Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 07:05:55

УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства

При использовании явного вида предельного ультрасферического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$, установленного нами в [1], рассмотрены новые, более общие, специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби и их аппроксимативные свойства. Показано, что эти ряды как аппарат приближения непрерывных функций выгодно отличаются от рядов Фурье по полиномам Якоби, обладая в то же время простой конструкцией, допускающей в важных частных случаях применение быстрого преобразования Фурье для численной реализации частичных сумм рассматриваемых рядов.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: полином Якоби, специальные ряды по ультрасферическим полиномам, аппроксимация частными суммами специальных рядов.

DOI: 10.4213/im8117

§ 1. Введение

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций (сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [2]–[8]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция $f = f(t)$ (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) задана на достаточно длинном промежутке $[0, T]$, и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, m$, рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных, например, с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4], [6], обработкой временных рядов (изображений) [5]–[7], когда возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00191).

каждую часть и заменить приближенно исходный временной ряд (изображение) функцией, полученной в результате “пристыковки” функций, аппроксимирующих отдельные части. Тогда в местах “стыка” возникают нежелательные разрывы (артефакты) [8], которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения “кусков” исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. Не является исключением и случай приближения функции $f(x)$ суммами Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat{P}_n^\alpha(x) = \hat{P}_n^{\alpha, \alpha}(x)$ при $\alpha > -1$. Указанные выше разрывы в точках “стыка” возникают из-за того, что суммы Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ не всегда совпадают с исходной функцией $f(x)$ в точках $x = -1$ и $x = 1$.

С другой стороны, проанализировав асимптотические свойства полиномов $\hat{P}_n^\alpha(x)$ вблизи концов ± 1 , можно заметить, что суммы Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ по этим полиномам имеют тенденцию стремиться к $f(x)$ в точках $x = \pm 1$ при $\alpha \rightarrow -1$, т.е. $S_n^{-1}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$, где $S_n^{-1}(f, x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} S_n^\alpha(f, x)$. Вопрос о том, что собой представляет $S_n^{-1}(f, x)$ и нельзя ли использовать $S_n^{-1}(f, x)$ в качестве альтернативного суммам Фурье–Якоби $S_n^\alpha(f, x)$ аппарата приближения непрерывных и гладких функций $f(x)$, был рассмотрен в работе автора [1], где были исследованы аппроксимативные свойства предельных сумм $S_n^{-1}(f, x)$ и, в частности, подробно доказано, что $S_n^{-1}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$ для любой непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$. Отметим, что полиномы $\hat{P}_n^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \hat{P}_n^\alpha(x)$ не образуют ортонормированной системы на $[-1, 1]$, более того, в частности, $\hat{P}_1^{-1}(x) \equiv 0$. Тем не менее, как было показано в [1], $S_n^{-1}(f, x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени n . Для функции Лебега $\Lambda_n(x)$ частичных сумм $S_n^{-1}(f, x)$ в [1] получена оценка $\Lambda_n(x) \leq c \ln(2 + n\sqrt{1-x^2})$, $-1 \leq x \leq 1$, которая показывает, что $S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f, x)$ как аппарат приближения непрерывных и гладких функций в метрике пространства $C[-1, 1]$ не уступает суммам Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Более того, вблизи концов ± 1 частичные суммы $S_n^{-1}(f, x)$ приближают функцию $f(x)$ лучше, чем суммы Фурье–Чебышева. Отправляясь от результатов, полученных в работе [1], в настоящей статье мы вводим новые *специальные ряды* по ультрасферическим полиномам Якоби и исследуем их аппроксимативные свойства.

Пусть $\alpha > -1$, $\mu^\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$, $\hat{P}_n^\alpha(x)$, $n = 0, 1, \dots$, – ортонормированная с весом $\mu^\alpha(x)$ система ультрасферических полиномов Якоби, т.е.

$$\int_{-1}^1 \mu^\alpha(x) \hat{P}_n^\alpha(x) \hat{P}_k^\alpha(x) dx = \delta_{nk}. \quad (1.1)$$

Для произвольной непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Якоби

$$f_k^\alpha = \int_{-1}^1 f(t) \hat{P}_k^\alpha(t) \mu^\alpha(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

ряд Фурье–Якоби

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x) \quad (1.3)$$

и сумму Фурье–Якоби

$$S_n^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^\alpha \widehat{P}_k^\alpha(x). \quad (1.4)$$

Однако если $\alpha = -1$, то функция $\mu^{-1}(t)$ становится неинтегрируемой на интервале $(-1, 1)$ и, как следствие, равенство (1.2) теряет смысл. Тем не менее, как было показано в работе автора [1], можно рассмотреть предельный ряд

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \widehat{P}_k^{-1}(x), \quad (1.5)$$

в котором

$$f_k^{-1} \widehat{P}_k^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^\alpha \widehat{P}_k^\alpha(x).$$

Частичную сумму ряда (1.5) обозначим через $S_n^{-1}(f, x)$, т. е.

$$S_n^{-1}(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^{-1} \widehat{P}_k^{-1}(x).$$

В [1] доказано, что

$$S_n^{-1}(f, x) = c_f(x) + (1 - x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k \widehat{P}_k^1(x), \quad (1.6)$$

где

$$c_f(x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2}x, \quad g(x) = f(x) - c_f(x), \quad (1.7)$$

$$\hat{g}_k = \int_{-1}^1 g(t) \widehat{P}_k^1(t) dt. \quad (1.8)$$

Обозначим через $C[-1, 1]$ пространство функций $f = f(x)$, заданных и непрерывных на $[-1, 1]$, для которых норма $\|f\|$ определяется обычным образом, т. е. $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Пусть $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами $p_n(x)$ степени n . Из результатов, полученных в [1], вытекает, что

$$|f(x) - S_n^{-1}(f, x)| \leq c E_n(f) (1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})). \quad (1.9)$$

Из (1.9), в свою очередь, следует, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) \ln n = 0$, то $S_n^{-1}(f, x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-1, 1]$ и, следовательно,

$$f(x) = c_f(x) + (1 - x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k \widehat{P}_k^1(x). \quad (1.10)$$

Для $x \in (-1, 1)$ из (1.10) имеем

$$F(x) = \frac{f(x) - c_f(x)}{1 - x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k \widehat{P}_k^1(x). \quad (1.11)$$

Ряд в (1.11) представляет собой ряд Фурье–Якоби функции $F(x)$ по ортонормированной системе полиномов Якоби $\hat{P}_k^1(x)$, $k = 0, 1, \dots$, и, следовательно,

$$\hat{g}_k = \int_{-1}^1 F(t)(1-t^2)\hat{P}_k^1(t) dt = \int_{-1}^1 g(t)\hat{P}_k^1(t) dt. \quad (1.12)$$

Из (1.11) следует, что предельный ряд (1.10) может быть получен путем разложения функции $F(x) = \frac{f(x)-c_f(x)}{1-x^2}$ в ряд Фурье по полиномам Якоби $\hat{P}_k^1(x)$, $k = 0, 1, \dots$. Кроме того, равенство (1.11) допускает следующее обобщение предельного ряда (1.10). А именно, пусть $\alpha > 0$, $\hat{P}_k^\alpha(x)$, $k = 0, 1, \dots$, – ортонормированная система полиномов Якоби с весом $\mu^\alpha(x)$. Тогда для функции $F(x) = \frac{f(x)-c_f(x)}{1-x^2}$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Якоби

$$F_k^\alpha = \int_{-1}^1 F(t)(1-t^2)^\alpha \hat{P}_k^\alpha(t) dt = \int_{-1}^1 g(t)(1-t^2)^{\alpha-1} \hat{P}_k^\alpha(t) dt = \hat{g}_k^\alpha \quad (1.13)$$

и ряд Фурье–Якоби $F(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \hat{g}_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x)$. Предположим, что этот ряд сходится при $x \in (-1, 1)$ и имеет место равенство

$$F(x) = \sum_{k=0}^\infty \hat{g}_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x), \quad (1.14)$$

которое можно переписать в виде

$$f(x) = c_f(x) + (1-x^2) \sum_{k=0}^\infty \hat{g}_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x). \quad (1.15)$$

Ряд (1.15) будем называть *специальным рядом* по полиномам Якоби $\hat{P}_k^\alpha(x)$. В частности, при $\alpha = 1$ специальный ряд (1.15) совпадает с предельным рядом (1.10).

Другой важный частный случай специального ряда (1.15) мы получим при $\alpha = 1/2$, а именно

$$f(x) = c_f(x) + (1-x^2) \sum_{k=0}^\infty \hat{g}_k^{\frac{1}{2}} \hat{P}_k^{\frac{1}{2}}(x). \quad (1.16)$$

Положим $x = \cos \theta$, $a_\Phi(\theta) = c_f(\cos \theta)$, $\Phi(\theta) = f(\cos \theta)$. Тогда из (1.16) получим

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin^2 \theta \sum_{k=0}^\infty \hat{g}_k^{\frac{1}{2}} \hat{P}_k^{\frac{1}{2}}(\cos \theta). \quad (1.17)$$

Поскольку

$$\hat{P}_k^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad (1.18)$$

имеем

$$\hat{g}_k^{\frac{1}{2}} = \int_{-1}^1 g(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{P}_k^{\frac{1}{2}}(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(\cos \tau) \frac{\sin((k+1)\tau)}{\sin \tau} d\tau. \quad (1.19)$$

Из (1.17)–(1.19) находим

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(k\theta), \quad (1.20)$$

где

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{g}_{k-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\tau) \frac{\sin k\tau}{\sin \tau} d\tau, \quad (1.21)$$

$$\varphi(\theta) = \Phi(\theta) - a_\Phi(\theta) = \Phi(\theta) - \frac{\Phi(0) + \Phi(\pi)}{2} - \frac{\Phi(0) - \Phi(\pi)}{2} \cos \theta. \quad (1.22)$$

Обозначим через $\sigma_n^\alpha(f, x)$ частичную сумму ряда (1.15) (см. (3.1)). Как показано в §3, $\sigma_n^\alpha(f, x)$ является проектором на подпространство H^n всех алгебраических полиномов $p_n(x)$ степени не выше n , важной особенностью которого является то, что $\sigma_n^\alpha(f, x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$ совпадает с исходной функцией $f(x)$, т. е.

$$\sigma_n^\alpha(f, \pm 1) = f(\pm 1). \quad (1.23)$$

Это свойство операторов $\sigma_n^\alpha(f) = \sigma_n^\alpha(f, x)$ имеет важное значение для решения задач, связанных с обработкой временных рядов и изображений. Другое важное свойство операторов $\sigma_n^\alpha(f) = \sigma_n^\alpha(f, x)$ заключается в том, что при $1/2 \leq \alpha < 3/2$, как это показано в настоящей работе (см. следствие 3.1), имеет место оценка

$$|f(x) - \sigma_n^\alpha(f, x)| \leq c(\alpha) E_n(f) \left(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})\right), \quad (1.24)$$

где $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами $p_n \in H^n$. Оценка (1.24) и свойство (1.23) показывают, что операторы $\sigma_n^\alpha(f)$ как аппарат приближения обладают весьма привлекательными аппроксимативными свойствами в пространстве $C[-1, 1]$.

Для сравнения установленных в настоящей работе аппроксимативных свойств операторов $\sigma_n^\alpha(f) = \sigma_n^\alpha(f, x)$ с хорошо известными аппроксимативными свойствами сумм Фурье $S_n^\beta(f, x)$ по ультрасферическим полиномам $\hat{P}_n^\beta(x)$ отметим, что из результатов, полученных в работе [10], при $-1 < \beta < -1/2$ вытекает оценка

$$|f(x) - S_n^\beta(f, x)| \leq c(\beta) E_n(f) \left(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})\right). \quad (1.25)$$

Сопоставляя (1.24) с (1.25), мы замечаем, что аппроксимативные свойства частичных сумм специального ряда $\sigma_n^\alpha(f, x)$ при $1/2 \leq \alpha < 3/2$ и $-1 < x < 1$ аналогичны аппроксимативным свойствам сумм Фурье $S_n^\beta(f, x)$ при $-1 < \beta < -1/2$, за исключением того факта, что $\sigma_n^\alpha(f, x)$ при $x = \pm 1$ совпадает с $f(x)$, а $S_n^\beta(f, x)$ этим свойством не обладает. Отметим также, что аппроксимативные свойства операторов $\sigma_n^{3/2}(f, x)$ аналогичны аппроксимативным свойствам сумм Фурье–Чебышева $S_n^{-1/2}(f, x)$ в том смысле, что

$$|f(x) - \sigma_n^{3/2}(f, x)| \leq c E_n(f) \ln(n + 1), \quad (1.26)$$

$$|f(x) - S_n^{-1/2}(f, x)| \leq c E_n(f) \ln(n + 1). \quad (1.27)$$

Оценка (1.26) установлена в следствии 3.1, а оценка (1.27) хорошо известна. В то же время, как уже отмечалось, $\sigma_n^{3/2}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$, а $S_n^{-1/2}(f, x)$ этим важным свойством не обладает.

Отметим, наконец, еще одно важное обстоятельство, касающееся численной реализации операторов $\sigma_n^\alpha(f, x)$, $1/2 \leq \alpha < 3/2$, и $S_n^\beta(f, x)$, $-1 < \beta < -1/2$, обладающих аналогичными аппроксимативными свойствами (см. (1.24) и (1.25)). В семействе операторов $\sigma_n^\alpha(f, x)$, $1/2 \leq \alpha < 3/2$, существует оператор $\sigma_n^{1/2}(f, x)$, для численной реализации которого в силу равенства (1.21) можно использовать алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье. Для семейства операторов Фурье–Якоби $S_n^\beta(f, x)$, $-1 < \beta < -1/2$, быстрое дискретное преобразование Фурье для вычисления коэффициентов Фурье–Якоби f_k^β при $-1 < \beta < -1/2$ (см. (1.2) и (1.4)), насколько известно автору, не разработано.

Основной целью настоящей работы является исследование аппроксимативных свойств операторов $\sigma_n^\alpha(f, x)$, $1/2 \leq \alpha \leq 3/2$. Нам понадобится для этого ряд свойств полиномов Якоби, которые для удобства собраны в следующем параграфе.

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Полиномы Якоби можно определить [9] с помощью следующего явного вида:

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{k! (\alpha + 1)_k} \left(\frac{1 - x}{2} \right)^k. \quad (2.1)$$

Далее нам понадобится ряд фактов, связанных с полиномами Якоби:

1) симметрия

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x);$$

2) равенство

$$(1 - x)P_n^{\alpha+1, \beta}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} [(n + \alpha + 1)P_n^{\alpha, \beta}(x) - (n + 1)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)]; \quad (2.2)$$

3) ортогональность при $\alpha, \beta > -1$:

$$\int_{-1}^1 \kappa(x) P_n^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nk}, \quad (2.3)$$

где $\kappa(x) = \kappa^{\alpha, \beta}(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$,

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) 2^{\alpha + \beta + 1}}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) (2n + \alpha + \beta + 1)}, \quad n \geq 0; \quad (2.4)$$

4) формула Кристоффеля–Дарбу

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha, \beta}(x) P_k^{\alpha, \beta}(y)}{h_k^{\alpha, \beta}} \\ &= \frac{2^{-\alpha - \beta}}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{\Gamma(n + 2) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) - P_n^{\alpha, \beta}(x) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(y)}{x - y}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

5) весовая оценка ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n}|P_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

здесь и всюду в дальнейшем $c, c(\alpha), c(\alpha, \beta), c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ – положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах;

6) оценка для интеграла, содержащего полином Якоби:

$$\int_0^1 (1-x)^\gamma |P_n^{\alpha,\beta}(x)| dx \asymp \begin{cases} n^{\alpha-2\gamma-2}, & 2\gamma < \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}} \ln n, & 2\gamma = \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-\frac{1}{2}}, & 2\gamma > \alpha - \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $a_n \asymp b_n$ означает, что найдутся такие положительные постоянные c_1, c_2 , что $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$, $n = 1, 2, \dots$.

§ 3. Аппроксимативные свойства специальных рядов по ультрасферическим полиномам

Через $C[-1, 1]$ обозначим нормированное пространство непрерывных функций $f = f(x)$, заданных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [-1, 1]\}$. Рассмотрим для $f \in C[-1, 1]$ специальный ряд (1.16) и его частичную сумму

$$\sigma_n^\alpha(f, x) = c_f(x) + (1-x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k^\alpha \hat{P}_k^\alpha(x), \quad \alpha > 0. \quad (3.1)$$

Из определения специального ряда (1.16) следует, что $\sigma_n^\alpha(f) = \sigma_n^\alpha(f, x)$ является проектором на пространство H^n , состоящее из алгебраических полиномов $p_n(x)$ степени n , т. е. если $p_n(x) \in H^n$, то

$$\sigma_n^\alpha(p_n, x) \equiv p_n(x). \quad (3.2)$$

В самом деле, если $p_n \in H^n$, то $p_n(\pm 1) = c_{p_n}(\pm 1)$, и поэтому

$$q_{n-2}(x) = \frac{p_n(x) - c_{p_n}(x)}{1-x^2}$$

представляет собой алгебраический полином степени $n-2$. Следовательно, для $F(x) = q_{n-2}(x)$ имеет место равенство (1.14), в котором все коэффициенты $\hat{g}_k^\alpha$ при $k > n-2$ обращаются в нуль, а это равносильно равенству (3.2). Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$, $p_n(x) \in H^n$. Тогда в силу (3.2) можно записать

$$f(x) - \sigma_n^\alpha(f, x) = f(x) - p_n(x) + \sigma_n^\alpha(p_n - f, x). \quad (3.3)$$

Обозначим через $E_n^\pm(f)$ наилучшее приближение функции $f(x) \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами $p_n \in H^n$, которые в точках ± 1 совпадают с $f(x)$:

$$E_n^\pm(f) = \inf_{\substack{p_n \in H^n \\ p_n(\pm 1) = f(\pm 1)}} \|f - p_n\|. \quad (3.4)$$

Пусть для $p_n^* \in H^n$ будет $E_n^\pm(f) = \|f - p_n^*\|$ и $p_n^*(\pm 1) = f(\pm 1)$. Тогда из соотношений (3.3) и (3.4) имеем

$$|f(x) - \sigma_n^\alpha(f, x)| \leq |f(x) - p_n^*(x)| + |\sigma_n^\alpha(p_n^* - f, x)| \leq E_n^\pm(f) + |\sigma_n^\alpha(p_n^* - f, x)|. \quad (3.5)$$

С другой стороны, так как $p_n^*(\pm 1) - f(\pm 1) = 0$, из (3.1) следует, что

$$\sigma_n^\alpha(p_n^* - f, x) = (1 - x^2) \int_{-1}^1 (p_n^*(t) - f(t))(1 - t^2)^{\alpha-1} \mathcal{K}_{n-2}^\alpha(x, t) dt, \quad (3.6)$$

где $(P_k^\alpha(x) = P_k^{\alpha, \alpha}(x))$

$$\mathcal{K}_{n-2}^\alpha(x, t) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{P_k^\alpha(t) P_k^\alpha(x)}{h_k^{\alpha, \alpha}}. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) имеем

$$|\sigma_n^\alpha(p_n^* - f, x)| \leq E_n^\pm(f)(1 - x^2) \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\alpha-1} |\mathcal{K}_{n-2}^\alpha(x, t)| dt. \quad (3.8)$$

Сопоставляя (3.5) с (3.8), получаем

$$|f(x) - \sigma_n^\alpha(f, x)| \leq E_n^\pm(f)(1 + \Lambda_n^\alpha(x)), \quad (3.9)$$

$$\Lambda_n^\alpha(x) = (1 - x^2) \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\alpha-1} |\mathcal{K}_{n-2}^\alpha(x, t)| dt. \quad (3.10)$$

В связи с неравенством (3.9) возникает задача об оценке величины $\Lambda_n^\alpha(x)$. При рассмотрении этой задачи нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3.1. Пусть $1/2 < \alpha$, $\alpha \neq 3/2$, $-1 < x < 1$. Тогда имеет место оценка

$$\Lambda_n^\alpha(x) \leq c(\alpha) \left[1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2}) + (1 - x^2)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Lambda_n^\alpha(-x) = \Lambda_n^\alpha(x)$ в силу (2.1) и (3.10), можно считать, что $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $0 \leq x \leq 1 - 2/n^2$, и введем обозначения $x' = x - \sqrt{1 - x^2}/n$, $x'' = x + \sqrt{1 - x^2}/n$. В силу (3.10) мы можем записать

$$\Lambda_{n+2}^\alpha(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x), \quad (3.11)$$

где

$$I_1(x) = (1 - x^2) \int_{-1}^{x'} (1 - t^2)^{\alpha-1} |\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)| dt,$$

$$I_2(x) = (1 - x^2) \int_{x'}^{x''} (1 - t^2)^{\alpha-1} |\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)| dt,$$

$$I_3(x) = (1 - x^2) \int_{x''}^1 (1 - t^2)^{\alpha-1} |\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)| dt.$$

При оценке выражений $I_1(x)$ и $I_3(x)$ нам понадобится одно преобразование ядра Кристоффеля–Дарбу $\mathcal{K}_n^\alpha(x, t) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \alpha}(x, t)$ (см. (2.5)). Для этого мы воспользуемся равенством (2.2), из которого находим

$$P_{n+1}^\alpha(y) = P_{n+1}^{\alpha, \alpha}(y) = \frac{n + \alpha + 1}{n + 1} P_n^\alpha(y) - \frac{2n + 2\alpha + 2}{2(n + 1)} (1 - y) P_n^{\alpha+1, \alpha}(y).$$

С учетом этого равенства для $y = x$ и $y = t$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^\alpha(x, t) &= \frac{2^{-2\alpha-1} \Gamma(n+2) \Gamma(n+2\alpha+2)}{(n+1) (\Gamma(n+\alpha+1))^2} \\ &\quad \times \frac{1}{x-t} [(1-t) P_n^{\alpha+1, \alpha}(t) P_n^\alpha(x) - (1-x) P_n^{\alpha+1, \alpha}(x) P_n^\alpha(t)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

откуда выводим оценку

$$\begin{aligned} (1-x^2) |\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)| &\leq c(\alpha) \frac{n(1-x^2)}{|x-t|} \\ &\quad \times [(1-t) |P_n^{\alpha+1, \alpha}(t) P_n^\alpha(x)| + (1-x) |P_n^{\alpha+1, \alpha}(x) P_n^\alpha(t)|]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь обратимся к весовой оценке (2.6), согласно которой при $0 \leq x < 1$

$$\sqrt{n} |P_n^\alpha(x)| \leq c(\alpha) (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad (3.14)$$

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha+1, \alpha}(x)| \leq c(\alpha) (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}. \quad (3.15)$$

Кроме того, при $-1 \leq t \leq -1/2$ из (2.6) вытекают оценки

$$\sqrt{n} |P_n^\alpha(t)| \leq c(\alpha) \left[(1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}, \quad (3.16)$$

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha+1, \alpha}(t)| \leq c(\alpha) \left[(1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Вернемся к оценке величины $I_1(x)$, которую представим по схеме

$$I_1(x) = I_1'(x) + I_1''(x) = (1-x^2) \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} + (1-x^2) \int_{-\frac{1}{2}}^{x'}.$$

Для $I_1'(x)$ из (3.13)–(3.17) имеем

$$\begin{aligned} I_1'(x) &\leq c(\alpha) (1-x^2) [(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} + (1-x)(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}] \\ &\quad \times \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left[(1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right]^{-\alpha-\frac{1}{2}} (1+t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq c(\alpha) (1-x^2)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} dt \leq c(\alpha) (1-x^2)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Чтобы оценить $I_1''(x)$, мы снова обратимся к весовой оценке (2.6), из которой выводим

$$\sqrt{n} |P_n^\alpha(t)| \leq c(\alpha) (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad -\frac{1}{2} \leq t < 1, \quad (3.19)$$

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha+1, \alpha}(t)| \leq c(\alpha) (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}, \quad -\frac{1}{2} \leq t < 1. \quad (3.20)$$

Из (3.13)–(3.15), (3.19), (3.20) и (2.1) при $-1/2 < t, x < 1$ имеем

$$(1-x^2)|K_n^\alpha(x, t)| \leq \frac{c(\alpha)}{|x-t|} \left[(1-x^2)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} (1-t^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} + (1-x^2)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} \right]. \quad (3.21)$$

Для дальнейшего важно отметить, что оценка (3.21) остается справедливой для всех x и t таких, что $-1 < x, t < 1$. В этом легко убедиться, исходя из уже доказанного случая $-1/2 < t, x < 1$ и учитывая свойства симметрии ядра $K_n^\alpha(x, t)$. Из (3.21) имеем

$$\begin{aligned} I_1''(x) &= (1-x^2) \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} |K_n^\alpha(x, t)| (1-t^2)^{\alpha-1} dt \\ &\leq c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t} + c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t} &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \frac{d \frac{x-t}{1-x}}{\left(1 + \frac{x-t}{1-x} \right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{x-t}{1-x}} \\ &= \int_{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \tau} \leq c(\alpha) \int_{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^1 \frac{d\tau}{\tau} + c(\alpha) \int_1^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{7}{4}-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq c(\alpha) \left[\ln \left(n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) + \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} \left(\left(\frac{x+1/2}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{x'} \frac{d \frac{x-t}{1-x}}{\left(1 + \frac{x-t}{1-x} \right)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{x-t}{1-x}} \\ &= \int_{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} \tau} < \int_{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \tau} \\ &\leq c(\alpha) \left[\ln \left(n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) + \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} \left(\left(\frac{x+1/2}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.22)–(3.24) выводим

$$I_1''(x) \leq c(\alpha) \left[1 + \ln(1 + n \sqrt{1-x^2}) + (1-x^2)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \right]. \quad (3.25)$$

Оценки (3.18) и (3.25), взятые вместе, дают

$$I_1(x) \leq c(\alpha) \left[1 + \ln(1 + n \sqrt{1-x^2}) + (1-x^2)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \right]. \quad (3.26)$$

Оценим $I_3(x)$. Из (3.21) имеем

$$I_3(x) = I_3'(x) + I_3''(x), \quad (3.27)$$

где

$$I_3'(x) = c(\alpha) \int_{x''}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t-x} = -c(\alpha) \int_{x''}^1 \frac{d \frac{1-t}{1-x}}{\left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1-t}{1-x} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= c(\alpha) \int_0^{1-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}(1-\tau)} = c(\alpha) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \right] \\
 &\leq c(\alpha) \left[2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + 2^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{d\tau}{1-\tau} \right] \\
 &\leq c(\alpha) \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) 2^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}} + 2^{\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2}} \ln \left(\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] \\
 &\leq c(\alpha) (1 + \ln(n\sqrt{1-x^2})),
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

и, аналогично,

$$I_3''(x) = c(\alpha) \int_{x''}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{t-x} \leq c(\alpha) (1 + \ln(n\sqrt{1-x^2})). \tag{3.29}$$

Из (3.27)–(3.29) находим

$$I_3(x) = c(\alpha) (1 + \ln(n\sqrt{1-x^2})). \tag{3.30}$$

Оценим $I_2(x)$. Пользуясь весовой оценкой (2.6), имеем

$$\begin{aligned}
 I_2(x) &= (1-x^2) \int_{x'}^{x''} (1-t^2)^{\alpha-1} |K_n^\alpha(x, t)| dt \\
 &\leq (1-x^2) \int_{x'}^{x''} \sum_{k=0}^n \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{h_k^{\alpha, \alpha}} |P_k^\alpha(x) P_k^\alpha(t)| dt \\
 &\leq c(\alpha) \int_{x'}^{x''} \sum_{k=0}^n (1-x^2) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k+1} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{k+1} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-1} dt \\
 &\leq c(\alpha) \int_{x'}^{x''} \sum_{k=0}^n (1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} dt \\
 &= c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \int_{x'}^{x''} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} dt \\
 &= c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} (1-x')^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[1 - \left(\frac{1-x''}{1-x'} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \right] \\
 &\leq c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} \left(1-x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[1 - \left(\frac{1-x''}{1-x'} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \right] \\
 &\leq c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} (2(1-x))^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[1 - \left(\frac{1-x''}{1-x'} \right)^{\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right]+1} \right] \\
 &\leq c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}} (2(1-x))^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[1 - \frac{1-x''}{1-x'} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x'' - x'}{1-x'} \\
&= c(\alpha)(n+1)(1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n(1-x')} \leq c(\alpha) \frac{1-x}{1-x'} \leq c(\alpha),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

так как $x' < x$, и если $x < 1 - 2/n^2$, то $\sqrt{1-x^2}/n < 1-x$. Мы также пользовались тем, что при $0 < a < 1$ функция a^x убывает на $[0, \infty)$ и, как следствие,

$$1 - \left(\frac{1-x''}{1-x'} \right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \leq 1 - \left(\frac{1-x''}{1-x'} \right)^{[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}] + 1} \leq c(\alpha) \left(1 - \frac{1-x''}{1-x'} \right),$$

где $[a]$ – целая часть числа a . Собирая оценки (3.26), (3.30) и (3.31) и сопоставляя их с (3.11), приходим к следующей оценке:

$$\Lambda_{n+2}^\alpha \leq c(\alpha) \left[1 + \ln(1 + n\sqrt{1-x^2}) + (1-x^2)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \right], \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{2}{n^2}. \tag{3.32}$$

Рассмотрим случай $1 - 2/n^2 \leq x < 1$. Разобьем интеграл (3.10) по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{n+2}^\alpha &= (1-x^2) \left[\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} + \int_{1-\frac{4}{n^2}}^1 \right] (1-t^2)^{\alpha-1} |K_n^\alpha(x, t)| dt \\
&= \mathfrak{I}_1(x) + \mathfrak{I}_2(x) + \mathfrak{I}_3(x).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве оценки (3.26), получаем

$$\mathfrak{I}_1(x) \leq c(\alpha)(1 + (1-x^2)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}}), \quad 1 - \frac{2}{n^2} \leq x < 1. \tag{3.34}$$

Далее, с помощью оценки (3.21) имеем ($x < 1$)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_2(x) &\leq c(\alpha)(1-x)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \frac{(1-t)^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\alpha-1}}{x-t} dt \\
&\quad + c(\alpha)(1-x)^{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \frac{(1-t)^{-\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\alpha-1}}{x-t} dt \\
&= c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t} + c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{x-t} \\
&= c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \frac{d \frac{x-t}{1-x}}{\left(1 + \frac{x-t}{1-x} \right)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \frac{x-t}{1-x}} + c(\alpha) \int_{-\frac{1}{2}}^{1-\frac{4}{n^2}} \frac{d \frac{x-t}{1-x}}{\left(1 + \frac{x-t}{1-x} \right)^{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}} \frac{x-t}{1-x}} \\
&= c(\alpha) \int_{\frac{x-1+2}{1-x}}^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}} \tau} + c(\alpha) \int_{\frac{x-1+4/n^2}{1-x}}^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}} \tau} \\
&= \mathfrak{I}_2'(x) + \mathfrak{I}_2''(x) \leq c(\alpha) \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} \left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} - 1 \right),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

так как

$$\mathfrak{I}'_2(x) \leq c(\alpha) \int_1^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}\tau} \leq c(\alpha) \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} - 1 \right), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}''_2(x) &\leq c(\alpha) \int_1^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}}\tau} \leq \int_1^{\frac{x+1/2}{1-x}} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}\tau} \\ &\leq c(\alpha) \frac{1}{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{1-x} \right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Оценим $\mathfrak{I}_3(x)$. Пользуясь весовой оценкой (2.6), имеем $(1-4/n^2 \leq x, t \leq 1)$

$$|\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|P_k^\alpha(x)P_k^\alpha(t)|}{n_k^\alpha} \leq c(\alpha) \sum_{k=0}^n (k+1)^{1+2\alpha} \leq c(\alpha)n^{2(\alpha+1)},$$

поэтому для $1-2/n^2 \leq x < 1$ находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_3 &= (1-x^2) \int_{1-\frac{4}{n^2}}^1 |\mathcal{K}_n^\alpha(x, t)|(1-t^2)^{\alpha-1} dt \\ &\leq c(\alpha)n^{2(\alpha+1)}(1-x^2) \int_{1-\frac{4}{n^2}}^1 (1-t)^{\alpha-1} dt \\ &= c(\alpha)n^{2(\alpha+1)}(1-x^2)n^{-2\alpha} \leq c(\alpha). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из (3.33)–(3.35) и (3.38) получаем

$$\Lambda_{n+2}^\alpha(x) \leq c(\alpha)(1+(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}). \quad (3.39)$$

Утверждение леммы вытекает из (3.32) и (3.39).

ЛЕММА 3.2. *Имеет место оценка*

$$\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(x) \leq c \ln(n+1), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\alpha = 3/2$ из (3.10) имеем

$$\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) = (\sin^2 \theta) \int_0^\pi \sin^2 \tau |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau.$$

Нам достаточно оценить $\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta)$ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Пусть $\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$. Тогда мы можем записать

$$\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) = L_1(\theta) + L_2(\theta) + L_3(\theta), \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= (\sin^2 \theta) \int_0^{\theta-\frac{\pi}{n}} (\sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau, \\ L_2(\theta) &= (\sin^2 \theta) \int_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} (\sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau, \\ L_3(\theta) &= (\sin^2 \theta) \int_{\theta+\frac{\pi}{n}}^\pi (\sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

В силу (3.21) имеем ($0 < \theta, \tau < \pi$)

$$(\sin^2 \theta \sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| \leq c \frac{\sin \theta + \sin \tau}{|\cos \theta - \cos \tau|} = c \frac{\sin \frac{\theta+\tau}{2} \cos \frac{\theta-\tau}{2}}{|\sin \frac{\theta+\tau}{2} \sin \frac{\theta-\tau}{2}|} \leq \frac{c}{|\theta - \tau|}, \quad (3.41)$$

откуда непосредственно вытекают оценки ($\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$)

$$L_1(\theta) \leq c \ln(n+1), \quad L_3(\theta) \leq c \ln(n+1). \quad (3.42)$$

Чтобы оценить величину $L_2(\theta)$, заметим, что из весовой оценки (2.6) имеем

$$(\sin^2 \theta \sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| \leq c \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sin \theta + \frac{1}{k+1} \right)^{-2} \left(\sin \tau + \frac{1}{k+1} \right)^{-2} \sin^2 \theta \sin^2 \tau \leq c(n-1), \quad (3.43)$$

поэтому

$$L_2(\theta) \leq cn \int_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} d\tau \leq c. \quad (3.44)$$

Из (3.42), (3.44) и (3.40) выводим

$$\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \leq c \ln(n+1), \quad \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.45)$$

Пусть теперь $0 < \theta < \pi/n$. Тогда мы запишем

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) &= (\sin^2 \theta) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (\sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau \\ &\quad + (\sin^2 \theta) \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} (\sin^2 \tau) |\mathcal{K}_{n-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \theta, \cos \tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Из (3.46), (3.43) и (3.41) выводим

$$\Lambda_n^{\frac{3}{2}}(\cos \theta) \leq c \ln(n+1). \quad (3.47)$$

Утверждение леммы вытекает из (3.45) и (3.47).

ЛЕММА 3.3. *Имеет место оценка*

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(x) \leq c(1 + \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1)), \quad -1 < x < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку справедливость утверждения леммы при $n \leq 2$ очевидна, достаточно считать, что $n > 2$. Полагая $\alpha = 1/2$, из соотношений (3.10) и (1.18) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) &= (\sin^2 \theta) \int_0^{\pi} \frac{2 \sin \tau}{\pi \sin \tau} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sin((k+1)\tau) \sin((k+1)\theta)}{\sin \tau \sin \theta} \right| d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} (\sin \theta) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin \tau} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\tau) \sin(k\theta) \right| d\tau. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Рассмотрим два случая: $0 \leq \theta \leq \pi/n$; $\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$. Пусть сначала $0 \leq \theta \leq \pi/n$. Тогда мы можем записать

$$\Lambda_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) = \frac{\sin \theta}{\pi} \left[\int_0^{\frac{2\pi}{n}} + \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} \right] \frac{|R_n(\theta, \tau)|}{\sin \tau} d\tau = U_1(\theta) + U_2(\theta), \quad (3.49)$$

где

$$R_n(\theta, \tau) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\theta) \sin(k\tau). \quad (3.50)$$

Оценим величины $U_1(\theta)$ и $U_2(\theta)$ при $0 < \theta \leq \pi/n$. Имеем

$$U_1(\theta) \leq \frac{2 \sin \theta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\theta \tau d\tau}{\sin \tau} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2(n-1)n(2n-1)\theta \sin \theta}{6\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} \leq c. \quad (3.51)$$

Чтобы оценить $U_2(\theta)$, заметим, что

$$R_n(\theta, \tau) = D_{n-1}(\theta - \tau) - D_{n-1}(\theta + \tau),$$

где

$$D_{n-1}(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos((n-1)u) = \frac{\sin((n-\frac{1}{2})u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

– ядро Дирихле. Поэтому

$$\begin{aligned} R_n(\theta, \tau) &= \frac{\sin((n-\frac{1}{2})(\theta-\tau)) \sin \frac{\theta+\tau}{2} - \sin((n-\frac{1}{2})(\theta+\tau)) \sin \frac{\theta-\tau}{2}}{2 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &= \frac{\cos[(n-\frac{1}{2})(\theta-\tau) - \frac{\theta+\tau}{2}] - \cos[(n-\frac{1}{2})(\theta+\tau) - \frac{\theta-\tau}{2}]}{4 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &\quad - \frac{\cos[(n-\frac{1}{2})(\theta-\tau) + \frac{\theta+\tau}{2}] - \cos[(n-\frac{1}{2})(\theta+\tau) + \frac{\theta-\tau}{2}]}{4 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &= \frac{\sin((n-1)\theta) \sin(n\tau) - \sin(n\theta) \sin((n-1)\tau)}{2 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &= \frac{\sin((n-1)\theta)[\sin(n\tau) - \sin((n-1)\tau)]}{2 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &\quad - \frac{[\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)] \sin((n-1)\tau)}{2 \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &= \frac{\sin((n-1)\theta) \sin \frac{\tau}{2} \cos((n-\frac{1}{2})\tau) - \sin \frac{\theta}{2} \sin((n-1)\tau) \cos((n-\frac{1}{2})\theta)}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Из (3.49) и (3.52) имеем

$$U_2 \leq U_{21} + U_{22}, \quad (3.53)$$

где

$$U_{21} = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} \frac{d\tau}{\sin \tau} \left| \frac{\sin((n-1)\theta) \sin \frac{\tau}{2} \cos((n-\frac{1}{2})\tau)}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \right| d\tau, \quad (3.54)$$

$$U_{22} = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} \frac{d\tau}{\sin \tau} \left| \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin((n-1)\tau) \cos((n-\frac{1}{2})\theta)}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \right| d\tau. \quad (3.55)$$

Из (3.54) имеем

$$\begin{aligned} U_{21} &\leq \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\sin \frac{\tau-\theta}{2} \sin \frac{\tau+\theta}{2}} + \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau)}{\sin \tau} \right| \frac{d\tau}{\sin \frac{\tau-\theta}{2} \sin \frac{\tau+\theta}{2}} \\ &= U'_{21} + U''_{21}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $(0 < \theta \leq \pi/n)$

$$\begin{aligned} U'_{21} &\leq c(\sin \theta) \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{(\tau-\theta)(\tau+\theta)} = c \frac{\sin \theta}{2\theta} \ln \frac{\tau-\theta}{\tau+\theta} \Big|_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \leq c \ln \frac{(\frac{\pi}{2}-\theta)(\frac{2\pi}{n}+\theta)}{(\frac{\pi}{2}+\theta)(\frac{2\pi}{n}-\theta)} \\ &\leq c \ln \left(1 + \frac{2\theta}{\frac{2\pi}{n}-\theta} \right) = c \ln \left(1 + \frac{2n\theta}{2\pi-n\theta} \right) \leq c \ln \left(1 + \frac{2\pi}{n} \right) = c \ln 3, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} U''_{21} &\leq c(\sin \theta) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau)}{\sin \tau} \right| d\tau = c(\sin \theta) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\cos((n-\frac{1}{2})\tau)|}{2 \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2}} d\tau \\ &\leq c(\sin \theta) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\cos((n-\frac{1}{2})\tau)|}{\cos \frac{\tau}{2}} d\tau = c(\sin \theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin((n-\frac{1}{2})\tau)|}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \\ &\leq c(\sin \theta) \ln(n+1) \leq c \frac{\pi}{n} \ln(n+1) \leq c. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из (3.56)–(3.58) при $0 < \theta \leq \pi/n$ имеем

$$U_{21} \leq c. \quad (3.59)$$

Рассмотрим U_{22} . В силу (3.55) при $n > 2$

$$\begin{aligned} U_{22} &\leq \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\tau)| \sin \frac{\theta}{2} d\tau}{\sin \tau \sin \frac{\tau-\theta}{2} \sin \frac{\tau+\theta}{2}} \leq \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\tau)| d\tau}{\sin \tau \sin \frac{\tau-\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \theta}{\pi} \left[\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \frac{|\sin((n-1)\tau)| d\tau}{\sin \tau \sin \frac{\tau-\theta}{2}} \\ &\leq \frac{4 \sin \theta}{\pi^2} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin((n-1)\tau)|}{\sin \tau} \frac{d\tau}{\tau-\theta} + \frac{\sin \theta}{\pi \sin \frac{\pi/2-\theta}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\tau)|}{\sin \tau} d\tau \\ &\leq c(\sin \theta) \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin((n-1)\tau)| d\tau}{(\tau-\theta) \sin \tau} + c(\sin \theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin((n-1)\tau)|}{\sin \tau} d\tau \\ &\leq c(\sin \theta) \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\tau(\tau-\theta)} + c(\sin \theta) \ln(n+1) \\ &= \frac{c \sin \theta}{\theta} \ln \frac{(\frac{\pi}{2}-\theta) \frac{2\pi}{n}}{(\frac{2\pi}{n}-\theta) \frac{\pi}{2}} + c(\sin \theta) \ln(n+1) \\ &\leq \frac{c \sin \theta}{\theta} \ln \frac{4(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\pi} + c(\sin \theta) \ln(n+1) \leq c. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Сопоставляя (3.59) и (3.60) с (3.53), получаем

$$U_2 \leq c, \quad (3.61)$$

а из (3.49), (3.51) и (3.61), в свою очередь, находим

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) \leq c, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}. \quad (3.62)$$

Перейдем к случаю $\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$. Из (3.48) и (3.50) имеем

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) = V_1 + V_2 + V_3, \quad (3.63)$$

где

$$V_1 = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sin \tau} |R_n(\theta, \tau)| d\tau, \quad (3.64)$$

$$V_2 = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\theta - \frac{\pi}{2n}}^{\theta + \frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sin \tau} |R_n(\theta, \tau)| d\tau, \quad (3.65)$$

$$V_3 = \frac{\sin \theta}{2} \int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\pi} \frac{1}{\sin \tau} |R_n(\theta, \tau)| d\tau. \quad (3.66)$$

Чтобы оценить V_1 и V_3 , мы заметим, что в силу (3.52)

$$|R_n(\theta, \tau)| \leq R_{n1}(\theta, \tau) + R_{n2}(\theta, \tau), \quad (3.67)$$

где

$$R_{n1}(\theta, \tau) = \left| \frac{\sin((n-1)\theta) \sin \frac{\tau}{2} \cos((n-\frac{1}{2})\tau)}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \right|, \quad (3.68)$$

$$R_{n2}(\theta, \tau) = \left| \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin((n-1)\tau) \cos((n-\frac{1}{2})\theta)}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \right|. \quad (3.69)$$

Рассмотрим V_1 . Из (3.64), (3.67)–(3.69) имеем

$$V_1 \leq V_1' + V_1'', \quad (3.70)$$

где

$$\begin{aligned} V_1' &= \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{R_{n1}(\theta, \tau) d\tau}{\sin \tau} \leq \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} \\ &\leq c(\sin \theta) \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{(\theta - \tau)(\theta + \tau)} = c \frac{\sin \theta}{\theta} \ln \frac{\theta + \tau}{\theta - \tau} \Big|_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \leq c \ln \frac{2\theta - \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \\ &= c \ln \frac{4n\theta - \pi}{\pi} = c \ln \left(\frac{4}{\pi} n\theta - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} V_1'' &= \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{R_{n2}(\theta, \tau) d\tau}{\sin \tau} \\ &= \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{|\sin \frac{\theta}{2} \sin((n-1)\tau) \cos((n-\frac{1}{2})\theta)|}{\sin \tau \sin \frac{\theta-\tau}{2} \sin \frac{\theta+\tau}{2}} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{|\sin((n-1)\tau)| d\tau}{\sin \tau \sin \frac{\theta - \tau}{2}} \\
&\leq \frac{\sin \theta}{\pi} \left[(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\sin \frac{\theta - \tau}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\sin \tau \sin \frac{\theta - \tau}{2}} \right] \\
&\leq c \sin \theta \left((n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\theta - \tau} + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\tau(\theta - \tau)} \right) \\
&= c \sin \theta \left((n-1) \ln(\theta - \tau) \Big|_{\frac{\pi}{2n}}^0 + \frac{1}{\theta} \ln \frac{\tau}{\theta - \tau} \Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\theta - \frac{\pi}{2n}} \right) \\
&= c \sin \theta \left((n-1) \ln \frac{2n\theta}{2n\theta - \pi} + \frac{1}{\theta} \ln \frac{(2n\theta - \pi)(2n\theta - \pi)}{\pi^2} \right) \\
&\leq c(n-1) \sin \theta \ln \left(1 + \frac{\pi}{2n\theta - \pi} \right) + c \frac{\sin \theta}{\theta} \ln \left(\frac{2n}{\pi} \theta - 1 \right)^2 \\
&\leq c \frac{\pi(n-1)\theta}{2n\theta - \pi} + c \ln \left(\frac{2}{\pi} n\theta - 1 \right). \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Из (3.70)–(3.72) выводим

$$V_1 \leq c(1 + \ln(n\theta + 1)), \quad \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.73}$$

Оценим V_3 . Из (3.66)–(3.69) следует, что

$$V_3 \leq V'_3 + V''_3, \tag{3.74}$$

где

$$\begin{aligned}
V'_3 &= \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\theta) \sin \frac{\tau}{2} (\cos(n - \frac{1}{2})\tau)|}{\sin \tau \sin \frac{\tau - \theta}{2} \sin \frac{\tau + \theta}{2}} d\tau \\
&= \frac{\sin \theta}{2\pi} \int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\theta) \cos((n - \frac{1}{2})\tau)|}{\sin \frac{\tau - \theta}{2} \sin \frac{\tau + \theta}{2} \cos \frac{\tau}{2}} d\tau \\
&= \frac{\sin \theta}{2\pi} \left(\int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \right) \frac{|\sin((n-1)\theta) \cos((n - \frac{1}{2})\tau)|}{\sin \frac{\tau - \theta}{2} \sin \frac{\tau + \theta}{2} \cos \frac{\tau}{2}} d\tau \\
&\leq c \sin \theta \left(\int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\tau}{\sin \frac{\tau - \theta}{2} \sin \frac{\tau + \theta}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{|\cos((n - \frac{1}{2})\tau)|}{\cos \frac{\tau}{2}} d\tau \right) \\
&\leq c \sin \theta \left(\int_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\tau}{(\tau - \theta)(\tau + \theta)} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin((n - \frac{1}{2})\tau)|}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \right) \\
&\leq c \sin \theta \left(\frac{1}{2\theta} \ln \frac{\tau - \theta}{\tau + \theta} \Big|_{\theta + \frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} + \ln n \right) = c \ln \frac{(\frac{3\pi}{4} - \theta)(2\theta + \frac{\pi}{2n})}{(\frac{3\pi}{4} + \theta)\frac{\pi}{2n}} + c \sin \theta \ln n \\
&\leq c \left(1 + \ln \left(\frac{4}{\pi} n\theta + 1 \right) + \sin \theta \ln n \right) \leq c(1 + \ln(n\theta + 1)), \tag{3.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3'' &= \frac{\sin \theta}{2\pi} \int_{\theta+\frac{\pi}{2n}}^{\pi} \frac{|\sin((n-1)\tau)|}{\sin \frac{\tau}{2}} \frac{|\cos((n-\frac{1}{2})\theta)|}{\cos \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\tau-\theta}{2} \sin \frac{\tau+\theta}{2}} d\tau \\
 &\leq c \frac{\sin \theta}{2\pi} \left[\int_{\theta+\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{|\sin((n-1)\tau)|}{\sin \frac{\tau}{2}} \frac{d\tau}{\sin \frac{\tau-\theta}{2}} + \sin \frac{\theta}{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{|\cos((n-\frac{1}{2})\tau)|}{\cos \frac{\tau}{2}} d\tau \right] \\
 &\leq c \sin \theta \left[\int_{\theta+\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\tau}{\tau(\tau-\theta)} + \sin \frac{\theta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin((n-\frac{1}{2})\tau)|}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau \right] \\
 &\leq c \sin \theta \left[\frac{1}{\theta} \ln \frac{\tau-\theta}{\tau} \Big|_{\theta+\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{4}} + \sin \frac{\theta}{2} \ln n \right] \\
 &= c \frac{\sin \theta}{\theta} \ln \frac{(\frac{3\pi}{4}-\theta)(\theta+\frac{\pi}{2n})}{\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}} + c \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \ln n \\
 &\leq c \ln \frac{(\frac{3\pi}{4}-4\theta)(2n\theta+\pi)}{3\pi^2} + c \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \ln n \leq c(1+\ln(n\theta+1)). \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

Выше мы воспользовались оценкой $\sin \theta \ln n \leq c \ln(n\theta+1)$, которая при $1 \leq \theta \leq \pi$ очевидна. Справедливость этой оценки при $0 \leq \theta \leq 1$ легко проверить следующим образом. Имеем $\sin \theta \ln n \leq \theta \ln n$. С другой стороны, легко увидеть (функция n^θ выпукла вниз), что при $0 \leq \theta \leq 1$ будет $n^\theta \leq n\theta+1$. Эти два неравенства, взятые вместе, приводят к необходимой оценке.

Сопоставляя (3.75) и (3.76) с (3.74), находим

$$V_3 \leq C(1+\ln(n\theta+1)), \quad \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.77)$$

Оценим наконец V_2 . Для этого заметим, что в силу (3.50) выполнено

$$|R_n(\theta, \tau)| \leq 2(n-1),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 V_2 &\leq \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{2n}}^{\theta+\frac{\pi}{2n}} \frac{2(n-1)d\tau}{\sin \tau} \leq c(n-1) \sin \theta \int_{\theta-\frac{\pi}{2n}}^{\theta+\frac{\pi}{2n}} \frac{d\tau}{\tau} \\
 &= c(n-1) \sin \theta \ln \frac{\theta+\frac{\pi}{2n}}{\theta-\frac{\pi}{2n}} = c(n-1) \sin \theta \ln \left(1 + \frac{\frac{\pi}{n}}{\theta-\frac{\pi}{2n}} \right) \\
 &\leq c(\sin \theta) \frac{\pi}{\theta-\frac{\pi}{2n}} = c(\sin \theta) \frac{2n\pi}{2n\theta-\pi} \leq c \frac{2n\theta\pi}{2n\theta-\pi} \leq c, \quad \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

Сопоставляя (3.73), (3.77) и (3.78) с (3.63), получаем

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\cos \theta) \leq c(1+\ln(n\theta+1)), \quad \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.79)$$

Поскольку $n\theta \asymp n\sqrt{1-x^2}$, утверждение леммы вытекает из (3.62) и (3.79).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $-1 \leq x \leq 1$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n^\alpha(x) &\leq c(\alpha) [1 + \ln(n\sqrt{1-x^2}+1)], \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2}, \\
 \Lambda_n^{\frac{3}{2}}(x) &\leq c \ln(n+1).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 3.1–3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$, $E_n(f)$ – наилучшее приближение $f(x)$ в $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени n . Тогда имеют место оценки

$$|f(x) - \sigma_n^\alpha(x)| \leq c(\alpha) E_n(f) (1 + \ln(n \sqrt{1 - x^2} + 1)), \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{2},$$

$$|f(x) - \sigma_n^{\frac{3}{2}}(x)| \leq c E_n(f) \ln(n + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала в том, что $E_n^\pm(f) \leq 2E_n(f)$. В самом деле, обозначим через $p_n^*(x)$ алгебраический полином наилучшего приближения к функции f , для которого $\|p_n^* - f\| = E_n(f)$. Тогда $|p_n^*(\pm 1) - f(\pm 1)| \leq E_n(f)$ и, следовательно, $|c_{p_n^*-f}(x)| \leq E_n(f)$ для всех $x \in [-1, 1]$. Поэтому для алгебраического полинома $q_n(x) = p_n^*(x) - c_{p_n^*-f}(x)$ имеем $q_n(\pm 1) = f(\pm 1)$ и $|q_n(x) - f(x)| \leq |p_n^*(x) - f(x)| + |c_{p_n^*-f}(x)| \leq 2E_n(f)$. Тем самым неравенство $E_n^\pm(f) \leq 2E_n(f)$ доказано. С учетом этого неравенства доказательство следствия непосредственно вытекает из (3.9), (3.10) и теоремы 3.1.

Рассмотрим частичную сумму ряда (1.20) следующего вида:

$$S_n(\Phi, \theta) = a_\Phi(\theta) + \sin \theta \sum_{k=1}^{n-2} \varphi_k \sin(k\theta), \quad (3.80)$$

и оценим величину $|\Phi(\theta) - S_n(\Phi, \theta)|$. С этой целью обозначим через $E_n^\pi(\Phi)$ наилучшее равномерное приближение функции $\Phi(\theta)$ тригонометрическими полиномами $T_n(\theta)$ порядка n , для которых

$$\Phi(k\pi) = T_n(\Phi, k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.81)$$

τ_Φ^n – пространство всех тригонометрических полиномов $T_n(\theta)$ порядка n , удовлетворяющих условию (3.81). Пусть для $T_n(\Phi) \in \tau_\Phi^n$ имеет место равенство

$$\|\Phi - T_n(\Phi)\| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\Phi(\theta) - T_n(\Phi, \theta)| = E_n^\pi(\Phi). \quad (3.82)$$

Из конструкции ряда (1.20) (или из (3.80)) нетрудно заметить, что $S_n(\Phi) = S_n(\Phi, \theta)$ является проектором на пространство четных тригонометрических полиномов порядка n , поэтому $S_n(T_n(\Phi, \theta)) = T_n(\Phi, \theta)$. Отсюда следует, что

$$|\Phi(\theta) - S_n(\Phi, \theta)| = |\Phi(\theta) - T_n(\Phi, \theta) + S_n(T_n(\Phi) - \Phi, \theta)|$$

$$\leq E_n^\pi(\Phi) + E_n^\pi(\Phi) L_n^\pi(\theta) = E_n^\pi(\Phi) (1 + L_n^\pi(\theta)), \quad (3.83)$$

где

$$L_n^\pi(\theta) = \frac{|\sin \theta|}{\pi} \int_0^\pi \frac{|R_n(\theta, \tau)|}{\sin \tau} d\tau; \quad (3.84)$$

здесь функция $R_n(\theta, \tau)$ определена равенством (3.50). Сопоставляя (3.48) с равенством (3.84), мы замечаем, что $L_n^\pi(\theta) = L_n^{1/2}(\cos \theta)$, поэтому в силу леммы 3.3

$$L_n^\pi(\theta) \leq c(1 + \ln(n \sin \theta + 1)), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.85)$$

Из (3.83) и (3.85) мы выводим

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\Phi(\theta)$ – четная 2π -периодическая непрерывная функция. Тогда имеет место оценка

$$|\Phi(\theta) - S_n(\Phi, \theta)| \leq cE_n^\pi(\Phi)(1 + \ln(n|\sin \theta| + 1)). \quad (3.86)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$. Тогда

$$\Lambda_n^\alpha = \max_{-1 \leq x \leq 1} \Lambda_n^\alpha(x) \asymp \ln(n+1), \quad (3.87)$$

т.е. найдутся такие положительные числа $c_1(\alpha)$ и $c_2(\alpha)$, что

$$c_1 \ln(n+1) \leq \Lambda_n^\alpha \leq c_2 \ln(n+1). \quad (3.88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство из (3.88) непосредственно вытекает из теоремы 3.1, левое – из известного результата Лозинского–Харшиладзе–Николаева (см., например, [11]), касающегося оценки снизу роста норм линейных полиномиальных операторов в пространстве $C[-1, 1]$. В самом деле, как уже отмечалось, τ_n^α , определенный равенством (3.1), в силу (3.2) представляет собой линейный полиномиальный оператор. Поэтому в силу указанного результата имеем

$$\|\sigma_n^\alpha\| \geq c \ln(n+1). \quad (3.89)$$

С другой стороны, в силу (3.1), (1.7), (1.13) и (3.10) имеем

$$|\sigma_n^\alpha(f, x)| \leq \|f\| + 2\|f\|\Lambda_n^\alpha(x),$$

следовательно,

$$\|\sigma_n^\alpha(f)\| \leq \|f\|(1 + 2\Lambda_n^\alpha). \quad (3.90)$$

Сопоставляя (3.90) с (3.89), приходим к левой оценке в (3.88).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\alpha > \frac{3}{2}$, $0 < \delta \leq 1$. Тогда для $-1 + \frac{\delta}{n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$ имеет место оценка

$$\Lambda_n^\alpha(x) \leq c(\alpha) \left[\ln(1 + n\sqrt{1-x^2}) + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}-\alpha} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из леммы 3.1 и равенства $\Lambda_n^\alpha(x) = \Lambda_n^\alpha(-x)$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\alpha > \frac{3}{2}$, $0 < \delta \leq \frac{1}{\alpha+1}$. Тогда для $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$ имеет место оценка

$$c_1(\alpha, \delta) n^{\alpha-\frac{3}{2}} \leq \Lambda_n^\alpha(x) \leq c_2(\alpha, \delta) n^{\alpha-\frac{3}{2}}. \quad (3.91)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху из (3.91) непосредственно вытекает из теоремы 3.2, поэтому нам остается доказать оценку снизу. Пусть $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$; тогда в силу (3.10) мы можем записать

$$\Lambda_{n+2}^\alpha(x) \geq (1-x^2) \int_{-1}^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} (1-t^2)^{\alpha-1} |K_n^\alpha(x, t)| dt. \quad (3.92)$$

Из (3.91) и (3.12) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+2}^\alpha(x) &\geq c(\alpha)n(1-x^2)|P_n^\alpha(x)| \int_{-1}^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} \frac{1-t}{x-t} (1-t^2)^{\alpha-1} |P_n^{\alpha+1,\alpha}(t)| dt \\ &\quad - c(\alpha)n(1-x^2)(1-x)|P_n^{\alpha+1,\alpha}(x)| \\ &\quad \times \int_{-1}^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} \frac{1-t}{x-t} (1-t)^{\alpha-2}(1+t)^{\alpha-1} |P_n^\alpha(t)| dt = J_1(x) - J_2(x). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Оценим сначала $J_2(x)$ сверху при $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} (1-x^2)(1-x)n &\leq c(\alpha)n^{-3}, \\ |P_n^\alpha(t)| &\leq c(\alpha)n^{-\frac{1}{2}} \left((1-t^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}, \\ |P_n^{\alpha+1,\alpha}(t)| &\leq c(\alpha)n^{\alpha+1}, \\ \frac{1-t}{x-t} &= \frac{1-x}{x-t} + 1 \leq c(\alpha, \delta), \quad -1 \leq t \leq 1 - \frac{2}{(\alpha+1)n^2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} J_2(x) &\leq c(\alpha, \delta)n^{\alpha-2-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} \left((1-t^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha-2}(1+t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq c(\alpha, \delta)n^{\alpha-\frac{5}{2}} \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} n^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+t)^{\alpha-1} dt + c(\alpha, \delta)n^{\alpha-\frac{5}{2}} \int_{-1+\frac{1}{n^2}}^0 (1+t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} dt \\ &\quad + c(\alpha, \delta)n^{\alpha-\frac{5}{2}} \int_0^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} dt \\ &\leq c(\alpha, \delta)n^{\alpha-\frac{5}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}n^{-2\alpha} + c(\alpha, \delta)(n^{\alpha-\frac{5}{2}} + \ln(n+1)) \\ &\leq c(\alpha, \delta)(n^{\alpha-\frac{5}{2}} + \ln(n+1)). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Докажем теперь оценку снизу величины $J_1(x)$ при $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$. Из (3.93) имеем

$$\begin{aligned} J_1(x) &\geq c(\alpha)n(1-x^2)|P_n^\alpha(x)| \int_{-1}^{1-\frac{2}{(\alpha+1)n^2}} (1-t^2)^{\alpha-1} |P_n^{\alpha+1,\alpha}(t)| dt \\ &\geq c(\alpha)n(1-x^2)|P_n^\alpha(x)| \int_{-1}^0 (1+t)^{\alpha-1} |P_n^{\alpha+1,\alpha}(t)| dt \\ &= c(\alpha)n(1-x^2)|P_n^\alpha(x)| \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} |P_n^{\alpha,\alpha+1}(t)| dt. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Теперь обратимся к оценке (2.7) при $\gamma = \alpha - 1$, $\beta = \alpha + 1$. Поскольку при $\alpha > \frac{3}{2}$ будет $2\gamma = 2\alpha - 2 > \alpha - \frac{3}{2}$, из (2.7) следует, что

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} |P_n^{\alpha,\alpha+1}(t)| dt \asymp n^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.96)$$

Из (3.95) и (3.96) находим для $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$

$$J_1^\alpha(x) \geq c(\alpha)n^{-\frac{3}{2}}|P_n^\alpha(x)|. \quad (3.97)$$

Остается оценить снизу $|P_n^\alpha(x)|$ при $1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$. С этой целью рассмотрим равенство (2.1), которое мы запишем в развернутом виде следующим образом:

$$P_n^\alpha(x) = \binom{n+\alpha}{n} [1 - a_1(x) + a_2(x) - a_3(x) + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}(x) + (-1)^n a_n(x)], \quad (3.98)$$

где

$$a_k(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+2\alpha+1)\dots(n+k+2\alpha)}{k!(\alpha+1)\dots(\alpha+k)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k > 0. \quad (3.99)$$

Если $1-x \leq \frac{1}{(\alpha+1)n^2}$, то из (3.99) следует, что

$$a_1(x) = \frac{n(n+2\alpha+1)}{\alpha+1} \frac{1-x}{2} \leq \frac{n(n+2\alpha+1)}{2(\alpha+1)^2 n^2} \leq \frac{2\alpha+2}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}. \quad (3.100)$$

Далее,

$$a_{k+1}(x) = a_k(x)h_k(x), \quad (3.101)$$

где

$$\begin{aligned} h_k(x) &= \frac{(n-k)(n+k+2\alpha+1)}{(k+1)(k+\alpha+1)} \frac{1-x}{2} \leq \frac{(n-k)(n+k+2\alpha+1)}{(k+1)(k+\alpha+1)} \frac{1}{2(\alpha+1)n^2} \\ &< \frac{n+k+2\alpha+1}{(k+1)(k+\alpha+1)} \frac{1}{2(\alpha+1)n} < \frac{1}{2(k+1)(\alpha+1)} \leq \frac{1}{10}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

так как $n+k+2\alpha+1 < n(k+\alpha+1)$. Из (3.100)–(3.102) следует, что

$$a_{k+1}(x) \leq \frac{1}{\alpha+1} 10^{-k}, \quad k \geq 0. \quad (3.103)$$

Кроме того, в силу (3.101) и (3.102) имеем

$$a_{2k}(x) - a_{2k+1}(x) > 0, \quad 1 \leq k < \frac{n}{2},$$

откуда, как следствие, получаем

$$\begin{aligned} a_2(x) - a_3(x) + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}(x) + (-1)^n a_n(x) \\ = a_2(x) - a_3(x) + \dots + a_{2l}(x) - a_{2l+1}(x) \geq 0, \quad n = 2l+1, \\ a_2(x) - a_3(x) + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}(x) + (-1)^n a_n(x) \\ = a_2(x) - a_3(x) + \dots + a_{2l-2}(x) - a_{2l-1}(x) + a_{2l}(x) \geq 0, \quad n = 2l. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (3.98) и (3.103) для $\alpha > 3/2$ имеем

$$\begin{aligned} P_n^\alpha(x) &\geq \binom{n+\alpha}{n} [1 - a_1(x)] \\ &\geq \binom{n+\alpha}{n} \left[1 - \frac{1}{\alpha+1}\right] \geq c(\alpha)n^\alpha, \quad 1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Из (3.97) и (3.104) выводим

$$J_1^\alpha(x) \geq c(\alpha, \delta)n^{\alpha-\frac{3}{2}}, \quad 1 - \frac{1}{(\alpha+1)n^2} \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}. \quad (3.105)$$

Сопоставляя (3.105) и (3.94) с (3.93), приходим к оценке снизу в (3.91). Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. И. И. Шарапудинов, “Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства”, *Матем. заметки*, **94:2** (2013), 295–309; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Limit ultraspherical series and their approximation properties”, *Math. Notes*, **94:2** (2013), 281–293.
2. Ф. Ф. Дедус, С. А. Махортых, М. Н. Устинин, А. Ф. Дедус, *Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов*, Машиностроение, М., 1999, 356 с.
3. С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, М., 1983, 384 с.; пер. с польск.: S. Paszkowski, *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1975, 481 pp.
4. О. Б. Арушанян, Н. И. Волченкова, С. Ф. Залеткин, “О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **8** (2011), 273–283.
5. L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, Software Environ. Tools, **10**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000, xviii+165 pp.
6. L. N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, Cornell University, Ithaca, NY, 1996, 300 pp.
7. R. Mukundan, K. R. Ramakrishnan, *Moment functions in image analysis. Theory and applications*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998, xiv+150 pp.
8. H. S. Malvar, *Signal processing with lapped transforms*, Artech House, Boston, MA, 1992, xvi+357 pp.
9. Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962, 500 с.; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959, ix+421 pp.
10. В. М. Бадков, “Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби”, *Сиб. матем. журн.*, **9:6** (1968), 1263–1283; англ. пер.: V. M. Badkov, “Estimates of Lebesgue functions and remainders of Fourier–Jacobi series”, *Siberian Math. J.*, **9:6** (1969), 947–962.
11. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Гостехиздат, М.–Л., 1949, 688 с.; нем. пер.: I. P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1955, xiv+515 pp.

Идрис Идрисович Шарапудинов

(IDRIS I. SHARAPUDINOV)

Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступило в редакцию

20.03.2013

24.06.2013