Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:59:31

УДК 517.925.52

В. Е. Слюсарчук

Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений

Рассмотрены нелинейные почти периодические дифференциально-разностные уравнения, имеющие решения с предкомпактными множествами значений. Получены условия почти периодичности таких решений.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: почти периодические решения, нелинейные дифференциально-разностные уравнения, нелинейные почти периодические уравнения.

DOI: 10.4213/im8120

§ 1. Основные обозначения и объект исследований

Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$ и $L(X, Y)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов A , действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , с нормой $\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Обозначим через C^0 банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$, принимающих значения в E , с нормой $\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через C^1 – банахово пространство функций $x \in C^0$, для каждой из которых $dx/dt \in C^0$, с нормой $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_{C^0}, \|dx/dt\|_{C^0}\}$.

Определим оператор сдвига $S_h \in L(C^0, C^0)$, $h \in \mathbb{R}$, формулой

$$(S_h x)(t) = x(t + h), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Элемент $y \in C^k$, $k \in \{0, 1\}$, называется *почти периодическим* (по Бохнеру) (см., например, [1]–[4]), если замыкание множества $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве C^k является компактным подмножеством этого пространства. Линейный непрерывный оператор $H : C^k \rightarrow C^l$, где $k, l \in \{0, 1\}$, называется *почти периодическим*, если замыкание множества $\{S_\tau H S_{-\tau} : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве $L(C^k, C^l)$ компактно в этом пространстве. Если $S_\tau H S_{-\tau} = H$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, то оператор H называется *автономным*.

Обозначим через B^0 и B^1 банаховы пространства почти периодических элементов пространств C^0 и C^1 с нормами $\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$ и $\|x\|_{B^1} = \|x\|_{C^1}$ соответственно.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – области пространства E , т. е. открытые связные множества пространства E , а K_1 и K_2 – множества всех непустых связных компактных подмножеств $K_1 \subset \Omega_1$ и $K_2 \subset \Omega_2$ соответственно.

Рассмотрим непрерывное отображение $F: \mathbb{R} \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow E$, удовлетворяющее условиям:

1) $F(t, x_1, x_2)$ равномерно непрерывно по (x_1, x_2) на каждом множестве $\mathbb{R} \times K_1 \times K_2$, где $K_1 \in \mathcal{K}_1$ и $K_2 \in \mathcal{K}_2$;

2) $F(t, x_1, x_2)$ почти периодически по t равномерно по (x_1, x_2) на каждом множестве $K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$.

Аналогично, как и в [4, с. 428–429], можно показать, что для каждого множества $K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2} \|F(t, x_1, x_2)\|_E < +\infty$$

и для каждой последовательности $(h_k)_{k \geq 1}$ действительных чисел существует подпоследовательность $(h_{k_l})_{l \geq 1}$ такая, для которой последовательность $(F(t + h_{k_l}, x_1, x_2))_{l \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K_1 \times K_2$.

Предположим, что последовательность $(F(t + h_{k_l}, x_1, x_2))_{l \geq 1}$ сходится равномерно на каждом множестве $\mathbb{R} \times K_1 \times K_2$, $K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, и предельное отображение $G: \mathbb{R} \times \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow E$, которое определяется соотношением

$$G(t, x_1, x_2) = \lim_{l \rightarrow \infty} F(t + h_{k_l}, x_1, x_2), \quad (2)$$

удовлетворяет условиям 1), 2). Это требование в дальнейшем будет играть вспомогательную роль и не будет использоваться при получении основного результата.

Рассмотрим линейные непрерывные почти периодические разностные операторы $A: C^0 \rightarrow C^0$ и $B: C^0 \rightarrow C^0$, которые определяются равенствами

$$(Ax)(t) = \sum_{l=0}^m A_l(t)x(t - \Delta_l), \quad (3)$$

$$(Bx)(t) = \sum_{l=0}^m B_l(t)x(t - \tau_l), \quad (4)$$

где $A_l(t)$, $l = \overline{0, m}$, и $B_l(t)$, $l = \overline{0, m}$, – непрерывные на $\mathbb{R}$ почти периодические функции со значениями в $L(E, E)$, а Δ_l и τ_l , $l = \overline{0, m}$, – произвольные вещественные числа.

Пусть $D: C^1 \rightarrow C^0$ – оператор дифференцирования, который определяется соотношением

$$(Dx)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Этот оператор, очевидно, является автономным.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$F(t, (Ax)(t), (BDx)(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Очевидно, что уравнение (6), в частности, может быть дифференциальным, если, например, $A_l(t) \equiv B_l(t) \equiv O$, $l = \overline{1, m}$, $A_0(t) \neq O$, $B_0(t) \neq O$ и $\Delta_0 = \tau_0 = 0$.

$\mathcal{H}$ -классом уравнения (6) называется множество всех дифференциально-разностных уравнений

$$G(t, (\tilde{A}x)(t), (\tilde{B}Dx)(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где G определяется с помощью (2), а $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – с помощью равенств

$$\tilde{A} = \lim_{l \rightarrow \infty} S_{h_l} A S_{-h_l}, \quad \tilde{B} = \lim_{l \rightarrow \infty} S_{h_l} B S_{-h_l}.$$

Здесь $(h_l)_{l \geq 1}$ – та же самая последовательность, что и в (2) (предполагается, что пределы $\lim_{l \rightarrow \infty} S_{h_l} A S_{-h_l}$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} S_{h_l} B S_{-h_l}$ существуют).

Целью статьи является нахождение условий почти периодичности ограниченных решений уравнения (6) без использования элементов $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения. При исследовании уравнения (6) будем использовать вспомогательное функциональное уравнение и один функционал, определенный на множестве решений этого уравнения, замыкания множеств значений которых являются компактными подмножествами Ω_1 .

§ 2. Вспомогательное функциональное уравнение

Рассмотрим автономный линейный непрерывный оператор $L: C^1 \rightarrow C^0$ и обратный для этого оператора непрерывный оператор $L^{-1}: C^0 \rightarrow C^1$, которые определяются формулами

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \quad x \in C^1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$(L^{-1}y)(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} y(t + \tau) d\tau, \quad y \in C^0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

С помощью оператора L уравнение (6) представляется в виде

$$F(t, (Ax)(t), (BLx)(t) - (Bx)(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Если функция $x = x(t)$ является решением уравнения (6) и элементом пространства C^1 , то

$$x(t) = (L^{-1}y)(t), \quad (10)$$

где

$$y(t) = (Lx(t))(t) \quad (11)$$

и функция $y = y(t)$ является элементом пространства C^0 и решением уравнения

$$F(t, (AL^{-1}y)(t), (By)(t) - (BL^{-1}y)(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (12)$$

(здесь учтены (9)–(11)). Наоборот, если функция $y = y(t)$ является элементом пространства C^0 и решением уравнения (12), то функция $x = x(t)$, которая определяется равенством (10), является решением уравнения (6) и элементом пространства C^1 .

Таким образом, исследование решений дифференциально-разностного уравнения (6) в пространстве C^1 сводится к исследованию решений функционального уравнения (12) в пространстве C^0 .

Поскольку оператор L автономный, то $L^{-1}y \in B^1$ для каждого $y \in B^0$ (см., например, [5]) и $Lx \in B^0$ для каждого $x \in B^1$. Поэтому если функция $x = x(t)$ является решением уравнения (6) и элементом пространства B^1 , то функция $y = y(t)$, которая определяется равенством (11), является элементом пространства B^0 и решением уравнения (12), и наоборот.

Таким образом, чтобы показать, что ограниченное решение $x = x(t)$ дифференциально-разностного уравнения (6) в пространстве C^1 является почти периодическим, достаточно показать, что соответствующее решение $y(t) = (Lx)(t)$ функционального уравнения (12) является почти периодическим.

В дальнейшем для исследования уравнения (6) мы будем использовать уравнение (12).

§ 3. Функционал Δ

Обозначим через K^0 множество таких функций $x = x(t)$ пространства C^0 , для каждой из которых замыкание $\overline{R(x)}$ множества $R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ в пространстве E является компактным подмножеством этого пространства. Аналогично, обозначим через K^1 множество таких функций $x \in K^0 \cap C^1$, для каждой из которых множество $\overline{R(dx/dt)}$ является компактным в пространстве E . Очевидно, что K^0 и K^1 – подпространства пространств C^0 и C^1 соответственно и $B^l \subset K^l$, $l \in \{0, 1\}$.

Фиксируем произвольное решение $x^* = x^*(t)$ уравнения (6), являющееся элементом пространства K^1 . Тогда функция $y^* = y^*(t)$, которая определяется равенством

$$y^*(t) = (Lx^*(t))(t), \quad (13)$$

является решением уравнения (12). Эта функция также является элементом пространства K^0 , поскольку

$$y^*(t) = \frac{dx^*(t)}{dt} + x^*(t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} R(y^*) &= \left\{ \frac{dx^*(t)}{dt} + x^*(t) : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \left\{ \frac{dx^*(t)}{dt} : t \in \mathbb{R} \right\} + \{x^*(t) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= R\left(\frac{dx^*}{dt}\right) + R(x^*) \subset \overline{R\left(\frac{dx^*}{dt}\right)} + \overline{R(x^*)} \end{aligned}$$

и множества $\overline{R(dx^*/dt)}$ и $\overline{R(x^*)}$ компактны.

В силу формул (3)–(5) и почти периодичности операторов A и B множества $\overline{R(Ax^*)}$ и $\overline{R(BDx^*)}$ также будут компактными в E .

Предположим, что

$$\overline{R(Ax^*)} \subset \Omega_1, \quad \overline{R(BDx^*)} \subset \Omega_2. \quad (14)$$

Тогда согласно равенству (13) множества $\overline{R(AL^{-1}y^*)}$ и $\overline{R(By^* - BL^{-1}y^*)}$ также компактны в E и выполняются соотношения

$$\overline{R(AL^{-1}y^*)} \subset \Omega_1, \quad \overline{R(By^* - BL^{-1}y^*)} \subset \Omega_2.$$

Далее фиксируем произвольное компактное подмножество K пространства E , для которого

$$R(y^*) \subset K, \quad \overline{R(y^*)} \neq K, \quad (15)$$

и произвольную функцию $z = z(t)$ из пространства C^0 , для которой

$$y^*(t) + z(t) \in K, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

и компактные множества $\overline{R(AL^{-1}(y^* + z))}$ и $\overline{R(B(y^* + z) - BL^{-1}(y^* + z))}$ являются подмножествами множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно (в случае $\Omega_1 = \Omega_2 = E$ последнее требование выполняется). Множество всех таких функций $z = z(t)$ обозначим через Ω .

Заметим, что множества $\overline{R(AL^{-1}(y^* + z))}$ и $\overline{R(B(y^* + z) - BL^{-1}(y^* + z))}$ компактны в E , поскольку на основании (8), (16) и равенства

$$\int_{-\infty}^0 e^{\tau} d\tau = 1$$

выполняются соотношения

$$\overline{R(L^{-1}(y^* + z))} \subset \text{co } K, \quad \overline{R(y^* + z - L^{-1}(y^* + z))} \subset K - \text{co } K,$$

где $\text{co } K$ – выпуклая оболочка множества K , а множества $\text{co } K$ и $K - \text{co } K$ компактны с силу компактности K . Тогда на основании соотношений (3)–(5) и почти периодичности операторов A и B множества $\overline{R(AL^{-1}(y^* + z))}$ и $\overline{R(B(y^* + z) - BL^{-1}(y^* + z))}$ также будут компактными в E .

Положим

$$r(y^*, K) = \sup \{ \|y - z\|_E : y \in \overline{R(y^*)}, z \in K \}. \quad (17)$$

Поскольку $\overline{R(y^*)} \neq K$, то $r(y^*, K) > 0$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in [0, r(y^*, K)]$. Обозначим через $\Omega(y^*, K, \varepsilon)$ множество всех элементов $z \in \Omega$, для каждого из которых

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|z(t)\|_E - \varepsilon = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим функционал

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AL^{-1}(y^* + z))(t), (B(y^* + z))(t) - (BL^{-1}(y^* + z))(t))\|_E. \quad (19)$$

Применение функционала Δ к исследованию почти периодических решений нелинейного дифференциально-разностного уравнения (6) и линейного дифференциально-разностного уравнения приведем в следующих параграфах.

Аналогичный функционал для исследования нелинейных почти периодических решений разностного уравнения с непрерывным аргументом

$$x(t+1) = f(t, x(t))$$

и дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),$$

в которых отображение $f: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$, где Ω – произвольная область пространства E , непрерывное, использовался автором в [6], [7].

§ 4. Основной результат

Приведем условия существования почти периодических решений уравнения (6), в которых, в отличие от теоремы Америо о почти периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (см. [4], [8]), не используется $\mathcal{H}$ -класс уравнения (6).

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

- 1) x^* – решение уравнения (6), $x^* \in K^1$ и выполняются соотношения (14);
- 2) y^* – решение уравнения (12), удовлетворяющее соотношению (13);
- 3) выполняются соотношения (15), где K – компактное множество;
- 4) $\overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R(AL^{-1}S_{\tau}y^*)} \subset \Omega_1$ и $\overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R((B - BL^{-1})S_{\tau}y^*)} \subset \Omega_2$;
- 5) $\overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R(AL^{-1}(y^* + z))} \subset \Omega_1$ и $\overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R((B - BL^{-1})(y^* + z))} \subset \Omega_2$ для всех $z \in C^0$, удовлетворяющих (16).

Если для некоторого числа $\delta > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет место неравенство

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) > 0, \quad (20)$$

где K – множество из условия 3), то решение x^* уравнения (6) почти периодически.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $R(AL^{-1}S_{\tau}y^*)$ и $R((B - BL^{-1})S_{\tau}y^*)$ – компактные множества в пространстве E для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, что устанавливается аналогичным образом, как и в § 3, с использованием равенств $R(S_{\tau}y^*) = R(y^*)$, $\tau \in \mathbb{R}$, и включения $y^* \in K^0$. Поскольку в силу автономности оператора L^{-1} имеют место равенства

$$\begin{aligned} AL^{-1}S_{\tau}y^* &= S_{\tau}(S_{-\tau}AS_{\tau})L^{-1}y^*, \\ (B - BL^{-1})S_{\tau}y^* &= S_{\tau}((S_{-\tau}BS_{\tau}) - (S_{-\tau}BS_{\tau})L^{-1})y^* \end{aligned}$$

и операторы A и B почти периодические, т. е. множества

$$\overline{\{S_{-\tau}AS_{\tau}: \tau \in \mathbb{R}\}}, \quad \overline{\{S_{-\tau}BS_{\tau}: \tau \in \mathbb{R}\}}$$

компактны в пространстве $L(C^0, C^0)$, то и множества

$$\tilde{K}_1 = \overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R(AL^{-1}S_\tau y^*)}, \quad \tilde{K}_2 = \overline{\bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} R((B - BL^{-1})S_\tau y^*)}$$

также компактны в E (это свойство множеств $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ используем в дальнейшем).

Предположим, что решение x^* дифференциально-разностного уравнения (6) не является элементом пространства B^1 . Тогда согласно изложенному в § 2 соответствующее решение y^* функционального уравнения (12) (решения y^* и x^* связаны соотношением (13)) не является элементом пространства B^0 . На основании компактности K существует последовательность $(y^*(t + h_p))_{p \geq 1}$, сходящаяся в точке $t = 0$, причем каждая ее подпоследовательность $(y^*(t + k_p))_{p \geq 1}$ не сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Здесь $(k_p)_{p \geq 1}$ – подпоследовательность последовательности $(h_p)_{p \geq 1}$. Следовательно,

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|y^*(h_p) - y^*(h_q)\|_E = 0, \quad (21)$$

и для некоторых последовательностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ и числа $\gamma \in (0, \delta)$ имеем

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|y^*(t + k_{p_r}) - y^*(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \quad r \geq 1. \quad (22)$$

Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что последовательность $(F(t + k_p, x_1, x_2))_{p \geq 1}$ сходится равномерно на $\mathbb{R} \times \tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$. Тогда

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}, x_1 \in K_1^*, x_2 \in K_2^*} \|F(t + k_p, x_1, x_2) - F(t + k_q, x_1, x_2)\|_E = 0. \quad (23)$$

Можно также считать, что

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|S_{k_p} A S_{-k_p} - S_{k_q} A S_{-k_q}\|_{L(C^0, C^0)} = 0, \quad (24)$$

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|S_{k_p} B S_{-k_p} - S_{k_q} B S_{-k_q}\|_{L(C^1, C^0)} = 0, \quad (25)$$

где S_h – оператор сдвига, определенный соотношением (1). Это возможно в силу почти периодичности операторов A и B .

Фиксируем произвольное число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. На основании (21) и (22) для функций

$$z_r(t) = y^*(t + k_{p_r}) - y^*(t + k_{q_r}), \quad r \geq 1,$$

выполняется соотношение

$$S_{-k_{q_r}} z_r \in \Omega(y^*, K, \varepsilon_0), \quad r \geq 1. \quad (26)$$

Покажем, что

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon_0) = 0. \quad (27)$$

Согласно (19), (26) и автономности оператора L^{-1} выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 \Delta(y^*, K, \varepsilon_0) &= \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AL^{-1}(y^* + z))(t), (B(y^* + z))(t)) \\
 &\quad - (BL^{-1}(y^* + z))(t))\|_E \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AL^{-1}(y^* + S_{-k_{q_r}} z_r))(t), (B(y^* + S_{-k_{q_r}} z_r))(t)) \\
 &\quad - (BL^{-1}(y^* + S_{-k_{q_r}} z_r))(t))\|_E \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AL^{-1} S_{k_{p_r} - k_{q_r}} y^*)(t), (BS_{k_{p_r} - k_{q_r}} y^*)(t) - (BL^{-1} S_{k_{p_r} - k_{q_r}} y^*)(t))\|_E \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AS_{-k_{q_r}} L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (BS_{-k_{q_r}} S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 &\quad - (BS_{-k_{q_r}} L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} AS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 &\quad - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} AS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 &\quad - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t)) \\
 &\quad - F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} AS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 &\quad - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E \\
 &+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} AS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 &\quad - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E, \quad r \geq 1. \quad (28)
 \end{aligned}$$

В силу равномерной непрерывности $F(t, x_1, x_2)$ по (x_1, x_2) на множестве $\mathbb{R} \times \tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$ (где $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ – компактные множества) и формул (24) и (25) имеем

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} AS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{q_r}} BS_{-k_{q_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t)) \\
 - F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} AS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E = 0. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Также на основании автономности оператора L^{-1} и того, что

$$F(t, (AL^{-1} y^*)(t), (By^*)(t) - (BL^{-1} y^*)(t)) \equiv 0,$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} AS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) S_{k_{p_r}} y^*)(t) \\
 - (S_{-k_{q_r}} (S_{k_{p_r}} BS_{-k_{p_r}}) L^{-1} S_{k_{p_r}} y^*)(t))\|_E \\
 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}} S_{k_{p_r}} AL^{-1} y^*)(t), (S_{-k_{q_r}} S_{k_{p_r}} By^*)(t) \\
 - (S_{-k_{q_r}} S_{k_{p_r}} BL^{-1} y^*)(t))\|_E \\
 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (AL^{-1} y^*)(t + k_{p_r} - k_{q_r}), (By^*)(t + k_{p_r} - k_{q_r}) \\
 - (BL^{-1} y^*)(t + k_{p_r} - k_{q_r}))\|_E
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (BL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}))\|_E \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (BL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}))\|_E \\
&\quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (BL^{-1}y^*)(t + k_{p_r})) \\
&\quad - F(t + k_{q_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (BL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}))\|_E \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r})) \\
&\quad - F(t + k_{q_r}, (AL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), (By^*)(t + k_{p_r}) - (BL^{-1}y^*)(t + k_{p_r}))\|_E \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}, x_1 \in K_1^*, x_2 \in K_2^*} \|F(t + k_{p_r}, x_1, x_2) - F(t + k_{q_r}, x_1, x_2)\|_E.
\end{aligned}$$

Поэтому на основании (23) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, (S_{-k_{q_r}}(S_{k_{p_r}}AS_{-k_{p_r}})L^{-1}S_{k_{p_r}}y^*)(t), (S_{-k_{q_r}}(S_{k_{p_r}}BS_{-k_{p_r}})S_{k_{p_r}}y^*)(t) - (S_{-k_{q_r}}(S_{k_{p_r}}BS_{-k_{p_r}})L^{-1}S_{k_{p_r}}y^*)(t))\|_E = 0.$$

Отсюда и из (28), (29) вытекает соотношение (27), что противоречит (20).

Следовательно, предположение того, что решение x^* дифференциально-разностного уравнения (6) не является почти периодическим, является ложным. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что условие 4) теоремы 1 выполняется, если, например, $\Omega_1 = \Omega_2 = E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (6) может быть неразрешенным относительно BDx , однако теорема 1 позволяет выяснять существование почти периодических решений уравнения (6) и в этом случае.

§ 5. Случай линейного уравнения (6)

Рассмотрим непрерывное отображение $H: \mathbb{R} \times E \times E \rightarrow E$, которое определяется равенством

$$H(t, x_1, x_2) = x_2 + x_1 - h(t),$$

где $h(t)$ – непрерывная и почти периодическая на $\mathbb{R}$ функция со значениями в E , т. е. элемент пространства B^0 . Очевидно, что отображение H , как и отображение F (в случае $\Omega_1 = \Omega_2 = E$), удовлетворяет условиям:

- 1) $H(t, x_1, x_2)$ равномерно непрерывно по (x_1, x_2) на каждом множестве $\mathbb{R} \times K_1 \times K_2$, где $K_1 \in \mathcal{K}_1$ и $K_2 \in \mathcal{K}_2$;
- 2) $H(t, x_1, x_2)$ почти периодически по t равномерно по (x_1, x_2) на каждом множестве $K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$.

Рассмотрим также соответствующее линейное дифференциально-разностное уравнение

$$(BDx)(t) + (Ax)(t) - h(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

где $A: C^0 \rightarrow C^0$, $B: C^0 \rightarrow C^0$ и $D: C^1 \rightarrow C^0$ – линейные непрерывные операторы, которые определяются равенствами (3)–(5). Напомним, что операторы A и B почти периодические, а оператор D автономный.

Применим теорему 1 к исследованию уравнения (30). Предположим, что это уравнение имеет решение $x^* = x^*(t)$, являющееся элементом пространства K^1 . Рассмотрим функцию $y^*(t) = (Lx^*)(t)$, где L – оператор, который определяется формулой (7). Эта функция является элементом пространства K^0 и решением уравнения

$$(By)(t) - (BL^{-1}y)(t) + (AL^{-1}y)(t) - h(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

т. е.

$$(By^*)(t) - (BL^{-1}y^*)(t) + (AL^{-1}y^*)(t) - h(t) \equiv 0. \quad (32)$$

Фиксируем произвольное компактное множество $K \subset E$, для которого

$$R(y^*) \subset K, \quad \overline{R(y^*)} \neq K,$$

и число $\varepsilon \in (0, r(y^*, K)]$, где $r(y^*, K)$ определяется равенством (17). Обозначим через $\Omega(y^*, K, \varepsilon)$ множество всех элементов $z = z(t)$ пространства C^0 , для каждого из которых выполняются соотношения (16) и (18).

В случае уравнения (30) функционал Δ на основании (19) и (32) имеет вид

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(Bz)(t) - (BL^{-1}z)(t) + (AL^{-1}z)(t)\|_E.$$

Если учесть (8), то получим

$$\begin{aligned} \Delta(y^*, K, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} & \left\| \sum_{l=0}^m B_l(t) \left(z(t - \tau_l) - \int_{-\infty}^0 e^{\tau} z(t - \tau_l + \tau) d\tau \right) \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^m A_l(t) \int_{-\infty}^0 e^{\tau} z(t - \Delta_l + \tau) d\tau \right\|_E. \end{aligned}$$

На основании теоремы 1 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, то решение x^* дифференциально-разностного уравнения (30) является почти периодическим.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 2 применима к уравнению (30) и в случае, когда в этом уравнении почти периодический оператор $B: C^0 \rightarrow C^0$ может не иметь непрерывного обратного оператора B^{-1} .

§ 6. Пример применения теорем 1, 2

Будем считать, что $E = \mathbb{R}^2$ и норма в $\mathbb{R}^2$ определяется равенством

$$\|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{R}^2} = |x_1| + |x_2|.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu \sin\left(\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_1(t-1)}{dt}\right) \\ + (2 + \cos t + \cos \pi t) \left(\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_1(t-1)}{dt}\right) + x_2(t) = 1, \quad (33) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = 1, \end{aligned}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$. При $\mu \neq 0$ система (33) нелинейна и неразрешима относительно производных, а при $\mu = 0$ линейна и ее можно представить в виде (30), где A , B и $h(t)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} (A(y_1, y_2))(t) &= (y_2(t), y_2(t)), \\ (B(y_1, y_2))(t) &= ((2 + \cos t + \cos \pi t)(y_1(t) + y_1(t-1)), y_2(t)) \end{aligned}$$

(здесь (y_1, y_2) – элемент пространства C^0 в случае $E = \mathbb{R}^2$) и

$$h(t) = (1, 1).$$

Очевидно, что A , B и $h(t)$ почти периодические и разностный оператор B не имеет непрерывного обратного, поскольку $\inf_{t \in \mathbb{R}} |2 + \cos t + \cos \pi t| = 0$.

При $\mu \neq 0$ к системе уравнений (33) применима теорема 1, а при $\mu = 0$ – теоремы 1, 2.

Очевидно, что система уравнений (33) имеет почти периодическое решение

$$x_1^*(t) = 0, \quad x_2^*(t) = 1. \quad (34)$$

Это свойство решения также вытекает из теоремы 1 (при $\mu \in \mathbb{R}$) и теоремы 2 (при $\mu = 0$), что подтверждается следующими рассуждениями.

Запишем для (33) систему функциональных уравнений, аналогичную уравнению (31) (в случае $y = (y_1(t), y_2(t))$). Она представляется в виде

$$\begin{aligned} \mu \sin\left(y_1(t) - \int_{-\infty}^0 e^\tau y_1(t + \tau) d\tau + y_1(t-1) - \int_{-\infty}^0 e^\tau y_1(t-1 + \tau) d\tau\right) \\ + (2 + \cos t + \cos \pi t) \left(y_1(t) - \int_{-\infty}^0 e^\tau y_1(t + \tau) d\tau \right. \\ \left. + y_1(t-1) - \int_{-\infty}^0 e^\tau y_1(t-1 + \tau) d\tau\right) + \int_{-\infty}^0 e^\tau y_2(t + \tau) d\tau = 1, \\ y_2(t) = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

и имеет решение

$$y_1^*(t) = 0, \quad y_2^*(t) = 1,$$

что согласно (11) соответствует решению (34) системы уравнений (33).

Фиксируем произвольное число $\delta \in (0, 1/2]$ и рассмотрим компактное множество

$$K = \{(0, x_2) : x_2 \in [1 - \delta, 1 + \delta]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

В силу определений функционала Δ для уравнения (12) и нормы в $\mathbb{R}^2$ этот функционал в случае системы уравнений (35) для каждого числа $\varepsilon \in (0, \delta]$ представляется равенством

$$\Delta((y_1^*, y_2^*), K, \varepsilon) = \inf_{z \in C^0, R(z) \subset [-\delta, \delta], \varepsilon \in \overline{R(|z|)}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\left| \int_{-\infty}^0 e^\tau z(t + \tau) d\tau \right| + |z(t)| \right).$$

Здесь C^0 – определенное в § 1 банахово пространство в случае $E = \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что

$$\Delta((y_1^*, y_2^*), K, \varepsilon) \geq \varepsilon > 0$$

для каждого $\varepsilon \in (0, \delta]$.

Следовательно, согласно теореме 1 (при $\mu \in \mathbb{R}$) и теореме 2 (при $\mu = 0$) решение (34) системы уравнений (33) также является почти периодическим.

§ 7. Заключительные замечания

Приведенные в статье условия существования почти периодических решений нелинейного дифференциально-разностного уравнения (6) и линейного дифференциально-разностного уравнения (30) являются новыми. В отличие от известных теорем Америко [8] и Фавара [9], в теоремах 1, 2 не используются $\mathcal{H}$ -классы уравнений (6) и (30). Также в теореме 1 не используется условие разделенности ограниченных решений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (6), и банахово пространство E может быть бесконечномерным.

Исследованию решений почти периодических уравнений посвящено много публикаций. Выделим лишь часть из них. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Ж. Фаваром в работе [9], а для нелинейных дифференциальных уравнений – Л. Америко в работе [8]. Результаты Фавара были значительно улучшены Э. Мухамадиевым [10], [11]. Обобщениям теорем Мухамадиева посвящены работы автора [5], [12], [13]. Важные результаты в этом направлении также принадлежат Б. М. Левитану [3], Л. Америко [14] и В. В. Жикову [15]. Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциальных и разностных уравнений без применения $\mathcal{H}$ -классов этих уравнений получены автором в [6], [7].

Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений (требование существования таких решений в теореме 1 существенно) получены в [16]–[19].

Список литературы

1. S. Bochner, “Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. Funktionen einer Variablen”, *Math. Ann.*, **96**:1 (1927), 119–147.
2. S. Bochner, “Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II. Funktionen mehrerer Variablen”, *Math. Ann.*, **96**:1 (1927), 383–409.
3. Б. М. Левитан, *Почти периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953, 396 с.
4. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.
5. В. Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116(158)**:4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.
6. В. Ю. Слюсарчук, “Умови майже періодичності обмежених розв’язків нелінійних різницьових рівнянь з неперервним аргументом”, *Нелінійні коливання*, **16**:1 (2013), 118–124; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions for the almost periodicity of bounded solutions of nonlinear difference equations with continuous argument”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **197**:1 (2014), 122–128.
7. В. Ю. Слюсарчук, “Умови існування майже періодичних розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі”, *Укр. матем. журн.*, **65**:2 (2013), 307–312; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear differential equations in Banach spaces”, *Ukrainian Math. J.*, **65**:2 (2013), 341–347.
8. L. Amerio, “Soluzioni quasiperiodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **39**:1 (1955), 97–119.
9. J. Favard, “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques”, *Acta Math.*, **51**:1 (1928), 31–81.
10. Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274; англ. пер.: É. Mukhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11**:3 (1972), 169–172.
11. Э. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460; англ. пер.: É. Mukhamadiev, “Investigations in the theory of bounded and periodic solutions of differential equations”, *Math. Notes*, **30**:3 (1981), 713–722.
12. В. Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.
13. В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. Notes*, **42**:2 (1987), 648–651.
14. L. Amerio, “Sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte”, *Ricerche Mat.*, **9** (1960), 255–274.

15. В. В. Жиков, “Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 121–126; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Proof of the Favard theorem on the existence of almost-periodic solution for an arbitrary Banach space”, *Math. Notes*, **23**:1 (1978), 66–69.
16. В. Ю. Слюсарчук, “Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь”, *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1541–1556; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Method of local linear approximation in the theory of bounded solutions of nonlinear differential equations”, *Ukrainian Math. J.*, **61**:11 (2009), 1809–1829.
17. В. Ю. Слюсарчук, “Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабо регулярними операторами”, *Укр. матем. журн.*, **63**:12 (2011), 1685–1698; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Method of local linear approximation of nonlinear differential operators by weakly regular operators”, *Ukrainian Math. J.*, **63**:12 (2012), 1916–1932.
18. В. Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 103–126; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-differential equations”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1193–1215.
19. В. Е. Слюсарчук, “Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 135–160; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Bounded and periodic solutions of nonlinear functional differential equations”, *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 743–767.

Василий Ефимович Слюсарчук
(VASILII E. SLYUSARCHUK)
Национальный университет водного хозяйства
и природопользования, г. Ровно, Украина
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Поступило в редакцию
10.04.2013
25.04.2014