Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Локуцкий, Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 167–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:09:05

УДК 517.97

Л. В. Локуцкий

Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника

Исследуются гамильтоновы системы, аффинные по многомерному управлению, меняющемуся в некотором многограннике Ω . Достаточно часто ключевую роль при изучении глобального поведения решений таких систем играют особые траектории и геометрия их окрестностей. Доказана теорема о структуре выхода оптимальных траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и схода с нее) для систем с голономным управлением. Доказано, что лагранжева поверхность в окрестности особой траектории первого порядка специальным образом соткана из траекторий системы, особых по граням многогранника Ω . Предложен простой метод явного отыскания особых траекторий первого порядка по граням многогранника Ω . В результате описывается полная картина оптимального синтеза, полученная последовательным сопряжением особых экстремалей первого порядка.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: оптимальное управление, особые траектории, многомерное управление, оптимальный синтез.

DOI: 10.4213/im8107

§ 1. Введение

При изучении топологии решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений ключевую роль играют неподвижные (особые) точки и периодические траектории. Поведение траекторий системы в окрестности особых точек и циклов является определяющим при исследовании глобальной структуры решений. Аналогичным образом в задачах оптимального управления при построении оптимального синтеза особые траектории и геометрия их окрестностей зачастую определяют структуру всего синтеза. Наиболее хорошо изученный случай – это аффинные по управлению гамильтоновы системы принципа максимума Понтрягина (ПМП) с одномерным управлением

$$\mathcal{H}(q, p, u) = H(q, p) + G(q, p)u, \quad u \in [\alpha, \beta].$$

Согласно принципу максимума Понтрягина $u = \alpha$, если $G < 0$, и $u = \beta$, если $G > 0$. Если же на оптимальной траектории $G \equiv 0$ на некотором промежутке времени, то управление не может быть найдено из принципа максимума. Такая траектория называется *особой*, и управление на ней часто может быть найдено из условий $\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0$. По теореме Келли–Коппа–Моейра

(см. [1]) управление на особой траектории в явном виде в первый раз может возникнуть только в производной G четного порядка $2h$. В этом случае управление однозначно выражается из условия $G^{(2h)} = 0$. Число h принято называть *порядком* особой траектории.

Особые траектории первого порядка часто встречаются в задачах математической экономики. Например, хорошо известна теорема о магистрали (см. [2]). Особые траектории второго порядка естественным образом возникают в управляемых механических системах (см. [3]) – робототехнике, астронавтике и т. д. Это связано с тем, что в качестве управления в таких задачах выступает вторая производная фазовых координат (сила). Определение порядка особой экстремали для задач с многомерным управлением приводит к так называемому флагу порядков (подробнее см. [4]).

В настоящей работе изучаются особые траектории первого порядка в управляемых гамильтоновых системах с многомерным управлением. На управление наложен ряд аффинных ограничений, т. е. $u \in \Omega$, где Ω – многогранник. В работе предлагается новый метод изучения особых траекторий. Для участвующих в системе гамильтонианов H и G и их скобок Пуассона выписывается система дифференциальных уравнений специального вида. Оказывается, что с помощью некоторого раздувающего отображения в этой системе можно выделить набор главных переменных, определяющих поведение всей системы в целом. В системах с голономным управлением¹ структура системы относительно главных переменных совпадает с оптимальным синтезом одной выпуклой модельной задачи оптимального управления. Это позволяет применить мощную технику выпуклого анализа для построения синтеза в окрестности особой траектории.

Для нелинейных систем с голономным управлением доказана теорема об эквивалентности синтеза в окрестности особой траектории первого порядка и синтеза в модельной задаче оптимального управления. Структура оптимальных траекторий в модельной задаче полностью построена в многомерном случае для “не слишком скошенных” компактных многогранников (подробнее см. теоремы 3, 4). Построен метод аналитического отыскания особых траекторий для заданной грани многогранника.

В § 2, 3 даются основные определения. В § 4 показано, что в ситуации общего положения особые траектории по граням размерности не менее 2 не оптимальны. Начиная с § 5 исследуется класс задач с голономным управлением, в которых (в отличие от общего случая) возникают особые траектории по граням всех возможных размерностей.

§ 2. Особые по граням траектории

Пусть на многомерное управление u наложен ряд линейных ограничений типа равенств и неравенств, т. е. u меняется в некотором многограннике Ω из

¹Аффинная по управлению система имеет голономное управление, если, грубо говоря, поле плоскостей, отвечающих многограннику Ω , интегрируемо (точнее см. определение 5).

аффинного пространства U с отмеченной точкой. Без ограничения общности можно считать, что $\dim U = \dim \Omega$. На симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ задана управляемая гамильтонова система ПМП

$$\mathcal{H}(x, u) = H(x) + \langle G(x), u \rangle. \quad (1)$$

Здесь $x = (q, p) \in \mathcal{M}$, а $H: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G: \mathcal{M} \rightarrow U^*$ – достаточно гладкие функции ², а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает действие ковектора на векторе. Оптимальное управление $\hat{u}$ выбирается согласно принципу максимуму Понтрягина

$$\langle G, \hat{u} \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle G, v \rangle. \quad (2)$$

Очевидная геометрическая интерпретация ПМП заключается в том, что $\hat{u}$ лежит в опорной гиперплоскости $\langle G, v \rangle = \text{const}$ к многограннику Ω (если $G \neq 0$). Пересечение опорной гиперплоскости с Ω может быть либо вершиной, либо гранью большей размерности.

Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$, $u(t)$ системы (1), (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если для почти всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (2) достигается ровно в одной вершине (возможно, в разных при различных t), то траекторию $x(t)$, $u(t)$ будем называть *неособой* на (t_1, t_2) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Зафиксируем грань Γ многогранника Ω . Если при всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (2) достигается одновременно на всех точках Γ и только в них, то такую траекторию будем называть *особой по грани* Γ .

Определение 2 особой траектории по всему многограннику Ω совпадает с классическим определением особой траектории: $G(x(t)) = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В настоящей работе изучаются окрестности особых экстремалей. Если траектория $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ является особой по грани Γ на промежутке (t_1, t_2) , то для любой точки x , близкой к $\hat{x}(t)$, максимум в (2) может достигаться только на точках некоторой подграни $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Поэтому при изучении окрестности особой экстремали (в том числе ее самой) можно редуцировать задачу и считать, что $\Omega = \Gamma$, а траектория является особой по всему многограннику.

В работе доказана теорема о выходе на особую траекторию первого порядка по всему многограннику в голономном случае (см. определение 5). А именно, пусть

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_k$$

– некоторый набор последовательно вложенных граней ³. Тогда существует траектория, выходящая на особую по всему многограннику следующим образом: сначала используется управление, особое по Γ_1 , потом оно скачком переключается на особое управление по Γ_2 и так далее, пока не переключится на особое управление по всему многограннику (см. теорему 4). Подобное поведение оптимальных траекторий в широком классе задач впервые было получено

²Например, бесконечно гладкие.

³Возможно, Γ_1 – точка.

для случая, когда Ω – тетраэдр, в работах М. И. Зеликина, Л. Ф. Зеликиной и К. В. Хлюстова (см., например, [5]).

§ 3. Аналитические формулы особых траекторий

Согласно замечанию 1 для отыскания особых экстремалей по граням достаточно построить алгоритм отыскания особой экстремали по всему многограннику.

Итак, пусть $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ – траектория, особая по всему многограннику Ω , т. е.

$$G|_{\hat{x}(t)} = 0 \quad (3)$$

при $t \in (t_1, t_2)$, и управление не может быть найдено однозначно из ПМП. Однако из определения 2 немедленно следует, что

$$\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0.$$

Здесь и далее производная берется вдоль траекторий системы (1). Производная может быть вычислена стандартным образом через скобки Пуассона. Однако необходимо действовать аккуратно: например $\{G, G\}$, вообще говоря, нулю не равно, так как $G(x)$ является векторнозначной функцией. Приведем строгое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $F: \mathcal{M} \rightarrow T_m^n(U)$ и $K: \mathcal{M} \rightarrow T_l^k(U)$ – две тензорнозначные функции. Тогда их *скобкой Пуассона* называется тензорнозначная функция $R: \mathcal{M} \rightarrow T_{m+l}^{n+k}$, определяемая формулой ⁴

$$R_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} = \{F_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, K_{\delta_1 \dots \delta_l}^{\gamma_1 \dots \gamma_k}\}.$$

Прямое вычисление показывает, что определение 3 корректно, т. е. G действительно является тензором типа $(n+k, m+l)$. Это определение позволяет производить вычисления в бескоординатной форме (например, оно используется для нахождения первых интегралов в гамильтоновых системах классической механики; см. [6, доб. 5]).

Линейность скобки Пуассона для функций влечет линейность тензорной скобки Пуассона. Кососимметричность и тождество Якоби записываются в виде

$$\begin{aligned} \{F, K\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} + \{K, F\}_{\delta_1 \dots \delta_l \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \alpha_1 \dots \alpha_n} &= 0, \\ \{G, \{F, K\}\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s} + \{F, \{K, G\}\}_{\delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n} \\ + \{K, \{G, F\}\}_{\zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{G, G\}$ является кососимметрической билинейной формой над U . Найдем производную G вдоль системы (1). По правилу Лейбница получаем

$$\left(\frac{d}{dt}G\right)_\alpha = \{H, (G)_\alpha\} + \{(G)_\beta, (G)_\alpha\}\hat{u}^\beta + (G)_\beta \dot{\hat{u}}^\beta.$$

⁴Справа в равенстве стоит классическая скоба Пуассона для функций.

Здесь $\hat{u} = \hat{u}(t)$ – управление на особой траектории. Поскольку $G|_{\hat{x}(t)} = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$, то

$$\frac{d}{dt}G = \{H, G\} + \{G, G\}\hat{u}. \quad (4)$$

По теореме Гоха–Кренера (см. [7]) билинейная форма $\{G, G\}$ должна быть равна нулю в точках особой траектории:

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \quad (5)$$

и, следовательно,

$$\{H, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0. \quad (6)$$

Далее, аналогичным образом

$$\frac{d}{dt}\{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}\hat{u} = 0. \quad (7)$$

Теперь управление $\hat{u}$ может быть найдено, если:

(i) билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}$ невырождена в $\hat{x}(t)$; в этом случае особое управление $\hat{u}$ непрерывно и однозначно находится: $\hat{u}(t) = O_\Omega(\hat{x}(t))$, где

$$O_\Omega(x) = -(\{G, \{H, G\}\}|_x)^{-1}\{H, \{H, G\}\}|_x,$$

функция $O_\Omega(x)$ определена только в таких точках x , для которых выполняются условия (3), (5) и (6);

(ii) найденное особое управление $\hat{u}(t)$ лежит во внутренности Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Особая по Ω траектория $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ имеет первый порядок, если она удовлетворяет условиям (i), (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема Гоха–Кренера требует также симметричности и неотрицательной определенности формы $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ (подробнее см. лемму 3).

Воспользуемся замечанием 1, чтобы найти особую траекторию по некоторой грани Γ . Пусть Γ' – линейное подпространство в U , параллельное $\text{Aff } \Gamma$; $\Gamma^\perp$ – аннулятор Γ' в U^* .

Зафиксируем произвольное $u^0 \in \Gamma$ и положим $u = u^0 + v$, где $v \in \Gamma'$. Тогда

$$\mathcal{H} = (H + \langle G, u^0 \rangle) + \langle G, v \rangle = H^\Gamma + \langle G^\Gamma, v \rangle,$$

где $H^\Gamma(x) = H(x) + \langle G(x), u^0 \rangle$ и $G^\Gamma(x) = G(x)|_{\Gamma'}$ определены для таких $x \in \mathcal{M}$, что $\arg \max_{u \in \Omega} \langle G, u \rangle \subseteq \Gamma$. Подставляя H^Γ и G^Γ в условия (3)–(7), получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ является особой траекторией первого порядка по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда ($x = \hat{x}(t)$):

(i) условие (3) преобразуется в

$$G|_{\hat{x}(t)} \in \Gamma^\perp \quad \text{при } t \in (t_1, t_2);$$

(ii) условие (6) преобразуется в

$$\{H^\Gamma, G\}|_{\hat{x}(t)} = \{H, G\}|_{\hat{x}(t)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t)} u^0 \in \Gamma^\perp;$$

(iii) условие (5) из теоремы Гоха–Кренера означает, что

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} \Gamma' \subseteq \Gamma^\perp \quad \text{при } t \in (t_1, t_2).$$

Особое управление по грани Γ находится из формулы $\hat{u}_\Gamma(t) = O_\Gamma(\hat{x}(t))$, где⁵

$$O_\Gamma(x) = u^0 - (\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)})^{-1} \{H^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)},$$

если форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)}$ невырождена на Γ' , $\hat{u}(t) \in \Gamma$ и $\langle G, v \rangle$ достигает на Γ максимума по Ω (а не минимума).

Для экстремалей первого порядка при стыковке особых траекторий по разным граням характерно регулярное поведение управления, т. е. управление терпит разрыв первого рода в точке стыковки⁶. Рассмотрим экстремаль $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, которая является особой по грани Γ_0 при $t \in (t_0, t_1)$ и особой по грани Γ_1 при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда в точке стыковки $x^0 = x(t_1)$ должны быть выполнены условия (i), (ii) и (iii) из леммы 1 для граней Γ_1 и Γ_2 .

Отметим, что в точке стыковки x^0 функция $\langle G(x^0), v \rangle$ достигает максимума одновременно в точках $v \in \Gamma_1$ и точках $v \in \Gamma_2$. Поэтому условие (i) должно быть выполнено в усиленной форме:

$$G|_{x^0} \in (\text{conv}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1))^\perp, \quad (8)$$

где $\text{conv}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ – минимальная грань, содержащая Γ_1 и Γ_2 .

§ 4. Поверхности особых экстремалей

Условия (i) и (ii) из леммы 1 определяют в $\mathcal{M}$ некоторую поверхность $\mathcal{M}_\Gamma$, внутри которой должны лежать все особые траектории первого порядка по грани Γ . Необходимое условие Гоха–Кренера – условие (iii) из леммы 1 – определяет в $\mathcal{M}_\Gamma$ поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^0 \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$. Особые траектории также не должны покидать и поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^0$ по теореме Гоха–Кренера.

С другой стороны, особое управление u_Γ фактически выбирается только в точках из $\mathcal{M}_\Gamma^0$ в силу того условия, что траектория гамильтоновой системы (1), (2) не покидает $\mathcal{M}_\Gamma$. Другими словами, векторное поле, отвечающее гамильтониану $\mathcal{H}(x, \hat{u}_\Gamma)$, должно быть касательным к $\mathcal{M}_\Gamma$ в точках из $\mathcal{M}_\Gamma^0$. В ситуации общего положения такое управление может быть выбрано единственным образом, что определяет на $\mathcal{M}_\Gamma^0$ единственно возможное векторное поле ξ_Γ управляемой системы (1), (2), касательное к $\mathcal{M}_\Gamma$.

⁵Нетрудно увидеть, что определение $O_\Gamma(x)$ не зависит от выбора $u_0 \in \Gamma$.

⁶Для особых экстремалей второго порядка (или, вообще, любого четного порядка) регулярная стыковка невозможна. Ее запрещает обобщенное условие Лежандра–Клебша (см. [8], [4]).

Рис. 1. Структура поверхностей M_Γ^i

С другой стороны, условие (iii) – теорема Гоха–Кренера – налагает дополнительные требования типа равенств. Форма $\{G, G\}|_{\Gamma'}$ в случае общего положения имеет ранг $\dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Значит, если $\dim \Gamma \neq 0, 1$, то M_Γ^0 имеет ненулевую коразмерность в M^Γ , $\text{codim}_{M^\Gamma} M_\Gamma^0 = \dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Поэтому в ситуации общего положения поле ξ_Γ не будет касаться M_Γ^0 , следовательно, траектории системы (1), (2) будут протыкать M_Γ^0 и необходимое условие оптимальности будет нарушено (рис. 1). Конечно, в M_Γ^0 в ситуации общего положения найдется поверхность M_Γ^1 той же коразмерности, в точках которой поле ξ_Γ будет касательным к M_Γ^0 . Однако ξ_Γ не будет касательным к M_Γ^1 , и траектории покинут M_Γ^1 , а значит, и M_Γ^0 . Исключение составят точки из гиперповерхности M_Γ^2 в M_Γ^1 , в которых поле ξ_Γ касается M_Γ^1 . Продолжая этот процесс, получим, что, вообще говоря, траектории поля ξ_Γ не будут лежать в M_Γ^0 в ситуации общего положения. Поэтому в общем случае особые траектории по граням размерности больше 1 не оптимальны.

Поскольку оптимизационные задачи моделируют процессы, возникающие в реальной жизни, практический интерес представляют только те оптимальные траектории, которые не разрушаются при малом шевелении самой задачи, т.е. неособые траектории и траектории, особые по ребру.

Естественный класс систем – это системы, в которых $M_\Gamma^0 = M_\Gamma^1$, что имеет место в важном частном случае, когда гамильтонова система (1), (2) получена из оптимизационной задачи управления голономной системой. В следующем параграфе мы покажем, что в этом случае необходимое условие Гоха–Кренера (iii) будет выполнено автоматически на особых траекториях.

§ 5. Голономный случай

Все утверждения и определения в настоящем параграфе носят исключительно локальный характер, однако они будут сформулированы в глобальной форме для упрощения записи.

Рассмотрим следующую оптимизационную управляемую динамическую систему на многообразии M :

$$\dot{q} = a(q) + B(q)u. \quad (9)$$

Здесь $q \in M$, $a(q) \in T_q M$ и $B(q) \in \text{Hom}(U, T_q M)$ гладко зависят от $q \in M$. Будем считать, что $\dim M \geq \dim U = \dim \Omega$. Целевой функционал имеет терминальный тип и не влияет на гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Управление в системе (9) голономно по грани Γ , если отображение $B(q)|_{\Gamma'}$ невырождено и поле плоскостей $B(q)\Gamma' \subseteq T_q M$ является интегрируемым.

Голономность управления по какой-либо грани Γ , вообще говоря, не влечет голономность по подгранице $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Отметим, что поскольку определенное выше условие голономности никак не зависит от поля $a(q)$, то система (9) может одновременно иметь голономное управление по Ω и быть вполне управляемой.

ТЕОРЕМА 1. Если управление в системе (9) голономно по грани Γ , то поверхности M_Γ и M_Γ^0 совпадают.

Другими словами, необходимое условие Гоха–Кренера (условие (iii) из леммы 1) выполнено автоматически на любой особой траектории, если система (9) голономна по соответствующей грани.

ЛЕММА 2. Если управление в системе (9) голономно по Ω , то существует функция $\varepsilon: M \rightarrow \text{Lin}(U^*, \Lambda^2(U))$ такая, что $\{G, G\}(q, p) = \varepsilon(q)G(q, p)$ для всех $(q, p) \in T^*M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина для управляемой системы (9):

$$\mathcal{H} = \langle p, B(q)u + a(q) \rangle = \langle p, a(q) \rangle + \langle B^t(q)p, u \rangle,$$

где p – сопряженные к q переменные. Таким образом, $H(q, p) = \langle p, a(q) \rangle$ и $G(q, p) = B^t(q)p$. Если u_i – базис U , то $G_i(q, p) = \langle p, B(q)u_i \rangle$ и

$$\{G_i, G_j\} = \{\langle p, B(q)u_i \rangle, \langle p, B(q)u_j \rangle\} = \langle p, [B(q)u_i, B(q)u_j] \rangle.$$

Поскольку поле плоскостей $B(q)U$ интегрируемо, по теореме Фробениуса (см. [9, п. 5.6]) имеем $[B(q)u_i, B(q)u_j] \in B(q)U$. Другими словами, должен существовать набор гладких функций $\varepsilon_{ij}^k: M \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$[B(q)u_i, B(q)u_j] = \varepsilon_{ij}^k(q)B(q)u_k.$$

Значит, $\{G_i, G_j\}(q, p) = \varepsilon_{ij}^k(q)G_k(q, p)$. Очевидно, $\varepsilon_{ij}^k(q) \in \text{Lin}(U^*, \Lambda^2(U))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем теорему для случая $\Gamma = \Omega$ (см. замечание 1). Из леммы 2 следует, что если $G = 0$, то и $\{G, G\} = \varepsilon G = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, в системах с голономным управлением траектории, особые по граням, возникают в ситуации общего положения. Точнее, имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В системах общего положения вида (9), голономных по грани Γ , множество всех особых по Γ траекторий первого порядка является подмногообразием в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ коразмерности $2 \dim \Gamma$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *В системах с голономным управлением по грани Γ форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$ является симметрической в точках траектории, особой по Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для случая $\Gamma = \Omega$. Докажем, что форма $\{H, \{G, G\}\}$ обнуляется в точках особой траектории. Этого будет достаточно ввиду тождества Якоби

$$\{G_i, \{H, G_j\}\} - \{G_j, \{H, G_i\}\} = \{H, \{G_i, G_j\}\}.$$

Итак, по лемме 2 и правилу Лейбница получаем

$$\{H, \{G_i, G_j\}\} = \{H, \varepsilon_{ij}^k G_k\} = \{H, \varepsilon_{ij}^k\} G_k + \{H, G_k\} \varepsilon_{ij}^k.$$

Последние два слагаемых равны нулю, так как на особой траектории имеем $G = \{H, G\} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Любая управляемая система (9) голономна по любому ребру многогранника Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если система голономна по грани Γ , то из леммы 1 можно исключить условие (iii), так как оно является следствием условия (i).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для системы с голономным по Γ управлением функция $O_\Gamma(x)$ корректно определена во всех точках поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$, в которых форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$ невырождена.*

Естественный класс систем – это системы, голономные по любой грани многогранника Ω , что имеет место, если, например, векторные поля $B(x)u$ коммутируют, когда u пробегает базисные векторы пространства U (или, скажем, вершины Ω).

§ 6. Сведение к модельной задаче

В этом параграфе будут описаны системы дифференциальных уравнений специального вида для скобок Пуассона, позволяющие (с помощью некоторого раздувающего отображения) свести изучение окрестности особой экстремали к оптимальному синтезу в одной модельной задаче оптимального управления.

Рассмотрим управляемую гамильтонову систему (1), (2), голономную по любой грани многогранника Ω . Пусть $x^0 \in \mathcal{M}$ – некоторая точка особой траектории $\hat{x}(t)$ первого порядка по всему многограннику Ω , $x^0 = \hat{x}(0)$. Будем предполагать, что особое управление $\hat{u}(t)$ непрерывно в x_0 . Итак, $G|_{x_0} = \{H, G\}|_{x_0} = 0$, следовательно, $\{G, G\}|_{x_0} = 0$.

Предположим, что набор дифференциалов функций $(G)_i$ и $\{H, G\}_j$ имеет максимальный ранг в x_0 :

$$\text{rk}(dG_i, d\{H, G_j\}) = 2 \dim \Omega.$$

Введем локальную систему координат в окрестности точки x_0 . Положим $z_1 = G$ и $z_2 = \{H, G\}$, $z = (z_1, z_2)$, и дополним до полной системы переменной w , так что $w(x_0) = 0$. Тогда гамильтонова система (1), (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \langle z_1, u \rangle &\rightarrow \max_{u \in \Omega}, \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \varepsilon z_1 u, \quad \dot{z}_2 = \alpha(z, w) + \beta(z, w)u, \\ \dot{w} &= R(z, w) + S(z, w)u. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $z_1, z_2, \alpha \in U^*$ и $\beta \in T_2(U)$ – билинейная форма:

$$\alpha = \{H, \{H, G\}\}, \quad \beta = \{G, \{H, G\}\}, \quad \varepsilon z_1 = \varepsilon G = \{G, G\}.$$

ЛЕММА 3. *Билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0} = \beta(0, 0)$ является симметрической, положительно определенной:*

$$\beta(0, 0) \succ 0, \quad \beta(0, 0)[u, v] = \beta(0, 0)[v, u] \quad \forall u, v \in U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность была доказана в следствии 2. Покажем, что положительная определенность следует из теоремы Гоха–Кренера. Согласно теореме Гоха–Кренера форма $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}|_{x_0}$ должна быть неотрицательно определенной. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H} &= \{G_k, \{H, G_l\}\} + \{H, \{G_k, G_l\}\} \\ &\quad + \{G_k, \{G_i, G_l\}\} \hat{u}^i + \{G_i, \{G_k, G_l\}\} \hat{u}^i. \end{aligned}$$

Покажем, что в случае голономного управления три последних слагаемых обнуляются. Воспользуемся тем, что особая траектория лежит на $\mathcal{M}_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma^0$:

$$0 = \frac{d}{dt} \{G_k, G_l\} = \{H, \{G_k, G_l\}\} + \{G_i, \{G_k, G_l\}\} \hat{u}^i.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u^l} \mathcal{H}|_{x_0} = \{G_k, \{H, G_l\}\}|_{x_0} + \{G_k, \{G_i, G_l\}\}|_{x_0} \hat{u}^i(0).$$

Для голономной по управлению системы из леммы 2 имеем

$$\{G_k, \{G_i, G_l\}\} = \{G_k, \varepsilon_{il}^j G_j\} = \{G_k, G_j\} \varepsilon_{il}^j + \{G_k, \varepsilon_{il}^j\} G_j = 0.$$

Поэтому в $x_0 \in \mathcal{M}_\Gamma$ немедленно получаем неотрицательную определенность формы $\beta(0, 0)$. Ее невырожденность следует из того, что исследуемая траектория $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ имеет первый порядок. Лемма доказана.

Естественно использовать форму $\{G_k, \{H, G_l\}\}|_{x_0} = \beta(0, 0)$ в качестве скалярного произведения на U . Это задаст отождествление U и U^* , а форма $\beta(0, 0)$ запишется как единичная матрица в любом ортонормированном базисе. Взяв $-\beta^{-1}(0, 0)\alpha(0, 0)$ за начало координат в аффинном пространстве U , мы можем считать, что $\alpha(0, 0) = 0$. В новых координатах на U особое управление в точке x_0 – это $\hat{u} = 0$.

Оказывается, что поведение переменных z_1 и z_2 в окрестности особой точки x_0 определяет поведение всей системы в целом. Чтобы показать это, воспользуемся процедурой раздутия особенности: пусть

$$\lambda = \sqrt{|z_1| + \frac{1}{2}|z_2|^2}, \quad z_1 = \lambda^2 \zeta_1, \quad z_2 = \lambda \zeta_2, \quad w = \lambda \omega,$$

т.е. переменные z_2 и w имеют первый порядок по раздувающей переменной λ , а z_1 – второй⁷. Переменные $\lambda, \zeta_1, \zeta_2, \omega$ лежат на цилиндре $|\zeta_1| + \frac{1}{2}|\zeta_2|^2 = 1$. Точка x_0 раздувается на сечение $\mathcal{N}$ данного цилиндра гиперплоскостью $\lambda = 0$. В новых координатах система (10) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 + \lambda \varepsilon \zeta_1 \rangle}{|\zeta_1|} + \langle \zeta_2, \alpha + \beta u \rangle \right) = \phi(\lambda, \zeta_1, \zeta_2, \omega), \\ \dot{\zeta}_1 &= \frac{1}{\lambda} (\zeta_2 - 2\phi \zeta_1 + \lambda \varepsilon \zeta_1), \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{1}{\lambda} (\alpha + \beta u - \phi \zeta_2), \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{\lambda} (F + Gu - \phi \omega), \\ \langle \zeta_1, u \rangle &\rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{aligned} \tag{11}$$

Векторное поле $\xi = (\dot{\lambda}, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\omega})$ не продолжается на сечение $\mathcal{N}$ гиперплоскостью $\lambda = 0$ ввиду наличия особенности типа $\frac{1}{\lambda}$ по каждой координате ζ_1, ζ_2 и ω . Однако интегральные кривые все же могут быть перенесены на сечение $\mathcal{N}$, поскольку траектории векторных полей ξ и $\lambda \xi$ совпадают. Различаются лишь скорости движения по этим траекториям. Поле $\lambda \xi$ может быть продолжено на гиперплоскость $\lambda = 0$. Итак, на $\mathcal{N}$ траектории поля $\lambda \xi$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= 0, \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 - 2\varphi_0 \zeta_1, \quad \dot{\zeta}_2 = u - \varphi_0 \zeta_2, \\ \dot{\omega} &= F(0, 0) + G(0, 0)u - \varphi_0 \omega, \\ \langle \zeta_1, u \rangle &\rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\varphi_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle}{|\zeta_1|} + \langle \zeta_2, u \rangle \right)$. Полученная система (12) фактически описывает поведение исходной системы (10) в бесконечно малой окрестности точки x_0 . Она обладает следующими важными свойствами:

⁷Переменные z_1, z_2 и w должны иметь именно такие порядки относительно раздувающего отображения, чтобы векторное поле системы (10) в новых координатах имело особенность одинакового типа по всем переменным при приближении к гиперплоскости $\lambda = 0$.

1) система (12) зависит лишь от значений $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$ и не зависит от поведения функций F и G в окрестности точки x_0 , поэтому системы (12) получатся одинаковыми во всех задачах с данными значениями $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$;

2) так как переменная ω не входит в правую часть системы (12), достаточно ограничиться изучением поведения главных переменных ζ_1 и ζ_2 (которое не зависит от $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$), а переменная ω однозначно найдется из линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами $\dot{\omega} = a(t)\omega + b(t)$, где $a(t) = \varphi_0(\zeta_1(t), \zeta_2(t), u(t))$ и $b(t) = F(0, 0) + G(0, 0)u(t)$.

В следующем параграфе приведена задача оптимального управления, уравнения ПМП в которой полностью совпадают с главной частью (ζ_1, ζ_2) системы (12). Оптимальный синтез в этой задаче будет построен для не “слишком скошенных” компактных многогранников. Далее, в § 8, доказывается теорема о структуре выхода траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и сходя с нее) для систем с голономным управлением.

§ 7. Модельная задача оптимального управления

Рассмотрим следующую задачу:

$$J(q) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle q(t), q(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad (13)$$

$$\dot{q} = u; \quad u \in U \subset U, \quad q(0) = q_0.$$

Здесь q и u лежат в евклидовом пространстве $U \simeq \mathbb{R}^n$, а 0 является внутренней точкой⁸ многогранника Ω . Пусть p – сопряженная к q переменная из ПМП; тогда

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda_0}{2} \langle q, q \rangle + \langle p, u \rangle,$$

т. е. $\dot{p} = \lambda_0 q$. Если $\lambda_0 = 0$, то p постоянно, и мы немедленно приходим к противоречию с конечностью интеграла (13). Полагая $\lambda_0 = 1$, получаем $H = -\frac{1}{2} \langle q, q \rangle$, $G = p$ и задачу

$$\begin{aligned} \dot{p} = q &\iff \dot{z}_1 = z_2, & \dot{q} = u &\iff \dot{z}_2 = u, \\ \langle z_1, u \rangle &= \langle p, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{aligned} \quad (14)$$

В задаче (14) существует только одна особая по всему многограннику траектория: $q \equiv p \equiv u \equiv 0$. Она имеет первый порядок. Поведение оптимальных траекторий в окрестности начала координат является типичным, потому что раздутье данной системы приводит к тем же уравнениям (12) с $\omega = 0$, что и раздутье общей системы (10). Поэтому оптимальные траектории задачи (13) являются модельными для системы (10).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что Ω – выпуклое компактное множество (возможно, не многогранник) и $0 \in \text{Int } \Omega$. Тогда для любой начальной точки q_0 :*

⁸Это условие необходимо для локальной управляемости.

- (i) существует и единственна оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (13), сопряженная функция $\hat{p}(t, q_0)$ также единственна;
- (ii) найдется такой момент времени $T(q_0) \geq 0$, что $\hat{q}(t, q_0) = 0$ и $\hat{p}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$;
- (iii) отображение $q_0 \mapsto \hat{p}(0, q_0)$ является локально липшицевым и биективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на несколько лемм.

ЛЕММА 4. Для любого q_0 оптимальное решение $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (13) существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждому измеримому управлению $u(t) \in \Omega$ соответствует единственная траектория $q(t)$ с начальными условиями $q(0) = q_0$, мы можем рассматривать J как функционал на пространстве управлений $L_\infty(0, +\infty)$. Множество всех допустимых управлений $\mathbb{U}$ ограничено и замкнуто в $L_\infty(0, +\infty)$ в силу ограниченности и замкнутости многогранника Ω . Следовательно, по теореме Банаха–Алаоглу из ограниченности Ω следует, что множество $\mathbb{U}$ слабо* компактно ($L_\infty(0, +\infty) = L_1^*(0, +\infty)$). Покажем, что функционал J полунепрерывен снизу относительно слабой* топологии.

Рассмотрим оператор $K: L_\infty(0, +\infty) \rightarrow AC[0, +\infty)$ следующего вида:

$$(Ku)(t) = q_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Оператор K переводит управление $u(t)$ в соответствующее решение $q(t)$. Таким образом, необходимо доказать, что для любой последовательности управлений $u_n \xrightarrow{w} \hat{u}$ выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \langle (Ku_n)(t), (Ku_n)(t) \rangle dt \geq \int_0^{+\infty} \langle (K\hat{u})(t), (K\hat{u})(t) \rangle dt.$$

Поскольку $(Ku)(t) = q_0 + \int_0^{+\infty} \theta(t - \tau)u(\tau) d\tau$ и $\theta(t - \tau) \in L_1(0, +\infty)$, то $(Ku_n)(t)$ сходится к $(K\hat{u})(t)$ поточечно. Искомое неравенство следует из теоремы Фату. Единственность оптимального решения немедленно следует из строгой выпуклости функционала J . Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{B}(q_0)$ функцию Беллмана:

$$\mathcal{B}(q_0) = \inf \left\{ \int_0^{+\infty} \langle \dot{q}(t), q(t) \rangle dt, \text{ где } \dot{q} \in \Omega \text{ и } q(0) = q_0 \right\}.$$

Очевидно, что $0 \leq \mathcal{B}(q_0) < +\infty$ для любого q_0 .

ЛЕММА 5. Функция Беллмана $\mathcal{B}$ строго выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – две произвольные траектории. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ с помощью прямой выкладки получаем

$$J(\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2) = \lambda J(q_1) + (1 - \lambda)J(q_2) - 2\lambda(1 - \lambda)J(q_2 - q_1).$$

Если $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – оптимальные траектории, начинающиеся в q_1^0 и q_2^0 соответственно, то в силу неотрицательности J получаем для $0 < \lambda < 1$

$$\lambda \mathcal{B}(q_1^0) + (1 - \lambda) \mathcal{B}(q_2^0) \geq J(\lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2) \geq \mathcal{B}(\lambda q_1^0 + (1 - \lambda) q_2^0),$$

причем равенство может быть, только если $J(q_2 - q_1) = 0$, т. е. если $q_1 \equiv q_2$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. *Для любых начальных данных q_0 найдется момент времени $T(q_0)$ такой, что $\hat{q}(t, q_0) = 0$ при всех $t \geq T(q_0)$, причем $T(q_0) \leq C \sqrt[3]{\mathcal{B}(q_0)}$ для некоторой константы $C > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что оптимальное решение $\hat{q}(t, q_0)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Предположим, что $\hat{x}(t, x_0)$ счетное число раз бывает вне δ -окрестности нуля. Воспользуемся компактностью Ω : траектория, находясь вне δ -окрестности нуля в момент времени t , обязана находиться вне $\frac{\delta}{2}$ -окрестности нуля в течение некоторого промежутка времени длины не меньше $\tau = \frac{\delta}{2 \text{diam } \Omega}$. Поэтому мы немедленно получаем противоречие с конечностью интеграла (13).

Теперь докажем само утверждение леммы. Воспользуемся тем, что функция Беллмана $\mathcal{B}(q_0)$ строго выпукла. Множество $B_\delta = \{q_0: \mathcal{B}(q_0) \leq \delta\}$ выпукло и гомеоморфно шару, а нуль – его внутренняя точка. Пусть $q_0 \in \partial B_\delta$, т. е. $\mathcal{B}(q_0) = \delta$. Пусть $t_{1/2}(q_0)$ – время, через которое траектория $\hat{q}(t, q_0)$ окажется на границе $B_{\delta/2}$. Эта функция корректно определена, так как функция $\mathcal{B}(\hat{q}(t, q_0))$ непрерывна и строго монотонно стремится к нулю с ростом t .

Оценим $t_{1/2}(q_0)$. Пусть нуль содержится в $B_{\delta/2}$ вместе со своей θ -окрестностью. Тогда

$$\delta = \mathcal{B}(q_0) \geq t_{1/2}(q_0) \theta^2, \quad \text{поэтому} \quad t_{1/2}(q_0) \leq \frac{\delta}{\theta^2}.$$

Обозначим

$$T_{1/2}(\delta) = \sup_{q_0 \in \partial B_1} t_{1/2}(q_0) < +\infty.$$

Поскольку для любого $\lambda > 0$ замена переменных $q \mapsto \lambda q$, $u \mapsto u$, $t \mapsto \lambda t$ обратима и изменяет значение функционала J на любой траектории в λ^3 раз, при этой замене оптимальные траектории обязаны переходить в оптимальные. Поэтому $T_{1/2}(\lambda \delta) = \sqrt[3]{\lambda} T_{1/2}(\delta)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} T(q_0) &\leq T_{1/2}(\delta) + T_{1/2}\left(\frac{\delta}{2}\right) + T_{1/2}\left(\frac{\delta}{4}\right) + \cdots = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1} T_{1/2}(\delta) \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1} T_{1/2}(1) \sqrt[3]{\mathcal{B}(q_0)} < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Далее через $T(q_0)$ обозначим минимальный момент времени такой, что $\hat{q}(t, q_0) = 0$ при $t > T(q_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого q_0 сопряженная функция $\hat{p}(t, q_0)$ единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\hat{u}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$, то $\langle p, u \rangle$ достигает максимума во внутренней точке в Ω ($0 \in \text{Int } \Omega$). Поэтому $\hat{p}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$. При $t < T(q_0)$ функция $\hat{p}(t, q_0)$ может быть найдена единственным образом из уравнения $\dot{p} = \hat{q}(t, q_0)$:

$$\hat{p}(t, q_0) = - \int_t^{T(q_0)} \hat{q}(\tau, q_0) d\tau.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Функция Беллмана является функцией класса C^1 , и $\mathcal{B}'(q_0) = -\hat{p}(0, q_0)$.

Под $\mathcal{B}'(q_0) \in U^*$ здесь и далее подразумевается дифференциал функции Беллмана в точке q_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Пусть $q_0 \neq 0$. Рассмотрим задачу (13), в которой условие $q(0) = q_0$ заменено условием $q(0) \in l$, где l – любая опорная гиперплоскость в точке q_0 к множеству $\{q: \mathcal{B}(q) \leq \mathcal{B}(q_0)\}$. В силу строгой выпуклости функции $\mathcal{B}(q)$ траектория $\hat{q}(t, q_0)$ является решением и новой задачи при любом выборе l . Согласно принципу максимума Понтрягина должна существовать сопряженная функция $p^l(t)$, удовлетворяющая уравнениям (14) и условиям трансверсальности $p^l(0) \perp l$. Рассуждая, как в доказательстве следствия 4, мы немедленно получаем, что $p^l(t) = \hat{p}(t, q_0)$. Поэтому вектор $\hat{p}(0, q_0)$ ортогонален любой опорной гиперплоскости l . Если $\hat{p}(0, q_0) \neq 0$, то поверхность уровня функции $\mathcal{B}$ является гладкой, а дифференцируемость функции Беллмана $\mathcal{B}$ вытекает из ее однородности: $\mathcal{B}(\lambda q) = \lambda^3 \mathcal{B}(q)$ при $\lambda > 0$. В этом случае $\hat{p}(0, q_0) = \lambda(q_0) \mathcal{B}'(q_0)$, где $\lambda(q_0)$ – коэффициент пропорциональности. Покажем, что $\hat{p}(0, q_0) \neq 0$. В противном случае $0 \in \partial \mathcal{B}(q_0)$, так как субдифференциал выпуклой функции полунепрерывен сверху. Однако функция Беллмана является строго выпуклой с минимумом в нуле. Противоречие.

Покажем теперь, что $\lambda(q_0) = -1$. Согласно уравнению Беллмана

$$\frac{1}{2} \langle q_0, q_0 \rangle + \langle d\mathcal{B}(q_0), \hat{u}(0, q_0) \rangle = 0.$$

С другой стороны, поскольку $\dot{\mathcal{H}} = 0$ и $\hat{q}(t, q_0), \hat{p}(t, q_0)$ обнуляются при $t > T(q_0)$, то $\mathcal{H} = 0$. Значит,

$$-\frac{1}{2} \langle q_0, q_0 \rangle + \langle \hat{p}(0, q_0), \hat{u}(0, q_0) \rangle = 0.$$

Поэтому $\mathcal{B}'(q_0) = -\hat{p}(0, q_0)$ при $q_0 \neq 0$. Покажем дифференцируемость функции $\mathcal{B}$ в нуле. Пусть $C = \max\{\mathcal{B}(q) | \langle q, q \rangle = 1\}$. Тогда из $\mathcal{B}(\lambda q) = \lambda^3 \mathcal{B}(q)$ при $\lambda > 0$ получаем, что $0 \leq \mathcal{B}(q) \leq C|q|^3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Отображение $E: q_0 \mapsto \hat{p}(0, q_0) = -\mathcal{B}'(q_0)$ является гомеоморфизмом (непрерывной биекцией).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение E непрерывно, так как $\mathcal{B} \in C^1$. Инъективность отображения E немедленно следует из строгой выпуклости $\mathcal{B}$. Сюръективность следует из следующих соображений. Рассмотрим строго выпуклое множество $B_1 = \{q: \mathcal{B}(q) \leq 1\}$ с гладкой границей. Поскольку для каждого направления $v \in U^*$ существует ровно две различные перпендикулярные v касательные гиперплоскости к ∂B_1 , то дифференциалы функции $\mathcal{B}(q)$ в точках касания q_1 и q_2 параллельны и противоположны. Значит, в одной из этих точек дифференциал к функции $\mathcal{B}(q)$ противоположен к v . Скажем, $v = -\lambda \mathcal{B}'(q_1)$ для некоторого $\lambda > 0$. Значит, $v = -\mathcal{B}'(\sqrt[3]{\lambda} q_1)$. Лемма доказана.

Осталось доказать липшицевость отображения E . Разобьем это доказательство на две леммы.

ЛЕММА 9. Для любой точки $q_0 \in U$ найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что для всех $\Delta q \in U$, $|\Delta q| < \delta$, выполнены неравенства

$$0 \leq \mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q \leq C|\Delta q|^2. \quad (15)$$

При этом константы C и δ могут быть выбраны непрерывно зависящими от q_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $q(t)$ и $p(t)$ следующим образом: при $t \in [0, T(q_0)]$ они находятся из условий

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \hat{u}(t, q_0), & q(0) &= q_0 + \Delta q, \\ \dot{p}(t) &= q(t), & p(0) &= \hat{p}(0, q_0), \end{aligned}$$

а после момента времени $t = T(q_0)$ траектория $q(t)$ совпадает с оптимальной из точки $q(T(q_0))$, т. е. $q(t) = \hat{q}(t - T(q_0), q(T(q_0)))$ (траектория $p(t)$ не важна при $t > T(q_0)$). Фактически траектория $q(t)$ начинается в $q_0 + \Delta q$ и движется с управлением, оптимальным для точки q_0 , пока оно не станет тождественным нулю, а потом переключается на настоящее оптимальное управление. Учитывая $q(t) - \hat{q}(t, q_0) \equiv \Delta q$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) &\leq \frac{1}{2} \int_0^{T(q_0)} \langle q(t) - \hat{q}(t, q_0), q(t) + \hat{q}(t, q_0) \rangle dt + \mathcal{B}(\Delta q) \\ &= \frac{1}{2} \langle p(t) + \hat{p}(t, q_0), \Delta q \rangle \Big|_0^{T(q_0)} + C_1 |\Delta q|^3, \end{aligned}$$

где $C_1 = \max\{\mathcal{B}(q), |q| = 1\}$. Учитывая, что выполнено $p(0) = \hat{p}(0, q_0) = -\mathcal{B}'(q_0)$, $\hat{p}(T(q_0), q_0) = 0$ и $p(T(q_0)) = T(q_0)\Delta q$, получаем

$$\mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q \leq T(q_0)|\Delta q|^2 + C_1|\Delta q|^3,$$

т. е. оценку сверху из (15). Неотрицательность этого выражения следует из выпуклости функции Беллмана $\mathcal{B}(q)$. Лемма доказана.

Основная трудность в оставшемся доказательстве липшицевости $\mathcal{B}'(q)$ заключается в том, что функция Беллмана $\mathcal{B}(q)$ может не быть дважды дифференцируемой (и это по существу так, если, скажем, Ω – многогранник). Поэтому завершим доказательство теоремы 2 следующей леммой.

ЛЕММА 10. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ – произвольная функция. Если для некоторого $C > 0$ и для всех q_1, q_2 из некоторой открытой выпуклой области в $\mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f(q_2) - f(q_1) - \langle f'(q_1) \Delta q \rangle| \leq C |\Delta q|^2,$$

где $\Delta q = q_2 - q_1$, то $f': \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ – липшицево отображение в этой области с константой Липшица C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что выпуклая открытая область из условия есть $\mathbb{R}^n$. Также будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение и, следовательно, $f'(q) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\omega(q) \geq 0$ – шапочка, т. е. ω – неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем $\text{supp } \omega \subseteq \{|q| \leq 1\}$ и $\int \omega(q) dq = 1$. Обозначим $\omega_n(q) = n\omega(nq)$ и $f_n = f * \omega_n$ (свертка). Тогда f_n – бесконечно гладкая функция, $f'_n = f' * \omega_n$ и выполнено

$$\begin{aligned} \Lambda_n(q_1, q_2) &= f_n(q_2) - f_n(q_1) - f'_n(q_1) \Delta q \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(q_2 - y) - f(q_1 - y) - f'(q_1 - y) \Delta q) \omega_n(y) dy. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\Lambda_n(q_1, q_2)| = |f''_n(q_1)[\Delta q; \Delta q] + o(|\Delta q|^2)| \leq C |\Delta q|^2.$$

Подставив $\lambda \Delta q$ вместо Δq в последнее неравенство и устремив λ к нулю, получаем, что для всех $n, q, \Delta q$ выполнено

$$|f''_n(q)[\Delta q; \Delta q]| \leq C |\Delta q|^2.$$

Значит, для всех n и q выполнено $\|f''_n(q)\| \leq C$. Следовательно,

$$|f'_n(q_2) - f'_n(q_1)| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} |f''_n(q_1 + \theta(q_2 - q_1))| |\Delta q| \leq C |\Delta q|.$$

Устремив n к бесконечности (при фиксированных q_1 и q_2), получаем искомое:

$$|f'(q_2) - f'(q_1)| \leq C |\Delta q|.$$

Лемма доказана.

Теорема 2 также доказана. Таким образом, множество всех пар $(q_0, \hat{p}(0, q_0))$ образует в расширенном фазовом пространстве T^*M липшицево многообразие M_+ , однозначно проектирующееся на плоскость $\{p = 0\}$. Все оптимальные траектории (и только они) лежат в M_+ и приходят в начало координат за конечное время. Других попадающих в начало координат траекторий гамильтоновой системы (14) не существует⁹.

Отметим, что замена $q \mapsto -q, p \mapsto p$ не меняет гамильтониан $\mathcal{H}$, но изменяет знак симплектической формы $dq \wedge dp$. Поэтому при такой замене траектории гамильтоновой системы (14) переходят в себя, но меняется направление

⁹Иначе они были бы оптимальны в силу выпуклости исходной задачи.

движения по ним. Липшицева поверхность M_+ переходит в поверхность M_- траекторий, выходящих из начала координат.

Найдем теперь особые траектории задачи (13) в случае, когда Ω – многогранник. Рассмотрим произвольную грань Γ многогранника Ω . Нас интересует траектория $\hat{q}$, $\hat{p}$, $\hat{u}$, особая по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Поскольку $\{G, G\} \equiv 0$, по лемме 1 немедленно получаем, что $\hat{p} \in \Gamma^\perp$ и $\hat{q} \in \Gamma^\perp$. Пусть O_Γ – ортогональная проекция начала координат на $\text{Aff } \Gamma$. Так как $\{G, \{H, G\}\} \equiv \text{id}$, особое управление $\hat{u}$ по Γ равно O_Γ , если $O_\Gamma \in \Gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем многогранник Ω не слишком скошенным, если $O_\Gamma \in \text{Int } \Gamma$ для любой грани Γ многогранника Ω .

Компактные не слишком скошенные многогранники обладают тем замечательным свойством, что подпространства $\Gamma^\perp$, ортогональные граням, разрежут “правильным образом” все пространство на секторы подобно барицентрическому разбиению. А именно, верна следующая

ЛЕММА 11 (о барицентрическом разбиении многогранника). Пусть на каждой грани $\Gamma \neq \Omega$ выпуклого компактного многогранника $\Omega \subseteq U$, $0 \in \text{Int } \Omega$, выбрано по одной внутренней точке O_Γ . Тогда для любой точки $q_0 \in U$ найдется единственный набор граней $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$ и положительных чисел $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ таких, что

$$q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k}.$$

Множество всех q_0 с данным набором граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k$ будем обозначать через

$$\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k) = \left\{ q_0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j O_{\Gamma_j}, \text{ где } \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально.

В случае не слишком скошенного компактного многогранника Ω линейное пространство U разбивается на конусы, ребра которых порождены особыми управлениями O_{Γ_i} по всем возможным различным наборам вложенных друг в друга граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$.

Для любой такой начальной точки q_0 , что $-q_0$ лежит в относительной внутренности $\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, оптимальная траектория начинает двигаться с управлением, особым по грани Γ_1 , до тех пор, пока траектория $\hat{q}(t, q_0)$ не попадет на $(k-1)$ -мерную грань $\text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_k)$. В этот момент управление скачком переключается на особое управление O_{Γ_2} по грани Γ_2 , и процесс повторяется до момента выхода траектории в начало координат (рис. 2).

Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если компактный многогранник Ω является не слишком скошенным, то любая оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$, $\hat{u}(t, q_0)$ устроена следующим образом. Пусть $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k$ и $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ такие, как в лемме 11

Рис. 2. Оптимальная траектория $-\hat{q}(x)$

для точки $-q_0$, т. е.

$$-q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k).$$

Тогда найдутся такие моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T(q_0)$, $t_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i$, что при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ имеем $\hat{u}(t, q_0) = O_{\Gamma_j}$ и

$$-q(t) = \mu(t) O_{\Gamma_j} + \lambda_{j+1} O_{\Gamma_{j+1}} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_j, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_k),$$

где μ — линейно убывающая функция от $\mu(t_{j-1}) = \lambda_j$ до $\mu(t_j) = 0$.

В частности, управление выбирается по принципу обратной связи: $\hat{u}(t, q_0) = \hat{u}(\hat{q}(t, q_0)) = O_{\Gamma}$, где Γ — грань наименьшей размерности из разложения $-\hat{q}(t, q_0)$ по лемме 11.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 проведем индукцией по количеству граней k . Пусть $k = 1$ и $-q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1}$, $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} O_{\Gamma_1} & \text{при } t \in (0, \lambda_1), \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда из (14) при $t \in (0, \lambda_1)$ получаем $q(t) = (t - \lambda_1) O_{\Gamma_1}$, $p = \frac{1}{2}(t - \lambda_1)^2 O_{\Gamma_1}$ и $q(t) = p(t) = 0$ при $t > \lambda_1$. Поскольку $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1)$, то $\max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = \langle p(t), O_{\Gamma_1} \rangle$ и тройка $q(t)$, $p(t)$, $u(t)$ удовлетворяет системе принципа максимума Понтрягина. Значит, в силу существования и единственности решения (по теореме 2) эта тройка является оптимальной.

Предположим теперь, что для некоторого k доказано, что если $-q_0 \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, то оптимальная траектория является такой, как заявлено в условиях теоремы, и, кроме того, $\hat{p}(0, q_0) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$. Докажем аналогичное утверждение для $k + 1$. Пусть $-q_0 = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i O_{\Gamma_i}$. Обозначим

$q_1 = q_0 - \lambda_1 O_{\Gamma_1}$. Рассмотрим управление $u(t) = O_{\Gamma_1}$ при $t \in (0, \lambda_1)$. Тогда из (14) получаем

$$q(t) = q_1 + (t - \lambda_1)O_{\Gamma_1}, \quad p(t) = p(\lambda_1) + \frac{1}{2}(t - \lambda_1)^2 O_{\Gamma_1}.$$

Таким образом, тройка $q(t)$, $p(t)$, $u(t)$ на промежутке $t \in (0, \lambda_1)$ удовлетворяет системе (14), за исключением, быть может, условия максимума. Покажем, что и оно выполнено. По предположению индукции $\hat{p}(0, q_1) \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$. Точке q_1 по теореме 2 соответствует единственное значение $E(q_1) = \hat{p}(0, q_1)$. Положив $p(\lambda_1) = E(q_1)$, немедленно получаем, что $p(t) \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1})$ и, следовательно, $\max_{u \in \Omega} \langle p(t), u \rangle = \langle p(t), O_{\Gamma_1} \rangle$.

Поскольку $-q(\lambda_1) = -q_1 \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$ и $p(\lambda_1) \in \text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{k+1})$, то траектория продолжается до оптимальной по предположению индукции.

§ 8. Структура выхода на особую траекторию и схода с нее

Как было показано ранее, структура решений модельной задачи должна определять поведение траекторий управляемой гамильтоновой системы (1) в окрестности особой траектории. В § 7 в модельной задаче были найдены все траектории, выходящие на особую траекторию и сходящие с нее, для случая не слишком скошенного компактного многогранника Ω . Для произвольной управляемой системы условие “не слишком скошенности” Ω в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ означает следующее: необходимо в пространстве управлений U выбрать в качестве начала координат особое управление в точке x_0 , а в качестве скалярного произведения – форму $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$.

Как было доказано в лемме 3, в голономном случае форма $\{G, \{H, G\}\}$ является симметрической, поэтому следующее определение корректно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Компактный многогранник $\Omega \subset U$ является *не слишком скошенным* в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ относительно управляемой гамильтоновой системы (1), если:

- (i) форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$ является положительно определенной в x_0 ;
- (ii) проекции (относительно скалярного умножения с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$) особого управления $O_\Omega(x_0)$ на любую грань Γ попадают строго внутрь этой грани.

Естественно, если многогранник Ω является не слишком скошенным в x из $\mathcal{M}_\Omega$, то он является не слишком скошенным и для любой точки из $\mathcal{M}_\Omega$, достаточно близкой к x . Итак, в рамках этого ограничения мы докажем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы 3 для произвольной управляемой системы (1), (2) с голономным управлением (рис. 3).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$, – особая траектория по всему компактному многограннику Ω управляемой гамильтоновой системы (1), (2) с голономным управлением по каждой грани Ω . При этом форма $\{G, \{H, G\}\}$ положительно определена в точке $\hat{x}(t^*)$ при $t^* \in (\tau_1, \tau_2)$. Если многогранник Ω

Рис. 3. Оптимальный синтез в окрестности особой траектории

является не слишком скошенным относительно точки $\hat{x}(t^*)$, то определено следующее семейство траекторий, выходящих из $\hat{x}(t^*)$ и удовлетворяющих ПМП и необходимым условиям Гоха–Кренера: для каждого набора граней $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_k$ определена траектория $x(t)$, $u(t)$, выходящая из $\hat{x}(t^*)$ при $t > t^*$, где

$$\begin{aligned} x(t^*) &= \hat{x}(t^*), & \dot{x}(t) &= u(x(t)), \\ u(x(t)) &= O_{\Gamma_i}(x(t)), & t &\in (t_{i-1}, t_i). \end{aligned}$$

Здесь $t^* = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ – любой набор значений времени такой, что разность $t_k - t^*$ достаточно мала. Выход на особую траекторию при $t < t^*$ устроен аналогично, необходимо лишь изменить направление течения времени и порядок прохождения граней (от большей к меньшей).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Мы не проверяем достаточные условия второго порядка в настоящей работе, однако отметим следующее. Рассмотрим случай нормальной траектории ($\lambda_0 = 1$ и сопряженный множитель $p(t)$ определен однозначно). На самом деле, поскольку на особой траектории выполняются равенства $\{G, G\} = 0$ и $\{G, \{G, G\}\} = 0$, достаточные условия второго порядка для локального минимума Понтрягина (П-минимума) фактически совпадают с достаточными условиями слабого локального минимума (см. [10]). Последние в нашем случае требуют положительной определенности формы $\{G, \{H, G\}\}$ (которая уже выполнена) вкупе с некоторыми условиями трансверсальности на концах траектории. Поэтому проверка достаточных условий в конкретных примерах сведется к проверке граничных условий и она не должна вызвать затруднений (подробнее см. [11]).

Теорема 4 дает наглядное описание поверхностей $\mathcal{M}_\Gamma$: для произвольной грани Γ^0 в окрестности $\mathcal{M}_{\Gamma^0}$ поверхности $\mathcal{M}_\Gamma$ по всем $\Gamma \subsetneq \Gamma^0$ примыкают друг к другу по $\mathcal{M}_{\Gamma^0}$ (см. рис. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала докажем, что проекция особого управления $\hat{u}(t^*) = O_\Omega(\hat{x}(t^*))$ на любую грань Γ (относительно скалярного умножения с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$) совпадает с $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$. Вычислим

$$\begin{aligned} \{H^\Gamma, \{H^\Gamma, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} &= (\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0 \\ &\quad + \{H, \{G, G\}\}u_0 + \{G, \{G, G\}\}(u_0, u_0))|_{\hat{x}(t^*)}. \end{aligned}$$

Форма $\{G, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$ равна нулю, как было доказано в лемме 3. Форма $\{H, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$ равна нулю ввиду равенства $\{G_i, \{H, G_j\}\} - \{G_j, \{H, G_i\}\} = \{H, \{G_i, G_j\}\}$ и симметричности формы $\{G, \{H, G\}\}$.

Поскольку $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$ не зависит от выбора u_0 , естественно положить $u_0 = O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$. В этом случае мы немедленно получаем, что

$$-\{G^\Gamma, \{H, G^\Gamma\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)}(\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0)|_{\hat{x}(t^*)} = 0 \in \Gamma'.$$

Это равносильно тому, что разность слагаемого

$$-\{G, \{H, G\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)}(\{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u_0)|_{\hat{x}(t^*)}$$

и слагаемого

$$-\{G, \{H, G\}\}^{-1}|_{\hat{x}(t^*)}\{H, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$$

лежит в $\Gamma^\perp$, т. е. $u^0 \in \Gamma^\perp$, что и требовалось показать. Значит, в силу условия нескосженности Ω особое управление $O_\Gamma(\hat{x}(t^*))$ по любой грани Γ лежит внутри Γ .

Теперь покажем, что участок траектории $x(t), u(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$ удовлетворяет ПМП и теореме Гоха–Кренера, если разность $t_1 - t_0$ достаточно мала. Утверждение теоремы для остальных промежутков доказывается применением замечания 1 и очевидной индукции. Сначала проверим, что $x(t) \in \mathcal{M}_{\Gamma_1}$. Векторное поле гамильтоновой системы (1) при $u = O_\Gamma(x)$ в точках $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$ является касательным к $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$ (управление $O_{\Gamma_1}(x)$ выбиралось именно из этого условия). Поэтому достаточно проверить, что $x(t_0) = \hat{x}(t^*)$ лежит на $\mathcal{M}_{\Gamma_1}$. Проверим все три условия леммы 1: (i) $G(\hat{x}(t^*)) = 0 \in \Gamma_1^\perp$; (iii) $\{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)} = 0$, поэтому $\{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)}\Gamma' \in \Gamma^\perp$; (ii) $\{H^\Gamma, G\}|_{\hat{x}(t^*)} = \{H, G\}|_{\hat{x}(t^*)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)}u^0 = 0 \in \Gamma^\perp$.

Поскольку $G(x(t)) \in \Gamma_1^\perp$, то $\langle G(x(t)), u \rangle$ достигает в точках $u \in \Gamma_1$ либо максимума, либо минимума по всему многограннику Ω . Покажем, что это именно максимум, что и завершит доказательство. Вычислим производные от G в t^* вдоль траектории $x(t)$. Выбрав $\hat{u}(t^*) = O_\Omega(\hat{x}(t^*))$ в качестве начала координат в U и снабдив его ортонормированным базисом относительно $\{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)}$, мы можем считать, что

$$\{H, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} = 0, \quad \{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} = \text{id}.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\dot{G}(t^*) &= \{H, G\}|_{\hat{x}(t^*)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)) = 0, \\ \ddot{G}(t^*) &= \{H, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} + \{G, \{H, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)) \\ &\quad + \{H, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)) \\ &\quad + \{G, \{G, G\}\}|_{\hat{x}(t^*)} (O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)), O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*))) = O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)).\end{aligned}$$

Поэтому

$$G(t^* + \Delta t) = \frac{1}{2} \Delta t^2 O_{\Gamma_1}(\hat{x}(t^*)) + o(\Delta t^2),$$

что и завершает доказательство.

Автор выражает глубокую признательность М. И. Зеликину и А. В. Дмитруку за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

1. H. J. Kelley, R. E. Kopp, H. G. Moyer, "Singular extremals", *Topics in optimization*, Academic Press, New York, 1967, 63–101.
2. М. И. Зеликин, В. Ф. Борисов, "Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики", *Оптимальное управление, Современная математика и ее приложения*, **11**, НАН Грузии, Ин-т кибернетики, Тбилиси, 2003, 3–161; англ. пер.: M. I. Zelikin, V. F. Borisov, "Singular optimal regimes in problems of mathematical economics", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **130**:1 (2005), 4409–4570.
3. M. I. Zelikin, V. F. Borisov, "Theory of chattering control with applications to astronautics robotics, economics, and engineering", *Systems Control Found. Appl.*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, xvi+242 pp.
4. М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд, "Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением", *Математическая теория управления и дифференциальные уравнения*, Сб. статей: К 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко, Тр. МИАН, **277**, МАИК, М., 2012, 74–90; англ. пер.: M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskiy, R. Hildebrand, "Geometry of neighborhoods of singular trajectories in problems with multidimensional control", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **277**:1 (2012), 67–83.
5. Л. Ф. Зеликина М. И. Зеликин, К. В. Хлюстов, "Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем", *Дифференц. уравнения*, **37**:9 (2001), 1161–1167; англ. пер.: L. F. Zelikina, M. I. Zelikin, K. V. Khlyustov, "Singular stratified manifolds for involutive controlled systems", *Differ. Equ.*, **37**:9 (2001), 1217–1223.
6. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер. 1-го изд.: V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1978, x+462 pp.
7. A. J. Krener, "The high order maximal principle and its application to singular extremals", *SIAM J. Control Optimization*, **15**:2 (1977), 256–293.
8. R. M. Lewis, "Definitions of order and junction condition in singular optimal control problems", *SIAM J. Control Optim.*, **18**:1 (1980), 21–32.
9. А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004, 392 с.; англ. пер.: A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xiv+412 pp.

10. А. В. Дмитрук, “Квадратичные условия понtryгинского минимума в задаче оптимального управления линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:2 (1986), 284–312; англ. пер.: A. V. Dmitruk, “Quadratic conditions for a Pontryagin minimum in an optimum control problem linear in the control. I. A decoding theorem”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:2 (1987), 275–303.
11. A. V. Dmitruk, “Quadratic order conditions of a local minimum for singular extremals in a general optimal control problem”, *Differential geometry and control* (Boulder, CO, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 163–198.

Лев Вячеславович Локуциевский
(LEV V. LOKUTSIEVSKII)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: lion.lokut@gmail.com

Поступило в редакцию
22.02.2013