Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Модифицированные $\mathbf{P}$ -интеграл и $\mathbf{P}$ -производная Бесселя и их свойства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 27–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:48:04

УДК 517.518

С. С. Волосивец

Модифицированные $\mathbf{P}$ -интеграл и $\mathbf{P}$ -производная Бесселя и их свойства

Изучаются модифицированный $\mathbf{P}$ -интеграл Бесселя, свойства которого подобны свойствам потенциала Бесселя, и модифицированная $\mathbf{P}$ -производная Бесселя. Эти операторы являются взаимно обратными. Доказываются аналоги теорем вложения Г. Харди, Дж. Литтлвуда, И. Стейна, А. Зигмунда и П. И. Лизоркина, касающихся образов пространств $L^p(\mathbb{R})$ при действии потенциалов Бесселя. Даны приложения интеграла и производной Бесселя к интегрируемости $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье и теории приближения (теорема вложения типа П. Л. Ульянова).

Библиография: 33 наименования.

Ключевые слова: потенциал Бесселя, модифицированная $\mathbf{P}$ -производная Бесселя, $\mathbf{P}$ -ичные пространства Гёльдера–Бесова, $\mathbf{P}$ -ичные распределения, $\mathbf{P}$ -ичное пространство ВМО, теорема вложения типа П. Л. Ульянова.

DOI: 10.4213/im8116

Посвящается 75-летию моего учителя Б. И. Голубова

Введение

Изучение двоичных производной и интеграла с точки зрения теории функций и теории приближений началось с работы П. Л. Бутцера и Х. Й. Вагнера [1]. В [1] изучались функции на двоичной группе G , изоморфной модифицированному отрезку $[0, 1]^*$, затем в [2] была введена сильная двоичная производная $\bar{D}(f)$ для функций $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и получено равенство $(\bar{D}(f))^\wedge(x) = x\hat{f}(x)$. Здесь $\hat{f}(x)$ – преобразование Фурье–Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, частный случай мультипликативных $\mathbf{P}$ -преобразований Фурье (см. § 1 или [3, гл. 6]). Х. Й. Вагнер [4] и Е. Пал [5] определили сильный двоичный интеграл $\bar{I}(f)$ и показали взаимную обратимость операторов $\bar{D}(f)$ и $\bar{I}(f)$ при дополнительном условии $\hat{f}(0) = 0$. Многие из отмеченных результатов работ [1], [2], [4], [5] изложены в [6, гл. 9]. В работах [7] и [8] Б. И. Голубов изучил модифицированные сильные двоичные интеграл и производную произвольного порядка $\alpha > 0$ для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Затем, в работе [9] им были изучены взаимосвязи между сильными и поточечными модифицированными интегралами и производными. В работах автора [10] и [11] многие из результатов работ [7] и [8] были использованы в случае $\mathbf{P}$ -ичных модифицированных сильных интеграла и производной.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Были установлены также условия существования указанных интегралов и производных, изучена связь между поведением структурных характеристик самой функции и ее производной (интеграла). В [12] было проведено систематическое исследование модифицированных сильных $\mathbf{P}$ -интеграла и $\mathbf{P}$ -производной с точки зрения гармонического анализа и теории функций. Для локальных полей близкие операторы изучал К. Оневир [13], свойствами, аналогичными свойствам модифицированного сильного оператора дифференцирования, обладает оператор В. С. Владимирова [14, § 9]. Следует отметить также монографию М. Тэйблсона [15], в которой изучались аналоги потенциалов Рисса и Бесселя в локальных полях.

В настоящей работе исследуются понятия сильного $\mathbf{P}$ -интеграла, близкого по свойствам к потенциалу Бесселя, и $\mathbf{P}$ -производной, являющейся обратным оператором к указанному оператору $\mathbf{P}$ -интегрирования. В § 1 даны основные определения, в § 2 приведены вспомогательные утверждения. В § 3 даны критерии равенства производной Бесселя функции некоторой функции и различные теоремы о взаимной обратимости интеграла и производной Бесселя. В § 4 изучаются образы $L^p(\mathbb{R}_+)$ и пространств Липшица при действии интеграла Бесселя. Доказан ряд вложений, аналогичных известным для классического потенциала Бесселя. В § 5 излагаются результаты об интегрируемости преобразования Фурье и сверток распределений, а также теорема вложения типа П. Л. Ульянова.

§ 1. Основные определения

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{|j| \in \mathbb{N}}$, где $p_j \in \mathbb{N}$, $2 \leq p_j \leq N$, $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Положим $m_j = p_1 \cdots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = 1/m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма всегда конечна, и разложение (1) определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $k, n \in \mathbb{N}$, брать разложения с конечным числом $x_j \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, а $|0|_{\mathbf{P}} = 0$. Введем обозначения $B_k = \{x \in \mathbb{R}_+ : |x|_{\mathbf{P}} \leq m_k\} = [0, m_k)$, $S_k = \{x \in \mathbb{R}_+ : |x|_{\mathbf{P}} = m_k\} = [m_{k-1}, m_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $x, y \in [0, +\infty)$ записаны в виде (1), то по определению

$$z = x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{m_j},$$

где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $z_j \in [0, p_j) \cap \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Это определение имеет смысл, если $z_j \neq p_j - 1$ для бесконечного числа j , т. е. при фиксированном x величина $x \oplus y$ определена при всех y , кроме счетного множества. Аналогично определяется операция $x \ominus y$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), определим ядро $\chi(x, y)$ равенством

$$\chi(x, y) = \exp \left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j y_{-j} + x_{-j} y_j}{p_j} \right) \right).$$

Основным свойством этого ядра является равенство (см. [3, § 1.5])

$$\chi(x \oplus z, y) = \chi(x, y)\chi(z, y) \quad (\chi(x \ominus z, y) = \chi(x, y)\overline{\chi(z, y)}),$$

справедливое для всех пар $(x, z) \in \mathbb{R}_+^2$, для которых существует $x \oplus z$ ($x \ominus z$) при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$, т.е. для всех z , кроме счетного количества, при фиксированных x, y .

Далее $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, определяется как пространство измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций с конечной нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье определим формулой

$$\hat{f}(x) = \int_0^\infty f(y)\overline{\chi(x, y)} dy,$$

где интеграл справа понимается в смысле Лебега. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, то $\hat{f}(x)$ определяется как предел $\int_0^a f(y)\overline{\chi(x, y)} dy$ в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ при $a \rightarrow +\infty$, где $1/p + 1/p' = 1$ (везде далее считаем, что p и p' удовлетворяют этому соотношению). При $1 \leq p < 2$ и $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ известно, что справедливо неравенство Хаусдорфа–Юнга $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$, а при $p = 2$ это неравенство становится равенством Планшереля $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (см. [3, гл. 6] и [6, гл. 9]). Обратное $\mathbf{P}$ -преобразование Фурье для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$\check{f}(x) = \int_0^\infty f(y)\chi(x, y) dy.$$

Условия обращения $\mathbf{P}$ -преобразования Фурье и его свойства см. в [3, гл. 6] и лемме 1.

Важную роль далее играет функция $D_y(x) = \int_0^y \chi(x, t) dt$. Известно, что $D_{m_n} = m_n X_{[0, 1/m_n)}$ при $n \in \mathbb{Z}$ (см. [3, § 1.5, § 11.1] и лемму 6). Здесь X_E – индикатор множества E . Пусть $\Omega = \{I_k^n = [k/m_n, (k+1)/m_n) : k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\}$, $I^n(x)$ совпадает с единственным полуинтервалом I_k^n , содержащим x , а $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \neq 0\}$. Если f постоянна на всех I_k^n , $k \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $f \in \mathcal{G}_n$, если же $\text{supp}(f) \subset B_n$, то $f \in \mathcal{G}^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $g \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{G}^k$ при некоторых $n, k \in \mathbb{Z}$, то g принадлежит пространству тест-функций $\mathcal{D}$. По определению $f_k \rightarrow f$ в $\mathcal{D}$, если f_k сходится равномерно к f и носители всех f_k , начиная с некоторого k , содержатся в одном шаре B_n .

Из результатов [3, § 6.2] вытекает, что при $f \in \mathcal{G}_k \cap \mathcal{G}^n$ имеем $\hat{f} \in \mathcal{G}^{-k} \cap \mathcal{G}_{-n}$; в частности, $\mathcal{D}$ инвариантно относительно $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье. Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов (распределений) на $\mathcal{D}$, а через $\langle f, \varphi \rangle$ – значение $f \in \mathcal{D}'$ на $\varphi \in \mathcal{D}$. Для $f \in \mathcal{D}'$ преобразование Фурье вводится равенством $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Произведение $f \in \mathcal{D}'$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ (или $\varphi \in \mathcal{G}_n$) определяется равенством $\langle f\varphi, \psi \rangle = \langle f, \varphi\psi \rangle$ для всех $\psi \in \mathcal{D}$. Сходимость в $\mathcal{D}'$ определяется как слабая сходимость. Изложение свойств $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ для функций, определенных на множестве p -адических чисел, можно найти в [14, § 6, 7] и [15, гл. 2, § 3]. Распределение $f \in \mathcal{D}'$ называется *регулярным*, если существует функция $f_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f_0(t)\varphi(t) dt$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$.

Хорошо известно, что для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$, где $1 \leq p, q < \infty$, $1/p + 1/q - 1 = 1/r > 0$, свертка

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus y)g(y) dy$$

существует п. в., принадлежит $L^r(\mathbb{R}_+)$ и при этом $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (см. [16, гл. 2, теорема 1.15]). Последнее неравенство называется *неравенством Юнга*, и его важным частным случаем является неравенство

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1, \quad f \in L^p(\mathbb{R}_+), \quad g \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Согласно [15, гл. 3, § 3] или [14, § 7] можно определить $f * g$ как элемент $\mathcal{D}'$ равенством $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, где $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{G}_n$ или даже g – распределение с компактным носителем, т. е. $X_{[0, m_k]}g = g$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. При этом для $g \in \mathcal{G}_n$ получаем $f * g \in \mathcal{G}_n$ (см. [15, гл. 3, теорема (3.15)]). Другой подход к определению $f * g$ для любых $f, g \in \mathcal{D}'$ см. в [14, § 7], причем снова сохраняется свойство $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, а также его аналог для обратного преобразования Фурье. Кроме того, для $f \in \mathcal{D}'$ всегда $(\widehat{f})^\sim = f$ в $\mathcal{D}'$. Легко видеть, что $S_{m_n}(f) = f * D_{m_n} \in \mathcal{G}_n$. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$; тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m_n}(f)_p &:= \inf_{g_n \in \mathcal{G}_n} \|f - g_n\|_p, \\ \omega_n(f)_p &:= \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Для $p = \infty$ рассмотрим $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$ и $\omega_n(f)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y|_{\mathbf{P}} \leq 1/m_n\}$. Эти величины при $1 \leq p \leq \infty$ связаны между собой неравенством А. В. Ефимова [3, § 10.5]

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega_n(f)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in I^n(x)} |f(x) - f(y)| = 0$, то f называется **Р**-непрерывной в точке x , а если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n(f)_\infty = 0$, то по определению $f \in C^*(\mathbb{R}_+)$. Если функция f интегрируема на $I^k(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \int_{I^n(x)} f(t) dt = f(x)$, то x называется **Р**-ичной d -точкой функции f . Ясно, что для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ почти все точки $\mathbb{R}_+$ являются **Р**-ичными d -точками f . Для $f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq q < \infty$, максимальная функция определяется равенством

$$M_q(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(m_n \int_{I^n(x)} |f(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Если $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ убывает к нулю и для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ верно неравенство $\omega_n(f)_p \leq C\omega_n$, то f принадлежит пространству Гёльдера H_p^ω . Аналогично определяется H_∞^ω . Для $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, используем обозначения $\text{Lip}^*(\alpha, p)$ и $\text{Lip}^*(\alpha) = \text{Lip}^*(\alpha, \infty)$ соответственно. Норма в $\text{Lip}^*(\alpha, p)$ задается формулой

$$\|f\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)} = \|f\|_p + \sup_{n \geq 0} m_n^\alpha \omega_n(f)_p.$$

Если $f \in \text{Lip}^*(\alpha, p)$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n^\alpha \omega_n(f)_p = 0$, то $f \in \text{lip}^*(\alpha, p)$ (соответственно, $f \in \text{lip}^*(\alpha)$ при $p = \infty$).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \infty$. Если $f \in \mathcal{D}'$ и

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,s}^\alpha} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} m_l^{\alpha s} \|S_{m_l}(f) - S_{m_{l-1}}(f)\|_p^s + \|S_{m_0}(f)\|_p^s \right)^{1/s} < \infty,$$

то f принадлежит неоднородному пространству Бесова $\dot{B}_{p,s}^\alpha = \dot{B}_{p,s}^\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Если же $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha,p,s;\mathbf{P})} = \|f\|_p + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_l^{\alpha s} \|S_{m_l}(f) - S_{m_{l-1}}(f)\|_p^s \right)^{1/s} < \infty,$$

то f принадлежит однородному пространству Гёльдера–Бесова $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$. В [17, лемма 11] можно найти другие нормы в $\Lambda(\alpha, p, s; \mathbf{P})$, эквивалентные данной.

Пусть $I \in \Omega$, $|I|$ – мера Лебега I , и для $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ пусть $f_I = |I|^{-1} \int_I f(t) dt$. Положим по определению

$$\|f\|_{*,\delta} = \sup_{I \in \Omega, |I| \leq \delta} |f - f_I|_I, \quad \|f\|_* = \|f\|_{*,\infty}, \quad \|f\|^* = \sup_{I \in \Omega} \inf_{c \in \mathbb{C}} |f - c|_I.$$

Если $\|f\|_* < \infty$ или $\|f\|^* < \infty$, то будем записывать $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, а если $f \in \text{ВМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f\|_{*,\delta} = 0$, то $f \in \text{VМО}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Известно, что

$$\|f\|^* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|^* \quad (3)$$

(см., например, [18, лемма 7], где доказаны разные варианты неравенства (3)).

Для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим

$$W_n^\alpha(x) = \int_{m_{-n}}^{\infty} |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \chi(x, y) dy.$$

Поскольку $|y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \downarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ и $|D_y(x)| = \left| \int_0^y \chi(x, t) dt \right| \leq (N+1)/x$ (см. [19, формула (10)]), то интеграл, определяющий W_n^α , существует как несобственный. Если $\alpha > 0$ и для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, существует $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_p = 0$, то g называется *модифицированным сильным мультипликативным $\mathbf{P}$ -интегралом* (МСМИ) *порядка* $\alpha > 0$ для f и обозначается через $I_p^\alpha(f)$. Поскольку $|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ при $0 < \alpha < 1$, эта функция принадлежит $\mathcal{D}'$ и справедливо равенство $|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} = \hat{d}$ для некоторого $d \in \mathcal{D}'$. Поэтому $\hat{g} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \hat{f}$ в смысле распределений при $p > 2$ и $0 < \alpha < 1$ (см. [12, теорема 2]) или п. в. при $1 \leq p \leq 2$ и всех $\alpha > 0$ (см. [11, теоремы 1, 10]).

Пусть теперь $\alpha > 0$ и

$$\mathfrak{R}_n^\alpha(x) = (|\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0,m_n)}(\cdot))^\wedge(x) = \sum_{k=-\infty}^n m_k^\alpha (D_{m_k}(x) - D_{m_{k-1}}(x)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку $\|D_{m_k}\|_1 = 1$, то $\mathfrak{R}_n^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\hat{\mathfrak{R}}_n^\alpha = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha X_{[0,m_n)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, и существует функция $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \mathfrak{R}_n^\alpha - \varphi\|_p = 0$, то φ называется *модифицированной сильной мультипликативной $\mathbf{P}$ -производной* (МСМП) порядка α функции f и обозначается через $\mathfrak{D}_p^\alpha(f)$. Поскольку из сходимости в $L^p(\mathbb{R}_+)$ следует сходимость в $\mathcal{D}'$, из определения следует, что $\hat{\varphi} = |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$ и почти всюду при $1 \leq p \leq 2$ (см. [12, теорема 1] и [11, теоремы 6, 11]). Эти определения можно найти в [12]. Близкие определения принадлежат Б. И. Голубову (см. [7] при $p_i \equiv 2$ и $\alpha = 1$, [8] при $p_i \equiv 2$ и $\alpha > 0$) и автору (см. [11]). По аналогии с МСМИ и МСМП введем следующие объекты. При $\alpha > 0$ пусть

$$\begin{aligned} G^\alpha(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{m_k} \chi(x, y) \min(1, |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) dy \\ &= D_{m_0}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)). \end{aligned} \quad (4)$$

Из леммы 8 следует, что $G^\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$. Поэтому если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, то существует функция $J^\alpha(f) = f * G^\alpha \in L^p(\mathbb{R}_+)$, называемая *модифицированным $\mathbf{P}$ -интегралом Бесселя* функции f порядка $\alpha > 0$. С другой стороны, пусть $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и

$$\begin{aligned} \Lambda_n^\alpha(x) &= (\max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) X_{[0, m_n]})^\wedge(x) = \int_0^1 \chi(x, t) dt + \sum_{i=1}^n m_i^\alpha \int_{m_{i-1}}^{m_i} \chi(x, t) dt \\ &= X_{[0, 1)}(x) + \sum_{i=1}^n m_i^\alpha (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x)). \end{aligned} \quad (5)$$

Если для $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, верно равенство $\lim \|f * \Lambda_n^\alpha - g\|_p = 0$, то g называется *модифицированной $\mathbf{P}$ -производной Бесселя* функции f порядка $\alpha > 0$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и обозначается $g = D_p^\alpha(f)$.

Напомним, что сублинейный оператор Tf , действующий из $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, в пространство $L^0(\mathbb{R}_+)$ почти всюду конечных измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций, имеет слабый тип (p, q) , если для любого $\lambda > 0$ верно неравенство $|\{x \in \mathbb{R}_+ : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq C \|f\|_p^q / \lambda^q$. Здесь $|E|$ – мера Лебега E и $1 \leq q < \infty$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда в каждой точке x , где функция f является $\mathbf{P}$ -непрерывной, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(y) \chi(x, y) dy. \quad (6)$$

В случае произвольных точек x равенство (6) выполнено почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Первое утверждение леммы 1 см. в [3, § 6.1], второе можно найти в [11].

Следующая лемма доказана К. Оневиром [20].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. Тогда существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \|f\|_p \leq C_2 \left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |S_{m_{i+1}}(f) - S_{m_i}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

ЛЕММА 3 [21]. Пусть $1 \leq p, q < \infty$, $\mathbf{g} = \{g_k\}_{k=1}^\infty$, где $g_k \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^q)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty |g_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \quad \|\mathbf{g}\|_{l^q(L^p)} = \left(\sum_{k=1}^\infty \|g_k\|_p^q \right)^{1/q}.$$

Тогда при $1 < p \leq 2$ верно неравенство $\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^2)} \geq \|\mathbf{g}\|_{l^2(L^p)}$. При $p \geq 2$ справедливо неравенство $\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^2)} \leq \|\mathbf{g}\|_{l^2(L^p)}$.

ЛЕММА 4. 1) Пусть $f, g \in \mathcal{D}'$. Тогда из $\hat{f} = \hat{g}$ в $\mathcal{D}'$ следует, что $f = g$ в $\mathcal{D}'$.

2) Пусть $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f} = \hat{g}$ в $\mathcal{D}'$. Тогда $f(x) = g(x)$ н. в. на $\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 5. 1) Для любой $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, и $\alpha > 0$ существует распределение $|\cdot|^\alpha \hat{f}$, определяемое равенством $\langle |\cdot|^\alpha \hat{f}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathfrak{R}_n^\alpha * f, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$.

2) Пусть $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. Тогда $g = \mathfrak{D}_p^\alpha(f)$ в том и только в том случае, когда $\hat{g} = |\cdot|^\alpha \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$.

Леммы 4, 5 установлены в [12].

ЛЕММА 6. Пусть $D_y(x) = \int_0^y \chi(x, t) dt$. Тогда

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x), \quad \widehat{D_{m_n}}(x) = X_{[0, m_n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Как следствие, $\|D_{m_n}\|_p = m_n^{1-1/p}$, $1 \leq p < \infty$.

Первая формула леммы 6 доказана в [3, § 1.5, 11.1], остальные легко следуют из нее по определению.

Следующая лемма является упрощенным вариантом интерполяционной теоремы Марцинкевича [22, гл. 5, § 2].

ЛЕММА 7. Пусть линейный оператор $T(f)$ имеет слабый тип (p_0, q_0) и слабый тип (p_1, q_1) , $p_i, q_i \in [1, \infty)$, $p_i \leq q_i$, $i = 0, 1$, $q_0 \neq q_1$, и существует $\theta \in (0, 1)$ такое, что $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$, $p \leq q$. Тогда для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ имеем $T(f) \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p$.

ЛЕММА 8. Пусть $\alpha > 0$ и $G^\alpha(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{m_k} \chi(x, y) \min(1, |y|^\alpha) dy$. Тогда $G^\alpha(x)$ существует всюду на $(0, +\infty)$ и принадлежит $L^1(\mathbb{R}_+)$. При $0 < \alpha < 1$ на $(0, 1)$ справедливо соотношение $G^\alpha(x) \asymp x^{\alpha-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем равенство (4). Поскольку для каждого $x > 0$ конечное число $D_{m_i}(x)$ отлично от нуля, сумма в правой части (4) конечна для любого $x > 0$. Для $\|G^\alpha\|_1$ в силу условия $\alpha > 0$ и леммы 6 имеем оценку

$$\|G^\alpha\|_1 \leq \|D_{m_0}\|_1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} \|D_{m_i} - D_{m_{i-1}}\|_1 \leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} < \infty.$$

Пусть $x \in [m_{l-1}, m_l)$, $l \leq 0$. Тогда значение $D_{m_i}(x)$ по лемме 6 равно m_i при $i \leq -l$ и равно нулю при $i \geq -l + 1$. Поэтому с помощью преобразования Абеля находим, что

$$G^\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (m_i^{-\alpha} - m_{i+1}^{-\alpha}) D_{m_i}(x) = \sum_{i=0}^{-l} m_i^{1-\alpha} \leq C_1 m_{-l}^{1-\alpha}.$$

С другой стороны,

$$G^\alpha(x) \geq \sum_{i=0}^{-l} m_i^{-\alpha} (1 - 2^{-\alpha}) m_i \geq C_2 m_{-l}^{1-\alpha},$$

откуда легко следует, что $G^\alpha(x) \asymp x^{\alpha-1}$, $x \in (0, 1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $G^\alpha(x)$ и $\Lambda_n^\alpha(x)$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, определены в (4) и (5). Тогда

$$\widehat{G}^\alpha(x) = \min(1, |x|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (7)$$

(при $x = 0$ считаем последнее выражение равным 1), и

$$\widehat{\Lambda}_n^\alpha(x) = \max(1, |x|_{\mathbf{P}}^\alpha) X_{[0, m_n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем в силу (4) и леммы 6

$$\begin{aligned} \widehat{G}^\alpha(x) &= X_{[0,1)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} (X_{[0, m_i)}(x) - X_{[0, m_{i-1})}(x)) \\ &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ m_i^{-\alpha}, & x \in [m_{i-1}, m_i), i \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично, в силу (5) и леммы 6 получаем

$$\widehat{\Lambda}_n^\alpha(x) = X_{[0,1)} + \sum_{i=1}^n m_i^\alpha X_{[m_{i-1}, m_i)}(x) = \max(1, |x|_{\mathbf{P}}^\alpha) X_{[0, m_n)}(x).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом неравенства С. М. Никольского и доказана в работе [19].

ЛЕММА 10. Пусть $g \in \mathcal{G}_n \cap L^p(\mathbb{R}_+)$ и $1 \leq p < q \leq \infty$. Тогда $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\|g\|_q \leq m_n^{1/p-1/q} \|g\|_p$.

§ 3. Элементарные свойства Р-производной и Р-интеграла Бесселя

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$. Тогда равенство $g = D_1^\alpha(f)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\hat{g}(x) = \hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha)$ при $x \in \mathbb{R}_+$.

2) Для любого $f \in \mathcal{D}'$ и $\alpha > 0$ существует распределение $\max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) \hat{f}$, определяемое равенством $\langle \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) \hat{f}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \widehat{\Lambda_n^\alpha * f}, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Тем самым определены $\widehat{J^{-\alpha} f} = \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) \hat{f}$ и, как следствие, $J^{-\alpha} f \in \mathcal{D}'$.

3) Пусть $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq \infty$. Тогда равенство $g = D_p^\alpha(f)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\hat{g} = \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) \hat{f}$ в $\mathcal{D}'$. В частности, при $1 < p \leq 2$ последнее равенство выполнено п. в. на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $g = D_1^\alpha(f)$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - f * \Lambda_n^\alpha\|_1 = 0$. По свойству мультипликативного преобразования Фурье последовательность $\widehat{f * \Lambda_n^\alpha} = \hat{f} \widehat{\Lambda_n^\alpha}$ равномерно сходится к $\hat{g}$, т.е. $\hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) X_{[0, m_n]}(x)$ сходится к $\hat{g}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Это означает, что $\hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) = \hat{g}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$.

Обратно, пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) = \hat{g}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. В силу равенства (8) имеем при $n > l$

$$\begin{aligned} (f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha)^\wedge(x) &= \hat{f}(x) (\widehat{\Lambda_n^\alpha}(x) - \widehat{\Lambda_l^\alpha}(x)) \\ &= \hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) X_{[m_l, m_n]}(x) = \hat{g}(x) X_{[m_l, m_n]}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (9)$$

Ясно, что $\Lambda_n^\alpha - \Lambda_l^\alpha \in \mathcal{G}_n$ и это свойство верно для $f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha$. Из (9) и ограниченности $\hat{g}$ следует, что $(f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Применяя лемму 1 и теорему Фубини, находим, что

$$f * \Lambda_n^\alpha - f * \Lambda_l^\alpha = \int_{m_l}^{m_n} \hat{g}(t) \chi(\cdot, t) dt = (g - S_{m_l}(g)) - (g - S_{m_n}(g)) \quad (10)$$

на $\mathbb{R}_+$. В силу неравенства А.В. Ефимова (2) правая часть (10) стремится к нулю в $L^1(\mathbb{R}_+)$ при $n, l \rightarrow +\infty$. Таким образом, $\{f * \Lambda_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L^1(\mathbb{R}_+)$ и сходится к некоторой функции $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$, причем согласно доказательству необходимости $\hat{h}(x) = \hat{f}(x) \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) = \hat{g}(x)$ при $x \in \mathbb{R}_+$. По лемме 4 получаем $h(x) = g(x)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$.

2) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp}(\varphi) \subset B_l = [0, m_l]$, $k, n \in \mathbb{N}$ и $k > n \geq l$. Тогда по формуле (8) имеем

$$\widehat{\Lambda_k^\alpha * f} - \widehat{\Lambda_n^\alpha * f} = \hat{f} X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbb{P}}^\alpha \quad (11)$$

и по определению прозведения распределения из $\mathcal{D}'$ и функции из $\mathcal{D}$ получаем

$$\langle \widehat{\Lambda_k^\alpha * f} - \widehat{\Lambda_n^\alpha * f}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbb{P}}^\alpha \varphi \rangle = \langle \hat{f}, 0 \rangle = 0,$$

поскольку $X_{[m_n, m_k]} | \cdot |_{\mathbb{P}}^\alpha \in \mathcal{D}$ и правая часть (11) определена корректно. Значит, последовательность $\langle \widehat{\Lambda_n^\alpha * f}, \varphi \rangle$ постоянна при $n \geq l$ и имеет предел.

3) Пусть $g = D_p^\alpha(f)$. Тогда $\Lambda_n^\alpha * f \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и тем более в $\mathcal{D}'$. Поэтому $\widehat{\Lambda_n^\alpha * f} = \max(1, |x|_{\mathbb{P}}^\alpha) \hat{f} X_{[0, m_n]} \rightarrow \hat{g}$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathcal{D}'$. В силу 2) имеем

$\hat{g} = \max(1, |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha})\hat{f}$. Обратно, пусть $\hat{g} = \max(1, |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha})\hat{f}$ в $\mathcal{D}'$, где $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда в силу (8) при $k > n \geq 1$ имеем

$$\widehat{\Lambda_k^{\alpha} * f} - \widehat{\Lambda_n^{\alpha} * f} = \hat{f} X_{[m_n, m_k)} | \cdot |_{\mathbf{P}}^{\alpha} = \hat{g} (\widehat{D_{m_k}} - \widehat{D_{m_n}})$$

и по лемме 4 верно, что $\Lambda_k^{\alpha} * f - \Lambda_n^{\alpha} * f = g * (D_{m_k} - D_{m_n})$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Ясно, что L^p -норма правой части последнего равенства стремится к нулю при $n, k \rightarrow +\infty$ в силу неравенства А. В. Ефимова (2). Поэтому $\{\Lambda_n^{\alpha} * f\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и существует $D_p^{\alpha}(f)$ с преобразованием Фурье $\max(1, | \cdot |_{\mathbf{P}}^{\alpha})\hat{f}$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 из [11] получается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_{k,n} = m_n^{-1} \chi(k/m_n, x) X_{[0, m_n)}$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$J^{\alpha}(a_{k,n})(x) = \min(1, |k/m_n|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) a_{k,n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [11, лемма 3] имеем $\widehat{a_{k,n}} = X_{I_k^n}$, а по лемме 9 находим, что

$$\begin{aligned} \widehat{G^{\alpha} * a_{k,n}}(x) &= X_{[k/m_n, (k+1)/m_n)}(x) \min(1, |x|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) \\ &= \begin{cases} X_{I_k^n}(x), & 0 \leq k < m_n, \\ |k/m_n|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} X_{I_k^n}(x), & I_k^n \subset S_r, r \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Установим взаимную обратимость операторов J^{α} и D_p^{α} .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Для $g = J^{\alpha}(f)$ существует $D_p^{\alpha}(g) = f$. Если существует $D_p^{\alpha}(f) = g$, то $J^{\alpha}(g) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = J^{\alpha}(f) = G^{\alpha} * f$. Тогда

$$\widehat{G^{\alpha} * \Lambda_n^{\alpha}}(x) = \widehat{G^{\alpha}}(x) \widehat{\Lambda_n^{\alpha}}(x) = \max(1, |x|_{\mathbf{P}}^{\alpha}) \min(1, |x|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) X_{[0, m_n)}(x) = X_{[0, m_n)}(x).$$

Поскольку $\Lambda_n^{\alpha} \in \mathcal{G}_n \subset C^*(\mathbb{R}_+)$ и $G^{\alpha} * \Lambda_n^{\alpha}$ также обладает таким свойством, то по лемме 1 имеем

$$G^{\alpha} * \Lambda_n^{\alpha} = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{G^{\alpha} * \Lambda_n^{\alpha}}(x) \chi(x, y) dy = \int_0^{m_n} \chi(x, y) dy = D_{m_n}(x). \quad (12)$$

Поскольку по неравенству А. В. Ефимова $f * D_{m_n}$ сходится в $L^p(\mathbb{R}_+)$ к f , если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, и $g * \Lambda_n^{\alpha} = (G^{\alpha} * \Lambda_n^{\alpha}) * f = D_{m_n} * f$, получаем равенство $D_p^{\alpha}(g) = f$.

Пусть теперь $f * \Lambda_n^{\alpha}$ сходится к g в $L^p(\mathbb{R}_+)$. Так как $G^{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, по свойствам свертки $f * \Lambda_n^{\alpha} * G^{\alpha}$ сходится к $g * G^{\alpha}$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$. Однако согласно (12) и в силу ассоциативности свертки $f * \Lambda_n^{\alpha} * G^{\alpha} = f * D_{m_n}$ сходится к f в $L^p(\mathbb{R}_+)$. В силу единственности предела получаем $f = g * G^{\alpha} = J^{\alpha}(g)$. Теорема доказана.

Получим достаточное условие существования $D_p^{\alpha}(f)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$ и $\gamma = \min(p, 2)$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\alpha\gamma} \omega_k^\gamma(f)_p$, то существует $D_p^\alpha(f)$ и при этом

$$\|D_p^\alpha(f) - \Lambda_n^\alpha * f(x)\|_p \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{\alpha\gamma} \omega_k^\gamma(f)_p \right)^{1/\gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения Λ_n^α следует, что при $l > n$ верно равенство

$$\Lambda_l^\alpha - \Lambda_n^\alpha = \sum_{k=n+1}^l m_k^\alpha (D_{m_k} - D_{m_{k-1}}),$$

откуда по лемме 2 при $1 < p < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Lambda_l^\alpha * f - \Lambda_n^\alpha * f\|_p &= \left\| \sum_{k=n+1}^l m_k^\alpha (S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)) \right\|_p \\ &\leq C_1 \left\| \left(\sum_{k=n+1}^l m_k^{2\alpha} |S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \end{aligned}$$

При $1 < p \leq 2$ последнее выражение по неравенству Йенсена оценивается через

$$\begin{aligned} C_1 \left\| \left(\sum_{k=n+1}^l m_k^{p\alpha} |S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)|^p \right)^{1/p} \right\|_p \\ = C_1 \left(\sum_{k=n+1}^l m_k^{p\alpha} \|S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)\|_p^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (13)$$

При $2 < p < \infty$ с помощью леммы 3 получаем

$$\|\Lambda_l^\alpha * f - \Lambda_n^\alpha * f\|_p \leq C_1 \left(\sum_{k=n+1}^l \|m_k^\alpha (S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f))\|_p^2 \right)^{1/2}. \quad (14)$$

В силу неравенства А. В. Ефимова (2) находим, что

$$\|S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)\|_p \leq \|f - S_{m_k}(f)\|_p + \|f - S_{m_{k-1}}(f)\|_p \leq 2\omega_{k-1}(f)_p.$$

При $1 < p < \infty$ в силу последнего неравенства из (13) и (14) выводим

$$\begin{aligned} \|\Lambda_l^\alpha * f - \Lambda_n^\alpha * f\|_p &\leq C_1 \left(\sum_{k=n+1}^l m_k^{\alpha\gamma} \|S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)\|_p^\gamma \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{\alpha\gamma} \omega_k^\gamma(f)_p \right)^{1/\gamma}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда следует фундаментальность $\{f * \Lambda_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и существование $D_p^\alpha(f) = g$ при $1 < p < \infty$. При $p = 1$ и $\gamma = 1$ имеем

$$\|\Lambda_l^\alpha * f - \Lambda_n^\alpha * f\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m_k^\alpha \|S_{m_k}(f) - S_{m_{k-1}}(f)\|_1 \leq 2N^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} m_k^\alpha \omega_k^\gamma(f)_1, \quad (16)$$

где $p_i \leq N$ при всех $i \in \mathbb{N}$, откуда также следует существование $D_1^\alpha(f)$. Из неравенств (15) и (16) при $l \rightarrow \infty$ получаем неравенство теоремы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$, $\gamma = \min(p, 2)$ и $\{\psi(n)\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность, для которой верно условие типа Бари $\sum_{k=n}^\infty \psi^\gamma(k) = O(\psi^\gamma(n))$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если $\omega_k(f)_p = O(m_k^{-\alpha} \psi(k))$, $k \in \mathbb{N}$, то существует производная $D_p^\alpha(f)$ и при этом выполнено равенство $\|D_p^\alpha(f) - \Lambda_n^\alpha * f(x)\|_p = O(\psi(n))$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, если $f \in \text{Lip}^*(\beta, p)$, $\beta > \alpha$, то существует $D_p^\alpha(f)$ и при этом $\|D_p^\alpha(f) - \Lambda_n^\alpha * f(x)\|_p = O(m_n^{-\alpha-\beta})$, $n \in \mathbb{N}$.

Приведем поточечные аналоги теоремы 3. Если $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, для $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $x \in \mathbb{R}_+$ существует предел $d^\alpha(g)(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g * \Lambda_n^\alpha(x)$, то $d^\alpha(g)(x)$ называется **Р-ичной производной Бесселя** функции g порядка α в точке x . Соответственно, если

$$G_n^\alpha(x) = \int_0^{m_n} \chi(x, y) \min(1, |y|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) dy = D_{m_0}(x) + \sum_{i=1}^n m_i^{-\alpha} (D_{m_i}(x) - D_{m_{i-1}}(x))$$

и существует предел $j^\alpha(g)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g * G_n^\alpha(x)$, то $j^\alpha(g)(x)$ называется **Р-ичным интегралом Бесселя** функции g порядка $\alpha > 0$ в точке x .

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$. Тогда производная Бесселя $d^\alpha(J^\alpha(f))(x)$ существует и равна $f(x)$ в том и только в том случае, когда x является **Р-ичной d-точкой** функции f .

2) Если $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ и существует $D_p^\alpha(f) = g$, то интеграл Бесселя $j^\alpha(g)(x)$ существует и равен $f(x)$ тогда и только тогда, когда x является **Р-ичной d-точкой** функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из доказательства теоремы 3 следует, что для $g = J^\alpha(f)$ справедливо равенство

$$\Lambda_n^\alpha * g(x) = f * D_{m_n}(x) = m_n \int_0^{1/m_n} f(x \ominus u) du,$$

т. е. для $I^n(x) = [k/m_n, (k+1)/m_n)$ имеем

$$g * \Lambda_n^\alpha(x) = \frac{F((k+1)/m_n) - F(k/m_n)}{(k+1)/m_n - k/m_n},$$

где F является первообразной для f . Предел последнего выражения при $n \rightarrow \infty$ существует и равен $f(x)$ тогда и только тогда, когда x является **Р-ичной d-точкой** функции f .

2) Используя лемму 6 и утверждение 3) теоремы 1 аналогично доказательству леммы 9 получаем

$$\begin{aligned} \widehat{G_n^\alpha * g} &= \left(X_{[0,1)} + \sum_{i=1}^n m_i^{-\alpha} (X_{[0,m_i)} - X_{[0,m_{i-1})}) \right) \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f} \\ &= \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) X_{[0,m_n)} \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f} = \hat{f} X_{[0,m_n)}. \end{aligned}$$

Как отмечалось ранее, $f * \widehat{D_{m_n}} = \hat{f} X_{[0, m_n]}$ в $\mathcal{D}'$, поэтому $G_n^\alpha * g(x) = f * D_{m_n}(x)$ по лемме 4 п. в. на $\mathbb{R}_+$. Однако G_n^α , D_{m_n} и обе части последнего равенства принадлежат $\mathcal{G}_n$, поэтому это равенство выполнено всюду на $\mathbb{R}_+$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из 1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 5 является аналогом теорем 3.3 и 3.4 из [9], в которых рассматривались I_1^α , $\mathfrak{D}_1^\alpha$ при $p_i \equiv 2$ и их поточечные аналоги.

§ 4. Пространство L_p^α и его свойства

Пусть $\alpha > 0$ и функция $b(x)$ равна $|x|_{\mathbf{P}}^\alpha$ при $x \in [0, 1)$ и нулю при $x \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{b}(x) &= \int_0^1 |t|_{\mathbf{P}}^\alpha \overline{\chi(x, t)} dt = \sum_{k=-\infty}^0 m_k^\alpha \int_{m_{k-1}}^{m_k} \overline{\chi(x, t)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 m_k^\alpha (D_{m_k}(x) - D_{m_{k-1}}(x)). \end{aligned}$$

Ясно, что $\|\hat{b}\|_1 \leq 2 \sum_{k=-\infty}^0 m_k^\alpha < \infty$ и что функция b является $\mathbf{P}$ -непрерывной на $[0, 1)$ и на $\mathbb{R}_+$. По лемме 1 функция b является обратным преобразованием Фурье функции $\hat{b} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Для функции $d(x)$, равной $|x|_{\mathbf{P}}^\alpha$ при $x \in [0, 1)$ и 1 при $x \geq 1$, имеем равенство $d(x) = 1 - X_{[0, 1)}(x) + b(x)$. Известно, что 1 – мультипликативное преобразование Фурье обобщенной функции δ такой, что $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ (см. [14, § 7, пример 10] в p -адическом случае). Таким образом, $d(x)$ – мультипликативное преобразование Фурье меры $\mu_1 = \delta - X_{[0, 1)} + \hat{b}$. Как обычно, мера $\mu \in \mathcal{D}'$ характеризуется свойством $|\mu(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_\infty$. Введем аналог пространства бesselевых потенциалов $L_p^\alpha = \{f \in L^p(\mathbb{R}_+) : f = J^\alpha(g), g \in L^p(\mathbb{R}_+)\}$ с нормой $\|f\|_{L_p^\alpha} = \|g\|_p$ и пространство $\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)$, состоящее из функций f , для которых существует $h = \mathfrak{D}_p^\alpha(f)$, с нормой $\|f\|_{\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)} = \|f\|_p + \|h\|_p$. Следующий результат является аналогом результата И. Стейна (см. [23, теорема 1]).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha) \equiv L_p^\alpha$ и их нормы эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_p^\alpha$. Тогда $f = G^\alpha * g$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, и по лемме 9 имеем $\hat{f} = \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) \hat{g}$, откуда $\hat{f} = \hat{g}(|\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha} \hat{\mu}_1)$. Поскольку $h = g * \mu_1 \in L^p(\mathbb{R}_+)$ при $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$ (см. аналогичное утверждение в [24, п. 12.7.3] в общем случае или равенство $\delta * f = f$ в [14, § 7, пример 1]), выводим существование функции $h \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такой, что $|\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f} = \hat{h}$. По лемме 5 имеем равенство $h = \mathfrak{D}_p^\alpha(f)$, и поэтому $f \in \Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)$, причем

$$\hat{g} = (\hat{\mu}_1)^{-1} |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f} = d^{-1} |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f} = \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f}$$

(поскольку $d^{-1} |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \in G_0$, то $d^{-1} |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f} \in \mathcal{D}'$ и $\hat{g} = d^{-1} |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha \hat{f} = \hat{h} + (1 - |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f} X_{[0, 1)}$). Отсюда по лемме 4 выводим, что $g = h + f * X_{[0, 1)} - \hat{b} * f \in \mathcal{D}'$ и п. в. на $\mathbb{R}_+$. По

условию имеем $\|f\|_p \leq \|G^\alpha\|_1 \|g\|_p$. Однако $\hat{b}, X_{[0,1)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и, как следствие,

$$\|f\|_{\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)} = \|f\|_p + \|h\|_p \leq \|f\|_p(1 + \|X_{[0,1)}\|_1 + \|\hat{b}\|_1) + \|g\|_p \leq C_1 \|g\|_p = C_1 \|f\|_{L_p^\alpha},$$

$$\|f\|_{L_p^\alpha} = \|g\|_p \leq (1 + \|\hat{b}\|_1)(\|h\|_p + \|f\|_p) = (1 + \|\hat{b}\|_1) \|f\|_{\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)}.$$

Пусть теперь $f \in \Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)$ и $h = \mathfrak{D}_p^\alpha(f)$. Рассмотрим функцию $g = h + f * X_{[0,1)} - \hat{b} * f$. Тогда по лемме 5 имеем для $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, \varphi \rangle &= \langle \hat{h} + \hat{f} X_{[0,1)} - \widehat{\hat{b} * f}, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle ((\mathfrak{R}_n^\alpha - \hat{b}) * f)^\wedge, \varphi \rangle + \langle \hat{f} X_{[0,1)}, \varphi \rangle \\ &= \langle \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и по леммам 9, 4 получаем $f = J^\alpha(g)$. При этом справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p^\alpha} = \|g\|_p \leq (1 + \|\hat{b}\|_1)(\|h\|_p + \|f\|_p) = (1 + \|\hat{b}\|_1) \|f\|_{\Delta(\mathfrak{D}_p^\alpha)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 6 и [12, теорема 10] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. При $1 < p \leq 2$ справедливы вложения $\Lambda(\alpha, p, p; \mathbf{P}) \subset L_p^\alpha \subset \Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P})$, а при $2 \leq p < \infty$ имеют место обратные вложения $\Lambda(\alpha, p, 2; \mathbf{P}) \subset L_p^\alpha \subset \Lambda(\alpha, p, p; \mathbf{P})$. В частности, $L_2^\alpha = \Lambda(\alpha, 2, 2; \mathbf{P})$.

Для дальнейшего нам понадобится оценка степени суммируемости и гладкости ядра G^α .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 1 - 1/p$. Тогда $G^\alpha \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и, более того, $G^\alpha \in \text{Lip}^*(\alpha - 1 + 1/p, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (4) и леммы 6 имеем

$$\|G^\alpha\|_p \leq \|D_{m_0}\|_p + \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} (\|D_{m_i}\|_p + \|D_{m_{i-1}}\|_p) \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i^{-\alpha} 2m_i^{1-1/p} < \infty$$

при $\alpha > 1 - 1/p$. Аналогично,

$$\begin{aligned} E_{m_n}(G^\alpha)_p &\leq \|G^\alpha - S_{m_n}(G^\alpha)\|_p \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} m_i^{-\alpha} (\|D_{m_i}\|_p + \|D_{m_{i-1}}\|_p) \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} m_i^{-\alpha} 2m_i^{1-1/p} \leq C_1 m_n^{-\alpha+1-1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В силу неравенства А. В. Ефимова (2) получаем, что $G^\alpha \in \text{Lip}^*(\alpha - 1 + 1/p, p)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $\mathbb{R}^n$ и потенциала Бесселя теорема вложения Харди–Литтлвуда–Соболева устанавливается обычно путем сравнения ядер Бесселя и Рисса и применения такой же теоремы для потенциала Рисса. В нашем случае функция $G^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} (m_i^{-\alpha} - m_{i+1}^{-\alpha}) D_{m_i}$ везде неотрицательна, чего нельзя сказать о ядрах W_n^α , задающих I^α (см., например, [7, формула (2.4)] при $\alpha = 1$ и $p_i \equiv 2$). Поэтому докажем непосредственно следующий аналог теоремы 15 из [11].

ТЕОРЕМА 8. 1) Если $1 \leq p \leq q < \infty$ и $\alpha > 1/p - 1/q$, то L_p^α непрерывно вложено в $L^q(\mathbb{R}_+)$.

2) Если $1 \leq p < q < \infty$ и $\alpha = 1/p - 1/q \in (0, 1)$, то L_p^α непрерывно вложено в $L^q(\mathbb{R}_+)$.

3) Пусть $f \in L_p^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $\alpha - \beta \geq 1/p - 1/q$ при $1 < p < \infty$ и $\alpha - \beta > 1 - 1/q$ при $p = 1$. Тогда $f \in L_q^\beta(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $1/p - 1/q = 1 - 1/r$, $r \in [1, +\infty]$, и $f = J^\alpha(g)$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\alpha > 1 - 1/r$ и по теореме 7 верно, что $G^\alpha \in L^r(\mathbb{R}_+)$, а по неравенству Юнга имеем

$$\|f\|_q \leq \|g\|_p \|G^\alpha\|_r = \|f\|_{L_p^\alpha} \|G^\alpha\|_r < \infty,$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть $G^\alpha = G^\alpha X_{[0, 1/m_k)} + G^\alpha X_{[1/m_k, 1)} =: G_1 + G_2$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $0 \leq G_1(x) \leq G^\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $G_1 \in L^1(\mathbb{R}_+)$, и для $x \in [1/m_l, 1/m_{l-1})$, $1 \leq l \leq k$, имеем по лемме 8 неравенство $G_2(x) \leq C_1 x^{\alpha-1}$. Аналогичная оценка справедлива для G_1 при $l \geq k+1$ и $x \in [1/m_{l-1}, 1/m_l)$. Используя оценку ядра G_2 и неравенство Гёльдера при $1/p + 1/p' = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|f * G_2\|_\infty &\leq \|f\|_p \|G_2\|_{p'} \leq \|f\|_p C_1 \left(\int_{1/m_k}^1 x^{(\alpha-1)p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq C_2 \left(\frac{1}{m_k} \right)^{((\alpha-1)p'+1)/p'} \|f\|_p = C_2 m_k^{1/q} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \in (0, 2C_2\|f\|_p] =: (0, C_3]$. Тогда по неравенству Чебышева и частному случаю неравенства Юнга мы находим, что

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}_+ : |J^\alpha(f)(x)| > \lambda\}| &\leq \lambda^{-p} \|f * G^\alpha\|_p^p \leq C_3^{q-p} \lambda^{-q} \|f\|_p^p \|G^\alpha\|_1^p \\ &= (2C_2)^{q-p} \lambda^{-q} \|f\|_p^q \|G^\alpha\|_1^p. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $\lambda/2 > C_2\|f\|_p$, то

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}_+ : |J^\alpha(f)(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}_+ : |f * G_1^\alpha(x)| > \lambda/2\}| \\ &\quad + |\{x \in \mathbb{R}_+ : |f * G_2^\alpha(x)| > \lambda/2\}| \end{aligned} \quad (18)$$

и можно найти $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $C_2\|f\|_p m_k^{1/q} \leq \lambda/2$. Наибольшее k с таким свойством удовлетворяет неравенству $m_k \geq C_4 \lambda^q / \|f\|_p^q$, и $m_k^{-\alpha p} \leq C_5 \lambda^{-\alpha p q} \|f\|_p^{\alpha p q}$. Выбирая такое k , получаем, что второе слагаемое в правой части (18) равно нулю и

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : |f * G_1^\alpha(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| &\leq \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{-p} \|f * G_1\|_p^p \leq 2^p \lambda^{-p} \|f\|_p^p \|G_1\|_1^p \\ &\leq C_6 \lambda^{-p} \|f\|_p^p \left(\int_0^{1/m_k} x^{\alpha-1} dx \right)^p \leq C_7 \lambda^{-p} \|f\|_p^p m_k^{-\alpha p} \leq C_8 \lambda^{-q} \|f\|_p^q, \end{aligned} \quad (19)$$

поскольку $-p - \alpha p q = p q (-1/q - \alpha) = p q (-1/p) = -q$. Из (17) и (19) получаем, что J^α имеет слабый тип (p, q) при $1 \leq p < q < \infty$ и $\alpha = 1/p - 1/q$, откуда по лемме 7 он имеет сильный тип (p, q) при $1 < p < q < \infty$ и $\alpha = 1/p - 1/q$.

3) По условию имеем $f = G^\alpha * g$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда существует $h = G^{\alpha-\beta} * g$, причем по утверждениям 1), 2) теоремы имеем $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$. Ясно, что

$$\widehat{h * G^\beta} = \hat{g} \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\beta}) \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{\beta-\alpha}) = \hat{g} \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\alpha}) = \hat{f},$$

откуда по лемме 4 имеем $f = h * G^\beta$, т. е. $f \in L_q^\beta(\mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение 2) теоремы 8 является аналогом теоремы вложения Харди–Литтлвуда–Соболева. Утверждение 3) теоремы 8 является аналогом теоремы вложения П. И. Лизоркина (см. [25, теорема 10]).

ТЕОРЕМА 9. 1) Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $L_p^\alpha \subset \text{lip}^*(\alpha, p)$.

2) Рассмотрим величину $K_\alpha(f)(x) = \sup_{h>0} |f(x \oplus h) - f(x)|/h^\alpha$. Если $f \in L_p^\alpha$, $1/p < \alpha < 1$, то $K_\alpha(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\|K_\alpha(f)\|_p \leq C\|f\|_{L_p^\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in L_p^\alpha$. Тогда $f = G^\alpha * g$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Найдем $t_n, g_n \in \mathcal{G}_n$ такие, что $\|G^\alpha - t_n\|_1 = \mathcal{E}_{m_n}(G^\alpha)_1$ и $\|g - g_n\|_p = \mathcal{E}_{m_n}(g)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|(G^\alpha - t_n) * (g - g_n)\|_p \leq \|G^\alpha - t_n\|_1 \|g - g_n\|_p \leq \mathcal{E}_{m_n}(G^\alpha)_1 \mathcal{E}_{m_n}(g)_p. \quad (20)$$

По теореме 7 и неравенству А. В. Ефимова (2) имеем $\|G^\alpha - t_n\|_1 \leq C_1 m_n^{-\alpha}$, а $\|g - g_n\|_p = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, откуда следует необходимое.

2) Пусть $f \in L_p^\alpha$, т. е. $f = G^\alpha * g$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$f(x \oplus h) - f(x) = (G^\alpha(\cdot \oplus h) - G^\alpha(\cdot)) * g(x)$$

и для $p > q > 1/\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x \oplus h) - f(x)| &\leq \int_{|y|_{\mathbf{P}} \leq |h|_{\mathbf{P}}} |G^\alpha(y \oplus h) - G^\alpha(y)| |g(x \ominus y)| dy \\ &\quad + \int_{|y|_{\mathbf{P}} > |h|_{\mathbf{P}}} |G^\alpha(y \oplus h) - G^\alpha(y)| |g(x \ominus y)| dy = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Однако при $|y|_{\mathbf{P}} > |h|_{\mathbf{P}}$ числа $y \oplus h$ и y принадлежат одному $S_l = [m_{l-1}, m_l)$, а на каждом S_l любая функция $D_{m_i}(x)$ и, как следствие, функция $G^\alpha(x)$ постоянны. Поэтому $I_2(x) = 0$. С другой стороны, по теореме 7

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leq \left(\int_{|y|_{\mathbf{P}} \leq |h|_{\mathbf{P}}} |G^\alpha(y \oplus h) - G^\alpha(y)|^{q'} dy \right)^{1/q'} \left(\int_{|y|_{\mathbf{P}} \leq |h|_{\mathbf{P}}} |g(x \ominus y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &\leq C_1 |h|_{\mathbf{P}}^{\alpha-(1-1/q')} |h|_{\mathbf{P}}^{1/q} \left(|h|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|y|_{\mathbf{P}} \leq |h|_{\mathbf{P}}} |g(x \ominus y)|^q dy \right)^{1/q} \leq C_1 |h|_{\mathbf{P}}^\alpha M_q(g)(x). \end{aligned}$$

Поскольку стандартная максимальная функция обладает свойством $\|M(f)\|_p \leq C_2 \|f\|_p$, $1 < p < \infty$ (см. [15, гл. 4, теорема 1.7] в случае локальных полей, для нашей максимальной функции доказательство аналогично), то M_q обладает таким же свойством при $q > p$. Поэтому

$$K_\alpha(f)(x) = \sup_{h>0} \frac{|f(x \oplus h) - f(x)|}{h^\alpha} \leq C_3 M_q(f)(x)$$

и $\|K_\alpha(f)\|_p \leq C_4 \|g\|_p = C_4 \|f\|_{L_p^\alpha}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Результат утверждения 2) теоремы 9 является аналогом теоремы К. П. Кальдерона, Ю. Фабеса и Н. М. Ривьера из [26].

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\alpha, \beta > 0$, $1 \leq p < \infty$. Тогда J^β изоморфно отображает $\text{Lip}^*(\alpha, p)$ на $\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$, т. е. нормы $\|f\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)}$ и $\|J^\beta(f)\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)}$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \text{Lip}^*(\alpha, p)$. Согласно теореме 7 и неравенству А. В. Ефимова получаем $\mathcal{E}_{m_n}(G^\beta)_1 \leq C_1 m_n^{-\beta}$ и $\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq \|f\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)} m_n^{-\alpha}$, откуда аналогично (20) имеем

$$\omega_n(f * G^\beta)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(f * G^\beta)_p \leq 2\mathcal{E}_{m_n}(G^\beta)_1 \mathcal{E}_{m_n}(f)_p \leq 2C_1 \|f\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)} m_n^{-\alpha-\beta}.$$

Из последнего неравенства находим, что $\|J^\beta(f)\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} \leq (\|G^\beta\|_1 + 2C_1) \times \|f\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)}$. Отметим, что равенство $J^\beta(f_1) = J^\beta(f_2)$ возможно только при $f_1 = f_2$ п. в. на $\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $g \in \text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$ и $\gamma = \min(p, 2)$. Тогда по теореме 4 существует $D_p^\beta(g) = h$ и при этом

$$\begin{aligned} \|D_p^\beta(g) - \Lambda_n^\beta * g\|_p &\leq C_2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{\gamma\beta} (\|g\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_k^{-\alpha-\beta})^\gamma \right)^{1/\gamma} \\ &\leq C_3 \|g\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

Однако $\Lambda_n^\beta \in \mathcal{G}_n$ и $g * \Lambda_n^\beta$ также обладает этим свойством, поэтому по неравенству А. В. Ефимова имеем $h \in \text{Lip}^*(\alpha, p)$, причем

$$\widehat{J^\beta(h)} = \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\beta}) \hat{h} = \min(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^{-\beta}) \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\beta) \hat{g} = \hat{g}.$$

По лемме 4 находим, что $J^\beta(h) = g$, т. е. $g \in J^\beta(\text{Lip}^*(\alpha, p))$ и J^β отображает $\text{Lip}^*(\alpha, p)$ взаимно однозначно на все $\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$. Пусть $J^{-\beta}$ — обратный к J^β оператор из $\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$ в $\text{Lip}^*(\alpha, p)$. Если $g_m \rightarrow g$ в $\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$, то для $h_m = D_p^\beta(g_m)$, $h = D_p^\beta(g)$ и $\tau \in [0, 1/m_n]$ согласно (21) имеем

$$\begin{aligned} &\|h(\cdot \oplus \tau) - h_m(\cdot \oplus \tau) - h(\cdot) + h_m(\cdot)\|_p \\ &\leq 2C_3 \|g - g_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha} + \|\Lambda_n^\beta * (g(\cdot \oplus \tau) - g_m(\cdot \oplus \tau) - g(\cdot) + g_m(\cdot))\|_p \\ &\leq 2C_3 \|g - g_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha} + C_4 \|\Lambda_n^\beta\|_1 \|g - g_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha-\beta} \\ &\leq C_5 \|g - g_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (22)$$

так как

$$\|\Lambda_n^\beta\|_1 \leq 1 + \sum_{i=1}^n m_i^\beta (\|D_{m_i}\|_1 + \|D_{m_{i-1}}\|_1) \leq C_6 m_n^\beta. \quad (23)$$

Из соотношения (22) и доказываемого аналогично неравенства

$$\|h - h_m\|_p \leq C_3 \|g - g_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)} m_n^{-\alpha} + \|\Lambda_n^\beta\|_1 \|g - g_m\|_p$$

следует, что $\|h - h_m\|_{\text{Lip}^*(\alpha, p)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор $J^{-\beta}$ ограничен из $\text{Lip}^*(\alpha + \beta, p)$ в $\text{Lip}^*(\alpha, p)$, что завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь вложения пространства $J^\alpha(L^p(\mathbb{R}_+)) = L_p^\alpha$ в случаях $\alpha = 1/p$ и $\alpha > 1/p$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha < 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Тогда $J^\alpha(f) \in \text{lip}^*(\alpha - 1/p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1/p + 1/p' = 1$, и пусть $t_n, g_n \in \mathcal{G}_n$ таковы, что $\|f - g_n\|_p = \mathcal{E}_{m_n}(f)_p$ и $\|G^\alpha - t_n\|_{p'} = \mathcal{E}_{m_n}(G^\alpha)_{p'}$. С помощью неравенства Гёльдера аналогично (20) имеем

$$\mathcal{E}_{m_n}(J^\alpha(f))_\infty \leq \|(G^\alpha - t_n) * (f - g_n)\|_\infty \leq \|G^\alpha - t_n\|_{p'} \|f - g_n\|_p.$$

Согласно теореме 7 получаем $\mathcal{E}_{m_n}(G^\alpha)_{p'} \leq C_1 m_n^{-\alpha+1/p}$ и, кроме того, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_p = 0$. Отсюда по неравенству А. В. Ефимова (2) заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\alpha-1/p} \omega_n(J^\alpha(f))_\infty = 0,$$

т. е. $J^\alpha(f) \in \text{lip}^*(\alpha - 1/p)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha = 1/p$. Тогда $J^\alpha(f) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку норма в $L^p(\mathbb{R}_+)$ и полунорма в $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ инвариантны относительно $\mathbf{P}$ -ичного сдвига, будем оценивать осцилляцию $J^\alpha(f)$ на $I = [0, 1/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $c_I = \int_{1/m_n}^\infty G^\alpha(0 \ominus t) f(t) dt$, $f_1 = fX_{[0, 1/m_n)}$, $f_2 = f - f_1$. Тогда

$$\begin{aligned} |I|^{-1} \int_I |G^\alpha * f(x) - c_I| dx \\ \leq m_n \int_I |G^\alpha * f_1(x)| dx + m_n \int_I |G^\alpha * f_2(x) - c_I| dx =: A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Если $1/p_0 - 1/q_0 = \alpha = 1/p$, в частности $p_0 < p$, то по теореме 8 справедливо неравенство $\|G^\alpha * f_1\|_{q_0} \leq C_1 \|f\|_{p_0}$. Применяя дважды неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} A_1 &\leq m_n \|G^\alpha * f_1\|_{q_0} \|X_{[0, 1/m_n)}\|_{q'_0} \\ &\leq C_1 m_n^{1/q_0} \|fX_{[0, 1/m_n)}\|_{p_0} \leq C_1 m_n^{1/q_0} \|f\|_p \|X_{[0, 1/m_n)}\|_{q_0} = C_1 \|f\|_p. \end{aligned}$$

Далее,

$$G^\alpha * f_2(x) - c_I = \int_{1/m_n}^\infty (G^\alpha(x \ominus t) - G^\alpha(0 \ominus t)) f(t) dt.$$

Поскольку нас интересует случай $x \in [0, 1/m_n)$, отметим, что при $t \in S_l = [m_{l-1}, m_l)$ и $l \geq -n+1$ (т. е. при $t \geq 1/m_n$) справедливы включения $x \ominus t, 0 \ominus t \in S_l$. Значит, $D_{m_i}(x \ominus t) = D_{m_i}(0 \ominus t)$ при всех $i \in \mathbb{Z}_+$, откуда $G^\alpha(x \ominus t) - G^\alpha(0 \ominus t) = 0$ и $A_2 = 0$. Из полученных оценок и неравенства (3) выводим, что $\|J^\alpha(f)\|_* \leq 2C_1 \|f\|_p$.

Пусть теперь $f_n \in \mathcal{G}_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Тогда по доказанному выше $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J^\alpha(f_n) - J^\alpha(f)\|_* = 0$. Однако $J^\alpha(f_n) = G^\alpha * f_n$ также принадлежит $\mathcal{G}_n$,

и для этих функций имеем равенство $|J^\alpha(f_n) - (J^\alpha(f_n))_I|_I = 0$ при $I = I_k^l, l \geq n, k \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $J^\alpha(f_n) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, и в силу полноты $\text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ получаем, что $J^\alpha(f) \in \text{VMO}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Результаты теорем 11, 12 переносятся на случай потенциала Бесселя и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Вместо приближений функциями из $\mathcal{G}_n$ рассматриваются наилучшие приближения $A_\sigma(f)_p$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ (т.е. из пространства E_σ) в $L^p(\mathbb{R})$. Согласно [27, гл. 3, теорема 3.6.2] если $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap E_\sigma, g \in L^{p'}(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$, то $f \circ g := \int_{\mathbb{R}} f(\cdot - t)g(t) dt \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap E_\sigma$, а если $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap E_\sigma, g \in L^p(\mathbb{R})$, то $f \circ g \in L^p(\mathbb{R}) \cap E_\sigma$. Вместо теоремы 7 применяем свойство 4 ядер Бесселя из [28, с. 428], а вместо неравенства А. В. Ефимова (2) – прямую и обратную теоремы приближения целыми функциями экспоненциального типа (см. [29, пп. 5.1.3, 6.1.6]) для модуля непрерывности первого порядка. Так доказываются аналог теоремы 11. Ограниченность потенциала Бесселя порядка α из $L^p(\mathbb{R})$ в $\text{VMO}(\mathbb{R})$ при $\alpha = 1/p$ установлена И. Стейном и А. Зигмундом [30], а функции из $L^p(\mathbb{R}) \cap E_\sigma$ ограничены и равномерно непрерывны в силу неравенств Никольского–Бернштейна (см. [29, гл. 3]), откуда следует их принадлежность $\text{VMO}(\mathbb{R})$. Так доказывается аналог теоремы 12.

Следуя [31], докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13. 1) Пусть $f(x) \geq 0$ измерима на $\mathbb{R}_+, 0 < \theta, \alpha < 1$. Тогда

$$J^{\alpha\theta}(f)(x) \leq C(J^\alpha(f)(x))^\theta (M(f)(x))^{1-\theta}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

2) Пусть $1 < p, q < \infty, 0 < \alpha, \beta < 1, \theta \in (0, 1), f(x) \geq 0$ измерима на $\mathbb{R}_+$. Тогда для $\gamma = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta$ и $1/r = \theta/p + (1 - \theta)/q$ справедливо неравенство $\|J^\gamma(f)\|_r \leq C\|J^\alpha(f)\|_p\|J^\beta(f)\|_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем согласно определению

$$J^\alpha(f)(x) = \int_0^{m_n} f(x \ominus y)G^\alpha(y) dy + \int_{m_n}^\infty f(x \ominus y)G^\alpha(y) dy =: J_1(x) + J_2(x).$$

Тогда по лемме 8 имеем

$$\begin{aligned} J_1(x) &\leq \sum_{i=-\infty}^{\min(n,0)} \int_{m_{i-1}}^{m_i} C_1 y^{\alpha-1} f(x \ominus y) dy \leq C_1 \sum_{i=-\infty}^{\min(n,0)} m_i^\alpha m_i^{-1} \int_0^{m_i} f(x \ominus y) dy \\ &\leq C_2 m_{\min(n,0)}^\alpha M(f)(x) \leq C_2 m_n^\alpha M(f)(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Считая, что $0 < \alpha/\theta < 1$, по лемме 8 при $n < 0$ получаем

$$\begin{aligned} J_2(x) &\leq \int_{m_n}^1 C_1 y^{\alpha-1} f(x \ominus y) dy \leq m_n^{\alpha-\alpha/\theta} C_1 \int_{m_n}^1 y^{\alpha/\theta-1} f(x \ominus y) dy \\ &\leq C_3 m_n^{\alpha-\alpha/\theta} \int_{m_n}^\infty G^{\alpha/\theta}(y) f(x \ominus y) dy \leq C_3 m_n^{\alpha-\alpha/\theta} J^{\alpha/\theta}(f)(x). \end{aligned} \quad (25)$$

При $n \geq 0$ справедливо равенство $J_2(x) = 0$ и (25) тем более верно. Поскольку $p_i \leq N$ при всех $i \in \mathbb{N}$, то для $\delta \in [m_{i-1}, m_i]$ в силу (24) имеем

$$\int_0^\delta G^\alpha(y) f(x \ominus y) dy \leq \int_0^{m_i} G^\alpha(y) f(x \ominus y) dy \leq C_2 m_i^\alpha M(f)(x) \leq C_2 N^\alpha \delta^\alpha M(f)(x) \quad (26)$$

и, аналогично, в силу (25) получаем

$$\int_\delta^\infty G^\alpha(y) f(x \ominus y) dy \leq \int_{m_{i-1}}^\infty G^\alpha(y) f(x \ominus y) dy \leq C_3 N^{\alpha-\alpha/\theta} \delta^{\alpha-\alpha/\theta} J^{\alpha/\theta}(f)(x). \quad (27)$$

Здесь N – мажоранта последовательности $\{p_i\}_{i=1}^\infty$. Заменяя в (26) и (27) показатель α на $\alpha\theta$ и учитывая, что $0 < \alpha = \alpha\theta/\theta < 1$, находим, что

$$J^{\alpha\theta}(f)(x) = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty \right) G^{\alpha\theta}(y) f(x \ominus y) dy \leq C_4 (\delta^{\alpha\theta} M(f)(x) + \delta^{\alpha\theta-\alpha} J^\alpha(f)(x)).$$

Полагая $\delta = (J^\alpha(f)(x)/M(f)(x))^{1/\alpha}$ (в случае $M(f)(x) = 0$ функция $f(x)$ равна нулю почти всюду), получаем утверждение 1).

2) Из утверждения 1) в силу ограниченности отображения $M(f)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, и неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\begin{aligned} \|J^{a\theta}(f)\|_r &\leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}_+} (J^a(f)(x))^{r\theta p_1} dx \right)^{1/(r p_1)} \left(\int_{\mathbb{R}_+} (M(f)(x))^{r(1-\theta)p'_1} dx \right)^{1/(r p'_1)} \\ &\leq C_6 \|J^a(f)\|_{r\theta p_1}^\theta \|f\|_{r(1-\theta)p'_1}^{1-\theta}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $a, \theta \in (0, 1)$ и $p_1 \in (1, +\infty)$ (при $a = 0$ неравенство (28) следует сразу из неравенства Гёльдера). Потребуем, чтобы $r\theta p_1$ было равно p , а $r(1-\theta)p'_1$ равно q . Исключая θ из этих равенств, находим, что $1/p_1 = (r-q)/(p-q)$, откуда получаем $\theta = (p(r-q))/(r(p-q))$. Если $p > q$, то и $r > q$, откуда $\theta > 0$ и $\theta < 1$. Аналогичные неравенства получаем при $p < q$, а в случае $p = q$ подходят любое $\theta \in (0, 1)$ и $p_1 = 1/\theta$. Пусть $\alpha \geq \beta$. Подставляя в неравенство (28) функцию $J^\beta(f)$ вместо f и требуя выполнения равенств $\alpha = a + \beta$ и $\gamma = a\theta + \beta$, получаем, что $\gamma = \alpha\theta + (1-\theta)\beta$, $1/r = \theta/p + (1-\theta)/q$ и

$$\|J^\gamma(f)\|_r = \|J^{a\theta}(J^\beta(f))\|_r \leq C_6 \|J^a(J^\beta(f))\|_p \|J^\beta(f)\|_q = C_6 \|J^\alpha(f)\|_p \|J^\beta(f)\|_q,$$

откуда следует утверждение 2). Теорема доказана.

§ 5. Заключительные замечания

Известно [19, следствие 2], что при $1 < p \leq 2$ из $f \in \text{Lip}^*(\alpha, p)$, $\alpha > 1/p$, следует, что $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Из утверждения 1) теоремы 9 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p \leq 2$, $\alpha > 1/p$, $f \in L_p^\alpha(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\alpha > 0$. Поскольку $\widehat{G^\alpha} \in \mathcal{G}_0$, для $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $\widehat{G^\alpha \varphi} \in \mathcal{D}$, и $\widehat{J^\alpha(f)} \in \mathcal{D}'$ определяется для любого $f \in \mathcal{D}'$ равенством $\langle \widehat{J^\alpha(f)}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \widehat{G^\alpha \varphi} \rangle$. Тем самым определено распределение $J^\alpha(f) \in \mathcal{D}'$. Распределение $J^{-\alpha}(f)$ для $f \in \mathcal{D}'$ и $\alpha > 0$ определено ранее, в теореме 1.

ТЕОРЕМА 14. 1) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $2 \leq p < \infty$. Если обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$ такова, что $\hat{f}$ – регулярная обобщенная функция, причем при $\alpha < 0$ требуем также $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ и $\widehat{J^{-\alpha}(f)} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, то $f \in \dot{B}_{p,p'}^\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ и справедливо неравенство $\|f\|_{\dot{B}_{p,p'}^\alpha} \leq \|\widehat{J^{-\alpha}(f)}\|$.

2) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq 2$ и $f \in \dot{B}_{p,p'}^{-\alpha}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$. Тогда $\hat{f}$ – регулярная обобщенная функция и $\|\widehat{J^\alpha(f)}\|_{p'} \leq \|f\|_{\dot{B}_{p,p'}^{-\alpha}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\alpha \geq 0$. По определению включение $\widehat{J^{-\alpha}(f)} = \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ влечет $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, где $1 < p' \leq 2$. Поэтому существует функция $(\hat{f} X_{[0,m_k]})^\sim = f * D_{m_k} \in L^p(\mathbb{R}_+)$ (так как $f * \widehat{D_{m_k}} = \hat{f} X_{[0,m_k]}$ в D' , то $(f * \widehat{D_{m_k}})^\sim = f * D_{m_k} = (\hat{f} X_{[0,m_k]})^\sim$ в D' и п. в. на $\mathbb{R}_+$) и по неравенству Хаусдорфа–Юнга имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,p'}^\alpha} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\alpha p'} \|f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}}\|_{p'}^{p'} + \|f * D_{m_0}\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\alpha p'} \|\hat{f} X_{[0,m_k]} - \hat{f} X_{[0,m_{k-1}]}\|_{p'}^{p'} + \|\hat{f} X_{[0,1]}\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{m_{k-1}}^{m_k} |\hat{f}(t)|^{p'} (\max(1, |t|_{\mathbf{P}}^\alpha))^{p'} dt + \int_0^1 |\hat{f}(t)|^{p'} (\max(1, |t|_{\mathbf{P}}^\alpha))^{p'} dt \right)^{1/p'} \\ &= \|\max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^\alpha) \hat{f}\|_{p'} = \|\widehat{J^{-\alpha}(f)}\|_{p'}. \end{aligned} \quad (29)$$

При $\alpha < 0$ доказательство аналогично, только $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ не следует из $\widehat{J^{-\alpha}(f)} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, и выполнение этого условия мы требуем дополнительно.

2) По условию $f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, и $f * D_{m_0}$ принадлежат $L^p(\mathbb{R}_+)$. Поэтому $f * D_{m_n} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $f * \widehat{D_{m_n}} = \hat{f} X_{[0,m_n]} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. Отсюда следует регулярность $\hat{f}$. По неравенству Хаусдорфа–Юнга (см. (29)), теореме 1 и равенству (7) находим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,p'}^{-\alpha}} &\geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha p'} \|\hat{f} X_{[0,m_k]} - \hat{f} X_{[0,m_{k-1}]}\|_{p'}^{p'} + \|\hat{f} X_{[0,1]}\|_{p'}^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \|(\max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}))^{-\alpha} \hat{f}\|_{p'} = \|\widehat{J^\alpha(f)}\|_{p'}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для преобразований Фурье в пространстве Л. Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ близкий результат получен В. И. Буренковым [32].

При $\alpha = 0$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $1 \leq p \leq 2$ и $f \in \dot{B}_{p,p'}^0(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, то $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$.

В качестве еще одного следствия из теоремы 14 получим аналог теоремы 5 из [32].

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leq p_1 \leq 2 \leq p_2 < +\infty$, $1 \leq q_1 \leq 2 \leq q_2 < +\infty$, $\beta_1 = \alpha_1 - (1/p_1 - 1/p_2)$. Если $f \in \mathcal{D}'$ таково, что $\hat{f}$ -регулярная обобщенная функция, причем $(J^{\beta_1 - \alpha_2}(f))^\wedge \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $g \in \dot{B}_{p_1, q_1}^{\alpha_1}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$, то существует свертка $f * g$, определяемая как $(\hat{f}\hat{g})^\wedge$, и справедливо неравенство

$$\|f * g\|_{\dot{B}_{p_2, q_2}^{\alpha_2}} \leq C \|J^{\beta_1 - \alpha_2}(f)\|_\infty \|g\|_{\dot{B}_{p_1, q_1}^{\alpha_1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что в силу неравенства Йенсена

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{q_1} \right)^{1/q_1}, \quad a_i \geq 0, \quad 0 < q_1 \leq q_2 < \infty,$$

верно неравенство $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p, q_2}^\alpha} \leq \|\cdot\|_{\dot{B}_{p, q_1}^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. Из условия $g \in \dot{B}_{p_1, q_1}^{\alpha_1}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ следует, что $g * D_{m_n} \in L^{p_1}(\mathbb{R}_+)$ и $\widehat{g * D_{m_n}} = \hat{g}X_{[0, m_n]} \in L^{p'_1}(\mathbb{R}_+) \subset L^2(\mathbb{R}_+)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, поскольку $p'_1 \geq 2$. С другой стороны, так как $J^{\beta_1 - \alpha_2}(f) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, по теореме 1 при $\beta_1 - \alpha_2 < 0$ и по лемме 9 при $\beta_1 - \alpha_2 > 0$ получаем ограниченность $\hat{f}$ на всех $S_l = [m_{l-1}, m_l]$, $l \in \mathbb{N}$, и на $[0, 1)$. Поэтому $\hat{f}\hat{g}X_{[m_{l-1}, m_l]} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и по теореме Планшереля $f * g * (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\|f * g * (D_{m_i} - D_{m_{i-1}})\|_2 = \|\hat{f}\hat{g}X_{[m_{i-1}, m_i]}\|_2, \quad i \in \mathbb{N},$$

и, аналогично, $\|f * g * D_{m_0}\|_2 = \|\hat{f}\hat{g}X_{[0, 1]}\|_2$. Поскольку $\hat{f}\hat{g} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$, то $f * g = (\hat{f}\hat{g})^\wedge \in \mathcal{D}'$. С помощью леммы 10 находим, что

$$\begin{aligned} \|f * g * D_{m_i} - f * g * D_{m_{i-1}}\|_{p_2} &\leq C_1 m_i^{1/2-1/p_2} \|f * g * D_{m_i} - f * g * D_{m_{i-1}}\|_2 \\ &\leq C_1 m_i^{1/2-1/p_2} \|\hat{f}\hat{g}X_{[m_{i-1}, m_i]}\|_2, \end{aligned} \quad (30)$$

и тем же способом получаем

$$\|f * g * D_{m_0}\|_{p_2} \leq C_1 \|f * g * D_{m_0}\|_2 = C_1 \|\hat{f}\hat{g}X_{[0, 1]}\|_2. \quad (31)$$

Из левых неравенств в (30) и (31) вытекает неравенство

$$\|f * g\|_{\dot{B}_{p_2, q}^\alpha} \leq C_1 \|f * g\|_{\dot{B}_{2, q}^{\alpha+1/2-1/p_2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq q < \infty. \quad (32)$$

С помощью правого неравенства в (30) и равенства в (31), отмеченного выше неравенства $\|\cdot\|_{\dot{B}_{2, q_2}^\alpha} \leq \|\cdot\|_{\dot{B}_{2, 2}^\alpha}$, условия и утверждения 2) теоремы 14 получаем

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\dot{B}_{p_2, q_2}^{\alpha_2}} &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} m_i^{2(\alpha_2+1/2-1/p_2)} \|\hat{f}\hat{g}X_{[m_{i-1}, m_i]}\|_2^2 + \|\hat{f}\hat{g}X_{[0, 1]}\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_1 \|(\max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}})^{\alpha_2 - \beta_1} \hat{f})\|_\infty \left(\int_0^\infty (\max(1, |t|_{\mathbf{P}})^{2(\alpha_1+1/2-1/p_1)} |\hat{g}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= C_1 \|J^{\beta_1 - \alpha_2}(f)\|_\infty \|(J^{-(\alpha_1+1/2-1/p_1)}(g))^\wedge\|_2 \\ &\leq C_2 \|J^{\beta_1 - \alpha_2}(f)\|_\infty \|g\|_{\dot{B}_{2, 2}^{\alpha_1+1/2-1/p_1}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Как и в (32), с помощью аналога неравенства Никольского и неравенства Йенсена получаем

$$\|g\|_{\dot{B}_{2,2}^{\alpha_1+1/2-1/p_1}} \leq C_3 \|g\|_{\dot{B}_{p_1,2}^{\alpha_1}} \leq C_3 \|g\|_{\dot{B}_{p_1,q_1}^{\alpha_1}}.$$

Подставляя последнее неравенство в (33), завершаем доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Обобщая рассуждения из доказательства теоремы 15, мы приходим к неравенству $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p_2,q_2}^{\alpha+1/p_2-1/p_1}} \leq C \|\cdot\|_{\dot{B}_{p_1,q_1}^{\alpha}}$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ и $1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$.

Из (20) и теоремы 7 вытекает, что если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, имеет производную $D_p^\beta(f) = g$, $\beta > 0$, то $E_{m_n}(f)_p \leq C m_n^{-\beta} E_{m_n}(g)_p$, т. е. верен аналог теоремы Джексона. С другой стороны, справедлив следующий аналог неравенства Бернштейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{G}_n$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $D_p^\alpha(f) \in \mathcal{G}_n$ и $\|D_p^\alpha(f)\|_p \leq C m_n^\alpha \|f\|_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $S_{m_n}(f) \in \mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\Lambda_k^\alpha * S_{m_n}(f) = \Lambda_k^\alpha * D_{m_n} * f$, где

$$\Lambda_k^\alpha * D_{m_n} = \sum_{i=1}^k m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) * D_{m_n} + D_{m_0} * D_{m_n}.$$

Поскольку

$$\widehat{D_{m_k} * D_{m_l}} = \widehat{D_{m_k}} \widehat{D_{m_l}} = X_{[0,m_k]} X_{[0,m_l]} = X_{[0,m_l]}$$

при $k \geq l$, что по лемме 4 или лемме 1 влечет равенство $D_{m_k} * D_{m_l} = D_{m_l}$, то

$$\begin{aligned} \Lambda_k^\alpha * D_{m_n} &= \sum_{i=1}^n m_i^\alpha (D_{m_i} - D_{m_{i-1}}) + D_{m_0} \in \mathcal{G}_n, \quad k \geq n \geq 0, \\ \|\Lambda_k^\alpha * D_{m_n}\|_1 &\leq 2 \sum_{i=0}^n m_i^\alpha \leq C_1 m_n^\alpha. \end{aligned}$$

Можно было также применить (23), предварительно доказав, что $\Lambda_k^\alpha * D_{m_n} = \Lambda_n^\alpha$, $k \geq n$. Поэтому предел в $L^p(\mathbb{R}_+)$ последовательности $\{\Lambda_k^\alpha * S_{m_n}(f)\}_{k=1}^\infty$ существует и равен некоторому $g \in \mathcal{G}_n$, поскольку $\Lambda_k^\alpha * S_{m_n}(f)$ принадлежат $\mathcal{G}_n$. При этом

$$\|g\|_p \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\Lambda_k^\alpha * D_{m_n} * f\|_p \leq C_1 m_n^\alpha \|f\|_p.$$

Осталось отметить, что для $f \in \mathcal{G}_n$ верно равенство $S_{m_n}(f) = f$, откуда вытекает утверждение данного предложения.

С помощью аналогов неравенств Джексона и Бернштейна устанавливаются аналоги теорем 5–7 из [12], которые, в свою очередь, соответствуют результатам М. Ф. Тимана, Г. Суноути, В. В. Жука, Г. И. Натансона и М. Заманского для тригонометрической аппроксимации (см. список литературы в [12]). Приведем еще один результат, являющийся аналогом теоремы вложения П. Л. Ульянова [33].

ТЕОРЕМА 16. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < q \leq 2$, $r \geq 0$, и сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{rq+q/p-1} E_{m_k}^q(f)_p$. Тогда существует $D_q^r(f)$ (при $r = 0$ получаем $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$) и при этом

$$E_{m_n}(D_q^r(f))_q \leq C \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{rq+q/p-1} E_{m_k}^q(f)_p \right)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_p^r(f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}}) + D_p^r(f * D_{m_0}).$$

Если $l > n$ и $Z_n(f)$ – частная сумма этого ряда, то по лемме 2 и неравенству Йенсена имеем

$$\begin{aligned} \|Z_n(f) - Z_l(f)\|_q &\leq C_1 \left\| \left(\sum_{k=n+1}^l |D_p^r(f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}})|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=n+1}^l \|D_p^r(f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}})\|_q^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Однако $f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}}$ принадлежит $\mathcal{G}_k$, поэтому по предложению 1, лемме 10 и формуле (2) получаем

$$\begin{aligned} \|D_p^r(f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}})\|_q &\leq C_2 m_k^r m_k^{1/p-1/q} \|f * D_{m_k} - f * D_{m_{k-1}}\|_p \\ &\leq 2C_2 E_{m_{k-1}}(f)_p m_k^{r+1/p-1/q}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\|Z_n(f) - Z_l(f)\|_q \leq C_3 \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{rq+q/p-1} E_{m_k}^q(f)_p \right)^{1/q},$$

откуда следует сходимость Z_l в $L^q(\mathbb{R}_+)$ к некоторому $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и при $l \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$E_{m_n}(g)_q \leq C \left(\sum_{k=n}^{\infty} m_k^{rq+q/p-1} E_{m_k}^q(f)_p \right)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку

$$\widehat{Z_l(f)} = \sum_{k=1}^l \hat{f}(X_{[0, m_k)} - X_{[0, m_{k-1})}) \cdot |\cdot|_{\mathbf{P}}^r + \hat{f}X_{[0, 1)} = \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^r) \hat{f}X_{[0, m_l)},$$

при $l \rightarrow \infty$ функции $\widehat{Z_l(f)}$ сходятся к $\max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^r) \hat{f}$ п. в. и $\widehat{Z_l(f)} \rightarrow \hat{g}$ в $L^{q'}(\mathbb{R}_+)$, откуда $\hat{g} = \max(1, |\cdot|_{\mathbf{P}}^r) \hat{f}$ п. в. на $\mathbb{R}_+$ и по теореме 1 справедливо равенство $g = D_q^r(f)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. P. L. Butzer, H. J. Wagner, "Walsh–Fourier series and the concept of a derivative", *Applicable Anal.*, **3**:1 (1973), 29–46.
2. P. L. Butzer, H. J. Wagner, "A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ ", *Proc. Symp. Naval Res. Laboratory* (April 18–20, 1973), Washington, DC, 1973, 75–81.
3. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987, 344 с.; 2-е изд., испр. и дополн., ЛКИ, М., 2008, 352 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991, xiv+368 pp.
4. H. J. Wagner, "On dyadic analysis for functions defined on $\mathbb{R}_+$ ", *Theory and applications of Walsh functions*, Proc. Symp. Hatfield Polytechnic, 1975, 101–129.
5. J. Pal, "On a concept of a derivative among functions defined on the dyadic field", *SIAM J. Math. Anal.*, **8**:3 (1977), 375–391.
6. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, With the collaboration of J. Pál, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990, x+560 pp.
7. Б. И. Голубов, "О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной", *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60; англ. пер.: B. I. Golubov, "A modified strong dyadic integral and derivative", *Sb. Math.*, **193**:4 (2002), 507–529.
8. Б. И. Голубов, "Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$ ", *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 213–233; англ. пер.: B. I. Golubov, "Modified dyadic integral and fractional derivative on $\mathbb{R}_+$ ", *Math. Notes*, **79**:2 (2006), 196–214.
9. B. I. Golubov, "On some properties of fractional dyadic derivative and integral", *Anal. Math.*, **32**:3 (2006), 173–205.
10. С. С. Волосивец, "Модифицированный $\mathbf{P}$ -ичный интеграл и модифицированная $\mathbf{P}$ -ичная производная для функций, определенных на полуоси", *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 6, 28–39; англ. пер.: S. S. Volosivets, "A modified $\mathbf{P}$ -adic integral and a modified $\mathbf{P}$ -adic derivative for functions defined on a half-axis", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **49**:6 (2005), 25–36.
11. С. С. Волосивец, "О модифицированных мультипликативных интеграле и производной произвольного порядка на полуоси", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 3–24; англ. пер.: S. S. Volosivets, "The modified multiplicative integral and derivative of arbitrary order on the semiaxis", *Izv. Math.*, **70**:2 (2006), 211–231.
12. С. С. Волосивец, "Модифицированные $\mathbf{P}$ -интеграл и $\mathbf{P}$ -производная и их приложения", *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 3–32; англ. пер.: S. S. Volosivets, "The modified $\mathbf{P}$ -integral and $\mathbf{P}$ -derivative and their applications", *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 613–644.
13. C. W. Onneweer, "Fractional differentiation and Lipschitz spaces on local fields", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:1 (1980), 155–165.
14. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994, 352 с.; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, xx+319 pp.
15. M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975, xii+294 pp.
16. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965, 615 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp.
17. С. С. Волосивец, "Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011),

- 29–52; англ. пер.: S. S. Volosivets, “Modified Hardy and Hardy–Littlewood operators and their behaviour in various spaces”, *Izv. Math.*, **75**:1 (2011), 29–51.
18. S. S. Volosivets, “On $\mathbf{P}$ -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators”, *East J. Approx.*, **11**:1 (2005), 57–72.
 19. B. I. Golubov, S. S. Volosivets, “On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transform”, *Georgian Math. J.*, **16**:3 (2009), 533–546.
 20. C. W. Onneweer, “The Fourier transform of Herz spaces on certain groups”, *Monatsh. Math.*, **97**:4 (1984), 297–310.
 21. S. Fridli, “On the rate of convergence of Cesàro means of Walsh–Fourier series”, *J. Approx. Theory*, **76**:1 (1994), 31–53.
 22. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974, 332 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971, x+297 pp.
 23. E. M. Stein, “The characterization of functions arising as potentials”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67**:1 (1961), 102–104.
 24. Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 2, Мир, М., 1985, 400 с.; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 2, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **85**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xi+369 pp.
 25. П. И. Лизоркин, “Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения”, *Матем. сб.*, **60(102)**:3 (1963), 325–353.
 26. C. P. Calderon, E. B. Fabes, N. M. Riviere, “Maximal smoothing operators”, *Indiana Univ. Math. J.*, **23**:10 (1974), 889–898.
 27. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 455 с.; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, viii+418 pp.
 28. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960, 624 с.; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **34**, A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York, 1963, xii+631 pp.
 29. M. H. Taibleson, “On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space. I. Principal properties”, *J. Math. Mech.*, **13**:3 (1964), 407–480.
 30. E. M. Stein, A. Zygmund, “Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p -spaces”, *Ann. Math.*, **85**:2 (1967), 337–349.
 31. L. I. Hedberg, “On certain convolution inequalities”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**:2 (1972), 505–510.
 32. В. И. Буренков, “Об оценках преобразований Фурье и свертки в пространствах Никольского–Бесова”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям.*, Ч. 13, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 31–38; англ. пер.: V. I. Burenkov, “On estimates of Fourier transforms and convolutions in Nikol’skii–Besov spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **187** (1990), 35–44.
 33. П. Л. Ульянов, “Вложение некоторых классов функций H_p^ω ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 649–686; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “The imbedding of certain function classes H_p^ω ”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 601–637.

СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ ВОЛОСИВЕЦ

(SERGEI S. VOLOSIVETS)

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: volosivetsss@mail.ru

Поступило в редакцию

06.03.2013

17.07.2013