоторая система параметров этой алгебры.

Наконец, по лемме 3.4 свойство квазикорегулярности связных полупростых линейных групп влечет то, что фактормногообразие по действию такой группы является полным пересечением (сокращенно – свойство ф.п.п.). Это свойство редуцируется на слайс-представления полупростых точек и на подпредставления (см. [5]). Кроме того, известен следующий факт (см. по этому поводу [5]):

ЛЕММА 4.11. Если G – редуктивная линейная группа, $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$, G обладает свойством ф.п.п., то число однородных образующих алгебры $\mathbb{C}[V]^G$ меньше, чем $2 \mathrm{tr. deg.} \mathbb{C}[V]^G$.

§ 5. Неприводимые квазикорегулярные простые группы

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ – неприводимая связная простая некорегулярная линейная группа, причем $V^G = \{0\}$.

Тогда следующие условия равносильны:

- 1) фактор $V//G$ является полным пересечением;
- 2) группа G квазикорегулярна;
- 3) G – одна из групп $(\mathrm{SL}_2, \varphi^5)$, $(\mathrm{SL}_2, \varphi^6)$, $(\mathrm{SL}_4, \varphi_1^3)$.

Единственным конечным корегулярным расширением в каждом случае является группа $\rho(\widetilde{\mathrm{SL}}_n)$ для соответствующего $n = 2, 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 5.1 может быть легко получено с помощью классификации неприводимых связных простых линейных групп, обладающих свойством ф.п.п., полученной в работе [5] (хотя равносильность условий 2) и 3) была получена автором независимо от этого результата). Именно там доказано, что все группы, кроме фигурирующих в условии теоремы 5.1 и $(\mathrm{SL}_4, \varphi_1 \varphi_2)$, не обладают этим свойством.

Группа $(\mathrm{SL}_4, \varphi_1 \varphi_2)$ исследовалась в работе [9], где найдены все нетривиальные стабилизаторы полупростых точек. В частности, стабилизатор одной из полупростых точек есть группа $\Gamma \cong \mu_5 \mu_2$, причем $\mu_5 = \langle g \rangle$, $g = \mathrm{diag}(\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4)$, $\tau = e^{2\pi i/5}$, а группа μ_2 порождена таким элементом h , что выполняется соотношение $ghgh = \mathrm{Id}$. Если σ – слайс-представление полупростой точки с данным стабилизатором, то с помощью тождества, приведенного перед леммой 4.1, легко подсчитать, что $\sigma(g) = \mathrm{diag}(\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, 1)$, и ясно, что $\sigma(h)$ есть мономиальный оператор, отвечающий перестановке $(1, 4)(2, 3)$. Легко проверяется, что количество образующих алгебры инвариантов ограничения группы $\sigma(\Gamma)$ на инвариантное четырехмерное подпространство не меньше восьми, откуда следует, что эта группа, а значит, и исходная простая группа не обладают свойством ф.п.п.

Осталось доказать, что указанные три группы действительно квазикорегулярны, и найти их корегулярные расширения. Случай $G = \mathrm{SL}_2$ подробно разобран в [4], а полный набор образующих и корегулярное конечное расширение группы $(\mathrm{SL}_4, \varphi_1^3)$ получены в работе [10]. $\square$

Ввиду того, что свойство ф.п.п. сохраняется при редукции к подпредставлению, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Если ρ – квазикорегулярное представление связной простой группы, то все его неприводимые компоненты квазикорегулярны.*

§ 6. Доказательство квазикорегулярности

Цель этого параграфа – доказать существование и описать все корегулярные расширения связных линейных групп из табл. 1. В основном эта задача решается путем нахождения в достаточно явном виде образующих алгебры инвариантов связной группы и соотношения между ними. Исключение составляют случаи 4–6, 9 и 21, когда сначала будет доказана корегулярность некоторого конечного расширения, что позволит найти также степени образующих инвариантов связной группы и вид соотношения между ними.

Пусть G – классическая простая группа, ρ – ее представление в пространстве, элементы которого суть наборы тензоров $T_1, \dots, T_l$ над пространством ее простейшего представления. Методы классической теории инвариантов позволяют искать образующие алгебры $\mathbb{C}[\rho]^G$ в виде полных сверток этих тензоров с основными тензорами группы (см., например, [7]). Следует сказать, что с возрастанием размерности группы и представления описание инвариантов в виде сверток становится все менее явным: даже проверка того, что свертка дает отличный от нуля полином, становится непосильной вычислительной задачей.

Далее будем называть конечное множество однородных элементов градуированной алгебры A *набором образующих*, если это множество может быть дополнено до минимальной системы однородных образующих алгебры A (это равносиль-

но линейной независимости образов элементов множества в факторпространстве A_+/A_+^2 . Если уже получен некоторый набор однородных образующих алгебры инвариантов, а также полное описание алгебраических соотношений между ними, то становится необходимой техника доказательства того, что данный набор является системой образующих. В наиболее простых случаях (для номеров 1, 2, 8, 23 табл. 1) достаточно использовать методы классической теории инвариантов, т.е. искать образующие в виде неразложимых сверток, а также доказывать равенство нулю некоторых из них с помощью символического метода оперирования с инвариантами (см. [11]). В более сложных случаях для решения этой задачи в данной работе применяется метод, опирающийся на следующий общеизвестный результат, именуемый часто леммой Игусы.

ЛЕММА 6.1. Пусть X, Y – неприводимые аффинные многообразия, алгебраическая группа G действует на X и морфизм $\pi: X \rightarrow Y$ постоянен на орбитах группы G , причем выполнены следующие свойства:

- а) Y нормально;
- б) для любой точки y из некоторого непустого открытого подмножества $Y^0 \subseteq Y$ слой $\pi^{-1}(y)$ содержит плотную орбиту;
- в) $\text{codim}_Y(Y \setminus \pi(X)) \geq 2$.

Тогда морфизм π индуцирует изоморфизм $\pi^*: \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]^G$.

Для проверки свойства а) леммы Игусы применяется следующее утверждение.

ЛЕММА 6.2. Пусть алгебра A порождена образующими $f_1, f_2, \dots, f_n, g$ с единственным соотношением вида $g^2 = P(f_1, f_2, \dots, f_n)$, причем многочлен P не делится в алгебре $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$ на квадрат.

Тогда алгебра A целозамкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$. Легко проверить, что любой элемент $a \in A$ (соответственно QA) единственным образом представляется в виде $a = b + cg$, где b, c лежат в B (соответственно QB). Пусть $a \in QA$, a цел над алгеброй A . Тогда a также цел над алгеброй B . Рассмотрим многочлен $T^2 - 2bT + b^2 - c^2P(f_1, \dots, f_n) \in QB[T]$. Он является минимальным многочленом для a над полем QB . Тогда из леммы Гаусса следует, что его коэффициенты лежат в алгебре B . Значит, $b \in B$ и $c^2P(f_1, \dots, f_n) \in B$; по условию отсюда следует, что $c \in B$ и $a \in A$. $\square$

Лемма Игусы применяется следующим образом. Предположим, что найден некоторый набор образующих $f_1, \dots, f_n$. Рассмотрим отображение $\pi: V(\rho) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\pi(v) = (f_1(v), \dots, f_n(v))$, и положим $K = \overline{\pi(V(\rho))}$. Подмногообразие K определяется тем, что идеал $I(K)$ является по определению идеалом соотношений между полиномами $f_1, \dots, f_n$. Выполненность всех условий леммы Игусы для отображения $\pi: V(\rho) \rightarrow K$ означает, что найденные образующие действительно порождают алгебру инвариантов. Оказывается, что для квазикорегулярных групп так же, как и для корегулярных, этот метод особенно прост в применении благодаря следующему облегчению проверки условия в).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – набор однородных элементов алгебры $\mathbb{C}[V]$, $A = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$, конечная группа $\Gamma \subseteq \text{GL}(V)$ такова, что $\Gamma A \subseteq A$,

$g_1, \dots, g_s$ – минимальная система однородных образующих алгебры A^Γ . Обозначим через π' и π'' отображения пространства V в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^s$, построенные с помощью наборов функций $f_1, \dots, f_n$ и $g_1, \dots, g_s$, и положим $K = \overline{\pi'(V)}$, $N = \overline{\pi''(V)}$.

Тогда если $\text{codim}_N(N \setminus \pi''(V)) \geq 2$, то $\text{codim}_K(K \setminus \pi'(V)) \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что можно считать набор $f_1, \dots, f_n$ минимальной системой образующих алгебры A , а линейное пространство $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ Γ -инвариантным. Многообразие K естественно вкладывается в пространство $W = \langle f_1, \dots, f_n \rangle^*$ инвариантным относительно действия группы Γ образом. Обозначим через π морфизм факторизации $K \rightarrow K/\Gamma \cong N$. Очевидно, что $\pi'' = \pi \circ \pi'$ и искомая импликация следует из того, что морфизм π сюръективен и имеет слоями орбиты группы Γ . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 6.3 играет при проверке условия в) леммы Игусы следующую роль: если набор $f_1, \dots, f_n$ таков, что алгебра A^Γ регулярна, то, оказывается, достаточно проверить условие в) для набора $g_1, \dots, g_s$ алгебраически независимых полиномов.

Иногда почти всю информацию об образующих алгебры инвариантов можно получить иным образом. Если представление ρ редуктивной группы G имеет s неприводимых компонент, то алгебра $A = \mathbb{C}[\rho]^G$ является $\mathbb{Z}_+^s$ -градуированной. Ее рядом Пуанкаре называется функция

$$P_A(t_1, \dots, t_s) = \sum_{i_1, \dots, i_s \geq 0} \dim A_{i_1, \dots, i_s} t_1^{i_1} \dots t_s^{i_s}.$$

Поскольку алгебра A конечнопорожденная, $P_A(t_1, \dots, t_s)$ является рациональной функцией, явный вид которой может многое сказать об алгебре A . Если $\beta \in \mathbb{Z}_+^s$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, то положим $t^\beta = t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} \dots t_s^{\beta_s}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть ряд Пуанкаре алгебры A имеет вид

$$P_A(t_1, \dots, t_s) = \frac{1 + t^{\alpha_0}}{(1 - t^{\alpha_1})(1 - t^{\alpha_2}) \dots (1 - t^{\alpha_n})}, \quad \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+^s,$$

причем степень α_0 не лежит в полугруппе, порожденной степенями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Тогда имеем:

- 1) алгебра A имеет образующий f_0 такой, что $\deg f_0 = \alpha_0$;
- 2) если существуют такие алгебраически независимые элементы $f_1, \dots, f_n \in A$, что $\deg f_i = \alpha_i$, то $A = \mathbb{C}[f_0, f_1, \dots, f_n]$ и $f_0^2 \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида ряда Пуанкаре и условия на степень α_0 следует существование образующего f_0 степени α_0 и соотношения вида $af_0^2 + b(f_1, \dots, f_n) = 0$, $b \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$, $a \in \mathbb{C}$. Из алгебраической независимости полиномов $f_1, \dots, f_n$ следует, что $a \neq 0$, и подалгебра $\mathbb{C}[f_0, f_1, \dots, f_n]$ имеет тот же ряд Пуанкаре, что и алгебра A , и, следовательно, совпадает с ней. $\square$

Ниже приводится доказательство квазикорегулярности для представлений табл. 1, кроме тех представлений группы SL_2 (номеров 10–11, 13–15), которые

разобраны в [4], и номера 19, который уже обсуждался при доказательстве теоремы 5.1. Представления группируются исходя из близости метода исследования.

Случай А. $G = \mathrm{SL}_n$, $\rho = \varphi_1^2 + 2\varphi_1$, $n \geq 3$.

Образующие алгебры инвариантов в этом случае имеются в [11], а также в [3]. Именно, это следующие пять многочленов: d степени $(n, 0, 0)$, f, g, h степеней $(n-1, 1, 1)$, $(n-1, 2, 0)$, $(n-1, 0, 2)$ соответственно и e степени $(n-2, 2, 2)$. Соотношение между ними легко находится и имеет вид $f^2 - gh = de$. Если $r \in Z(\rho(G))$ и $e(r) = 1$, то с точностью до умножения на элементы группы $\rho(Z(G))$ для некоторого разложения пространства $V(\rho)$ в сумму неприводимых имеем $r = \{1; 1; -1\}$.

Пусть группа Γ – любая конечная группа, порожденная такими элементами. Тогда группы $\rho(G)\Gamma$ и $I(\rho)\Gamma$ корегулярны. Действительно, рассмотрим пространство W , содержащее конус $K = V(\rho)/G$ (см. § 3). Очевидно, многочлены d и e Γ -инвариантны, поэтому инвариантна и квадратичная форма от многочленов f, g, h в левой части соотношения, задающего K ; далее, эта форма не может выражаться в алгебре $\mathbb{C}[W]^\Gamma$ через инварианты младшей степени, так как хотя бы один из многочленов f, g, h не является Γ -инвариантом. Следовательно, соотношение, выделяющее конус K , удовлетворяет условию леммы 3.4.

Случай Б. $G = \mathrm{SL}_n$, $\rho = \varphi_1^2 + \varphi_1 + (n-1)\varphi_{n-1}$, $n \geq 3$. Образующие алгебры $\mathbb{C}[\rho]^G$ в этом случае получены в работе [2, гл. II, п. 1.3] с помощью символического метода. Соотношение также легко находится, и единственный элемент $r \in Z(\rho(G))$, для которого $e(r) = 1$, таков, что группа $\rho(G)\langle r \rangle$ корегулярна.

Случай В. $(G, \rho) = (\mathrm{SO}_n, n\varphi_1)$, $n \geq 3$, $(\mathrm{Sp}_4, 3\varphi_2 + \varphi_1)$. Образующие алгебры $\mathbb{C}[\rho]^G$ для первого представления хорошо известны. Если считать точку пространства представления набором $(v_1, \dots, v_n)$, где $v \in \mathbb{C}^n$, то имеется $n(n+1)/2$ образующих вида $\langle v_i, v_j \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная билинейная форма в $\mathbb{C}^n$, и определитель системы векторов $-\det[v_1, \dots, v_n]$. Алгебра инвариантов группы O_n порождена первыми $n(n+1)/2$ алгебраически независимыми образующими, т.е. корегулярна. Легкая проверка показывает, что это единственное корегулярное расширение образа группы SO_n .

Точку пространства второго представления можно считать набором (A_1, A_2, A_3, v) , где v – элемент пространства $\mathbb{C}^4$, снабженного невырожденной кососимметрической формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$; A_i , $i = 1, 2, 3$, – самосопряженный относительно этой формы линейный оператор со следом нуль. Легко проверяется, что квадрат любого такого оператора скалярен. Имеем $\mathrm{tr. deg.} \mathbb{C}[\rho]^G = 9$. Образующие алгебры инвариантов подпредставлений таковы: $f_{ij} = \mathrm{Tr} A_i A_j$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, $g_{ij} = \langle v, A_i A_j v \rangle$, $1 \leq i < j \leq 3$. Далее, классическая теория инвариантов дает в этом случае, что любой образующий, зависящий от координат в пространстве $V(\varphi_1)$, обязан иметь вид $\langle v, Bv \rangle$, где B – произведение операторов A_i в каком-то числе и порядке. Однако, как уже отмечалось, имеем тождество $A_i^2 = (f_{ii}/4) \mathrm{Id}$, откуда следует, что если в произведении B стоят подряд две копии одного оператора, то соответствующий инвариант не образующий. Из тождества вытекает также и то, что антикоммутиратор операторов A_i и A_j скалярен. Отсюда легко выводится, что если в произведении B имеются хотя бы два одинаковых сомножителя, то инвариант не является образующим. Таким образом, в систему образующих, кроме выписанных выше, входит лишь инвариант $h = \langle v, A_1 A_2 A_3 v \rangle$. Подсчет показывает, что полином h^2 выражается через остальные образующие и существует единственное корегуляр-

ное конечное расширение группы $\rho(G)$, а именно группа $\rho(G)\langle\{-1; -1; -1; 1\}\rangle$.

Случай Г. $(G, \rho) = (\mathrm{SL}_n, k\varphi_1^2 + l\varphi_{n-1}^2 + \varphi_1)$, $k + l = 2$, $n \geq 3$; $(\mathrm{SO}_n, \varphi_1^2 + \varphi_1)$, $n \geq 3$. Г. Schwarz в работе [3] сделал замечательное наблюдение, которое после некоторого обобщения принимает следующий вид. Рассмотрим представление $\alpha = k\varphi_2 + l\varphi_{n-2} + 2\varphi_1$ группы SL_{2n} , $k + l = 2$, и положим $H = \alpha(\mathrm{SL}_{2n})$. Группа H естественно вкладывается в группу $K = \pi(\mathrm{SL}_{2n} \times \mathrm{SL}_2)$, где $\pi = k\varphi_2 \otimes \theta + l\varphi_{n-2} \otimes \theta + \varphi_1 \otimes \varphi$. Положим $V = V(\alpha) = V(\pi)$. Как установлено в [2] и [3], алгебра $\mathbb{C}[V]^H$ регулярна и порождена образующими, имеющими степень $(0, 0)$ или $(1, 1)$ по двум последним компонентам представления α . Следовательно, если $r \in Z(H)$, $r = \{1; 1; \lambda; \lambda^{-1}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, то r принадлежит группе $I(\alpha)$. Отсюда следует, что алгебра $\mathbb{C}[V]^K$ совпадает с алгеброй $\mathbb{C}[V]^H$ и, следовательно, регулярна. С.о.п. для действия группы K в пространстве V есть группа $F \cong \mathrm{SL}_2$, вложенная в группу SL_{2n} представлением $n\varphi$. Положим $N = N_K(F)/F$. Известный результат Луны и Ричардсона (см., например, [7]) дает в этом случае, что алгебра $\mathbb{C}[V^F]^N$ регулярна. Анализ показывает, что линейная группа (N, V^F) изоморфна группе $(\mathrm{SL}_n, k\varphi_1^2 + l\varphi_{n-1}^2 + \varphi_1)$. Кроме того, 3.5, 1) дает, что алгебра $\mathbb{C}[\rho]^G$ порождена $2n + 4$ образующими ($\mathrm{tr. deg.} \mathbb{C}[\rho]^G = 2n + 3$), причем $2n + 3$ из них имеют четный вес (количество тензоров $\det$, входящих в свертку) относительно группы GL_n , а один – нечетный, и квадрат этого последнего выражается через остальные образующие.

Далее легко удастся найти $2n + 3$ образующих четного веса (их степени см. в табл. 1) и доказать, что конечное корегулярное расширение единственно. Чтобы определить степень (a, b, c) образующего нечетного веса, нам понадобится еще одно утверждение, касающееся рядов Пуанкаре алгебр инвариантов. Для конечнопорожденной $\mathbb{Z}_+^s$ -градуированной алгебры A обозначим через $q(q \in \mathbb{Z}_+^s)$ разность полистепеней знаменателя и числителя рациональной функции $P_A(t_1, \dots, t_s)$. Из результатов работы [14] можно вывести, что для алгебр инвариантов трех рассматриваемых представлений степень q совпадает с набором размерностей неприводимых компонент представления ρ , т.е. $q = (n(n+1)/2, n(n+1)/2, n)$. Очевидно, что ряд Пуанкаре алгебры инвариантов имеет во всех трех случаях вид, указанный в 6.4, причем степень знаменателя равна $(n^2, n^2, 2n)$. Отсюда следует, что $(a, b, c) = (n(n-1)/2, n(n-1)/2, n)$.

Далее, рассмотрим представление $2\varphi_1^2 + \varphi_1$ группы SL_n и точку общего положения v в пространстве $V(\varphi_1^2)$. Слайс-представление стабилизатора точки v таково: $(\mathrm{O}_n, \varphi_1^2 + \varphi_1)$. Согласно 4.1 оно корегулярно. Дальнейшие рассуждения такие же, как и выше.

Случай Д. $G = \mathrm{SL}_n$, $\rho = \varphi_1\varphi_{n-1} + \varphi_1 + \varphi_{n-1}$, $n \geq 2$. Обозначим точку пространства $V(\rho)$ посредством набора (A_i^j, v_k, f^l) , состоящего из матрицы со следом нуль, вектор-столбца и вектор-строки. Имеем $\mathrm{tr. deg.} \mathbb{C}[\rho]^G = 2n$, и имеется $2n + 1$ образующих этой алгебры: $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ – коэффициенты характеристического многочлена матрицы A , $F_i = \langle f, A^i v \rangle$, $i = 0, \dots, n-1$, $d = \det[v, Av, \dots, A^{n-1}v]$, $e = \det[f, fA, \dots, fA^{n-1}]$. Обозначим через R алгебру, порожденную выписанными полиномами. Пусть r_0 – оператор, введенный в 4.4, 3). Оказывается, что все выписанные образующие, кроме d и e , инвариантны относительно r_0 , $r_0(d) = e$, $r_0(e) = d$. Положим $V = \{(A, v, f) \mid A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$. Пространство V обладает важным свойством: его разнесение GV плотно в $V(\rho)$. Это значит, что все соотношения между ограничениями инвариантов на V справедливы всюду на $V(\rho)$.

Пусть $v \in \text{Ker}(l(A, f))$; тогда векторы $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ лежат в ядре формы f . Но пространство $\langle v, Av, \dots, A^{n-1}v \rangle$ A -инвариантно и, следовательно, форма f равна 0 на одном из собственных векторов оператора A , каковых конечное число. Таким образом, для данного оператора A в пространстве $V(\varphi_{n-1})$ имеется объединение конечного числа гиперплоскостей такое, что любая форма f из его дополнения C такова, что оператор $l(A, f)$ сюръективен.

Наконец, существует такая прямая $m \subseteq V(\varphi_{n-1})$, проходящая через начало координат O , что $m \setminus O \subseteq C$, и ограничение полинома e на прямую m – ненулевой однородный многочлен одной переменной, принимающий вне точки O любое ненулевое значение. Аналогично рассматриваем случай $d \neq 0$. Единственность корегулярного расширения легко устанавливается.

Случай Е. $G = \text{SL}_n$, $\rho = \varphi_{n-1}^2 + \varphi_2 + \varphi_{n-1}$, $n = 2m + 1$, $m \geq 2$. Общий стиль решения задачи в данном случае такой же, как в случае Д, поэтому остановимся лишь на важнейшем. Точка из пространства $V(\rho)$ есть набор тензоров (A^{ij}, B_{kl}, v^p) , в котором A – симметричный, а B – кососимметричный тензор. Рассмотрим подпространство

$$V = \left\{ (A, B, v) \mid A = \lambda \delta^{ij}, \quad B = \sum_{i=1}^m c_i e_i \wedge e_{i+m} \right\},$$

разнесение GV которого плотно в пространстве $V(\rho)$. Кроме того, рассмотрим линейное подмногообразие L , точки которого отличаются от точек V тем, что форма A имеет вид не $\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$, а $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$. Имеем

$$\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\rho]^G = n + 1.$$

Нетрудно найти $n + 2$ образующих алгебры инвариантов, которые задаются следующим свертками:

$$\begin{aligned} d &= A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} \det_{i_1, \dots, i_n} \det_{j_1, \dots, j_n}, \\ a &= A^{i_1 j_1} \dots A^{i_{n-1} j_{n-1}} v^{i_n} v^{j_n} \det_{i_1, \dots, i_n} \det_{j_1, \dots, j_n}, \\ f_k &= A^{i_1 j_1} B_{j_1 i_2} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_{2k} j_{2k}} B_{j_{2k} i_1}, \quad k = 1, \dots, m, \\ g_k &= v^{i_1} B_{i_1 j_1} A^{j_1 i_2} \dots A^{j_{2k-1} i_{2k}} B_{i_{2k} j_{2k}} v^{j_{2k}}, \quad k = 1, \dots, m, \\ e &= A^{i_1 j_1} B_{j_1 k_1} A^{k_1 i_2} \dots A^{i_{2m-1} j_m} B_{j_m k_m} A^{k_m i_{2m}} v^{i_n} \det_{i_1, \dots, i_n}. \end{aligned}$$

Чтобы найти соотношение между ними, найдем их ограничения на пространство V . С точностью до константы они таковы:

$$\begin{aligned} d &= \lambda^n, \quad a = \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n (v^i)^2, \quad f_k = \lambda^{2k} \sum_{i=1}^m c_i^{2k}, \\ g_k &= \lambda^{2k-1} \sum_{i=1}^m c_i^{2k} ((v^i)^2 + (v^{i+m})^2), \quad e = \lambda^{2m} v^n \prod_{i=1}^m c_i. \end{aligned}$$

Можно получить далее, что соотношение имеет вид

$$e^2 = \alpha a Q(f_1, \dots, f_m) - \beta d g_m + \gamma d R(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_{m-1}), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*.$$

Элемент $r = \{\varepsilon^2; \varepsilon^{-2}; \varepsilon\}$, $\varepsilon = e^{2\pi i/2n}$, умножает полином e на -1 и сохраняет остальные образующие. Осталось показать, что найденные образующие действительно порождают алгебру инвариантов. Применяем лемму Игусы. Проверка условий а) и б) не вызывает трудностей. Проверка условия в) сводится по предложению 6.3 к нахождению в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ подмногообразия M коразмерности 2 такого, что любая точка вне него есть набор значений многочленов $a, d, f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m$. Рассмотрим многочлен $p(t)$, имеющий в качестве корней числа $\pm \lambda c_1, \dots, \pm \lambda c_m$. Его коэффициенты суть полиномы от ограничений полиномов $f_1, \dots, f_m$ на V , поэтому его можно продолжить до многочлена $p \in \mathbb{C}[\rho]^G[t]$. Возьмем в качестве M подмногообразие, выделяемое условиями $d = 0$ и $D(p) = 0$, где $D(p)$ – дискриминант многочлена p .

Пусть $d \neq 0$ и $\lambda^n = d$. Рассмотрим точку $u = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$. Заметим, что ограничения многочленов $a, e, f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_{m-1}$ на линейное подмногообразие $u + V(\varphi_2 + \varphi_{n-1})$ суть образующие регулярной алгебры инвариантов представления $\varphi_2 + \varphi_1$ группы SO_n – слайс-представления стабилизатора точки u , – и в силу сюръективности морфизма факторизации могут принимать произвольные значения. Используя явный вид соотношения, получаем отсюда, что набору $a, f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m$ также можно придать произвольное значение.

Пусть $d = 0$, но $D(p) \neq 0$. Тогда ищем нужную точку в подмногообразии L . Заметим, что формулы для ограничений полиномов f_k, g_k на пространство V , полученные выше, остаются верны и для их ограничений на подмногообразие L , если положить $\lambda = 1$, а полином a равен $(v^n)^2$ на L . Значения многочленов $f_1, \dots, f_m$ определяют числа $c_1^2, \dots, c_m^2$, матрица Вандермонда которых невырождена по условию $D(p) \neq 0$, и это гарантирует существование таких чисел $v^1, \dots, v^{2m}$, что значения многочленов $g_1, \dots, g_m$ равны любым наперед заданным величинам.

Случай Ж. $(G, \rho) = (\mathrm{SL}_2, \varphi^4 + \varphi), (\mathrm{SL}_3, 2\varphi_1\varphi_2), (\mathrm{SL}_7, \varphi_3 + 3\varphi_1)$. Эти случаи объединены тем, что вопрос об образующих алгебры инвариантов решается путем использования результатов других авторов.

Алгебра инвариантов первой группы естественно изоморфна алгебре ковариантов SL_2 -модуля φ^4 , а образующие алгебры ковариантов вместе с соотношением между ними можно найти в классической работе [12].

Рассмотрим представление $2\varphi_1\varphi_2$ группы SL_3 . Точка пространства представления есть пара (A, B) матриц 3×3 со следом нуль. Введем следующие инварианты: $f_1 = \mathrm{Tr} A^2$, $f_2 = \mathrm{Tr} AB$, $f_3 = \mathrm{Tr} B^2$, $f_4 = \mathrm{Tr} A^3$, $f_5 = \mathrm{Tr} A^2B$, $f_6 = \mathrm{Tr} AB^2$, $f_7 = \mathrm{Tr} B^3$, $f_8 = \mathrm{Tr} A^2B^2$, $f_9 = \mathrm{Tr} ABA^2B^2$. Из результатов работы [13] следует, что алгебра инвариантов есть свободный модуль ранга 2 над регулярной подалгеброй $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_8]$ с образующими 1 и f_9 , откуда следует, что набор $f_1, \dots, f_9$ порождает алгебру инвариантов, причем единственное соотношение имеет степень 2 по f_9 . Далее, рассмотрим элемент r_0 из 4.4, 3). Оказывается, что полиномы $f_1, \dots, f_8$ инвариантны относительно этого оператора, а f_9 не инвариантен. Пусть g – такой инвариант, что набор $f_1, \dots, f_8, g$ порождает алгебру инвариантов и $r_0(g) = -g$ (такой инвариант обязательно существует в силу того, что r_0 , а следовательно, и $\varepsilon(r_0)$ являются инволюцией). Тогда, поскольку соотношение между последней системой образующих обязано быть r_0 -инвариантно и иметь степень 2 по g , оно имеет вид $g^2 = P(f_1, \dots, f_8)$. Значит, группа $\rho(G)\langle r_0 \rangle$

является корегулярным расширением группы $\rho(G)$, единственным ввиду 4.4, 3).

Рассмотрим представление $\varphi_3 + 3\varphi_1$ группы SL_7 . В работе [3] проверено, что фактор $V(\rho)//G$ есть гиперповерхность (см. [3, пример 3.6 после леммы 3.5]). Имеем $\mathrm{tr. deg. } \mathbb{C}[\rho]^G = 8$. В работе [2] найдено восемь образующих алгебры инвариантов: d степени $(7, 0, 0, 0)$, $f_1, \dots, f_6$ степеней $(4, k, l, m)$, $k + l + m = 2$, e степени $(6, 1, 1, 1)$. Кроме того, в работе [14] доказано существование инварианта g степени $(5, 2, 2, 2)$ (он выделяет в пространстве $V(\rho)$ страт Луны коразмерности 1). Полином g и является недостающим образующим в силу единственности последнего и соображений полистепеней. Найдем вид соотношения между образующими. Пусть u – точка общего положения в компоненте $V(\varphi_3)$, стабилизатор которой есть группа G_2 , вложенная в SL_7 своим представлением φ_1 . Рассмотрим подпространство $U = \langle u \rangle \oplus V(3\varphi_1)$. Множество GU плотно в $V(\rho)$. Обозначим через z координату на прямой $\langle u \rangle$. Рассмотрим ограничения образующих на пространство U , равные произведениям мономов z^k на инварианты представления $3\varphi_1$ группы G_2 , которые будем помечать чертой (например, ограничение f_1 равно $z^4 \bar{f}_1$). Из соображений степеней выводится, что все многочлены $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_6, \bar{e}$ суть образующие алгебры $\mathbb{C}[3\varphi_1]^{G_2}$, и, следовательно, существует такой многочлен P от шести переменных, что $\bar{g} = \alpha \bar{e}^2 + P(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_6)$. Из этого следует, что соотношение между самими образующими имеет вид

$$dg = \alpha e^2 + P(f_1, \dots, f_6).$$

Если бы константа α равнялась нулю, то существовала бы такая точка $w \in V(\rho)$, что $e(w) = 1$, а все остальные образующие были бы равны нулю в точке w , однако в [2] установлено, что это не так. Отсюда следует, что группа $\rho(G)\langle\{1; -1; -1; -1\}\rangle$ является единственным корегулярным конечным расширением группы $\rho(G)$.

Случай 3. $(G, \rho = \pi + \tau) = (\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_1)$, $(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_2)$, $(\mathrm{Sp}_6, \varphi_2 + \varphi_3)$, $(G_2, \varphi_2 + \varphi_1)$, $(\mathrm{Spin}_7, \varphi_3 + \varphi_2)$.

Во всех этих случаях удается найти явный вид ряда Пуанкаре алгебры инвариантов. Обозначим через P_k ($P_k \in \mathbb{C}(t, s)$) ряд Пуанкаре алгебры инвариантов k -й линейной группы в том порядке, в котором они записаны выше. Функции P_1 и P_2 подсчитаны в работе [15]:

$$P_1(t, s) = \frac{1 + t^{12}s^9}{(1 - t^4)(1 - t^6)(1 - t^3s^3)(1 - t^5s^3)(1 - t^4s^6)},$$

$$P_2(t, s) = \frac{1 + t^{12}s^9}{(1 - t^4)(1 - t^6)(1 - ts^3)(1 - t^3s^3)(1 - t^8s^6)}.$$

В последних трех случаях рассуждаем следующим образом. Пусть U – максимальная унитарная подгруппа группы G , а D – максимальный тор группы G (ранга $r = \mathrm{rk} G$), нормализующий U . Положим $A = \mathbb{C}[\rho]^G$, $T = \mathbb{C}[\pi]^U$, $S = \mathbb{C}[\tau]^U$. Две последние алгебры наследуют $\mathbb{Z}$ -градуировку алгебр $\mathbb{C}[\pi]$ и $\mathbb{C}[\tau]$ соответственно. Кроме того, действие группы D в алгебрах T и S вводит в них $\mathbb{Z}_+^r$ -градуировку весовыми подпространствами тора. Рассмотрим ряды Пуанкаре этих $\mathbb{Z}_+^r$ -градуированных алгебр: $P_T \in \mathbb{C}(t, c_1, \dots, c_r)$, $P_S \in \mathbb{C}(s, c_1, \dots, c_r)$. Эти две функции определяют ряд Пуанкаре алгебры A благодаря следующему тождеству:

$$\dim A_{i,j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^r} \dim T_{i,\alpha} \dim S_{j,\alpha}.$$

Ряды Пуанкаре алгебр U -инвариантов для компонент последних трех представлений известны из литературы. Для линейных групп $(\mathrm{Sp}_6, \varphi_2)$, $(\mathrm{Sp}_6, \varphi_3)$, (G_2, φ_1) , $(\mathrm{Spin}_7, \varphi_3)$ алгебры U -инвариантов регулярны и их ряды Пуанкаре найдены в работе [16]; для пар (G_2, φ_2) , $(\mathrm{Spin}_7, \varphi_2)$ ряды Пуанкаре содержатся в работе [23]. Следует отметить, что процедура получения явного вида функции $P_A(t, s)$ описанным выше методом совсем проста для четвертого и пятого представления, а для третьего требует некоторой идейно простой, но аккуратной работы с рядами. В итоге получаем

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1 + t^6 s^6}{(1 - t^2)(1 - t^3)(1 - s^4)(1 - t^2 s^4)(1 - t^3 s^4)(1 - t^4 s^4)(1 - t^6 s^4)}, \\ P_4 &= \frac{1 + t^6 s^3}{(1 - t^2)(1 - t^6)(1 - s^2)(1 - t^2 s^2)(1 - t^4 s^2)(1 - t^3 s)(1 - t^3 s^3)}, \\ P_5 &= \frac{1 + t^4 s^9}{(1 - t^2)(1 - s^2)(1 - s^4)(1 - s^6)(1 - t^2 s^2)(1 - t^2 s^4)(1 - t^2 s^6)(1 - t^4 s^6)}. \end{aligned}$$

Ко всем пяти представлениям применяем предложение 6.4, устанавливающее систему образующих алгебры инвариантов. Для этого необходимо дополнительно проверить, что в каждом из пяти случаев имеется алгебраически независимая система инвариантов степеней, представленных в знаменателе функции P_k .

В четвертом случае π – присоединенное представление и пространство $V(\pi)$ можно считать вложенным в пространство матриц 7×7 со следом нуль, а группу G_2 вложенной в SL_7 и действующей на пространстве $V(\pi)$ сопряжениями. Положим $V = \mathfrak{t} \oplus V(\tau)$, где $\mathfrak{t} \subseteq V(\pi)$ – касательная алгебра максимального тора группы G_2 . Фиксировав некоторый базис $e_1, \dots, e_7$ пространства $\mathbb{C}^7$ и обозначив через $x_1, \dots, x_7$ двойственный базис, можно считать, что

$$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(a, b, -a - b, 0, -a, -b, a + b)\}.$$

Из свойств присоединенного представления следует, что множество GV плотно в пространстве $V(\rho)$. Из работы [17] следует, что можно считать триформу

$$q = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 + x_1 \wedge x_4 \wedge x_5 + x_2 \wedge x_4 \wedge x_6 + x_3 \wedge x_4 \wedge x_7$$

инвариантной относительно группы G_2 . Кроме того, существует инвариантная квадратичная форма p , которая должна иметь, с учетом невырожденности и инвариантности относительно подгруппы $H \subseteq G_2$, изоморфной SL_3 , следующий координатный вид:

$$p = x_1 x_5 + x_2 x_6 + x_3 x_7 + \alpha x_4^2, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Пусть $A \in \mathfrak{t}$, $v \in V(\tau)$. Имеем следующие инварианты группы G_2 : $f_1 = \mathrm{Tr} A^2$, $f_2 = \mathrm{Tr} A^6$, $f_3 = p(v)$, $f_4 = p(Av)$, $f_5 = p(A^2 v)$, $f_7 = q(v, Av, A^2 v)$ степеней $(2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$ соответственно. Кроме того, имеем инвариант f_6 степени $(3, 1)$, определяемый так:

$$f_6 = A_{j_1}^{i_1} p^{j_1 i_2} A_{j_2}^{i_3} p^{j_2 i_4} A_{j_3}^{i_5} p^{j_3 i_6} v_{j_4} p^{j_4 i_7} \det_{i_1, \dots, i_7}.$$

Несложный подсчет ограничений этих инвариантов на пространство V позволяет показать их алгебраическую независимость.

Во всех остальных случаях будет многократно использоваться следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Пусть $f_1, \dots, f_n, d$ – набор однородных образующих алгебры $\mathbb{C}[U]^K$, где $K \subseteq \mathrm{GL}(U)$ – связная полупростая линейная группа. Тогда:

- 1) никакой моном от $f_1, \dots, f_n$ не лежит в идеале $(d) \triangleleft \mathbb{C}[U]$;
- 2) d не лежит в идеале $(f_1, \dots, f_n) \triangleleft \mathbb{C}[U]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что все компоненты разложения на неприводимые множители в кольце $\mathbb{C}[U]$ однородного инварианта связной группы, не имеющей характеров, инвариантны и однородны. Для доказательства п. 2) предположим наличие соотношения

$$d = f_1 p_1 + \dots + f_n p_n, \quad p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[U].$$

Можно считать полиномы p_i однородными, причем их степени положительны, иначе совокупность $d, f_1, \dots, f_n$ не является набором образующих. Существует оператор Рейнольдса $\natural$, сохраняющий степени многочленов, применяя который к соотношению, получаем

$$d = f_1 p_1^\natural + \dots + f_n p_n^\natural \in (\mathbb{C}[U]_+^K)^2.$$

Противоречие. $\square$

В пятом случае положим, что $u \in V(\pi)$ – точка общего положения, $H = G_u$, $V = \langle u \rangle \oplus V(\tau)$, причем координату на прямой $\langle u \rangle$ обозначим через z . Группа H изоморфна G_2 , а ограничение γ представления τ на H равно $\varphi_2 + \varphi_1$. Ограничение $\bar{f}$ биоднородного инварианта f степени (k, l) на пространство V равно $z^k \bar{f}$, где $\bar{f} \in \mathbb{C}[\gamma]^H$. Очевидно, что алгебраическая независимость системы $d, f_1, \dots, f_n$ следует из наличия этого свойства у системы $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$, где d – образующий алгебры $\mathbb{C}[\pi]^G$.

Докажем, что инварианты степеней, представленных в знаменателе функции P_5 , могут быть выбраны так, чтобы являться набором образующих. Ввиду того, что их степени различны, достаточно доказать, что можно выбрать инвариант нужной степени, не выражающийся через инварианты меньшей степени. Положим $m(i, j) = \dim A_{i,j}$, $\tilde{m}(i, j) = \dim \tilde{A}_{i,j}$ (см. § 2, система обозначений). Очевидно, существуют образующие d, f_2, f_4, f_6 степеней $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 4)$, $(0, 6)$ соответственно. Из вида функции P_5 следует, что $m(i, j) = 0$ при нечетном i или при нечетном $j < 9$. Далее, $m(2, 2) = 2$, $\tilde{m}(2, 2) = 1$, и, следовательно, существует единственный образующий g_2 степени $(2, 2)$. Далее имеем

$$m(2, 4) = 4, \quad \widetilde{A}_{2,4} = \langle df_4, df_2^2, g_2 f_2 \rangle.$$

Три указанных монома не могут быть линейно зависимы (ввиду 6.5, 1) и так как f_4 – образующий). Это значит, что существует единственный образующий g_4 степени $(2, 4)$. Из этого следует, что $\tilde{m}(2, 6) \leq 6$, и, поскольку $m(2, 6) = 7$, существует образующий g_6 степени $(2, 6)$. Далее, из вышесказанного вытекает, что $\widetilde{A}_{4,6} = \langle dA_{2,6}, g_2 g_4 \rangle$, поэтому получаем $\tilde{m}(4, 6) \leq 8$. С другой стороны, $m(4, 6) = 9$, следовательно, существует образующий h_6 степени $(4, 6)$.

Достаточно теперь установить, что полиномы $f_2, \bar{g}_2, f_4, \bar{g}_4, f_6, \bar{g}_6, \bar{h}_6$ суть образующие алгебры $\mathbb{C}[\varphi_2 + \varphi_1]^{G_2}$ степеней 2, 2, 4, 4, 6, 6, 6 соответственно, и их алгебраическая независимость будет следовать из рассмотрения четвертого случая.

Рассуждаем от противного. Предположим, что существует линейная комбинация указанных полиномов, лежащая в однородном идеале $I = (\mathbb{C}[\varphi_2 + \varphi_1]_+^{G_2})^2$. Можно считать ее однородной степени 2, 4 или 6. Предположим, что $c_1 f_2 + c_2 \bar{g}_2 \in I$, т.е. $c_1 f_2 + c_2 \bar{g}_2 = 0$. Это влечет соотношение $c_1 df_2 + c_2 \bar{g}_2 = 0$. Поскольку множество GV плотно в $V(\rho)$, все соотношения между ограничениями инвариантов справедливы и для самих инвариантов. Но соотношение $c_1 df_2 + c_2 g_2 = 0$ невозможно в силу того, что g_2 – образующий. Предположим, что $c_1 f_4 + c_2 \bar{g}_4 \in I$. Это значит, что

$$c_1 f_4 + c_2 \bar{g}_4 = c_3 f_2^2 + c_4 f_2 \bar{g}_2 + c_5 \bar{g}_2^2.$$

Отсюда получаем соотношение

$$c_1 d^2 f_4 + c_2 d g_4 = c_3 d^2 f_2^2 + c_4 d f_2 g_2 + c_5 g_2^2,$$

которое при $c_5 \neq 0$ противоречит 6.5, 1). Если $c_5 = 0$, но c_2 или c_4 не равны 0, то получаем соотношение

$$c_1 d f_4 + c_2 g_4 = c_3 d f_2^2 + c_4 f_2 g_2,$$

невозможное ввиду того, что g_4 – образующий, или по 6.5, 1). Предположим, что $c_1 f_6 + c_2 \bar{g}_6 + c_3 \bar{h}_6 \in I$. Это дает, что $c_1 f_6 + c_2 \bar{g}_6 + c_3 \bar{h}_6 \in \langle f_4 f_2, f_4 \bar{g}_2, f_2 \bar{g}_4, \bar{g}_2 \bar{g}_4, f_2^3, f_2^2 \bar{g}_2, f_2 \bar{g}_2^2, \bar{g}_2^3 \rangle$.

Аналогично предыдущим случаям рассматриваем разные варианты линейных комбинаций, которые влекут соотношения между инвариантами группы G , невозможные ввиду 6.5, 1) либо в силу того, что g_6 и h_6 – образующие алгебры A . Соотношение, не опровергаемое таким образом, может иметь лишь вид

$$df_6 = c_1 d f_4 f_2 + c_2 d f_2^3 + c_3 f_4 g_2 + c_4 f_2 g_4 + c_5 f_2^2 g_2,$$

причем $c_3 \neq 0$. Это, в частности, означает, что полином $f_4 g_2$ принадлежит идеалу $J = (d, f_2) \triangleleft \mathbb{C}[\rho]$. Но идеал J прост, являясь совокупностью всех регулярных функций, обращающихся в нуль на прямом произведении неприводимых гиперповерхностей в пространствах $V(\pi)$ и $V(\tau)$. Поэтому хотя бы один из полиномов f_4, g_2 лежит в J , что противоречит 6.5, 2).

В первых трех случаях положим, что u – точка общего положения в $V(\pi)$, $H = G_u$, $V = u + V(\tau)$, γ – ограничение представления τ на группу H , d, e – образующие алгебры $\mathbb{C}[\pi]^G$. Обозначим через $\bar{f}$ ограничение инварианта f на пространство V . Очевидно, что набор однородных инвариантов $d, e, f_1, \dots, f_n$ будет алгебраически независимым, если таковым будет набор $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ для точки u в общем положении. Кроме того, имеет место следующий простой факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. Пусть X, Y – неприводимые аффинные многообразия, $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[X \times Y]$ и существует плотное подмножество $U \subseteq X$ такое, что для любой точки $u \in U$ ограничения полиномов $f_1, \dots, f_n$ на $u \times Y$ линейно зависимы над полем $\mathbb{C}$. Тогда существуют такие $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[X]$, не все равные нулю, что $p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле $\mathbb{C}(X \times Y)$ как линейное пространство над полем $K = \mathbb{C}(X)$. Очевидно, что существует некоторое K -линейное конечномерное подпространство в $\mathbb{C}(X \times Y)$ с базисом, элементы которого лежат в $\mathbb{C}[Y]$, содержащее $f_1, \dots, f_n$. Разложив эти функции по базису, получаем, что их линейная зависимость над K равносильна равенству нулю (как элементов поля K) некоторых миноров. Но по условию эти миноры обращаются в нуль при подстановке любой точки из U . Следовательно, существует соотношение вида $p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 0$, где $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}(X)$ и не все равны нулю. Домножив его на подходящий элемент алгебры $\mathbb{C}[X]$, получим искомое. $\square$

Для окончания рассмотрения случаев 1–3 воспользуемся наличием у линейных групп $(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3)$ и $(\mathrm{Sp}_6, \varphi_2)$ сечения Вейерштрасса, т.е. такого линейного подмногообразия $L \subseteq V(\pi)$, что ограничение инвариантов на L является изоморфизмом алгебр $\mathbb{C}[\pi]^G$ и $\mathbb{C}[L]$. Для первой группы это – хорошо известная нормальная форма Вейерштрасса тернарной кубики: $L = \{y^2 z + x^3 + p x z^2 + q z^3 \mid p, q \in \mathbb{C}\}$ (причем ограничения образующих на L суть p и q). Существование сечения Вейерштрасса для второй группы также получено (см., например, [7, § 8.8]). Наличие сечения Вейерштрасса позволяет доказать для трех первых представлений следующий факт (называемый ниже Ф1):

Предположим, что $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[\rho]^G$ – однородные инварианты и для точки общего положения (т.о.п.) $u \in V(\pi)$ ограничения полиномов $f_1, \dots, f_n$ на пространство V линейно зависимы. Тогда существуют такие однородные многочлены $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}[d, e]$, не все равные нулю, что $r_1 f_1 + \dots + r_n f_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ограничим все инварианты на пространство $L \oplus V(\tau)$. Поскольку орбита т.о.п. в $V(\pi)$ проходит через L , соотношения между ограничениями инвариантов верны и для самих инвариантов. Применяя 6.6 к этой ситуации, получаем существование нетривиальной линейной зависимости $p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 0$ с коэффициентами $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[L]$. Но, поскольку L – сечение Вейерштрасса, полиномы $p_1, \dots, p_n$ суть ограничения некоторых $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}[d, e]$, которые можно, очевидно, предполагать однородными. $\square$

Рассмотрение каждого из оставшихся случаев проводится в два этапа. Сначала показываем, что инварианты степеней, представленных в знаменателе функции P_k , можно выбрать так, чтобы они составляли набор образующих. Каждый раз это делается так же, как и для пятого представления, и мы не будем на этом останавливаться. Далее доказывается, что этот набор алгебраически независим.

Рассмотрим группу $(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_1)$. Группа H есть конечная подгруппа в SL_3 , порожденная тремя операторами, имеющими в некотором базисе следующий вид: $\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, 1)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$, и мономиальный, отвечающий перестановке (123). Легко проверяется, что алгебра инвариантов естественного трехмерного представления группы H имеет образующие степеней 3, 3, 6 и 9, причем первые три из них алгебраически независимы. Нам достаточно доказать, что для т.о.п. $u \in V(\pi)$ ограничения образующих f, g, h степеней (3, 3), (5, 3), (4, 6) на пространство V , являющиеся ненулевыми инвариантами группы H , линейно независимы над $I = (\mathbb{C}[V]_+^H)^2$. Предположим сначала, что многочлены $\bar{f}$ и $\bar{g}$ линейно зависимы над I , а следовательно, и над $\mathbb{C}$ для u в общем положении. Отсюда в си-

лу $\Phi 1$ следует существование таких однородных $c_1, c_2 \in \mathbb{C}[d, e]$, что $c_1 f + c_2 g = 0$. Но это противоречит 6.5, 1), поскольку идеал (f) прост, а c_2 в нем не содержится по соображениям степеней.

Далее предположим, что в общем положении $\bar{h} \in I$, или по только что доказанному $\bar{h} \in \langle \bar{f}^2, \bar{f}\bar{g}, \bar{g}^2 \rangle$. Отсюда в силу $\Phi 1$ получаем соотношение $c_1 h + c_2 f^2 + c_3 f g + c_4 g^2 = 0$ с однородными коэффициентами $c_i = p_i(d, e)$, $p_i \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$, $i = 1, 2, 3, 4$. Можно считать также, что полиномы $p_1, \dots, p_4$ взаимно просты в совокупности. Из соображений степеней многочленов $c_1, \dots, c_4$ (взятых по модулю 4) следует, что либо p_1 и p_3 , либо p_2 и p_4 делятся на T_2 . Пусть, например, реализуется первый случай. Тогда ни p_2 , ни p_4 не делятся на T_2 (если делятся оба, то имеем противоречие со взаимной простотой $p_1, \dots, p_4$, а то, что на T_2 делится один из них, противоречит 6.5, 1) ввиду простоты идеала (e)).

Положим $c_4 = \beta d^n + e_2$, где $e_2 \in (e)$. Тогда по соображениям степеней имеем $c_2 = \alpha d^{n+1} + e_1$, $e_1 \in (e)$. Теперь имеющееся соотношение влечет $(\alpha d f^2 + \beta g^2) d^n \in (e)$, а следовательно, $g^2 \in (d, e)$. Но ввиду 6.5, 2) $g \notin (d, e)$, и получается, что идеал $J = (d, e)$ не радикален. Но на самом деле J прост. Имеем: множество нулей J есть прямое произведение нуль-слоя N пространства $V(\pi)$ на $V(\tau)$, являющееся неприводимым многообразием, так как N содержит плотную орбиту (см. [24]). Теперь для того, чтобы доказать простоту идеала J , достаточно показать, что якобиан пары многочленов d, e отличен от нуля в какой-нибудь точке $u \in N$ (см. [24, приложение 1, 6.2]). Возьмем в качестве u точку из L с параметрами $p = q = 0$ и воспользуемся тем, что p и q — ограничения полиномов d и e на L . Точно такое же противоречие вытекает из предположения, что многочлены p_2, p_4 делятся на T_2 . Таким образом, мы получили, что $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ — образующие инварианты группы H в общем положении, следовательно, алгебраически независимы. Случай группы $(\mathrm{SL}_3, \varphi_1^3 + \varphi_1)$ разбирается аналогично.

Рассмотрим группу $(\mathrm{Sp}_6, \varphi_2 + \varphi_3)$. Группа H , изоморфная $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$, вложена в группу Sp_6 представлением

$$\begin{aligned} & \varphi \otimes \theta \otimes \theta + \theta \otimes \varphi \otimes \theta + \theta \otimes \theta \otimes \varphi, \\ \gamma = & \varphi \otimes \varphi \otimes \varphi + \varphi \otimes \theta \otimes \theta + \theta \otimes \varphi \otimes \theta + \theta \otimes \theta \otimes \varphi. \end{aligned}$$

Легко проверить, что суммарная степень непостоянного элемента алгебры $\mathbb{C}[\gamma]^H$ не меньше 4, причем существуют в точности пять образующих суммарной степени 4 — их полистепени равны $(4, 0, 0, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, и эти образующие алгебраически независимы. Следовательно, достаточно доказать, что для т.о.п. $u \in V(\pi)$ линейно независимы ограничения на пространство V образующих f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 алгебры $\mathbb{C}[\rho]^G$ степеней $(0, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(6, 4)$ соответственно. Ввиду $\Phi 1$ это равносильно невозможности соотношения с однородными коэффициентами вида

$$p_1(d, e)f_1 + \dots + p_5(d, e)f_5 = 0, \quad p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{C}[T_1, T_2].$$

Предположим, что такое соотношение существует, причем многочлены $p_1, \dots, p_5$ взаимно просты. Следовательно, мы можем представить каждый из $p_1, \dots, p_5$ в виде $p_i = c_i T_1^{k_i} + T_2 Q_i$, где не все числа $c_1, \dots, c_5$ равны 0. Пусть m — наибольшее из

чисел i таких, что $c_i \neq 0$. Из нашего соотношения следует, что

$$\left(c_m f_m + d \sum_{i=1}^{m-1} c_i f_i d^{k_i - k_m - 1} \right) d^{k_m} \in (e),$$

причем все числа $k_i - k_m - 1$ неотрицательны. Отсюда ввиду простоты идеала (e) получаем, что образующий f_m принадлежит идеалу (d, e) . Противоречие с 6.5, 2).

Таким образом, условия 6.4 для всех пяти случаев проверены, и тем самым описаны системы образующих алгебры инвариантов группы G . Далее обычными методами устанавливается существование единственного конечного корегулярного расширения.

Случай И. $G = \mathrm{SL}_8$, $\rho = \varphi_3 + 2\varphi_1$. Имеем $\mathrm{tr. deg. } \mathbb{C}[\rho]^G = 9$. Образующие алгебры $\mathbb{C}[\varphi_3 + \varphi_1]^G$ имеют, как установлено в [2] и [3], следующие степени: $(16, 0)$, $(10, 2)$ и $(7, 3)$. Согласно 4.5 имеем набор из восьми образующих алгебры $\mathbb{C}[\rho]^G$ следующих степеней: d степени $(16, 0, 0)$; f_{ij} — $(10, i, j)$, $i + j = 2$; f_{kl} — $(7, k, l)$, $k + l = 3$. Из этого выводится, что если $r = \{\lambda; \mu; \varepsilon\}$ и $e(r) = 1$, то $\varepsilon = \mu$, $\lambda = -\mu^3$, $\mu^8 = -1$, причем все восемь образующих инвариантны относительно так выбранного оператора r .

Положим $H = \rho(G)\langle r \rangle$. Ниже мы докажем, что группа H корегулярна. Поскольку это не меняет задачи, будем считать ниже, что $\rho = \varphi_5 + 2\varphi_7$. Рассмотрим т.о.п. $q \in V(\varphi_5)$. Согласно [17] стабилизатор формы q в группе G (или по крайней мере его связная компонента) изоморфен группе SL_3 , вложенной в группу SL_8 своим присоединенным представлением. Поскольку нам важен координатный вид формы q , отождествим модуль φ_1 группы SL_8 с линейным пространством L матриц 3×3 со следом нуль. Тогда форма q имеет вид $q(A, B, C) = \mathrm{Tr}(ABC - BAC)$, где $A, B, C \in L$. Подсчет показывает, что образ F группы H_q при представлении в пространстве $V(2\varphi_7)$ является единственным корегулярным расширением группы $(\mathrm{SL}_3, 2\varphi_1\varphi_2)$.

Рассмотрим пространство $V = \langle q \rangle \oplus V(2\varphi_7)$, точки которого можно мыслить себе наборами (zq, A, B) , $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in L$. Ограничение однородного инварианта $f \in \mathbb{C}[\rho]^G$ на пространство V имеет вид $z^k \bar{f}$, где $\bar{f}$ — некоторый инвариант группы F . Из соображений степеней ясно, что ограничения восьми образующих имеют вид: $d - z^{16}$, $f_{ij} - z^{10} \mathrm{Tr} A^i B^j$, $i + j = 2$, $f_{kl} - z^7 \mathrm{Tr} A^k B^l$, $k + l = 3$. Кроме того, можно найти еще один инвариант f_{22} группы H .

Опишем тензорную свертку, задающую f_{22} . Свертки тензоров, соответствующие инвариантам, мы ниже будем обозначать в следующей графической форме: белые вершины соответствуют пятивалентным тензорам, полученным сверткой тензора $\det$ с кососимметрической триформой A ; ориентированное ребро, соединяющее две белых вершины, означает, что два индекса вершины, из которой оно исходит, и один индекс той, в которую оно входит, сворачиваются с одним экземпляром формы A ; кроме того, неориентированные ребра, исходящие из белых вершин, могут объединяться в тройки, сворачиваясь с формой A , а также входить в вершины с номерами 1 или 2 — экземплярами линейных форм. В такой системе обозначений инварианту f_{22} соответствует граф, изображенный на рис. 1а. Графы на рис. 1б и 1в имеют черные вершины вместо номерных, что означает, что вместо них следует подставлять в любом количественном соотношении номерные, и соответствующие графам свертки дадут инварианты f_{ij} , $i + j = 2$, для графа 1б и

f_{kl} , $k + l = 3$, для графа 1а. Подсчет на персональном компьютере АТ-286 с применением языка REDUCE 2.3 показывает, что ограничение f_{22} на пространство V имеет вид $z^4(4 \operatorname{Tr} A^2 B^2 - \operatorname{Tr} A^2 \operatorname{Tr} B^2 - (\operatorname{Tr} AB)^2)$. Таким образом, полиномы $\bar{f}_{ij}$, $i + j = 2, 3$, $\bar{f}_{22}$ составляют систему образующих инвариантов группы F (см. случай Ж).

Рис. 1

Докажем, что все условия леммы Игусы (лемма 6.1) выполнены для набора d , f_{ij} . Разнесение пространства V плотно в $V(\rho)$, и для проверки условия б) достаточно установить, что две точки $x, y \in V$, лежащие на общем многообразии уровня указанных образующих, содержатся в одной орбите. Сначала наложим условие $d \neq 0$. Тогда число z определено с точностью до умножения на корни степени 16 из единицы, и за счет домножения на некоторую степень оператора r можно уравнять эту координату у двух точек. Тогда, поскольку все найденные инварианты на паре точек совпадают, имеем, что их составляющие в пространстве $V(2\varphi_7)$ лежат в одном слое морфизма факторизации по группе F , что обеспечивает их сопряженность при помощи группы F в общем положении. При проверке условия в) заметим сначала, что любой набор значений образующих, в котором $d \neq 0$, достигается в пространстве V ввиду сюръективности морфизма факторизации по группе F . В таком случае условие в) равносильно доминантности отображения $D \rightarrow \mathbb{C}^8$, задаваемого набором f_{ij} , $i + j = 2, 3$, f_{22} , на неприводимом многообразии D — множестве нулей полинома d . В свою очередь, доминантность отображения равносильна алгебраической независимости ограничений указанных многочленов на D . Проверяя последнее, снова считаем, что $\rho = \varphi_3 + 2\varphi_1$. Из результатов работы [20] следует, что если положить

$$u = e_1 \wedge e_2 \wedge e_6 + e_1 \wedge e_5 \wedge e_8 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_8 + e_2 \wedge e_5 \wedge e_7 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6,$$

то разнесение пространства $U = u + V(2\varphi_1)$ плотно в D . Подсчет ограничений образующих на U с помощью тех же вычислительных средств (но потребовавший значительно больше машинного времени) показал их алгебраическую независимость.

Таким образом, группа H корегулярна, и поскольку $r^2 \in \rho(G)$, то согласно 3.5, 1) алгебра $\mathbb{C}[\rho]^G$ имеет еще только один образующий h такой, что $r(h) = -h$ и h^2 выражается через образующие инварианты группы H . Рассуждая относительно степени q ряда Пуанкаре, как в п. Г, получаем, что степень образующего h равна $(22, 3, 3)$.

§ 7. Доказательство неквазикорегулярности

Для большей части представлений простых групп неквазикорегулярность устанавливается применением лемм 4.8 и 3.2 и предложения 4.3. В табл. А1–А8 сведена информация, необходимая для применения леммы 4.8. Всюду в табл. А1 и А2 эта лемма применяется к одномерному тору, ассоциированному с корнем алгебры Ли группы SL_n , а в табл. А5, А6 – с длинным корнем в случае ортогональной группы и с коротким – в случае симплектической. В табл. А3, А4, А7, А8 одномерный тор есть совокупность операторов вида $\text{diag}(t, \dots, t, t^{-1}, \dots, t^{-1})$, $t \in \mathbb{C}^*$, содержащихся в простой трехмерной подгруппе группы SL_{2p} (табл. А3, А4) и группы Sp_{2r} (табл. А7, А8). В каждой таблице с нечетным номером представлена информация о всех неприводимых представлениях, встречающихся в следующей за ней таблице. Условие в) леммы 4.8 проверяется при помощи таблиц с нечетными номерами. Для всех одномерных торов, кроме фигурирующего в табл. А1, А2, группа G^T полупроста, и поэтому условие б) следует для них из условия а), проверку которого демонстрируют табл. А4, А6, А8, основываясь на таблицах Элашвили [17], [18]. В случае табл. А2 группа G локально изоморфна прямому произведению группы SL_{n-2} и одномерного тора P ; при проверке условия а) возможны две ситуации:

– либо в пространстве V^T имеется точка, неподвижная относительно группы SL_{n-2} , но не относительно группы P ; тогда для т.о.п. $v \in V^T$ расширение групп $(SL_{n-2})_v \subseteq G_v^T$ является конечным, и поэтому проверка условия а) для группы G сводится к ее подгруппе SL_{n-2} , и тогда в пятой колонке табл. А2 стоит буква Э, так как проверка конечности с.о.п. основывается на работе [17];

– либо этого нет; тогда используются результаты А.М.Попова [19].

Пусть $G, T \subseteq GL(V)$ – простая линейная группа и коммутирующий с ней линейный алгебраический тор соответственно, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$ – разложение V в сумму неприводимых относительно группы G подпространств. Тогда группа G естественно действует в пространстве $P(V_1) \times \dots \times P(V_l)$ и с.о.п. для этого действия обозначается через $\tilde{G}$. Все простые линейные группы G такие, что группа $\tilde{G}$ бесконечна, найдены в работе [19]. Очевидно, что с.о.п. группы GT будет конечным, если группа $\tilde{G}$ конечна. Это рассуждение применяется к образу представления группы G^T в пространстве V^T (локально точного во всех случаях), и в пятой колонке стоит тогда буква П.

Наконец стабильность действия $SL_{n-2} : V^T$ следует из а), и для стабильности действия $G^T : V^T$ достаточно, чтобы существовали два многочлена $f_+, f_- \in \mathbb{C}[V^T]^{SL_{n-2}}$, веса которых относительно группы P имеют разные знаки. Информация о них дается в шестой колонке табл. А2, причем запись $f_- \rightarrow \theta$ означает, что в качестве f_- можно взять инвариант первой степени, отвечающий SL_{n-2} -неподвижной точке θ .

Другой метод доказательства неквазикорегулярности представлений состоит в применении предложения 4.3 к т.о.п. в пространстве какого-нибудь стабильного

Таблица A1

Представление ρ группы SL_n	$q(\rho, T)$	V^T	Представление $G^T \cong SL_{n-2} \times C^*$ в пр-ве V^T
φ_1	1	$\langle e_3, \dots, e_n \rangle$	$\varphi_1 \otimes t$
φ_2	$n - 2$	$\langle e_1 \wedge e_2, e_i \wedge e_j \rangle, 3 \leq i < j \leq n$	$\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2$
φ_1^2	$n - 1$	$\langle e_1 e_2, e_i e_j \rangle, 3 \leq i \leq j \leq n$	$\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_1^2 \otimes t^2$
φ_3	$3 + n \times$ $\times (n - 5)/2$	$\langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_l, e_i \wedge e_j \wedge e_k \rangle,$ $3 \leq l \leq n,$ $3 \leq i < j < k \leq n$	$\varphi_1 \otimes t^{3-n} + \varphi_3 \otimes t^3$
$\varphi_1 \varphi_{n-1}$	$2n - 3$	$\langle \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{i+1i+1}, (2-n)\varepsilon_{kk} +$ $+ \varepsilon_{33} + \dots + \varepsilon_{nn} \rangle,$ $3 \leq i < j \leq n, k = 1, 2$	$\theta_2 + \varphi_1 \varphi_{n-3} \otimes \theta$
φ_1^3	$1 + n \times$ $\times (n - 1)/2$	$\langle e_1 e_2 e_i, e_i e_j e_k \rangle,$ $3 \leq i \leq j \leq k \leq n$	$\varphi_1 \otimes t^{3-n} + \varphi_1^3 \otimes t^3$

подпредставления. Все случаи такого рода, когда стабилизатор – простая группа, сведены в табл. Б.

Третьим методом, позволяющим разобраться с некоторым числом представлений, является применение 3.5, 3). В табл. В сведены все такие случаи. Именно, в каждом таком случае суммарное число образующих алгебр инвариантов корегулярных подпредставлений больше степени трансцендентности алгебры инвариантов самого представления. Из 3.5, 3) (ввиду 4.6) следует отсутствие центральных корегулярных расширений образа группы при данном представлении. Далее, все представления из табл. В, кроме третьего, имеют тривиальную группу автоморфизмов, и поэтому неквазикорегулярны. Для линейных групп вида $(SL_n, k\varphi_1\varphi_{n-1} + l(\varphi_1 + \varphi_{n-1}))$, где $k = 0$ и $l \geq n$ или $k = 1$ и $l \geq 2$, получаем с помощью рассуждений в стиле 4.4, 3), что если элемент r принадлежит нормализатору группы, но индуцирует внешний автоморфизм ее алгебры Ли, то $e(r) \geq 2$. Это дает, что третье представление табл. В неквазикорегулярно.

Если теперь π – представление, содержащее подпредставление ρ , фигурирующее в одной из таблиц, то неквазикорегулярность π получается следующим образом:

- если ρ содержится в таблице серии А, то лемма 4.8 применима и к представлению π ;
- если ρ содержится в табл. Б, то слайс-представление той же точки для группы $\pi(G)$ содержит в качестве подпредставления неквазикорегулярное представление, поэтому используем индукцию по рангу простой группы;

Таблица A2

	n	Представление группы SL_n	Представление $G^T \cong SL_{n-2} \times C^*$ в пр-ве V^T		f_- и f_+
1	≥ 4	$\varphi_1 \varphi_{n-1} + \varphi_1^2$	$\theta_2 + \varphi_1 \varphi_{n-3} \otimes \theta +$ $+ \theta \otimes t^{2-n} + \varphi_1^2 \otimes t^2$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_1^2]^{SL_{n-2}}$
2	≥ 5	$\varphi_1 \varphi_{n-1} + \varphi_2$	$\theta_2 + \varphi_1 \varphi_{n-3} \otimes \theta +$ $+ \theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_1 \varphi_{n-3} + \varphi_2]^{SL_{n-2}}$
3	≥ 6	$\varphi_1 \varphi_{n-1} + \varphi_3$	$\theta_2 + \varphi_1 \varphi_{n-3} \otimes \theta +$ $+ \varphi_1 \otimes t^{3-n} + \varphi_3 \otimes t^3$	Π	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_1 \varphi_{n-3} + \varphi_3]^{SL_{n-2}}$
4	≥ 7	$a\varphi_2 + b\varphi_{n-2},$ $a + b = 3, a > 0$	$a(\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+ b(\theta' \otimes t^{n-2} +$ $+ \varphi_{n-4} \otimes t^{-2})$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta'$ или $f_+ \in C[3\varphi_2]^{SL_{n-2}}$
5	≥ 4	$a\varphi_2 + b\varphi_{n-2} +$ $+ k\varphi_1 + l\varphi_{n-1},$ $a + b = 2, a > 0,$ $k + l = 4$	$a(\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+ b(\theta' \otimes t^{n-2} +$ $+ \varphi_{n-4} \otimes t^{-2}) +$ $+ k\varphi_1 \otimes t + \varphi_{n-3} \otimes t^{-1}$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta'$ или $b = 0$ и $n \geq 5$: $f_+ \in C[2\varphi_2 + \varphi_1]^{SL_{n-2}}$ или $C[2\varphi_2 + \varphi_{n-3}]^{SL_{n-2}};$ $n = 4: f_+ \rightarrow V[\varphi_2] = \bar{\theta}$
6	≥ 4	$\varphi_2 + k\varphi_1 + l\varphi_{n-1},$ $k + l = n + 2,$ $k > 0$	$\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2 +$ $+ k\varphi_1 \otimes t + l\varphi_{n-3} \otimes t^{-1}$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_2 + \varphi_1]^{SL_{n-2}}$
7	≥ 4	$a\varphi_1^2 + b\varphi_{n-1}^2 + \rho,$ $a + b = 2, a > 0,$ $\rho \neq \varphi_1, \varphi_{n-1}$	$a(\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_1^2 \otimes t^2) +$ $+ b(\theta' \otimes t^{n-2} +$ $+ \varphi_{n-3}^2 \otimes t^{-2}) + \rho^T$	$\mathfrak{D}$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_1^2]^{SL_{n-2}}$
8	3	то же, что в 7	$\theta \otimes t^{-1} + \theta' \otimes t^2 + \rho^T$		$f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta'$
9	3, 4	$\varphi_1^3 + \varphi_{n-1}^3 + \rho$	$\varphi_1 \otimes t^{3-n} + \varphi_1^3 \otimes t^3 +$ $+ \varphi_{n-3} \otimes t^{n-3} +$ $+ \varphi_{n-3}^3 \otimes t^{-3} + \rho^T$	Π	$f_- \in C[\varphi_{n-3}^3]^{SL_{n-2}},$ $f_+ \in C[\varphi_1^3]^{SL_{n-2}}$

(см. продолжение)

– если ρ содержится в табл. В, то у группы $\pi(G)$ отсутствуют согласно следствию 4.7 центральные корегулярные расширения; если же группа $\text{Aut } \pi$ нетривиальна, то либо одно из подпредставлений представления π содержится в таблице серии А, либо $(G, \pi) = (SL_n, k\varphi_1 \varphi_{n-1} + l(\varphi_1 + \varphi_{n-1}))$, где либо $k \geq 2$ (и см. слу-

Таблица А2 (продолжение)

10	4	$\varphi_1^2 + (2+m)\varphi_2$ $+k\varphi_1 + l\varphi_3,$ $k+l+m=1$	$\theta \otimes t^{-2} + \varphi^2 \otimes t^2 +$ $+(2+m)(\bar{\theta} \otimes t^{-2} +$ $+\theta' \otimes t^2) + \varphi \otimes (kt + lt^{-1})$	$\exists$	$f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta'$
11	5	$a\varphi_2 + b\varphi_3,$ $a+b=4, a>0$	$a(\theta \otimes t^{-3} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+b(\theta' \otimes t^3 + \varphi_1 \otimes t^{-2})$	$\exists$	$f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta'$ или $f_+ \in C[4\varphi_2]^{\text{SL}_3}$
12	5, 6	$a\varphi_2 + b\varphi_{n-2} +$ $+\varphi_1,$ $a+b=3$	$a(\theta \otimes t^{2-n} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+b(\theta' \otimes t^{n-2} +$ $+\varphi_{n-4} \otimes t^{-2}) + \varphi_1 \otimes t$	$\exists$	$ab \neq 0: f_- \rightarrow \theta, f_+ \rightarrow \theta',$ $b=0: f_+ \in C[3\varphi_2]^{\text{SL}_{n-2}}$ $a=0: f_- \in C[3\varphi_{n-4}]^{\text{SL}_{n-2}}$
13	6	$\varphi_3 + \varphi_2 + k\varphi_1 +$ $+l\varphi_5, k+l=2$	$\varphi_1 \otimes t^{-3} + \varphi_3 \otimes t^3 +$ $+\theta \otimes t^{-4} + \varphi_2 \otimes t^2 +$ $+k\varphi_1 \otimes t + l\varphi_3 \otimes t^{-1}$	$\exists$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_2]^{\text{SL}_4}$
14	6	$\varphi_3 + \varphi_1^2 + \rho$	$\varphi_1 \otimes t^{-3} + \varphi_3 \otimes t^3 +$ $+\theta \otimes t^{-4} + \varphi_1^2 \otimes t^2 + \rho^T$	$\exists$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_1^2]^{\text{SL}_4}$
15	6	$\varphi_3 + k\varphi_2 + l\varphi_4,$ $k+l=2, k>0$	$\varphi_1 \otimes t^{-3} + \varphi_3 \otimes t^3 +$ $+k(\theta \otimes t^{-4} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+l(\theta' \otimes t^4 + \varphi_2 \otimes t^{-2})$	$\exists$	$f_- \rightarrow \theta,$ $f_+ \in C[\varphi_2]^{\text{SL}_4}$
16	8	$\varphi_3 + k\varphi_1^2 + l\varphi_7^2,$ $k+l=1$	$\varphi_1 \otimes t^{-5} + \varphi_3 \otimes t^3 +$ $+k(\theta \otimes t^{-6} + \varphi_1^2 \otimes t^2) +$ $+l(\theta' \otimes t^6 + \varphi_5^2 \otimes t^{-2})$	$\exists$	$f_+ \in C[\varphi_3]^{\text{SL}_6},$ $f_- \rightarrow \theta$ или $f_- \in C[\varphi_5^2]^{\text{SL}_6}$
17	8	$\varphi_3 + k\varphi_2 + l\varphi_6,$ $k+l=1$	$\varphi_1 \otimes t^{-5} + \varphi_3 \otimes t^3 +$ $+k(\theta \otimes t^{-6} + \varphi_2 \otimes t^2) +$ $+l(\theta' \otimes t^6 + \varphi_4 \otimes t^{-2})$	$\exists$	$f_+ \in C[\varphi_3]^{\text{SL}_6},$ $f_- \rightarrow \theta$ или $f_- \in C[\varphi_4]^{\text{SL}_6}$

чай 9 ниже), либо $k=0, l \geq n$, или $k=1, l \geq 2$, а отсутствие нецентральных корегулярных расширений в этом случае уже обсуждалось выше.

Специальные случаи. Ниже доказывается неквазикорегулярность представлений, для которых вышеприведенные общие методы не дают результата. В каждом случае неквазикорегулярность представлений, содержащих данное в качестве подпредставления, может быть получена такими же рассуждениями, что и выше.

Случай 1. $G = \text{SL}_6$, $\rho = \varphi_3 + \pi$; $\pi = k\varphi_1 + l\varphi_5$, $(k, l) = (5, 0), (4, 1), (3, 3)$ или $\pi = \varphi_3 + \tau$, где $\tau = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_1^2$. В обоих случаях рассматриваем слайс-представления т.о.п. в компоненте $V(\varphi_3)$. Предложение 4.3 сводит вопрос в первом случае к представлению $k(\varphi_1 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1) + l(\varphi_2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_2)$ группы $\text{SL}_3 \times \text{SL}_3$, и, далее, через рассмотрение т.о.п. в компоненте $\theta \otimes (k\varphi_1 + l\varphi_2) - \kappa$

Таблица А3

Представление ρ группы SL_{2p}	$q(\rho, T)$	V^T	Представление группы $G^T \cong$ $\mathrm{SL}_p \times \mathrm{SL}_p$ в V^T
φ_1	p	$\{0\}$	
φ_2	$p(p-1)/2$	$\langle e_i \wedge e_j \rangle, 1 \leq i, j-p \leq p$	$\varphi_1 \otimes \varphi_1$
φ_4	$\binom{p}{4} + p \binom{p}{3}$	$\langle e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l \rangle,$ $1 \leq i < j \leq p < k < l \leq 2p$	$\varphi_2 \otimes \varphi_2$
$\varphi_1 \varphi_{2p-1}$	p^2		

Таблица А4

	p	Представление SL_{2p}	Представление $G^T \cong \mathrm{SL}_p \times \mathrm{SL}_p$ в V^T
1	2	$a\varphi_2 + k\varphi_1 + l\varphi_3, a = 7$ или $a = 5, k + l = 1$, или $a = 3, k + l = 2$	содержит $3\varphi_1 \otimes \varphi_1$
2	3	$k\varphi_2 + l\varphi_4, k + l = 4$	$k\varphi_1 \otimes \varphi_1 + l\varphi_2 \otimes \varphi_2$
3	4	$\varphi_4 + \rho$	$\varphi_2 \otimes \varphi_2 + \rho^T$

Таблица А5

Группа	ρ	$q(\rho, T)$	G^T	$\rho^T: G^T \rightarrow \mathrm{GL}(V^T)$
$\mathrm{SO}_n, n \geq 7$	φ_1	2	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}$	$\theta \otimes \varphi_1$
$\mathrm{SO}_n, n \geq 7$	φ_2	$2n-7$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}$	$\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_2 + \theta$
$\mathrm{SO}_n, n \geq 7$	φ_1^2	$2n-5$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}$	$\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1^2 + \theta$
$\mathrm{Spin}_{2r+1}, r \geq 2$	φ_r	2^{r-2}	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-3}$	$\varphi \otimes \varphi_{r-2}$
$\mathrm{Spin}_{2r}, r \geq 5$	φ_r	2^{r-3}	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-4}$	$\varphi \otimes \varphi_{r-2}$
$\mathrm{Sp}_n, n \geq 4$	φ_1	2	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}$	$\theta \otimes \varphi_1$
$\mathrm{Sp}_n, n \geq 4$	φ_1^2	$2n-5$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}$	$\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1^2 + \theta$
$\mathrm{Sp}_n, n \geq 4$	φ_2	$2n-7$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}$	$\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_2 + \theta$

представлению $k\varphi_1 + l\varphi_2$ группы SL_3 . Далее см. табл. В, номера 1, 2, 3.

Во втором случае предложение 4.3 сводит вопрос к представлению $\varphi_2 \otimes \varphi_1 + \varphi_1 \otimes \varphi_2 + \tau_1$ группы $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$, где τ_1 – ограничение на эту подгруппу представления τ ; рассмотрение с.о.п. в компоненте $\varphi_2 \otimes \varphi_1$ редуцирует вопрос к представлению $\varphi_1 \varphi_2 + \tau_2$ группы SL_3 , где τ_2 – ограничение τ на подгруппу SL_3 , вложенную в SL_6 представлением $2\varphi_1$. Если $\tau = \varphi_1$, то $\tau_2 = 2\varphi_1$ (и см. случай 9). В остальных

Таблица А6

	G	ρ	(G^T, V^T)
1	$\mathrm{SO}_n, n \geq 7$	$2\varphi_2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + 2\theta \otimes \varphi_2 + \theta_2)$
2	$\mathrm{SO}_n, n \geq 7$	$\varphi_2 + \varphi_1^2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes (\varphi_2 + \varphi_1^2) + \theta_2)$
3	$\mathrm{SO}_n, n \geq 5$	$2\varphi_1^2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + 2\theta \otimes \varphi_1^2 + \theta_2)$
4	$\mathrm{Spin}_{2r+1}, r \geq 4$	$\varphi_2 + \varphi_r$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-3}, \varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_2 + \varphi \otimes \varphi_{r-2} + \theta)$
5	$\mathrm{Spin}_{2r}, r \geq 5$	$\varphi_2 + \varphi_r$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-4}, \varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_2 + \varphi \otimes \varphi_{r-2} + \theta)$
6	$\mathrm{Spin}_{2r+1}, r \geq 2$	$\varphi_1^2 + \varphi_r$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-3}, \varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1^2 + \varphi \otimes \varphi_{r-2} + \theta)$
7	$\mathrm{Spin}_{2r}, r \geq 5$	$\varphi_1^2 + \varphi_r$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{2r-4}, \varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1^2 + \varphi \otimes \varphi_{r-2} + \theta)$
8	Spin_6	$\varphi_1^2 + \varphi_2$	$(\mathrm{SL}_2 \times T_1, \varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes t^2 + \theta \otimes t^{-2} + \theta + \varphi \otimes t)$
9	Spin_8	$\varphi_1^2 + \varphi_3^2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_4, 2\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1^2 + \pi)$
10	Spin_{13}	$2\varphi_6$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_9, 2\varphi \otimes \varphi_4)$
11	Spin_{14}	$k\varphi_6 + l\varphi_7,$ $k + l = 2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{10}, \varphi \otimes \varphi_4 + l\varphi \otimes \varphi_5)$
12	Spin_{16}	$k\varphi_7 + l\varphi_8,$ $k + l = 2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Spin}_{12}, \varphi \otimes \varphi_5 + l\varphi \otimes \varphi_6)$
13	$\mathrm{Sp}_n, n \geq 4$	$2\varphi_1^2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + 2\theta \otimes \varphi_1^2 + \theta_2)$
14	$\mathrm{Sp}_n, n \geq 8$	$\varphi_2 + \varphi_1^2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + \theta \otimes (\varphi_2 + \varphi_1^2) + \theta_2)$
15	$\mathrm{Sp}_n, n \geq 4$	$2\varphi_2$	$(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{n-4}, 2\varphi^2 \otimes \theta + 2\theta \otimes \varphi_2 + \theta_2)$
16	Sp_4	$\varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1$	$(\mathrm{SL}_2, 2\varphi^2 + \theta)$

случаях происходит редукция к номерам 1–3 табл. А2.

Случай 2. $G = \mathrm{Sp}_{2r}$, $\rho = \varphi_2 + 4\varphi_1$. Рассмотрение с.о.п. в компоненте φ_2 сводит вопрос к линейной группе $(\mathrm{SL}_2 \times \cdots \times \mathrm{SL}_2, 4(\varphi \otimes \theta \otimes \cdots \otimes \theta + \cdots + \theta \otimes \cdots \otimes \theta \otimes \varphi))$. Но ограничение последней группы на каждую изотипную компоненту, изоморфное линейной группе $(\mathrm{SL}_2, 4\varphi)$, является неквазикорегулярным (см. [1], [4]).

Случай 3. $G = \mathrm{SO}_n$, $\rho = \varphi_1^2 + 2\varphi_1$. Рассмотрение с.о.п. в компоненте φ_1 сводит вопрос к аналогичному представлению группы SO_{n-1} ; при $n = 3$ получаем неквазикорегулярное [1] представление $\varphi^4 + 2\varphi^2$ группы SL_2 .

Случай 4. $G = \mathrm{Sp}_n$, $\rho = n\varphi_1$. Проверяется, что если $r \in Z(\rho(G))$ и $e(r) \leq 1$, то $r \in \rho(G)$.

Случай 5. $G = \mathrm{Sp}_8$, $\rho = 2\varphi_2$. Известно, что алгебра $\mathbb{C}[\varphi_2]^G$ порождается образующими степеней 2, 3 и 4. Из предложения 4.5 следует, что имеется 12 образующих алгебры $\mathbb{C}[2\varphi_2]^G$, степени которых пробегают множество $\{(i, j) \mid 2 \leq i + j \leq 4\}$. Отсюда выводится, что если $r = \{\lambda; \mu\}$ и $e(r) \leq 1$, то $r \in \rho(G)$.

Случай 6. $(G, \rho) = (\mathrm{SL}_{2m}, \varphi_2 + 4\varphi_1)$, $(\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + 2\varphi_1 + \varphi_{n-1})$, $(\mathrm{SL}_n, \varphi_1^2 + 3\varphi_1)$. Во всех этих случаях имеем $\mathrm{tr. deg.} \mathbb{C}[\rho]^G = 7$. Образующие алгебр инвариантов

Таблица А7

Представление ρ группы Sp_{2r}	$q(\rho, T)$	Представление группы $G^T \cong \mathrm{SL}_r$ в V^T
φ_1	r	$\{0\}$
φ_2	$r(r-1)/2$	$\varphi_1 \varphi_{r-1}$
φ_1^2	$r(r+1)/2$	$\varphi_1 \varphi_{r-1} + \theta$
φ_4	$\binom{r}{4} + r \binom{r}{3} - \binom{r}{2}$	$\varphi_2 \varphi_{r-2}$

Таблица А8

	r	Представление Sp_{2r}	Представление $G^T \cong \mathrm{SL}_r$ в V^T
1	2	$\varphi_1^2 + \varphi_2^2$	$2\varphi^2 + \theta_2$
2	3	$3\varphi_2$	$3\varphi_1 \varphi_2$
3	3	$2\varphi_2 + \varphi_1$	$2\varphi_1 \varphi_2$
4	3	$\varphi_1^2 + \varphi_2$	$2\varphi_1 \varphi_2 + \theta$
5	4	$\varphi_4 + \rho$	$\varphi_2^2 + \rho^T$

подпредставлений возникают из следующих тензорных произведений: в первом случае

$$S^{m-k/2}(\varphi_2) \otimes S^k(k\varphi_1), \quad k = 0, 2, 4,$$

а во втором и третьем –

$$S^n(\varphi_1^2), \quad S^{n-1}(\varphi_1^2) \otimes [S^2(\varphi_1) \text{ или } \varphi_1 \otimes \varphi_1], \\ S^{n-2}(\varphi_1^2) \otimes S^4(2\varphi_1), \quad \varphi_1 \otimes \varphi_{n-1}, \quad \varphi_1^2 \otimes S^2(\varphi_{n-1}).$$

Их количество равно 8 в первом и втором случае и 10 в третьем. Проверка показывает, что если $r \in Z(\rho(G))$, $e(r) \leq 1$, то все данные образующие инварианты относительно r , что доказывает неквазикорегулярность.

Случай 7. $G = \mathrm{Sp}_n$, $\rho = \varphi_1^2 + 2\varphi_1$. Рассмотрение слайс-представления т.о.п. в компоненте $2\varphi_1$ сводит вопрос к тому же представлению группы Sp_{n-2} . Пусть $n = 4$. Имеем $\mathrm{tr. deg. } \mathbb{C}[\rho]^G = 8$. Образующие алгебр инвариантов подпредставлений имеют такие степени: $(2, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(3, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$. Кроме того, если через A , u , v обозначить соответственно оператор из касательной алгебры группы Sp_4 и пару векторов из $\mathbb{C}^4$, то существуют (очевидно ненулевые) инварианты $f_i = \langle A^i u, v \rangle$ (где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – Sp_4 -инвариантная билинейная форма). Ясно, что полином f_1 не выражается через инварианты младшей степени. Далее, пространства инвариантов степеней $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 1)$ одномерны, и если бы такое выражение существовало для f_2 или f_3 , то оно могло бы иметь лишь следующий вид:

$$\langle A^i u, v \rangle = c \mathrm{Tr} A^2 \langle A^{i-2} u, v \rangle, \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad i = 2, 3.$$

Таблица Б

	G	Представление $\rho = \rho_1 + \rho_2$		С.о.п. H в $V(\rho_1)$	Вло- жение $H \subseteq G$	Ограничение ρ_2 на H	Ссылка
		ρ_1	ρ_2				
1	$SL_n,$ $n \geq 4$	φ_1^2	$a\varphi_2 + b\varphi_{n-2} +$ $+k\varphi_1 + l\varphi_{n-1},$ $a + b = 1, k + l = 2$	SO_n	φ_1	$\varphi_2 + 2\varphi_1$	§7, сл. 8
2	$SL_n,$ $n \geq 5$	φ_1^2	$a\varphi_2 + b\varphi_{n-2},$ $a + b = 2$	SO_n	φ_1	$2\varphi_2$	A6, 1
3	SL_4	φ_2	$\varphi_1^2 + 2\varphi_2$	Sp_4	φ_1	$\varphi_1^2 + 2\varphi_2$	§7, сл. 8
4	SL_4	φ_2	$\varphi_1\varphi_3 + \varphi_1$	Sp_4	φ_1	$\varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1$	A6, 14
5	SL_7	φ_3	$k\varphi_1 + l\varphi_6, k + l = 4$	G_2	φ_1	$4\varphi_1$	Б, 33
6	SL_7	φ_3	$k\varphi_3 + l\varphi_4, k + l = 1$	G_2	φ_1	$\varphi_1^2 + \varphi_1 + \theta$	5.2
7	SL_7	φ_3	$k\varphi_1^2 + l\varphi_6^2, k + l = 1$	G_2	φ_1	$\varphi_1^2 + \theta$	5.2
8	SL_7	φ_3	$k\varphi_2 + l\varphi_5 + \tau,$ $k + l = 1$	G_2	φ_1	$\varphi_2 + \varphi_1 + \tau'$	§7, сл. 9, Б, 34 и 3.2
9	SL_8	φ_3	$k\varphi_1 + l\varphi_7, k + l = 3$	SL_3	$\varphi_1\varphi_2$	$3\varphi_1\varphi_2$	§7, сл. 9
10	SL_8	φ_3	$k\varphi_3 + l\varphi_5, k + l = 1$	SL_3	$\varphi_1\varphi_2$	$\varphi_1^2\varphi_2^2 + \tau$	5.2
11	Sp_4	$2\varphi_2$	$2\varphi_1$	SL_2	2φ	4φ	[1]
12	Sp_4	$2\varphi_2$	$\varphi_1 + 2\varphi_1$	SL_2	2φ	$2\varphi^2 + 2\varphi + \theta_4$	[1]
13	Sp_6	φ_3	φ_1^2	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2$	$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2$	§7, сл. 10
14	Sp_6	φ_3	$3\varphi_1$	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2$	$3\varphi_1 + 3\varphi_2$	Б, 3
15	Sp_6	φ_3	$\varphi_2 + \tau,$ $\tau = \varphi_1, \varphi_1^2, \varphi_2, \varphi_3$	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2$	содержит $\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1$ или $\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2$	§7, сл. 10
16	Sp_6	φ_3	$\varphi_3 + \varphi_1, 2\varphi_3$	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2$	$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \tau$	A2, 7
17	$Spin_7$	φ_3	$\varphi_2 + k\varphi_1 + l\varphi_3,$ $k + l = 1$	G_2	φ_1	$\varphi_2 + 2\varphi_1 + \theta$	Б, 34
18	$Spin_7$	φ_3	$k\varphi_1 + l\varphi_3, k + l = 4$	G_2	φ_1	$4\varphi_1 + \theta_4$	Б, 33
19	$Spin_8$	φ_1	$\varphi_2 + \varphi_3$	$Spin_7$	$\varphi_1 + \theta$	$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$	Б, 17
20	$Spin_8$	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_3 + m\varphi_4,$ $k + l + m = 5, k < 5$	$Spin_7$	$\varphi_1 + \theta$	$(l + m)\varphi_3 +$ $+k\varphi_1 + \theta_k$	Б, 18
21	$Spin_8$	φ_1	φ_3^2	$Spin_7$	$\varphi_1 + \theta$	φ_3^2	5.2

(см. продолжение)

Таблица Б (продолжение)

22	Spin_9	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_4,$ $k + 2l = 6, k < 6$	Spin_8	$\varphi_1 + \theta$	$l(\varphi_3 + \varphi_4) +$ $+k\varphi_1 + \theta_k$	Б, 20
23	Spin_9	φ_4	$k\varphi_1 + l\varphi_4,$ $k + 2l = 6, k < 6$	Spin_7	$\varphi_3 + \theta$	$l(\varphi_3 + \varphi_1) +$ $+k\varphi_3 + \theta_k$	Б, 18
24	Spin_{10}	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_4 + m\varphi_5,$ $k + 2l + 2m = 7,$ $k < 7$	Spin_9	$\varphi_1 + \theta$	$(l + m)\varphi_4 +$ $+k\varphi_1 + \theta_k$	Б, 22
25	Spin_{10}	$2\varphi_4$	$k\varphi_4 + l\varphi_5, k + l = 2$	G_2	$\varphi_1 + \theta_3$	$4\varphi_1 + \theta_4$	Б, 33
26	Spin_{11}	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_5,$ $k + 4l = 8, k < 8$	Spin_{10}	$\varphi_1 + \theta$	$l(\varphi_4 + \varphi_5) +$ $+k\varphi_1 + \theta_k$	Б, 24, Б, 25
27	Spin_{11}	φ_5	$2\varphi_5$	SL_5	$\varphi_1 + \varphi_4 + \theta$	$2\varphi_1 + 2\varphi_4 +$ $+2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \theta_4$	А2, 5
28	Spin_{12}	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_5 + m\varphi_6,$ $k + 4l + 4m = 9,$ $k < 9$	Spin_{11}	$\varphi_1 + \theta$	$(l + m)\varphi_5 +$ $+k\varphi_1 + \theta_k$	Б, 26
29	Spin_{12}	φ_5	$2\varphi_5$	SL_6	$\varphi_1 + \varphi_5$	$2\varphi_2 + 2\varphi_4 + \theta_4$	А4, 2
30	Spin_{12}	φ_5	$\varphi_5 + \varphi_6$	SL_6	$\varphi_1 + \varphi_5$	$\varphi_2 + \varphi_4 + \theta_2 +$ $+ \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5$	А2, 15
31	Spin_{13}	φ_1	$2\varphi_1 + \varphi_6$	Spin_{12}	$\varphi_1 + \theta$	$2\varphi_1 + \theta_2 +$ $+ \varphi_5 + \varphi_6$	Б, 28
32	Spin_{14}	φ_1	$3\varphi_1 + \varphi_6$	Spin_{13}	$\varphi_1 + \theta$	$3\varphi_1 + \theta_3 + \varphi_6$	Б, 31
33	G_2	φ_1	$3\varphi_1$	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2 + \theta$	$3\varphi_1 + 3\varphi_2 + \theta_3$	Б.3
34	G_2	φ_1	$\varphi_1 + \varphi_2$	SL_3	$\varphi_1 + \varphi_2 + \theta$	$\varphi_1\varphi_2 + \theta +$ $+2\varphi_1 + 2\varphi_2$	§7, сл. 10
35	F_4	φ_1	φ_4	Spin_8	$\varphi_1 + \varphi_3 +$ $+ \varphi_4 + \theta$	$\varphi_1 + \varphi_2 +$ $+ \varphi_3 + \varphi_4$	Б, 19
36	F_4	φ_1	$2\varphi_1$	Spin_8	$\varphi_1 + \varphi_3 +$ $+ \varphi_4 + \theta$	$2\varphi_1 + 2\varphi_3 +$ $+2\varphi_4 + \theta_4$	Б, 20
37	E_6	φ_1	φ_6	F_4	$\varphi_1 + \theta$	$\varphi_1 + \varphi_4$	Б, 35
38	E_6	φ_1	$k\varphi_1 + l\varphi_5, k + l = 3$	F_4	$\varphi_1 + \theta$	$3\varphi_1 + \theta_3$	Б, 36
39	E_7	φ_1	φ_6	E_6	$\varphi_1 + \varphi_5 + \theta_2$	$\varphi_1 + \varphi_5 +$ $+ \varphi_6 + \theta$	Б, 37
40	E_7	φ_1	$2\varphi_1$	E_6	$\varphi_1 + \varphi_5 + \theta_2$	$2\varphi_1 + 2\varphi_5 + \theta_4$	Б, 38

Таблица В

	(G, ρ)	$\text{tr. deg. } C[\rho]^G$	Тенз. произведения, соответствующие образующим инвариантам в корегулярных подпредставлениях	Число этих образующих
1	$(\text{SL}_n, (n+2)\varphi_1),$ $n \geq 2$	$2n+1$	$S^n(n\varphi_1)$	$\binom{n+2}{2}$
2	$(\text{SL}_n, (n+1)\varphi_1 +$ $+ \varphi_{n-1}), n \geq 3$	$2n+1$	$S^n(n\varphi_1), \varphi_1 \otimes \varphi_{n-1}$	$2n+2$
3	$(\text{SL}_n, n\varphi_1 + n\varphi_{n-1}),$ $n \geq 3$	n^2+1	$S^n(n\varphi_1), S^n(n\varphi_{n-1}), \varphi_1 \otimes \varphi_{n-1}$	n^2+2
4	$(\text{SO}_n, (n+1)\varphi_1),$ $n \geq 3$	$n(n+3)/2$	$S^2(\varphi_1), \varphi_1 \otimes \varphi_1, S^n(n\varphi_1)$	$(n+1) \times$ $\times (n+4)/2$
5	$(\text{SL}_n, \varphi_1^2 + n\varphi_{n-1}),$ $n \geq 3$	$n(n+1)/2$ $+1$	$S^n(n\varphi_{n-1}), S^n(\varphi_1^2), \varphi_1^2 \otimes$ $\otimes [S^2(\varphi_{n-1}) \text{ или } \varphi_{n-1} \otimes \varphi_{n-1}]$	$n(n+1)/2$ $+2$
6	$(\text{SL}_n, \varphi_2 + n\varphi_{n-1}),$ $n = 2m \geq 4$	$n(n-1)/2$ $+1$	$S^n(n\varphi_{n-1}), S^m(\varphi_2),$ $\varphi_2 \otimes \varphi_{n-1} \otimes \varphi_{n-1}$	$n(n-1)/2$ $+2$
7	$(\text{SL}_n, \varphi_2 +$ $+(n+1)\varphi_{n-1}),$ $n = 2m+1 \geq 5$	$n(n+1)/2$ $+1$	$S^n(n\varphi_{n-1}), \varphi_2 \otimes \varphi_{n-1} \otimes \varphi_{n-1}$	$\binom{n+2}{2}$
8	$(\text{SL}_n, \varphi_2 + \varphi_1 +$ $+ n\varphi_{n-1}),$ $n = 2m+1 \geq 5$	$n(n+1)/2$ $+1$	$S^n(n\varphi_{n-1}), \varphi_2 \otimes \varphi_{n-1} \otimes \varphi_{n-1},$ $\varphi_1 \otimes \varphi_{n-1}, S^m(\varphi_2) \otimes \varphi_1$	$n(n+1)/2$ $+2$
9	$(\text{SL}_n, \varphi_2 + 4\varphi_1),$ $n = 2m+1 \geq 5$	7	$S^i(\varphi_2) \otimes S^{n-2i}((n-2i)\varphi_1),$ $i = m-1, m$	8
10	$(\text{SL}_4, \varphi_2 + 4\varphi_1)$	7	$S^2(\varphi_2), \varphi_2 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_1, S^4(4\varphi_1)$	8
11	$(\text{SL}_n, \varphi_2 + \varphi_{n-2} +$ $+ 3\varphi_1),$ $n = 2m+1 \geq 5$	$2n+1$	$S^i(\varphi_2) \otimes S^i(\varphi_{n-2}), i = 1, \dots, m,$ $S^{j-1}(\varphi_2) \otimes S^j(\varphi_{n-2}) \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_1,$ $j = 1, \dots, m, S^m(\varphi_2) \otimes \varphi_1,$ $S^{m-1}(\varphi_2) \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_1$	$2n+2$
12	$(\text{SL}_5, 2\varphi_2 + 3\varphi_4)$	11	$\varphi_2 \otimes \varphi_4 \otimes \varphi_4, \varphi_2 \otimes S^2(\varphi_2) \otimes \varphi_4$	12
13	$(\text{SL}_4, 4\varphi_2 + \varphi_1)$	13	$S^2(\varphi_2), \varphi_2 \otimes \varphi_2,$ $\varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_2 \otimes S^2(\varphi_1)$	14

Но, взяв в качестве A оператор $\text{diag}(1, i, -1, -i)$, получаем, что правая часть равна нулю тождественно по u и v , что невозможно для левой части. Отсюда получаем, что полиномы f_2 и f_3 – образующие, и если $r \in Z(\rho(G))$ и $e(r) \leq 1$, то $r \in \rho(G)$.

Случай 8. $G = \text{SO}_n$, $\rho = \varphi_2 + 2\varphi_1$. Так же, как и в предыдущем пункте, сводим вопрос к случаю $n = 5$. Имеем $\text{tr. deg. } \mathbb{C}[\rho]^G = 10$. Имеются девять образующих алгебр инвариантов подпредставлений степеней $(2, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 2)$. Кроме того, если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – SO_n -инвариантная билинейная форма, то, как и в случае 6, многочлены $\langle A^i u, v \rangle$ можно присоединить к системе образующих при $i = 1, 2, 3$, и далее все аналогично.

Случай 9. G – любая простая группа, кроме SL_2, SL_3 , $\rho = 2 \text{Ad}$, или $G = \text{SL}_3$, $\rho = 2 \text{Ad} + \pi$, где π – любое неприводимое представление. Рассмотрение т.о.п. в компоненте Ad сводит вопрос к квазикорегулярности ограничения присоединенного представления на максимальный тор T группы G . Анализ систем корней показывает, что в простой алгебре Ли всегда можно выбрать точку с замкнутой относительно тора T орбитой и одномерным тором в качестве стабилизатора. Именно, если положить $\text{rk } G = r$, то нужная точка есть сумма корневых векторов, отвечающих таким корням $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, что единственная линейная зависимость между ними имеет вид $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 0$. Слайс-модуль такой точки есть линейная оболочка всех остальных корневых векторов (а в случае $(\text{SL}_3, 2 \text{Ad} + \pi)$ еще дополнительно пространство $V(\pi)$), и неквазикорегулярность представления одномерного тора проверяется с помощью леммы 4.9.

Случай 10. $(G, \rho) = (\text{SL}_3, \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2), (\text{SL}_n, \varphi_1 \varphi_{n-1} + 2\varphi_1)$. Т.о.п. u в первой компоненте представления можно выбрать так, чтобы ее стабилизатором, а также стабилизатором соответствующей точки в $P(V(\text{Ad}))$ являлся максимальный тор группы G . Во втором случае получаем в качестве слайс-группы точки u (относительно связной группы) группу

$$(T_{n-1}, \text{diag}(t_1, t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n-1}, (t_1 \dots t_{n-1})^{-1}, (t_1 \dots t_{n-1})^{-1})).$$

Из леммы 4.11 получаем, что при $n > 2$ слайс-группа, а значит, и исходное представление, не обладает даже свойством ф.п.п. В первом случае, по выбору точки u , поскольку группа $\text{Aut } \rho$ тривиальна, получаем, что квазикорегулярность представления ρ влекла бы существование конечного корегулярного расширения слайс-группы связной группы скалярными матрицами. Но слайс-группа такова:

$$(T_2, \text{diag}(t^2, t^{-1}, s^2, s^{-1}, ts, (ts)^{-2})),$$

и невозможность конечного корегулярного расширения ее скалярными матрицами легко устанавливается непосредственно, а также следует из леммы 4.10.

Случай 11. $G = \text{SL}_9$, $\rho = \varphi_3 + \pi$, π – любое неприводимое представление. Согласно работе [20] в пространстве $V(\varphi_3)$ имеется полупростая точка u , связная компонента стабилизатора которой имеет вид

$$G_u^0 = K = \{\text{diag}(t, t, t, s, s, s, (ts)^{-1}, (ts)^{-1}, (ts)^{-1})\}.$$

Пусть H – корегулярное конечное расширение группы $\rho(G)$. Если π отлично от φ_1, φ_8 , квазикорегулярность слайс-представления группы H_u опровергается с помощью леммы 4.9, как при рассмотрении случая 9. Если же $\pi = \varphi_1$ или $\pi = \varphi_8$, то

ограничение слайс-группы на инвариантное пространство $V(\pi)$ есть корегулярное конечное расширение линейной группы $K \subseteq \mathrm{GL}_9$. Из леммы 4.10 выводится, что группа K не имеет центральных конечных корегулярных расширений. С другой стороны, можно установить отсутствие таких $r \in N(K) \setminus Z(K)$, которые действуют как отражения на многообразии $\mathbb{C}^9 // K$, что доказывает (см. § 3) неквазикорегулярность группы K . Проверка этого не элементарна, поскольку для неполупростых групп возможна ситуация, когда r – отражение на фактормногообразии, тогда как $\varepsilon(r)$ не является отражением (и именно по этой причине лемма 3.2 не переносится на случай неполупростых групп – см. пример после леммы 3.4). Не вдаваясь в детали, отметим, что достаточно для любого $r \in N(K) \setminus Z(K)$ проверить, что K -инвариантное (а в данном случае и K -насыщенное вне нуль-слоя) подмножество $M_r = \{x \in \mathbb{C}^9 \mid rx \in Kx\}$ имеет коразмерность ≥ 2 в $\mathbb{C}^9$.

Случай 12. $G = \mathrm{SL}_n$, $n = 3, 4$, $\rho = \varphi_1^3 + \tau$, τ – неприводимое представление, отличное от φ_{n-1}^3 , и при $n = 3$ от φ_1, φ_2 . Рассмотрим точку $u = e_1^3 + \dots + e_n^3 \in V(\varphi_1^3)$. Для перестановки $\pi \in S_n$ и ненулевых констант $c_1, \dots, c_n$ обозначим через $g(\pi, c_1, \dots, c_n) \in \mathrm{GL}_n$ оператор g со свойством $g(e_i) = c_i e_{\pi i}$, $i = 1, \dots, n$, и назовем такие операторы *мономиальными*. Предположим, что конечная группа $\Gamma \subseteq \mathrm{GL}(V(\rho))$ такова, что группа $\rho(G)\Gamma$ корегулярна. Поскольку группа $\mathrm{Aut} \rho$ тривиальна, можно считать, что $\Gamma \subseteq Z(\rho(G))$. Рассмотрим слайс-представление полупростой точки u . Нетрудно показать, что из условий $r \in Z(\rho(G))$, $h \in \rho(G)$, $rh(u) = u$, следует, что оператор r действует скалярно на обеих компонентах представления ρ , $h(u) \in \langle u \rangle$ и $h = \rho(g(\pi, c_1, \dots, c_n))$ для некоторых $\pi, c_1, \dots, c_n$. Слайс-модуль точки u содержит пространство $V(\tau)$ и, кроме того, при $n = 4$ еще подпространство $U = \langle e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_3 e_4, e_2 e_3 e_4 \rangle \subseteq V(\varphi_1^3)$. Пусть элемент rh сохраняет точку u . Тогда пространства $V(\tau)$ и U инвариантны относительно rh и ограничение оператора rh мономиально в базисе пространства $V(\tau) = S^k(\varphi_1)$, или $\bigwedge^l(\varphi_1)$, состоящем из мономов относительно $e_1, \dots, e_n$, и в выписанном базисе пространства U .

С другой стороны, легко проверить, что мономиальный оператор может быть отражением, только если соответствующая перестановка является транспозицией. Оказывается, что тип перестановки, соответствующей оператору $\sigma_u(rh)$, зависит только от типа перестановки π , и небольшой перебор всех элементов группы S_n , $n = 3, 4$, показывает, что перестановка, соответствующая оператору $\sigma_u(rh)$, не может быть транспозицией, и, следовательно, в слайс-группе нет отражений. Согласно теореме Шевалле слайс-представление σ_u , а следовательно, и сама группа $\rho(G)\Gamma$ некорегулярны.

Случай 13. $G = \mathrm{Spin}_{16}$, $\rho = \varphi_8 + \varphi_1$. Пусть u – т.о.п. в компоненте φ_8 . В работе [19] получено, что группа G_u изоморфна $(\mu_2)^8$, а группа $G_{\langle u \rangle}$ равна $G_u Z(G)$. Слайс-модуль точки u есть прямая сумма двух инвариантных подпространств U и $V(\varphi_1)$, где $U \subseteq V(\varphi_8)$ – подпространство размерности 8. Пусть H – конечное корегулярное расширение группы $\rho(G)$, $r \in H_u$. Если оператор $\sigma_u(r)$ – отражение, то он обязан действовать тривиально на одной из компонент слайс-модуля. Если этой компонентой является φ_1 , то $r \in Z(\rho(G))$. Но тогда r действует скалярно на U и не является отражением. Противоречие. Если же его ограничение на φ_1 нетривиально, то с точностью до скаляра оно есть образ элемента группы G_u , т.е. унитарный оператор порядка 2. Но поскольку размерность пространства $V(\varphi_1)$

четная, всякое корневое пространство инволюции четномерно. Значит, отражений в слайс-группе нет, и по теореме Шевалле слайс-представление некорегулярно.

Случай 14. $G = \mathrm{SL}_8, \rho = \varphi_3 + 2\varphi_7$. Существует такая точка $v \in V(\rho)$, что $H = G_v^0 = \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{SL}_3$, причем группа H вложена в группу SL_8 посредством представления $\varphi_1 \otimes \theta + \theta \otimes \varphi_1 + \theta$. Подсчет показывает, что слайс-представление группы H равно $\pi + \theta_2$, где $\pi = \varphi_2 \otimes \varphi_1 + \varphi_1 \otimes \theta + 2\theta \otimes \varphi_2$. Следовательно, нам достаточно доказать, что группа $\pi(H)$ неквазикорегулярна. Мы получим образующие алгебры инвариантов этой группы. Рассмотрим сначала действие только группы Sp_4 . Ограничение представления π на последнюю имеет вид $3\varphi_2 + \varphi_1 + \theta_6$. Это квазикорегулярное представление (табл. 1, номер 23) – его образующие инварианты – и соотношение нам известны. Получаем, что фактормногообразие по действию группы Sp_4 изоморфно, как SL_3 -пространство, подмногообразию в пространстве представления $\varphi_1^2 + 3\varphi_2 + \theta$ группы SL_3 , заданному уравнением $\theta^2 = F$, где $F \in \mathbb{C}[\varphi_1^2 + \varphi_2]^{\mathrm{SL}_3} \setminus \mathbb{C}[\varphi_1^2]^{\mathrm{SL}_3}$ – образующий инвариант. Образующие алгебры $\mathbb{C}[\varphi_1^2 + 3\varphi_2]^{\mathrm{SL}_3}$ также известны (см. п. 5 таблицы В, а также случай В §6), нетрудно найти и единственное соотношение между ними. В итоге рассуждения по этой схеме дают, что алгебра $\mathbb{C}[\pi]^H$ порождена следующими образующими (в скобках – полистепеней): $d(6, 0, 0, 0)$, $f_{12}(4, 2, 1, 0)$, $f_{13}(4, 2, 0, 1)$, $f_{22}(2, 0, 2, 0)$, $f_{33}(2, 0, 0, 2)$, $f_{23}(2, 0, 1, 1)$, $e(2, 2, 1, 1)$, $h(3, 2, 0, 0)$. Положим также $f_{ji} = f_{ij}$ для $1 \leq i < j \leq 3$, $f_{11} = h^2$. Единственное соотношение между образующими имеет вид

$$de^2 = \det(f_{ij})_{i,j=1}^3.$$

Единственный элемент $r \in N(H)$ такой, что $e(r) = 1$, имеет вид $r = \{-1; i; -1; -1\}$, причем r умножает на -1 образующий e . Видим, что группа $\pi(H)\langle r \rangle$ не является корегулярной, следовательно, группа $\pi(H)$ неквазикорегулярна.

Список литературы

1. Кас В.Г., Попов В.Л., Винберг Е.Б. Sur les groupes algebriques, dont l'algebre des invariants est libre // С.р. Acad. sci. Paris. Ser.A. 1976. V. 283. P. 875–878.
2. Адамович О.М., Головина Е.О. Простые линейные группы, имеющие свободную алгебру инвариантов // Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1979. С. 3–41.
3. Schwarz G.W. Representation of simple Lie groups with regular rings of invariants // Inv. Math. 1978. V. 49. P. 167–191.
4. Shmel'kin D.A. Coregular algebraic linear groups, locally isomorphic to SL_2 // Lie groups, their discrete subgroups and invariant theory. Advances in Soviet Mathematics, 1992. V. 8. P. 173–190.
5. Nakajima H. Representation of a reductive algebraic groups, whose algebra of invariants are complete intersection // J. reine angew. math. 1986. V. 367. P. 115–138.
6. Nakajima H. Algebraic tori, admitting finite coregular extensions // Proc. Japan Acad. Ser A. 1992. V. 68. №9. P. 273–278.
7. Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. фундам. направл. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
8. Панюшев Д.И. О полупростых группах, допускающих конечное корегулярное расширение // Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. №3. С. 82–84.
9. Панюшев Д.И. Классификация четырехмерных антикоммутативных алгебр с нетривиальной группой автоморфизмов // Вопросы теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1982. С. 98–106.
10. Беклемишев Н.Д. Инварианты кубических форм от четырех переменных // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. 1982. Т. 2. С. 42–49.

11. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.: Гостехиздат, 1948.
12. Salmon G. Lecons d'algebre superieure. P.: Gauttters Villars, 1890.
13. Teranyshi Y. The ring of invariants of matrices // Nagoya Math. J. 1986. V. 104. P. 149–161.
14. Knop F., Littelmann P. Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen // Math. Z. 1987. V. 196. P. 211–229.
15. Broer B. Hilbert series in the invariant theory: Thesis, Rijksuniversiteit Utrecht, 1990.
16. Brion M. Representation exceptionnelles des groupes semisimples // Ann. Sci. E.N.S. 1985. V. 18. P. 345–387.
17. Элашвили А.Г. Канонический вид и стационарные подгруппы точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №1. С. 51–62.
18. Элашвили А.Г. Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №2. С. 65–78.
19. Попов А.М. Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли // Тр. ММО. 1985. Т. 48. С. 7–59.
20. Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Классификация тривекторов девятимерного пространства // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 18. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 197–233.
21. Винберг Э.Б., Онищук А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
22. Nakajima H. Finite coregular extensions of a reductive algebraic group // Hiyoshi Review of Nat. Sci. Keio University. 1992. V. 12. P. 88–94.
23. Couture M., Sharp R.T. Reductions of enveloping algebras of low-rank groups // J. Phys. Ser. A: Math. Gen. 1980. V. 13. P. 1925–1945.
24. Крафт Х. Геометрическая теория инвариантов. М.: Мир, 1987.
25. Шмелькин Д.А. О несвязных корегулярных простых группах // УМН. 1995. Т. 50. №3. С. 169–170.

Поступило в редакцию
20.II.1995