Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Галыт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 19–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:23:29

УДК 512.54

А. А. Гальт

О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах

Решен вопрос о расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах над конечными полями и алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики.

Библиография: 4 наименования.

Ключевые слова: максимальный тор, нормализатор тора, симплектическая группа, группа Вейля.

DOI: 10.4213/im8101

Введение

Конечные группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Они возникают из линейных алгебраических групп как множество неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга. Пусть $\bar{G}$ – простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}_p$ конечного поля положительной характеристики p , σ – эндоморфизм Стейнберга, $\bar{T}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\bar{G}$. Хорошо известно, что все максимальные торы сопряжены в $\bar{G}$ и факторгруппа $N_{\bar{G}}(\bar{T})/\bar{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\bar{G}$. Возникает

ПРОБЛЕМА 1. Описать группы $\bar{G}$, в которых $N_{\bar{G}}(\bar{T})$ расщепляется над $\bar{T}$.

При переходе к конечным группам G лиева типа возникает аналогичная проблема. Пусть $T = \bar{T} \cap G$ – максимальный тор группы G , $N = N_{\bar{G}}(\bar{T}) \cap G$ – его алгебраический нормализатор. Отметим, что $N \leq N_G(T)$, но равенство, вообще говоря, может не достигаться.

ПРОБЛЕМА 2. Описать группы G и их максимальные торы T , в которых N расщепляется над T .

В настоящей работе рассматриваются простые связные линейные алгебраические группы $\bar{G}$ типа C_n . В этом случае группа $\bar{G}$ либо односвязна и $\bar{G} \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, либо имеет присоединенный тип и $\bar{G} \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Ответ на проблему 1 дают следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\bar{T}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\bar{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ и $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{T})$. Тогда тор $\bar{T}$ имеет дополнение в $\bar{N}$ в том и только в том случае, если $p = 2$ или $n \leq 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного фонда китайских университетов (проект WK0010000029) и NNSF-грантом Китая (грант 11371335).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\bar{T}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\bar{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$ и $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{T})$. Тогда тор $\bar{T}$ имеет дополнение в $\bar{N}$ в том и только в том случае, если $p = 2$.

При переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно однозначное соответствие между классами G -сопряженных максимальных σ -инвариантных торов группы $\bar{G}$ и классами σ -сопряженности группы Вейля W . В случае симплектических групп классы σ -сопряженности группы W совпадают с обычными классами сопряженности и каждому такому классу соответствует циклический тип $(\bar{n}_1) \cdots (\bar{n}_k)(n_{k+1}) \cdots (n_m)$. Ответ на проблему 2 в случае симплектических групп содержится в следующих двух утверждениях.

ТЕОРЕМА 2. Пусть q – степень простого числа p , $\bar{T}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\bar{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$, и пусть $T = \bar{T} \cap G$ – соответствующий максимальный тор в группе $G = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(\bar{n}_1) \cdots (\bar{n}_k)(n_{k+1}) \cdots (n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N = N_{\bar{G}}(\bar{T}) \cap G$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $p = 2$;
- 2) $m = 1$;
- 3) $m = 2, k = 2$, числа n_1, n_2 нечетны, $q \equiv 3 \pmod{4}$;
- 4) $m = 2, k = 1$, n_1 нечетно, n_2 четно, $q \equiv 3 \pmod{4}$;
- 5) $m = 2, k = 0$, числа n_1, n_2 четны, $q \equiv 3 \pmod{4}$;
- 6) $m = 2, k = 0$, $q \equiv 1 \pmod{4}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть q – степень простого числа p , $\bar{T}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\bar{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$, и пусть $T = \bar{T} \cap G$ – соответствующий максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(\bar{n}_1) \cdots (\bar{n}_k)(n_{k+1}) \cdots (n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N = N_{\bar{G}}(\bar{T}) \cap G$ в том и только в том случае, если $p = 2$.

Отметим, что ситуация в классических группах, отличных от симплектических, представляется иной. В дальнейшем планируется исследовать проблемы 1, 2 для других классических групп.

§ 1. Обозначения и используемые результаты

В работе используются следующие обозначения. Через $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ обозначается разбиение натурального числа n , p – простое число, q – некоторая степень числа p . Группа всех подстановок на n элементах обозначается через Sym_n . Через $\varepsilon, \varepsilon_i$ обозначены элементы множества $\{+, -\}$, через $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали, через $\mathrm{bd}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ – блочно-диагональная матрица с квадратными блоками $T_1, T_2, \dots, T_n$. Для групп T и H выражение $T \rtimes H$ будет обозначать полупрямое произведение групп T и H с нормальной подгруппой T . Пусть T и N – подгруппы в группе G , $T \trianglelefteq N$. Будем говорить, что N *расщепляема над T* или T *имеет дополнение в N* , если существует подгруппа H в G такая, что $N = T \rtimes H$.

Основные сведения о линейных алгебраических группах можно найти в [1]. Пусть $\bar{G}$ – простая связная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbb{F}}_p$ конечного поля $\mathbb{F}_p$. Сюръективный эндоморфизм σ группы $\bar{G}$ называется *эндоморфизмом Стейнберга* (см. [2, определение 1.15.1]), если множество его неподвижных точек $\bar{G}_\sigma$ конечно. Любую группу, удовлетворяющую условию $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$, будем называть *конечной группой лиева типа*. Если $\bar{T}$ – σ -инвариантный максимальный тор группы $\bar{G}$, то $T = \bar{T} \cap G$ называется *максимальным тором* группы G лиева типа. Группу $N_{\bar{G}}(\bar{T}) \cap G$ будем обозначать через $N(T, G)$, или просто N . Отметим, что справедливо включение $N(T, G) \leq N_G(T)$, но равенство, вообще говоря, может не достигаться. Например, если мы рассмотрим $G = \mathrm{SL}_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц T группы G тривиальна, значит, $N_G(T) = G$. Однако $G = (\mathrm{SL}_n(\bar{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, где σ – эндоморфизм Стейнберга ($\sigma: (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$). Тогда $T = \bar{T}_\sigma$, где $\bar{T}$ является подгруппой диагональных матриц в $\mathrm{SL}_n(\bar{\mathbb{F}}_2)$. Таким образом, $N(G, T)$ является группой мономиальных матриц в G . Поэтому для группы $N(G, T)$ будем использовать термин *алгебраический нормализатор*. Именно об алгебраическом нормализаторе говорится в теореме 2 и следствии 2. Если $H \trianglelefteq G$, то образ группы T в G/H называется *максимальным тором группы G/H* .

В $\bar{G}$ всегда есть σ -инвариантный максимальный тор, который будем обозначать через $\bar{T}$. Все максимальные торы сопряжены с $\bar{T}$ в $\bar{G}$. Через $\bar{N}$ и W будем обозначать нормализатор $N_{\bar{G}}(\bar{T})$ и группу Вейля $\bar{N}/\bar{T}$ соответственно, а через π – естественный гомоморфизм из $\bar{N}$ в W . Действие σ на W определяется естественным образом. Элементы $w_1, w_2 \in W$ называются *σ -сопряженными*, если $w_1 = (w^{-1})^\sigma w_2 w$ для некоторого элемента w из W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3, предложения 3.3.1, 3.3.3]. *Тор $\bar{T}^g$ является σ -инвариантным тогда и только тогда, когда $g^\sigma g^{-1} \in \bar{N}$. Отображение $\bar{T}^g \mapsto \pi(g^\sigma g^{-1})$ задает биекцию между классами G -сопряженных σ -инвариантных торов группы $\bar{G}$ и классами σ -сопряженности группы W .*

Как следует из предложения 1, строение тора $(\bar{T}^g)_\sigma$ группы G определяется только классом σ -сопряженности элемента $\pi(g^\sigma g^{-1})$. Будем говорить, что тор T группы G имеет тип w , если $T = (\bar{T}^g)_\sigma$ для некоторого $g \in \bar{G}$ такого, что $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [4, лемма 1.2]. *Пусть $g^\sigma g^{-1} \in \bar{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Тогда $(\bar{T}^g)_\sigma = (\bar{T}_{\sigma w})^g$, где w действует на $\bar{T}$ сопряжением.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [3, предложение 3.3.6]. *Пусть $g^\sigma g^{-1} \in \bar{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Тогда*

$$(N_{\bar{G}}(\bar{T}^g))_\sigma / (\bar{T}^g)_\sigma \simeq C_{W, \sigma}(w) = \{x \in W \mid (x^{-1})^\sigma wx = w\}.$$

§ 2. Симплектические группы

В данном параграфе рассматриваются симплектические группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, ассоциированные с квадратичной формой $x_1 y_{-1} - x_{-1} y_1 + \dots + x_n y_{-n} - x_{-n} y_n$. Через $\mathrm{PSp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ обозначается факторгруппа группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ по ее центру. Пусть $\bar{G}$ – простая связная линейная алгебраическая группа типа C_n . В этом случае группа $\bar{G}$ либо односвязна и мы будем обозначать ее через $\bar{G}_{\mathrm{sc}}$, либо имеет присоединенный тип и будет обозначаться через $\bar{G}_{\mathrm{ad}}$. При этом

$\overline{G}_{\text{sc}} \simeq \text{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{G}_{\text{ad}} \simeq \text{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Строки и столбцы симплектических матриц размерности $2n$ нумеруются в порядке $1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n$. В качестве максимального σ -инвариантного тора $\overline{T}_{\text{sc}}$ в $\overline{G}_{\text{sc}}$ возьмем группу всех матриц вида $\text{bd}(D, D^{-1})$, где D – невырожденная диагональная матрица размерности n . Через $\overline{N}_{\text{sc}}$ будем обозначать нормализатор тора $\overline{T}_{\text{sc}}$ в $\overline{G}_{\text{sc}}$, а через $\overline{T}_{\text{ad}}$ и $\overline{N}_{\text{ad}}$ – соответственно образы групп $\overline{T}_{\text{sc}}$ и $\overline{N}_{\text{sc}}$ в $\overline{G}_{\text{ad}}$.

Действие группы Вейля W на $\overline{T}_{\text{sc}}$ реализуется перестановкой элементов на главной диагонали матрицы. Группа $\overline{N}_{\text{sc}}$ является подгруппой мономиальных матриц, и существует вложение группы W в группу подстановок на множестве $\{1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n\}$. Образ группы W при этом вложении совпадает с группой Sl_n тех подстановок φ этого множества, для которых справедливо равенство $\varphi(-i) = -\varphi(i)$. Определим следующие элементы из Sl_n :

$$\varphi_1 = (1, 2)(-1, -2), \quad \varphi_2 = (2, 3)(-2, -3), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = (n-1, n)(-(n-1), -n), \\ \tau = (n, -n).$$

Тогда $\text{Sl}_n = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \tau \rangle$. Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \tau$ соответствуют графу Кокстера типа C_n :

В частности, элемент $\tau\varphi_{n-1}$ имеет порядок 4, и выполнено $\tau\varphi_i = \varphi_i\tau$ для всех $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Для порождающих элементов группы Sl_n выберем соответствующие представители из $\overline{N}_{\text{sc}}$. Пусть I_n – единичная матрица размерности n ,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{A \in \text{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid A^{\text{tr}}QA = Q\}$. Поскольку симметрическая группа Sym_{2n} каноническим образом изоморфна группе подстановочных матриц размерности $2n$, мы будем отождествлять элементы этих групп. Тогда элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ лежат в $\overline{N}_{\text{sc}}$, а в качестве представителя смежного класса, соответствующего элементу τ , возьмем следующий:

$$\tau_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае четной характеристики поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ выполняется равенство $\tau = \tau_0$ и группа $\overline{H}_{\text{sc}} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \tau_0 \rangle$ является дополнением для тора $\overline{T}_{\text{sc}}$ в $\overline{N}_{\text{sc}}$. Поскольку центр $\text{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ тривиален, то $\text{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \text{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и группа $\overline{H}_{\text{sc}}$ также является дополнением для $\overline{T}_{\text{ad}}$ в $\overline{N}_{\text{ad}}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\overline{T}_{\text{sc}}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\overline{G}_{\text{sc}} = \text{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Если $n \in \{1, 2\}$, то тор $\overline{T}_{\text{ad}}$ имеет дополнение в $\overline{N}_{\text{ad}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то положим $\overline{H}_{sc} = \langle \tau_0 \rangle$, $\overline{H}_{ad}$ – образ группы $\overline{H}_{sc}$ в $\mathrm{PSp}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\tau_0^2 = -I_2$ лежит в центре $\mathrm{Sp}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\overline{H}_{ad}$ является дополнением для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$. В случае $n = 2$ группа W равна $\langle \varphi_1, \tau \rangle$, $\varphi_1^2 = \tau^2 = (\varphi_1 \tau)^4 = e$. Положим $\overline{H}_{sc} = \langle s_1, t \rangle$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\alpha^2 = -1$. Тогда $s_1, t \in \mathrm{Sp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$, $s_1^2 = I$, $t^2 = (s_1 t)^4 = -I$. Пусть $\overline{H}_{ad}$ – образ группы $\overline{H}_{sc}$ в $\mathrm{PSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда $\overline{H}_{ad}$ является дополнением для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\overline{T}_{sc}$ – максимальный σ -инвариантный тор в группе $\overline{G}_{sc} = \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда:

- 1) если характеристика поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ нечетна, то тор $\overline{T}_{sc}$ не имеет дополнения в $\overline{G}_{sc}$;
- 2) если $n \geq 3$ и характеристика поля $\overline{\mathbb{F}}_p$ нечетна, то тор $\overline{T}_{ad}$ не имеет дополнения в $\overline{N}_{ad}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим противное. Пусть $\overline{H}_{sc}$ – дополнение для $\overline{T}_{sc}$ в $\overline{N}_{sc}$ и t – прообраз элемента τ в $\overline{H}_{sc}$. Тогда $t^2 = I$. С другой стороны, элемент t имеет вид

$$t = \mathrm{diag}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n, \nu_1^{-1}, \dots, \nu_{n-1}^{-1}, \nu_n^{-1}) \tau_0$$

для некоторых ненулевых диагональных элементов ν_i . Следовательно,

$$t^2 = \mathrm{diag}(\nu_1^2, \dots, \nu_{n-1}^2, -1, \nu_1^{-2}, \dots, \nu_{n-1}^{-2}, -1).$$

Получили противоречие с тем, что t^2 – единичная матрица.

2) Предположим противное. Пусть $\overline{H}_{ad}$ – дополнение для $\overline{T}_{ad}$ в $\overline{N}_{ad}$, и пусть $\overline{s}_{n-1}, \overline{t}$ – прообразы элементов φ_{n-1}, τ в $\overline{H}_{ad}$. Тогда $(\overline{s}_{n-1})^2 = \overline{t}^2 = \overline{I}$ и $(\overline{s}_{n-1} \overline{t})^4 = \overline{I}$, где $\overline{I}$ – единичный элемент в $\mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Пусть $\overline{H}_{sc}$ – прообраз $\overline{H}_{ad}$ в $\overline{N}_{sc}$ и s_{n-1}, t – прообразы элементов $\overline{s}_{n-1}, \overline{t}$ в $\overline{H}_{sc}$. Тогда

$$s_{n-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_n^{-1}) \varphi_{n-1}, \\ t = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}, \dots, \nu_n^{-1}) \tau_0$$

для некоторых ненулевых диагональных элементов μ_i, ν_i , а матрицы $(s_{n-1})^2, t^2, (s_{n-1} t)^4$ лежат в центре группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и, в частности, являются скалярными. Непосредственно проверяется, что

$$(s_{n-1})^2 = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_{n-2}^2, \mu_{n-1} \mu_n, \mu_{n-1} \mu_n, \mu_1^{-2}, \dots, \\ \dots, \mu_{n-2}^{-2}, (\mu_{n-1} \mu_n)^{-1}, (\mu_{n-1} \mu_n)^{-1}), \\ t^2 = \mathrm{diag}(\nu_1^2, \dots, \nu_{n-2}^2, \nu_{n-1}^2, -1, \nu_1^{-2}, \dots, \nu_{n-2}^{-2}, \nu_{n-1}^{-2}, -1),$$

откуда, в частности, $\mu_1^2 = \mu_1^{-2}$ и $\nu_1^2 = \nu_1^{-2}$. Далее,

$$(s_{n-1} t)^4 = \mathrm{diag}((\mu_1 \nu_1)^4, \dots, (\mu_{n-2} \nu_{n-2})^4, -1, -1, (\mu_1 \nu_1)^{-4}, \dots, \\ \dots, (\mu_{n-2} \nu_{n-2})^{-4}, -1, -1),$$

откуда $(\mu_1\nu_1)^4 = -1$. Противоречие с равенствами $\mu_1^4 = \nu_1^4 = 1$. Лемма доказана.

Теорема 1 следует из замечания 1, леммы 1 и утверждения 2) леммы 2. Следствие 1 вытекает из замечания 1 и утверждения 1) леммы 2.

§ 4. Вспомогательные результаты

Пусть σ отображает $\mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ в себя по правилу $(a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$, где q – степень простого числа p . Тогда $G = \overline{G}_\sigma = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ и $\tilde{G} = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Отметим, что такие обозначения будут удобны при дальнейшем изложении несмотря на то, что в теореме 2 группа $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ обозначена через G . Отображение σ действует на $W \simeq \mathrm{Sl}_n$ тривиально, поэтому классы σ -сопряженности совпадают с обычными классами сопряженности. Опустив знаки перед элементами из $\{1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n\}$, получим гомоморфизм из группы Sl_n на группу Sym_n . Пусть $\varphi \in \mathrm{Sl}_n$ отображается в цикл $(i_1 i_2 \dots i_k)$ и оставляет на месте все элементы, отличные от $\pm i_1, \pm i_2, \dots, \pm i_k$. Если $\varphi(i_k) = i_1$, то назовем φ *положительным циклом длины k* ; если $\varphi(i_k) = -i_1$, то назовем φ *отрицательным циклом длины k* . Образ произвольного элемента φ из Sl_n единственным образом разлагается в произведение независимых циклов, и в соответствии с этим разложением φ единственным образом представим в виде произведения независимых положительных и отрицательных циклов. Длины этих циклов вместе с их знаками задают множество целых чисел, которое называется *циклическим типом* элемента φ .

Два элемента из Sl_n сопряжены тогда и только тогда, когда их циклические типы совпадают. Пусть $n = n' + n''$, а $\{n_1, \dots, n_k\}$ и $\{n_{k+1}, \dots, n_m\}$ – разбиения чисел n' и n'' соответственно. Циклический тип $\{-n_1, \dots, -n_k, n_{k+1}, \dots, n_m\}$ будет обозначаться через $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$. В дальнейшем будут использоваться следующие элементы:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1, 2, \dots, n_1), \\ \sigma_{i+1} &= (n_1 + \dots + n_i + 1, n_1 + \dots + n_i + 2, \dots, n_1 + \dots + n_i + n_{i+1}), \\ \omega_1 &= (1, 2, \dots, n_1)(-1, -2, \dots, -n_1), \\ \omega_{i+1} &= (n_1 + \dots + n_i + 1, \dots, n_1 + \dots + n_i + n_{i+1}) \\ &\quad \times (-(n_1 + \dots + n_i + 1), \dots, -(n_1 + \dots + n_i + n_{i+1})), \\ \varpi_1 &= (1, 2, \dots, n_1, -1, -2, \dots, -n_1), \\ \varpi_{i+1} &= (n_1 + \dots + n_i + 1, \dots, n_1 + \dots + n_i + n_{i+1}, -(n_1 + \dots + n_i + 1), \dots \\ &\quad \dots, -(n_1 + \dots + n_i + n_{i+1})), \\ \tau_1 &= (1, -1)(2, -2) \dots (n_1, -n_1), \\ \tau_{i+1} &= (n_1 + \dots + n_i + 1, -(n_1 + \dots + n_i + 1)) \dots \\ &\quad \dots (n_1 + \dots + n_i + n_{i+1}, -(n_1 + \dots + n_i + n_{i+1})). \end{aligned}$$

В качестве стандартного представителя типа $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$ будем использовать подстановку $\varpi_1 \dots \varpi_k \omega_{k+1} \dots \omega_m$. Строение максимальных торov в группах $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ хорошо известно. Воспользуемся их описанием из работы [4, предложение 3.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть элемент w – стандартный представитель типа $(\overline{n_1}) \cdots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \cdots (n_m)$. Положим $\varepsilon_i = -$, если $i \leq k$, и $\varepsilon_i = +$ в противном случае. Пусть T – подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, состоящая из всех диагональных матриц вида

$$\mathrm{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}, D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1}),$$

где $D_i = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i^q, \dots, \lambda_i^{q^{n_i-1}})$, $\lambda_i^{q^{n_i-\varepsilon_i-1}} = 1$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда $\overline{T}_{\sigma w} \simeq T$.

Пусть $N = (N_{\overline{G}}(\overline{T}))_{\sigma w}$. Поскольку $(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_{\sigma} = ((N_{\overline{G}}(\overline{T}))_{\sigma w})^g$, в силу предложения 3 имеем

$$N/T = (N_{\overline{G}}(\overline{T}))_{\sigma w} / \overline{T}_{\sigma w} \simeq (N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_{\sigma} / (\overline{T}^g)_{\sigma} \simeq C_{W, \sigma}(w) = C_W(w).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как отмечалось в замечании 1, в случае четной характеристики поля группа $\overline{H}_{\mathrm{sc}} \simeq \mathrm{Sl}_n$ содержится в $\overline{N}_{\mathrm{sc}}$. Очевидно, что $H = (\overline{H}_{\mathrm{sc}})_{\sigma} = \overline{H}_{\mathrm{sc}} \leq \mathrm{Sp}_{2n}(q)$. Кроме того, $N/T \simeq C_W(w)$ и $N \leq T \rtimes H$. Следовательно, существует подгруппа $H_w \simeq C_W(w)$ в группе H такая, что $N = T \rtimes H_w$. Поскольку центр группы $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ тривиален, любой максимальный тор группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ также имеет дополнение в своем нормализаторе.

Всюду далее рассматривается случай нечетной характеристики поля $\overline{\mathbb{F}}_p$. Элементы $\varpi_1, \dots, \varpi_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_m, \tau_{k+1}, \dots, \tau_m$ лежат в $C_W(w)$. Выберем представителей для этих элементов в группе N . Элементы $\omega_{k+1}, \dots, \omega_m$ принадлежат $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, а значит, и N . Через $I_j = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 1)$ и $C_j = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$ обозначим единичную и диагональную матрицы размерности n_j соответственно, а через I – единичную матрицу всей группы. В качестве представителей элементов $\varpi_1, \dots, \varpi_k$ и $\tau_{k+1}, \dots, \tau_m$ в группе N возьмем следующие:

$$\begin{aligned} & \mathrm{bd}(I_1, \dots, I_{j-1}, I_j, I_{j+1}, \dots, I_m, I_1, \dots, I_{j-1}, C_j, I_{j+1}, \dots, I_m) \varpi_j, \quad 1 \leq j \leq k, \\ & \mathrm{bd}(I_1, \dots, I_{j-1}, I_j, I_{j+1}, \dots, I_m, I_1, \dots, I_{j-1}, -I_j, I_{j+1}, \dots, I_m) \tau_j, \quad k+1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Напомним, что мы отождествляем соответствующие элементы группы подстановочных матриц размерности $2n$ и группы подстановок Sym_{2n} . Более того, существует естественное вложение группы $\mathrm{GL}_{n_i}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (соответственно, $\mathrm{GL}_{2n_i}(\overline{\mathbb{F}}_p)$) в группу $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (соответственно, $\mathrm{GL}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$), и мы будем отождествлять соответствующие элементы, используя те же обозначения σ_i (соответственно, $\omega_i, \varpi_i, \tau_i$).

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\{n_1, n_2\}$ – разбиение натурального числа n . Пусть $s_1 = \mathrm{bd}(T_1, T_2)\sigma_1$, $s_2 = \mathrm{bd}(T'_1, T'_2)\sigma_2$, где $T_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1})$, $T_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2})$, $T'_1 = \mathrm{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n_1})$, $T'_2 = \mathrm{diag}(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{n_2})$. Тогда если $s_1 s_2 = s_2 s_1(zI)$ для некоторого $z \in \overline{\mathbb{F}}_p$, то $\lambda'_{i+1} = \lambda'_i z$, $\mu_j = \mu_{j+1} z$, $\lambda'_1 = \lambda'_{n_1} z$, $\mu_{n_2} = \mu_1 z$, где $i \in \{1, 2, \dots, n_1-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n_2-1\}$, а также $z^{n_1} = z^{n_2} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $s_1 s_2 = s_2 s_1(zI)$, имеем $T_1 \sigma_1 T'_1 = T'_1 T_1 \sigma_1 z I_1$ и $T_2 T'_2 \sigma_2 = T'_2 \sigma_2 T_2 z I_2$. Следовательно,

$$T_1 (T'_1)^{\sigma_1^{-1}} = T'_1 T_1 z I_1 = T_1 T'_1 z I_1, \quad T'_1 = (T'_1)^{\sigma_1} z I_1.$$

Отсюда получаем, что $\lambda'_{i+1} = \lambda'_i z$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ и $\lambda'_1 = \lambda'_{n_1} z$. Из полученных равенств имеем $\lambda'_1 = \lambda'_{n_1} z = \lambda'_{n_1-1} z^2 = \dots = \lambda'_1 z^{n_1}$ и $z^{n_1} = 1$. Аналогично, получаем

$$T_2 T'_2 \sigma_2 = T'_2 \sigma_2 T_2 z I_2, \quad T_2 T'_2 = T'_2 (T_2 z I_2)^{\sigma_2^{-1}}, \quad (T_2)^{\sigma_2} = (T_2) z I_2.$$

Таким образом, $\mu_j = \mu_{j+1} z$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$, $\mu_{n_2} = \mu_1 z$, и, как следствие полученных равенств, имеем $z^{n_2} = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть $\{n_1, n_2\}$ – разбиение натурального числа n , q нечетно. Пусть, кроме того, $t_1 = \text{bd}(T_1, D_2, T_3, D_2^{-1})\varpi_1$, $t_2 = \text{bd}(D'_1, T'_2, (D'_1)^{-1}, T'_4)\varpi_2$, где T_1, T'_2, T_3, T'_4 – произвольные невырожденные матрицы, $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Тогда:

- 1) если $t_1 t_2 = t_2 t_1$, то $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$;
- 2) если $t_1 t_2 = -t_2 t_1$, то $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$ и n_1, n_2 нечетны, более того, $\mu_1^{q-1} = -1$, если $n_2 > 1$, и $\lambda_2^{q-1} = -1$, если $n_1 > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \text{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \text{bd}(D'_1, (D'_1)^{-1})$.

1) Аналогично доказательству леммы 3 равенство $t_1 t_2 = t_2 t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\varpi_2} = D$ и $(D')^{\varpi_1} = D'$. Из первого равенства следует, что все диагональные элементы матриц D_2 и D_2^{-1} совпадают. В частности, $\mu_1 = \mu_1^{-1}$, откуда $\mu_1^2 = 1$. Аналогично, из второго равенства получаем $\lambda_2^2 = 1$.

2) В данном случае равенство $t_1 t_2 = -t_2 t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\varpi_2} = -D$ и $(D')^{\varpi_1} = -D'$. Из первого равенства следует

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\mu_1^{-q^{n_2-1}}, \\ \mu_1^q &= -\mu_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_1^{q^{n_2-1}} &= -\mu_1^{q^{n_2-2}}, \\ \mu_1^{-1} &= -\mu_1^{q^{n_2-1}}, \\ \mu_1^{-q} &= -\mu_1^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_1^{-q^{n_2-1}} &= -\mu_1^{-q^{n_2-2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n_2 > 1$ выполнены равенства $\mu_1^{q-1} = -1$ и $\mu_1^{-1} = -\mu_1^{q^{n_2-1}} = (-1)^2 \mu_1^{q^{n_2-2}} = \dots = (-1)^{n_2} \mu_1$, откуда $\mu_1^2 = (-1)^{n_2}$. Поскольку $q-1$ четно, то n_2 должно быть нечетным и $\mu_1^2 = -1$. В случае $n_2 = 1$ получаем, что $\mu_1^{-1} = -\mu_1$, откуда $\mu_1^2 = -1$. Аналогично, из второго равенства получаем, что n_1 также должно быть нечетным, $\lambda_2^2 = -1$ и если $n_1 > 1$, то $\lambda_2^{q-1} = -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заключение леммы 4 также справедливо для блочно-диагональных матриц с количеством блоков больше двух.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\{n_1, n_2\}$ – разбиение натурального числа n . Пусть, кроме того, $u_1 = \text{bd}(T_1, D_2, T_3, D_2^{-1})\tau_1$, $u_2 = \text{bd}(D'_1, T'_2, (D'_1)^{-1}, T'_4)\tau_2$, где T_1, T'_2, T_3, T'_4 – произвольные невырожденные матрицы, $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Если $u_1 u_2 = u_2 u_1$, то $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \text{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \text{bd}(D'_1, (D'_1)^{-1})$. Аналогично доказательству леммы 4 равенство $t_1 t_2 = t_2 t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\tau_2} = D$ и $(D')^{\tau_1} = D'$, что, в свою очередь равносильно равенствам $D_2^{-1} = D_2$ и $(D'_1)^{-1} = D'_1$. Следовательно, $\mu_1 = \mu_1^{-1}$ и $\lambda_2 = \lambda_2^{-1}$, откуда $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заключение следствия 3 также справедливо для блочно-диагональных матриц с количеством блоков больше двух.

ЛЕММА 5. Пусть $\{n_1, n_2\}$ – разбиение натурального числа n , q нечетно. Пусть, кроме того, $t_1 = \text{bd}(T_1, D_2, T_3, D_2^{-1})\varpi_1$, $u_2 = \text{bd}(D'_1, T'_2, (D'_1)^{-1}, T'_4)\tau_2$, где T_1, T'_2, T_3, T'_4 – произвольные невырожденные матрицы, $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Тогда:

- 1) если $t_1 u_2 = u_2 t_1$, то $\mu_1^2 = 1$;
- 2) если $t_1 u_2 = -u_2 t_1$, то $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$, n_1 нечетно, более того, если $n_1 > 1$, то $\lambda_2^{q-1} = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 4.

1) Пусть $D = \text{bd}(D_2, (D_2)^{-1})$, $D' = \text{bd}(D'_1, (D'_1)^{-1})$. Равенство $t_1 u_2 = u_2 t_1$ влечет $D^{\tau_2} = D$. Следовательно, матрицы D_2 и D_2^{-1} совпадают, откуда $\mu_1 = \mu_1^{-1}$ и $\mu_1^2 = 1$.

2) В данном случае равенство $t_1 u_2 = -u_2 t_1$ равносильно двум равенствам $D^{\tau_2} = -D$ и $(D')^{\varpi_1} = -D'$. Из первого равенства следует, что $D_2^{-1} = -D_2$ и $\mu_1^2 = -1$. Расписывая второе равенство поэлементно, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\lambda_2^{-q^{n_1-1}}, \\ \lambda_2^q &= -\lambda_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_2^{q^{n_1-1}} &= -\lambda_2^{q^{n_1-2}}, \\ \lambda_2^{-1} &= -\lambda_2^{q^{n_1-1}}, \\ \lambda_2^{-q} &= -\lambda_2^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_2^{-q^{n_1-1}} &= -\lambda_2^{-q^{n_1-2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n_1 > 1$ выполнены равенства $\lambda_2^{q-1} = -1$ и $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2^{q^{n_1-1}} = (-1)^2 \lambda_2^{q^{n_1-2}} = \dots = (-1)^{n_1} \lambda_2$, откуда $\lambda_2^2 = (-1)^{n_1}$. Поскольку $q-1$ четно, то n_1 должно быть нечетным и $\lambda_2^2 = -1$. В случае $n_1 = 1$ получаем, что $\lambda_2^{-1} = -\lambda_2$, откуда $\lambda_2^2 = -1$.

ЛЕММА 6. Пусть $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ – разбиение натурального числа n , где $m \geq 3$. Пусть $s_1 = \text{bd}(T_1, T_2, \dots, T_m)\sigma_1$, $s_2 = \text{bd}(T'_1, T'_2, \dots, T'_m)\sigma_2$, где $T_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2})$, $T'_1 = \text{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n_1})$. Тогда если $s_1 s_2 = s_2 s_1(zI)$, то $z = 1$, $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_{n_1}$, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $s_1 s_2 = s_2 s_1(zI)$, имеем $T_m T'_m = T'_m T_m z I_m$, откуда следует, что $z = 1$. Остальные равенства доказываются аналогично доказательству леммы 3.

ЛЕММА 7. Пусть $\{n_1, n_2\}$ – разбиение натурального числа n . Пусть $s = \text{bd}(T_1, T_2)\sigma_1$, где $T_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1})$, $T_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2})$. Тогда $s^{n_1} = zI$ в том и только в том случае, если $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n_1} = \mu_1^{n_1} = \mu_2^{n_1} = \dots = \mu_{n_2}^{n_1} = z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma_1^{n_1} = I_1$, получаем

$$\begin{aligned} (T_1 \sigma_1)^{n_1} &= T_1 T_1^{\sigma_1^{-1}} T_1^{\sigma_1^{-2}} \dots T_1^{\sigma_1^{-(n_1-1)}} \sigma^{n_1} = T_1 T_1^{\sigma_1^{n_1-1}} T_1^{\sigma_1^{n_2-2}} \dots T_1^{\sigma_1} \\ &= T_1 T_1^{\sigma_1} T_1^{\sigma_1^2} \dots T_1^{\sigma_1^{n_1-1}}. \end{aligned}$$

Полученная матрица будет скалярной, поскольку любой ее диагональный элемент будет равен произведению всех диагональных элементов матрицы T_1 , т. е. $(T_1 \sigma_1)^{n_1} = \alpha I_1$, где $\alpha = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n_1}$. Остальные равенства очевидны.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Напомним, что случай четной характеристики был рассмотрен в замечании 2, поэтому всюду далее рассматривается случай нечетной характеристики поля, и тогда центр группы $\text{Sp}_{2n}(q)$ состоит из матриц $\pm I$. Максимальный тор из предложения 4 будем называть *максимальным тором, имеющим тип $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$* . Следующая лемма ограничивает рассмотрение случаев, в которых нормализатор тора может быть расщепляем.

ЛЕММА 8. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \text{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(\overline{n_1}) \dots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \dots (n_m)$, и $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда:

- 1) тор T не имеет дополнения в N ;
- 2) если $m \geq 3$, то тор $\tilde{T}$ не имеет дополнения в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим противное. Пусть H – дополнение для T в N . Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то в любом случае элемент τ_1 лежит в $C_W(w) \simeq N_G(T)/T$. Пусть u_1 – прообраз элемента τ_1 . Тогда элемент u_1 имеет вид

$$u_1 = \text{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}(-I_1), D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1})\tau_1$$

для некоторых диагональных матриц $D_1, \dots, D_m$. Тогда

$$u_1^2 = \text{bd}(-I_1, D_2^2, \dots, D_m^2, -I_1, D_2^{-2}, \dots, D_m^{-2}).$$

С другой стороны, если H – дополнение для T в N , то $u_1^2 = I$. Противоречие.

2) Предположим противное. Пусть $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, H – прообраз $\tilde{H}$ в N . Поскольку $(\varpi_i)^{n_i} = \tau_i$, то в любом случае элементы τ_1, τ_2 лежат в $C_W(w) \simeq N_{\tilde{G}}(\tilde{T})/\tilde{T}$. Пусть u_1, u_2 – прообразы элементов τ_1, τ_2 в H . Тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{bd}(D_1, D_2, \dots, D_m, D_1^{-1}(-I_1), D_2^{-1}, \dots, D_m^{-1})\tau_1, \\ u_2 &= \text{bd}(D'_1, D'_2, \dots, D'_m, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1}(-I_2), \dots, (D'_m)^{-1})\tau_2, \end{aligned}$$

где $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Поскольку $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, то $u_1 u_2 = \varepsilon u_2 u_1$, $u_1^2 = \varepsilon_1 I$, $u_2^2 = \varepsilon_2 I$. По условию

$m \geq 3$, поэтому по лемме 6 получаем $u_1 u_2 = u_2 u_1$, и далее в силу замечания 4 и следствия 3 имеем $\mu_1^2 = 1$. Так как $u_1^2 = \varepsilon_1 I_n$, по лемме 7 получаем $-1 = \mu_1^2$. Получили противоречие с тем, что $\mu_1^2 = 1$.

ЛЕММА 9. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип (n) или $(\bar{n})$, и $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда тор $\tilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_1 = \mathrm{bd}(I_1, C_1)\varpi_1$, $s_1 = \omega_1$, $u_1 = \mathrm{bd}(I_1, -I_1)\tau_1$. Тогда t_1, s_1, u_1 принадлежат $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $t_1^{2n} = -I$, $s_1^n = I$, $u_1^2 = -I$, $s_1 u_1 = u_1 s_1$. Для тора типа $(\bar{n})$ положим $H = \langle t_1 \rangle$, а для тора типа (n) положим $H = \langle s_1 \rangle \times \langle u_1 \rangle$. Пусть $\tilde{H}$ – образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$; тогда $\tilde{H}$ – дополнение для тора $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ЛЕММА 10. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \mathrm{PSp}_4(q)$. Тогда:

- 1) если тор T имеет тип $(\bar{1})(1)$, то $\tilde{T}$ не имеет дополнения в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$;
- 2) если тор T имеет тип $(1)(1)$, то $\tilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 1 \pmod{4}$;
- 3) если тор T имеет тип $(\bar{1})(\bar{1})$, то $\tilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ тогда и только тогда, когда $q \equiv 3 \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) предположим противное. Пусть $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ и H – прообраз $\tilde{H}$ в N . Пусть t_1, u_2 – прообразы элементов ϖ_1, τ_2 в H . Тогда

$$t_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \mu_1, -\lambda_1^{-1}, \mu_1^{-1})\varpi_1, \quad u_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \mu_2, \lambda_2^{-1}, -\mu_2^{-1})\tau_2,$$

где $\lambda_1^{q+1} = \lambda_2^{q+1} = 1$, $\mu_1^{q-1} = \mu_2^{q-1} = 1$. Поскольку $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, то $t_1^2 = \varepsilon_1 I$, $u_2^2 = \varepsilon_2 I$. С другой стороны, $t_1^2 = \mathrm{bd}(-1, \mu_1^2, -1, \mu_1^{-2})$ и $u_2^2 = \mathrm{bd}(\lambda_2^2, -1, \lambda_2^{-2}, -1)$. Следовательно, $\mu_1^2 = \lambda_2^2 = -1$. Таким образом, $\mu_1^2 = -1$ и $\mu_1^{q-1} = 1$, что возможно только при $q \equiv 1 \pmod{4}$, а также $\lambda_2^2 = -1$ и $\lambda_2^{q+1} = 1$, что возможно только при $q \equiv 3 \pmod{4}$. Противоречие.

Необходимость условий в утверждениях 2), 3) доказывается так же, как в утверждении 1). Положим

$$s_1 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае 2) возьмем элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$ и $\lambda^{q-1} = 1$, а в случае 3) возьмем элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$ и $\lambda^{q+1} = 1$. Тогда $s_1, s_2, w \in N$, $s_1^2 = s_2^2 = -I$, $w^2 = I$. Кроме того, $s_1 s_2 = -s_2 s_1$, $s_1^w = s_2$. Пусть $H = \langle s_1, s_2, w \rangle$, $\tilde{H}$ – образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$; тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ЛЕММА 11. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(\bar{n}_1)(\bar{n}_2)$, и $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ в том и только в том случае, если n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем необходимость. Пусть $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, H – прообраз $\tilde{H}$ в N . Пусть t_1, t_2 – прообразы элементов ϖ_1, ϖ_2 в H . Тогда

$$t_1 = \text{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}C_1, D_2^{-1})\varpi_1, \quad t_2 = \text{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1}C_2)\varpi_2,$$

где $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$. Поскольку $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, то $t_1 t_2 = \varepsilon t_2 t_1$, $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$, $(t_2)^{2n_2} = \varepsilon_2 I$. Тогда из равенств $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$ и $(t_2)^{2n_2} = \varepsilon_2 I$ в силу леммы 7 имеем $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^{2n_2} = -1$ соответственно. Случай $t_1 t_2 = t_2 t_1$ невозможен в силу утверждения 1) леммы 4, поэтому, применяя утверждение 2) леммы 4, получаем, что числа n_1, n_2 нечетны. Более того, $\mu_1^{q-1} = -1$, если $n_2 > 1$, и $\lambda_2^{q-1} = -1$, если $n_1 > 1$. Случай $n_1 = n_2 = 1$ разобран в лемме 10, поэтому $\mu_1^{q-1} = -1$ или $\lambda_2^{q-1} = -1$. Поскольку $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^{2n_2} = -1$, то $q \equiv 3 \pmod{4}$. Необходимость доказана, покажем достаточность. Пусть n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod{4}$. Возьмем элемент $\lambda \in \mathbb{F}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$; тогда $\lambda^q = -\lambda$. Положим

$$t_1 = \text{bd}(I_1, D_2, C_1, D_2^{-1})\varpi_1, \quad t_2 = \text{bd}(D'_1, I_2, (D'_1)^{-1}, C_2)\varpi_2,$$

где $D_2 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda)$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda)$. Тогда t_1, t_2 лежат в $\text{Sp}_{2n}(q)$, $t_1^{2n_1} = -I$, $t_2^{2n_2} = -I$ (см. лемму 7) и $t_1 t_2 = -t_2 t_1$. Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) = \langle \varpi_1, \varpi_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \times \mathbb{Z}_{2n_2}$ и в качестве H можно взять $H = \langle t_1, t_2 \rangle$. Пусть $\tilde{H}$ – образ группы H в $\text{PSp}_{2n}(q)$; тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$. Если $n_1 = n_2$, то $C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$. В этом случае пусть

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\omega \in \text{Sp}_{2n}(q)$, $\omega^2 = I$, $t_1^\omega = t_2$. Положим $H = \langle t_1, t_2, \omega \rangle$, $\tilde{H}$ – образ группы H в $\text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ЛЕММА 12. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \text{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(n_1)(n_2)$, и $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{T}$ не имеет дополнения в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ в том и только в том случае, если n_1, n_2 нечетны и $q \equiv 3 \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $q \equiv 1 \pmod{4}$. Пусть элемент $\lambda \in \mathbb{F}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$, $\lambda^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы:

$$s_1 = \omega_1, \quad s_2 = \omega_2, \\ u_1 = \text{bd}(I_1, \lambda I_2, -I_1, \lambda^{-1} I_2)\tau_1, \quad u_2 = \text{bd}(\lambda I_1, I_2, \lambda^{-1} I_1, -I_2)\tau_2.$$

Тогда $s_i, u_i \in \text{Sp}_{2n}(q)$, $s_i^{n_i} = I$, $u_i^2 = -I$, $s_i^{u_i} = s_i$, $s_1 s_2 = s_2 s_1$, $u_1 u_2 = -u_2 u_1$, $s_1 u_2 = u_2 s_1$, $s_2 u_1 = u_1 s_2$, где $i = 1, 2$. Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) = \langle \omega_1, \tau_1, \omega_2, \tau_2 \rangle \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$, и положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2 \rangle$. Тогда образ $\tilde{H}$ группы H в $\text{PSp}_{2n}(q)$ будет дополнением для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$. Если $n_1 = n_2$, то $C_W(w) \simeq ((\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Пусть ω – элемент, определенный в доказательстве

леммы 11; тогда $\omega \in \text{Sp}_{2n}(q)$, $\omega^2 = I$, $s_1^\omega = s_2$, $u_1^\omega = u_2$. Положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2, \omega \rangle$, $\tilde{H}$ – образ H в $\text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

Теперь рассмотрим случай $q \equiv 3 \pmod{4}$. Пусть $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, H – прообраз $\tilde{H}$ в N . Покажем, что в этом случае n_1, n_2 обязательно будут четными. Пусть s_1, u_1, s_2, u_2 – прообразы элементов $\omega_1, \tau_1, \omega_2, \tau_2$ в H . Тогда

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})\omega_1, & u_1 &= \text{bd}(B_1, B_2, -B_1^{-1}, B_2^{-1})\tau_1, \\ s_2 &= \text{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1})\omega_2, & u_2 &= \text{bd}(B'_1, B'_2, (B'_1)^{-1}, -(B'_2)^{-1})\tau_2, \end{aligned}$$

где $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}})$, $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$, $D'_2 = \text{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}})$, $B_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_1^q, \dots, \alpha_1^{q^{n_1-1}})$, $B_2 = \text{diag}(\beta_1, \beta_1^q, \dots, \beta_1^{q^{n_2-1}})$, $B'_1 = \text{diag}(\alpha_2, \alpha_2^q, \dots, \alpha_2^{q^{n_1-1}})$, $B'_2 = \text{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_2-1}})$.

Поскольку $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, то, в частности, должны выполняться равенства $u_1^2 = \varepsilon_1 I$, $u_2^2 = \varepsilon_2 I$, $s_1 u_2 = \varepsilon_3 u_2 s_1$, $s_2 u_1 = \varepsilon_4 u_1 s_2$. По лемме 7 из равенств $u_1^2 = \varepsilon_1 I$, $u_2^2 = \varepsilon_2 I$ получаем, что $\beta_1^2 = -1$, $\alpha_2^2 = -1$. Далее, из соотношения $s_1 u_2 = \varepsilon_3 u_2 s_1$, в частности, следуют равенства

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \varepsilon_3 \alpha_2^{q^{n_1-1}}, \\ \alpha_2^q &= \varepsilon_3 \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_2^{q^{n_1-1}} &= \varepsilon_3 \alpha_2^{q^{n_1-2}}. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon_3 = 1$, то $\alpha_2^{q-1} = \varepsilon_3 = 1$, и при этом $\alpha_2^2 = -1$, откуда $q \equiv 1 \pmod{4}$. Следовательно, $\varepsilon_3 = -1$ и $\alpha_2 = -\alpha_2^{q^{n_1-1}} = (-1)^2 \alpha_2^{q^{n_1-2}} = \dots = (-1)^{n_1} \alpha_2$, что возможно только при четном n_1 . Аналогично, из равенства $s_2 u_1 = \varepsilon_4 u_1 s_2$ следует, что $\varepsilon_4 = -1$ и $\beta_1 = (-1)^{n_2} \beta_1$. Таким образом, числа n_1, n_2 должны быть четными.

Далее считаем, что n_1, n_2 четны и $q \equiv 3 \pmod{4}$. Пусть элемент $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$; ξ_1, ξ_2 – первообразные корни из 1 степени $q^{n_1} - 1$, $q^{n_2} - 1$ соответственно, $\alpha_1 = \xi_1^{-1}$, $\lambda_1 = \xi_1^{\frac{q-1}{2}}$, $\beta_2 = \xi_2^{-1}$, $\mu_2 = \xi_2^{\frac{q-1}{2}}$. Тогда $\lambda^{q-1} = -1$, $\lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = -1$, $\mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda_1^2 \alpha_1^{q-1} = 1$, $\mu_2^2 \beta_2^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы:

$$s_1 = \text{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}, D_2^{-1})\omega_1, \quad s_2 = \text{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1})\omega_2,$$

где $D_2 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{cases} I_1, & \text{если } n_1 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1^q, \dots, \lambda_1^{q^{n_1-1}}), & \text{если } n_1 \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases} \\ D'_2 &= \begin{cases} I_2, & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}}), & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Матрицы D_1 и D'_2 выбраны таким образом, чтобы $s_1^{n_1}$ и $s_2^{n_2}$ получились скалярными. Действительно, если $n_1 \equiv 0 \pmod{4}$, то $\lambda^{n_1} = 1$, и по лемме 7 получаем $s_1^{n_1} = I$, а если $n_1 \equiv 2 \pmod{4}$, то $\lambda_1 \lambda_1^q \cdots \lambda_1^{q^{n_1-1}} = \lambda_1^{\frac{q^{n_1}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda^{n_1} = -1$, и по лемме 7 получаем $s_1^{n_1} = -I$. Аналогично, имеем $s_2^{n_2} = I$ при $n_2 \equiv 0 \pmod{4}$ и $s_2^{n_2} = -I$ при $n_2 \equiv 2 \pmod{4}$. Положим

$$u_1 = \text{bd}(B_1, B_2, -B_1^{-1}, B_2^{-1})\tau_1, \quad u_2 = \text{bd}(B'_1, B'_2, (B'_1)^{-1}, -(B'_2)^{-1})\tau_2,$$

где $B_2 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $B'_1 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$,

$$B_1 = \begin{cases} I_1, & \text{если } n_1 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\alpha_1, \alpha_1^q, \dots, \alpha_1^{q^{n_1-1}}), & \text{если } n_1 \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$B'_2 = \begin{cases} I_2, & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_2-1}}), & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Матрицы B_1 и B'_2 выбраны таким образом, чтобы $s_1 u_1 = u_1 s_1$ и $s_2 u_2 = u_2 s_2$. Действительно, пусть $D = \text{bd}(D_1, (D_1)^{-1})$, $B = \text{bd}(B_1, -(B_1)^{-1})$. Тогда равенство $s_1 u_1 = u_1 s_1$ равносильно равенству $D\omega_1 B\tau_1 = B\tau_1 D\omega_1$, откуда $DB\omega_1^{-1} = BD\tau_1$. В случае $n_1 \equiv 0 \pmod{4}$ последнее равенство тривиально. В случае $n_1 \equiv 2 \pmod{4}$ равенство $DB\omega_1^{-1} = BD\tau_1$ равносильно условию $\lambda_1 \alpha_1^q = \alpha_1 \lambda_1^{-1}$, которое выполнено в силу выбора элементов λ_1 и α_1 . Аналогично, в случае $n_2 \equiv 2 \pmod{4}$ равенство $s_2 u_2 = u_2 s_2$ равносильно условию $\mu_2 \beta_2^q = \beta_2 \mu_2^{-1}$, которое выполняется. Далее, непосредственно проверяются следующие равенства:

$$u_1^2 = u_2^2 = -I, \quad s_1 u_2 = -u_2 s_1, \quad s_2 u_1 = -u_1 s_2, \quad u_1 u_2 = -u_2 u_1, \quad s_1 s_2 = -s_2 s_1.$$

Если $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) \simeq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$, и положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2 \rangle$. Пусть $\tilde{H}$ – образ группы H в $\text{PSp}_{2n}(q)$; тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$. Если $n_1 = n_2$, то $W \simeq ((\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Пусть ω – элемент, определенный в доказательстве леммы 11; тогда $\omega \in \text{Sp}_{2n}(q)$, $\omega^2 = I$, $t_1^\omega = t_2$. Положим $H = \langle s_1, u_1, s_2, u_2, \omega \rangle$, $\tilde{H}$ – образ группы H в $\text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

ЛЕММА 13. Пусть T – максимальный тор в группе $G = \text{Sp}_{2n}(q)$, имеющий тип $(\overline{n_1})(n_2)$, и $\tilde{T}$ – образ тора T в $\tilde{G} = \text{PSp}_{2n}(q)$. Тогда тор $\tilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ в том и только в том случае, если n_1 нечетно, n_2 четно и $q \equiv 3 \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем необходимость. Пусть $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, H – прообраз $\tilde{H}$ в N . Пусть t_1, u_2 – прообразы элементов ϖ_1, τ_2 в H . Тогда

$$t_1 = \text{bd}(D_1, D_2, D_1^{-1}C_1, D_2^{-1})\varpi_1, \quad u_2 = \text{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, -(D'_2)^{-1})\tau_2,$$

где $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_1^q, \dots, \mu_1^{q^{n_2-1}})$, $\mu_1^{q^{n_2-1}} = 1$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2^q, \dots, \lambda_2^{q^{n_1-1}})$, $\lambda_2^{q^{n_1-1}} = 1$. Поскольку $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, то $t_1 u_2 = \varepsilon u_2 t_1$, $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$, $u_2^2 = \varepsilon_2 I$. Тогда из равенств $(t_1)^{2n_1} = \varepsilon_1 I$ и $t_2^2 = \varepsilon_2 I$ в силу

леммы 7 имеем $\mu_1^{2n_1} = -1$ и $\lambda_2^2 = -1$ соответственно. Случай $t_1 u_2 = u_2 t_1$ невозможен в силу утверждения 1) леммы 5, поэтому, применяя утверждение 2) леммы 5, получаем, что n_1 нечетно. Более того, если $n_1 > 1$, то в силу утверждения 2) леммы 5 имеем $\lambda_2^{q-1} = -1$, откуда $q \equiv 3 \pmod{4}$. Если $n_1 = 1$, то должно выполняться $\lambda_2^{q+1} = 1$, откуда $q \equiv 3 \pmod{4}$. Таким образом, в любом случае $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Пусть s_2 – прообраз элемента ω_2 в H . Тогда должно выполняться равенство $t_1 s_2 = \varepsilon_3 s_2 t_1$, откуда, в частности, $D_2^{\omega_2} = \varepsilon_3 D_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \varepsilon_3 \mu_1^{q^{n_2-1}}, \\ \mu_1^q &= \varepsilon_3 \mu_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \mu_1^{q^{n_2-1}} &= \varepsilon_3 \mu_1^{q^{n_2-2}}.\end{aligned}$$

Если $\varepsilon_3 = 1$, то $\mu_1^{q-1} = \varepsilon_3 = 1$, и при этом $\mu_1^2 = -1$, откуда $q \equiv 1 \pmod{4}$, что невозможно. Следовательно, $\varepsilon_3 = -1$ и $\mu_1 = -\mu_1^{q^{n_2-1}} = (-1)^2 \mu_1^{q^{n_2-2}} = \dots \dots = (-1)^{n_2} \mu_1$, откуда вытекает, что n_2 обязано быть четным. Необходимость доказана, покажем достаточность.

Далее считаем, что n_1 нечетно, n_2 четно и $q \equiv 3 \pmod{4}$. Пусть $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ такой, что $\lambda^2 = -1$; ξ_2 – первообразный корень из 1 степени $q^{n_2} - 1$, $\beta_2 = \xi_2^{-1}$, $\mu_2 = \xi_2^{\frac{q-1}{2}}$. Тогда $\lambda^{q-1} = -1$, $\mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\mu_2^2 \beta_2^{q-1} = 1$. Определим следующие элементы:

$$t_1 = \text{bd}(I_1, D_2, C_1, D_2^{-1})\varpi_1, \quad s_2 = \text{bd}(D'_1, D'_2, (D'_1)^{-1}, (D'_2)^{-1})\omega_2,$$

где $D_2 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda)$, $D'_1 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda)$,

$$D'_2 = \begin{cases} I_2, & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\mu_2, \mu_2^q, \dots, \mu_2^{q^{n_2-1}}), & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Матрица D'_2 выбрана таким образом, чтобы матрица $s_2^{n_2}$ получилась скалярной. Действительно, если $n_2 \equiv 0 \pmod{4}$, то $\lambda^{n_2} = 1$, и по лемме 7 получаем $s_2^{n_2} = I$, а если $n_2 \equiv 2 \pmod{4}$, то $\mu_2 \mu_2^q \dots \mu_2^{q^{n_2-1}} = \mu_2^{\frac{q^{n_2}-1}{q-1}} = -1$, $\lambda^{n_1} = -1$, и по лемме 7 получаем $s_1^{n_1} = -I$. Наконец, определим элемент

$$u_2 = \text{bd}(B_1, B_2, (B_1)^{-1}, -(B_2)^{-1})\tau_2,$$

где

$$B_1 = \text{diag}(\lambda, -\lambda, \dots, \lambda, -\lambda, \lambda),$$

$$B_2 = \begin{cases} I_2, & \text{если } n_2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \text{diag}(\beta_2, \beta_2^q, \dots, \beta_2^{q^{n_1-1}}), & \text{если } n_2 \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Матрица B_2 выбрана таким образом, чтобы $s_2 u_2 = u_2 s_2$. Действительно, пусть $D = \text{bd}(D'_2, (D'_2)^{-1})$, $B = \text{bd}(B_2, -(B_2)^{-1})$. Тогда равенство $s_2 u_2 = u_2 s_2$ равносильно равенству $D \omega_2 B \tau_2 = B \tau_2 D \omega_2$, откуда $DB^{\omega_2^{-1}} = BD^{\tau_2}$. В случае

$n_2 \equiv 0 \pmod{4}$ последнее равенство тривиально. В случае $n_2 \equiv 2 \pmod{4}$ равенство $DB^{\omega_2^{-1}} = BD^{\tau_2}$ равносильно условию $\mu_2\beta_2^q = \beta_2\mu_2^{-1}$, которое выполнено в силу выбора элементов μ_2 и β_2 . Далее, непосредственно проверяются следующие равенства:

$$t_1^{2n_1} = u_2^2 = -I, \quad t_1u_2 = -u_2t_1, \quad t_1s_2 = -s_2t_1.$$

Поскольку $n_1 \neq n_2$, то $C_W(w) \simeq \mathbb{Z}_{2n_1} \times (\mathbb{Z}_{n_2} \times \mathbb{Z}_2)$. Положим $H = \langle t_1, s_2, u_2 \rangle$, $\tilde{H}$ – образ группы H в $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$. Тогда $\tilde{H}$ – дополнение для $\tilde{T}$ в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$.

В леммах 8–13 и замечании 2 рассмотрены все типы максимальных торов в группе $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$, откуда следует теорема 2. Следствие 2 вытекает из замечания 2 и утверждения 1) леммы 8.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Бутурлакину и Е. П. Вдовину за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

1. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
2. D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, “The classification of the finite simple groups”, Part I, Chapter A, *Almost simple K-groups*, Math. Surveys Monogr., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
3. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters*, Pure Appl. Math. (N. Y.), Wiley, New York, 1985.
4. А. А. Бутурлакин, М. А. Гречкосеева, “Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах”, *Алгебра и логика*, **46:2** (2007), 129–156; англ. пер.: А. А. Buturlakin, М. А. Grechkoseeva, “The cyclic structure of maximal tori of the finite classical groups”, *Algebra and Logic*, **46:2** (2007), 73–89.

АЛЕКСЕЙ АЛЬБЕРТОВИЧ ГАЛЬТ
(ALEKSEI A. GALT)
University of Science and Technology of China,
Anhui, Hefei
E-mail: galt84@gmail.com

Поступило в редакцию
08.02.2013
21.06.2013