Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:58:03

УДК 517.5+517.518.28

Ф. Г. Авхадиев

Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$

Геометрически описаны семейства невыпуклых плоских и пространственных областей, в которых справедливо следующее неравенство Харди: для любой гладкой, финитной в области функции f ее интеграл Дирихле больше или равен четверти интеграла от функции $f^2(x)/\delta^2(x)$, где $\delta(x)$ – расстояние от точки x до границы области. Аналитической основой геометрических описаний являются новые одномерные неравенства типа Харди со специальными весами и новые константы, связанные с этими неравенствами и гипергеометрическими функциями.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: неравенства Харди, невыпуклые области, гипергеометрические функции, жесткость кручения.

DOI: 10.4213/im8121

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

Пусть Ω – произвольное открытое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, причем $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Через $\delta = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначим расстояние от заданной точки $x \in \Omega$ до границы этой области. Будем рассматривать следующее базовое неравенство Харди для d -мерных областей:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \geq c_2(\Omega) \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^2} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega), \quad (1)$$

где ∇f – градиент функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Будем считать, что постоянная $c_2(\Omega)$ в неравенстве (1) является наибольшей из возможных. В одномерном случае имеем $c_2(\Omega) = 1/4$, как следствие неравенства Харди [1].

Результат Харди эффективно обобщается на случай выпуклых областей. А именно, при любом $d \geq 2$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \neq \mathbb{R}^d$) имеет место равенство $c_2(\Omega) = 1/4$. Этот факт доказан в нескольких статьях, опубликованных в 1995–1998 годах (см. [2]–[5] и обзорную статью [6]). В [2] показано, что $c_2(\Omega) \leq 1/4$ для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, граница которой содержит хотя бы одну точку, регулярную в определенном смысле.

Хорошо известно также (см., например, [7]), что неравенство (1) справедливо с постоянной $1/4$ в областях, в которых функция расстояния $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ является супергармонической. В [8] доказано, что в размерности два это условие равносильно выпуклости области, но для пространственных областей оно

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00351-а, 12-01-00636-а).

слабее выпуклости. А именно, в [8] приведен следующий пример: для любого $a \geq 2$ супергармоническими являются функции расстояния для областей T_a и $T_a \times \mathbb{R}^k$, где $T_a \subset \mathbb{R}^3$ – тор, получаемый вращением вокруг оси Ox_3 круга $(x_2 - a)^2 + x_3^2 < 1$, лежащего на плоскости $x_1 = 0$.

Обнаружены экзотические примеры невыпуклых областей, в которых функция расстояния не является супергармонической, тем не менее постоянная Харди для них равна $1/4$. А именно, Е. Б. Дэвисом [2] установлено, что $c_2(\Omega_\beta) = 1/4$ для секторов вида

$$\Omega_\beta := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \beta\}$$

при ограничении $\beta \leq \beta_0 \approx 4.856$. В [5] и [9] показано, что при любом $d \geq 3$ константа Харди $c_2(\Omega_{R_1, R_2})$ равна $1/4$ для любого шарового слоя

$$\Omega_{R_1, R_2} := \{x \in \mathbb{R}^d : R_1 < |x| < R_2\}.$$

Кроме того, в статье А. Лаптева и автора [9] приведено одно обобщение этого утверждения и даны контрпримеры. В частности, показано, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/4)$ существуют открытые эллипсоиды E_1 и E_2 такие, что $\overline{E}_2 \subset E_1$ и $c_2(E_1 \setminus \overline{E}_2) \leq \varepsilon$. При $d = 2$ вместо эллипсоидного слоя можно взять кольцо $A := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ с достаточно большим модулем $M(A) = (2\pi)^{-1} \times \ln(R_2/R_1)$, так как для кольца выполнено $c_2(A) \leq 1/M^2(A)$ (см. [10], [11]).

Геометрическое описание семейства всех областей, для которых константа Харди $c_2(\Omega)$ равна $1/4$, является одной из трудных фундаментальных проблем. Целью настоящей статьи является частичное решение этой проблемы. Нам потребуется характеристика

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

называемая *внутренним радиусом области* (см. [10]–[17]), и голоморфное в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ решение $\eta = \eta_d(\zeta)$ гипергеометрического уравнения

$$\zeta(1 - \zeta)\eta'' + (d - 1 + d\zeta)\eta' - 2^{-1}(d - 1)\eta = 0, \quad \zeta = \xi \in (0, \infty).$$

Пусть $v_d(\xi) := \eta_d(1 + \xi)$. Через Λ_d обозначим первый положительный корень уравнения типа Лямба

$$v_d(\xi) + 2\xi v'_d(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < \infty.$$

Далее доказано, что такие корни $\xi = \Lambda_d > 0$ существуют при любом $d \in (1, \infty)$, причем Λ_d убывает с ростом d и $1/(d - 2) < \Lambda_d < 1$ при $d > 3$. Числовые значения констант Λ_d легко вычисляются, в частности имеем

$$\Lambda_2 \approx 2.49, \quad \Lambda_3 = 1, \quad \Lambda_4 \approx 0.61, \quad \Lambda_5 \approx 0.44, \quad \Lambda_6 \approx 0.34, \quad \Lambda_7 \approx 0.28.$$

Приведем теперь формулировки основных результатов статьи с краткими пояснениями.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d \geq 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область. Если для любой граничной точки $y \in \partial\Omega$ существует шар B_y с радиусом $r_d = \delta_0(\Omega)/\Lambda_d$ такой, что $y \in \overline{B_y} \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, то $c_2(\Omega) = 1/4$ и, кроме того, $c_2(\Omega \times \mathbb{R}^k) = 1/4$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Трехмерные торы T_a , $a \geq 2$, из [8] являются простейшими примерами областей, удовлетворяющих условию теоремы 1. Число таких примеров легко увеличить в силу простоты проверки условий теоремы. Однако можно предъявить ряд невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, для которых условия теоремы 1 не выполнены, тем не менее $c_2(\Omega) = 1/4$. А именно, нами дано геометрическое описание некоторого семейства областей $\Theta_{1/4}(d)$, существенно более общего, чем в теореме 1, для которого справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 2$. Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, принадлежащей семейству $\Theta_{1/4}(d)$, имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Определение семейства областей $\Theta_{1/4}(d)$ приведено в § 2. При $d \geq 3$ согласно индуктивной части определения $\Theta_{1/4}(d)$ имеем

$$\Omega = \Omega_m \times \mathbb{R}^{d-m} \in \Theta_{1/4}(d),$$

если $\Omega_m \in \Theta_{1/4}(m)$ для некоторого m , $2 \leq m < d$. Таким образом, с ростом размерности d семейства $\Theta_{1/4}(d)$ представляют собой все более и более “богатые” множества областей.

Доказательства теорем 1, 2 представлены в § 4. Используемые в этих доказательствах подготовительные результаты изложены в § 3. Основой доказательств теорем 1, 2 являются новые одномерные интегральные неравенства – аналоги неравенства Харди со специальными весовыми функциями. В частности, появление постоянных Λ_d в формулировке теоремы 1 и при описании семейства $\Theta_{1/4}(d)$ обусловлено следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d \in (1, \infty)$. Тогда существует число $\Lambda_d = \xi > 0$, определяемое как первый положительный корень уравнения типа Лямба $v_d(\xi) + 2\xi v'_d(\xi) = 0$, $-1 < \xi < \infty$.

Если $1 < \rho \leq 1 + \Lambda_d$, то для любой абсолютно непрерывной функции $f: [1, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(1) = 0$, $f \not\equiv 0$, $\int_1^\rho (f')^2(r) r^{d-1} dr < \infty$, имеет место неравенство

$$\int_1^\rho (f')^2(r) r^{d-1} dr > \frac{1}{4} \int_1^\rho \frac{f^2(r)}{(r-1)^2} r^{d-1} dr. \quad (3)$$

Постоянные $1/4$ и Λ_d являются точными, т. е. максимальными из возможных.

При $d = 1$ и $\rho = \infty$ неравенство (3) равносильно неравенству Харди из [1]. Нетрудно показать, что при любых $d \in (-\infty, 1]$ и $\rho \in (1, \infty]$ оно является следствием неравенства Харди. Поэтому мы рассматриваем лишь случай

$d \in (1, \infty)$. При $d > 1$ возникает новая ситуация: константа Харди $1/4$ перед интегралом в правой части сохраняется, но нельзя брать $\rho = \infty$ в неравенстве (3). Более того, утверждение теоремы 3 о точности постоянной Λ_d означает, что при $\rho > 1 + \Lambda_d$ существуют допустимые функции $f: [1, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых неравенство (3) не имеет места.

Отметим также, что критерии ограниченности интегральных операторов, связанных с весовыми неравенствами Харди, хорошо известны (достаточно полный обзор результатов приведен, например, в статье Д. В. Прохорова и В. Д. Степанова [18]). Применение известных критериев позволяет, в принципе, получить неравенство типа (3) при любом $\rho \in (1, \infty)$, но с заменой $1/4$ на некоторую постоянную c , для которой можно записать лишь оценки вида $0 < c_1(\rho, d) \leq c \leq c_2(\rho, d) < \infty$, $c_2(\rho, d) - c_1(\rho, d) > 0$. Приведенное в § 3 доказательство теоремы 3 основано на классических приемах вариационного исчисления и применении гипергеометрического уравнения.

Поясним также название “уравнение типа Лямба”. Корни трансцендентных уравнений вида $J_\nu(\xi) + 2\xi J'_\nu(\xi) = 0$ для функций Бесселя J_ν порядка ν рассмотрены впервые в статье Х. Лямба [20]. Поэтому уравнения вида $v_d(\xi) + 2\xi v'_d(\xi) = 0$ для гипергеометрических функций естественно называть *уравнениями типа Лямба*. Отметим, что уравнения Лямба и некоторые их обобщения для функций Бесселя уже встречались в статьях, посвященных изучению многомерных неравенств типа Харди. А именно, несколько таких уравнений использовались в статьях К.-Й. Вирса и автора [13], [15] и [17] для нахождения точных постоянных в неравенствах типа Харди в выпуклых областях.

Область Ω , принадлежащая семейству $\Theta_{1/4}(2)$, может содержать обобщенные невыпуклые секторы, примыкающие к границе. В статье показано, в частности, что критический угол β_0 , вычисленный в [2] лишь приближенно, может быть выражен через известные константы из теории модулярных функций. А именно, в § 4 доказана теорема 4 (уточненная версия неравенства Е. Б. Дэвиса) с обоснованием следующей формулы: $\beta_0 = 3\pi - 4 \arctan[\Gamma^4(1/4)/(8\pi^2)]$. Теоремы 3, 4 используются в § 4 при доказательстве теоремы 2.

В последнем § 5 приведены примеры, показывающие разнообразие областей из семейств $\Theta_{1/4}(d)$. Кроме того, с применением основных теорем 1, 2 получена оценка сверху коэффициента жесткости кручения областей (см. далее теорему 5).

Теоремы 1–3 анонсированы в кратком сообщении [19].

§ 2. Геометрическое описание семейства $\Theta_{1/4}(d)$

Далее будут нужны некоторые предварительные определения и обозначения. В некоторых случаях для обозначения точек плоскости будем пользоваться комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, что упрощает отдельные формулы при описании геометрических свойств областей.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, и пусть β_0 – критический угол Дэвиса [2]. Рассмотрим множества $\Omega_{\beta, \rho}(a, b) := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta < \beta, 0 < r \leq \rho(\theta)\}$, где $\rho: [0, \beta] \rightarrow (0, \max\{a, b\}]$ – непрерывная функция, $\rho(0) = a$, $\rho(\beta) = b$. Множество $\Omega_{\beta, \rho}(a, b)$

будем называть *допустимым сектором*, если $\beta \in (0, \beta_0]$ и для любого $r \in (0, \max\{a, b\})$ сечение $\Omega_{\beta, \rho}(a, b) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ состоит из одной или двух дуг окружностей следующего типа:

- а) $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta < \beta\}$;
- б) $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < \theta \leq \beta'\}$, где $r \leq a$, $\beta' \leq \beta_0/2$;
- в) $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \beta'' \leq \theta < \beta\}$, где $r \leq b$, $\beta - \beta'' \leq \beta_0/2$.

Пусть $d \geq 2$, и пусть $\Omega' \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область. Рассмотрим произвольное граничное множество $S \subset \partial\Omega'$. Областью притяжения S будем называть множество $S(\Omega') = \{x \in \Omega' : \text{dist}(x, \partial\Omega') = \text{dist}(x, S)\}$. Очевидно, область притяжения $S(\Omega')$ является либо пустым множеством, либо подмножеством в Ω' и содержит точку $x \in \Omega'$ тогда и только тогда, когда существует точка $y \in S$ такая, что $\text{dist}(x, \partial\Omega') = |x - y|$.

Определим сначала специальные множества областей, которые в дальнейшем будут использоваться как базовые подсемейства при определении $\Theta_{1/4}(d)$. Рассмотрим сначала двумерный случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ограниченная область $\Omega' \subset \mathbb{C}$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}^0(2)$, если:

Р₁) Ω' является конечносвязной областью и каждая компонента границы Ω' является либо окружностью, либо жордановой кусочно гладкой кривой, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей;

Р₂) область притяжения $l(\Omega')$ дуги $l \subset \partial\Omega'$ лежит в кольце $\{z \in \mathbb{C} : \rho \leq |z - \zeta| \leq (1 + \Lambda_2)\rho\}$ в случае, когда l – окружность или дуга окружности с центром в точке ζ и радиусом $\rho > 0$;

Р₃) величина β внутреннего по отношению к области Ω' угла, образованного соседними дугами $l' \subset \partial\Omega'$ и $l'' \subset \partial\Omega'$ в угловой граничной точке A , может быть больше π лишь при выполнении следующих дополнительных условий: $\pi < \beta \leq \beta_0$; обе дуги l' , l'' являются отрезками прямых; внутренние углы в обеих соседних с A вершинах строго меньше π ; объединенная область притяжения $(l' \cup l'')(\Omega')$ представляет собой допустимый сектор вида $\Omega_{\beta, \rho}(a, b)$ с точностью до линейного преобразования вида $w = c_1 z + c_2$, переводящего l' и l'' на отрезки $[0, a]$ и $[0, be^{i\beta}]$.

Распространим это определение на случай $d \geq 3$. Примем одно новое соглашение, позволяющее избегать трудного описания геометрических требований, налагаемых на область в общем случае.

Пусть $d \geq 2$. Рассмотрим граничные множества $S_j \subset \partial\Omega'$, $j = 1, 2, \dots, j_0$, такие, что $\partial\Omega' = \bigcup_{j=1}^{j_0} S_j$. Такое представление границы области будем называть *допустимым разбиением*, если множества притяжения $S_j(\Omega')$ для различных j не имеют попарно общих внутренних точек и для любой функции $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C(\Omega')$, имеет место равенство

$$\int_{\Omega'} g(x) dx = \sum_{j=1}^{j_0} \int_{S_j(\Omega')} g(x) dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $d \geq 3$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что ограниченная область $\Omega' \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}^0(d)$, если

существует допустимое разбиение $\partial\Omega' = \bigcup_{j=1}^m S_j$ границы области Ω' такое, что каждое множество S_j и его область притяжения $S_j(\Omega')$ с точностью до параллельного переноса и вращения представляют собой множества одного из следующих типов:

(i) S_j – подмножество плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d: x_d = 0\}$, для которого область притяжения представима формулой $S_j(\Omega') = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d: x' = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \in S_j, 0 < x_d \leq \varphi_j(x')\}$, где φ_j – некоторая непрерывная функция;

(ii) S_j – подмножество некоторой сферы $\{x \in \mathbb{R}^d: |x - a^j| = \rho(j) > 0\}$, для которого область притяжения представима формулой $S_j(\Omega') = \{x \in \mathbb{R}^d: x' \in S_j, \rho < |x - a^j| \leq \varphi_j(x')\}$, где φ_j – некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_j(x') \leq \rho(j)(1 + \Lambda_d)$ для любой точки $x' \in S_j$;

(iii) S_j – ограниченное множество, лежащее на поверхности вида $\{(x', z) \in \mathbb{R}^d: x' \in \mathbb{R}^{d-2}, z \in L_{x'} = l'(x') \cup l''(x') \subset \mathbb{C}\}$, где $L_{x'}$ состоит из двух отрезков $l'(x')$, $l''(x')$, и при любом $x' \in \mathbb{R}^{d-2}$ двумерная область притяжения $L_{x'}(\Omega' \cap \{x' = \text{const}\}) \subset \mathbb{C}$ либо пуста, либо является допустимым сектором;

(iv) S_j – подмножество цилиндра $\{x' \in \mathbb{R}^m: |x - a^j| = \rho(j) > 0\} \times \mathbb{R}^{d-m}$, $m \in [2, d-1] \cap \mathbb{N}$, для которого область притяжения представима формулой $S_j(\Omega') = \{x \in \mathbb{R}^d: x' \in S_j, \rho < |x - a^j| \leq \varphi_j(x')\}$, где φ_j – некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_j(x') \leq \rho(j)(1 + \Lambda_m)$ для любой точки $x' \in S_j$.

Определим теперь семейство областей $\Theta_{1/4}(d)$ с использованием его базовых подсемейств $\Theta_{1/4}^0(d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $d \geq 2$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}(d)$, если $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ и выполняется одно из двух следующих требований:

1) для любого компакта $K \subset \Omega$ существует либо область $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$ такая, что $K \subset \Omega' \subset \Omega$, либо последовательность областей $\Omega'_n \in \Theta_{1/4}^0(d)$ таких, что $K \subset \Omega'_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in K} |\text{dist}(x, \partial\Omega) - \text{dist}(x, \partial\Omega'_n)| = 0;$$

2) $d \geq 3$ и область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ допускает представление (с точностью до параллельного переноса и вращения) в виде следующего декартова произведения: $\Omega = \Omega_m \times \mathbb{R}^{d-m}$, где $m \in \mathbb{N} \cap [2, d-1]$, $\Omega_m \in \Theta_{1/4}(m)$.

§ 3. Подготовительные результаты

Далее потребуются гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$\zeta(1 - \zeta)u'' + (\gamma - (1 + \alpha + \beta)\zeta)u' - \alpha\beta u = 0 \quad (4)$$

при ограничениях $\text{Re } \gamma > \text{Re } \beta > 0$. Из множества решений уравнения (4) мы будем пользоваться лишь голоморфной функцией, данной классическим интегральным представлением Эйлера

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(1-t\zeta)^\alpha} dt \quad (5)$$

для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ со стандартным фиксированием однозначной ветви подынтегральной функции при $t = 1/2$ и $\zeta = 0$ в соответствии с равенством $x^w = e^{w \ln x}$ при $x > 0$, $w \in \mathbb{C}$. Тогда функция (5) в единичном круге представлена гипергеометрическим рядом

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)\Gamma(n + \beta)}{n!\Gamma(n + \gamma)} \zeta^n, \quad |\zeta| < 1, \quad (6)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Определение константы Λ_2 связано с параметрами $\alpha = (1+i)/2$, $\beta = (1-i)/2$ и $\gamma = 1$. Для этого случая можно получить новое интегральное представление, которое проще формулы (5) тем, что не содержит комплексных параметров.

ЛЕММА 1. При $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$u = F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; \zeta\right) = \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \zeta}} dx. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда справедлива формула

$$u = F(\alpha, \beta; 1; \zeta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{\sqrt{1-4t(1-t)\zeta}} dt, \quad (8)$$

доказываемая, как и классическое интегральное представление (5), разложением подынтегральной функции в ряд и почленным интегрированием. Действительно, в силу простых равенств

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} 2^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\Gamma(2n+1)}{(n!)^2}$$

справедливо следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4t(1-t)\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1)}{(n!)^2} t^n (1-t)^n \zeta^n, \quad |\zeta| < 1,$$

при любом фиксированном $t \in (0, 1)$. С использованием этого разложения и равенства $\alpha + \beta = 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1)}{(n!)^2} \zeta^n \int_0^1 t^{n+\alpha-1} (1-t)^{n+\beta-1} dt \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{(n!)^2\Gamma(2n+\alpha+\beta)} \zeta^n \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{(n!)^2} \zeta^n = F(\alpha, \beta; 1; \zeta). \end{aligned}$$

Подставим теперь в формулу (8) значения $\alpha_0 = (1+i)/2$, $\beta_0 = (1-i)/2$. С учетом равенства $\beta_0 = \bar{\alpha}_0$ и привлечением замены переменных $t = 1 - \tau$ непосредственными вычислениями получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1}}{\sqrt{1-4t(1-t)}\zeta} dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{Re}[t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1}]}{\sqrt{1-4t(1-t)}\zeta} dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{Re}[t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1}]}{\sqrt{1-4t(1-t)}\zeta} dt = 2 \int_0^{1/2} \frac{\cos(\ln \sqrt{t/(1-t)})}{\sqrt{1-4t(1-t)}\zeta} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \end{aligned}$$

Замена переменных $t/(1-t) = e^{-2x}$ в последнем интеграле и непосредственные вычисления приводят к требуемой формуле:

$$I = 2 \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \zeta}} dx.$$

Остается заметить, что $\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0) = \Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-\alpha_0) = \pi/\operatorname{ch}(\pi/2)$ по формуле дополнения для гамма-функции.

Нам также понадобится следующее утверждение, доказываемое стандартными приемами вариационного исчисления.

ЛЕММА 2. Пусть $-\infty < a < c < b < \infty$, весовая функция $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Пусть, далее, функция $q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ положительна на $(a, b]$ и удовлетворяет условиям: $q \in C^1(a, b] \cap C^2((a, c) \cup (c, b))$, существуют конечные пределы $q''(x)$ при $x \rightarrow c^+$ и $x \rightarrow c^-$, $p(t)q'(t)$ – невозрастающая функция и

$$\int_a^b p(t)(q')^2(t) dt = \infty, \quad \frac{(t-a)q'(t)}{q(t)} = O(1), \quad t \rightarrow a^+. \quad (9)$$

Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(a) = 0$, $f \not\equiv 0$, $\int_a^b p(t)(f')^2(t) dt < \infty$, имеет место неравенство

$$\int_a^b p(t)(f')^2(t) dt > p(b)f^2(b) \frac{q'(b)}{q(b)} - \int_a^b \frac{(p(t)q'(t))'}{q(t)} f^2(t) dt. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий леммы $f(t)/q(t) \not\equiv \operatorname{const}$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 &< \int_a^b p(t) \left(f'(t) - f(t) \frac{q'(t)}{q(t)} \right)^2 dt \\ &= \int_a^b \left(p(t)(f')^2(t) - 2p(t)f(t)f'(t) \frac{q'(t)}{q(t)} + p(t)f^2(t) \frac{(q')^2(t)}{q^2(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям среднее слагаемое, получаем неравенство

$$\int_a^b p(t)(f')^2 dt > p(b)f^2(b) \frac{q'(b)}{q(b)} - \lim_{t \rightarrow a^+} p(t)f^2(t) \frac{q'(t)}{q(t)} - \int_a^b \frac{(p(t)q'(t))'}{q(t)} f^2 dt.$$

Для вывода неравенства (10) остается заметить, что $p(t)f^2(t)q'(t)/q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow a^+$ в силу второго условия из (9) и соотношения $f^2(t) = o(t - a)$, являющегося следствием требований, налагаемых на функцию f . Действительно, с применением неравенства Коши–Буняковского–Шварца получаем

$$|f(t)|^2 = \left| \int_a^t f'(\tau) d\tau \right|^2 \leq |t - a| \int_a^t (f')^2(\tau) d\tau = o(t - a), \quad t \rightarrow a^+.$$

Лемма доказана.

Отметим, что присутствие возможной точки разрыва $c \in (a, b)$ второй производной функции $q(t)$ не оказывает влияния на доказательство, так как в этой точке функция $p(t)f^2(t)q'(t)/q(t)$ является непрерывной. Допустимость точки разрыва $q''(t)$ оговорена в лемме 2 в связи с тем, что такая ситуация возникает в дальнейшем при доказательстве уточненной версии неравенства Е. Б. Дэвиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем сначала, что неравенство (3) будет справедливо для всех $\rho > 1$, достаточно близких к единице.

В условиях леммы 2 полагаем $a = 1$, $b = \rho$, $p(r) = r^{d-1}$, а функцию $q(r)$ будем искать как решение дифференциального уравнения второго порядка

$$(r^{d-1}q')' + \frac{r^{d-1}}{4(r-1)^2}q = 0, \quad 1 \leq r < \infty.$$

Искомое решение можно построить в явном виде, так как для функции $\eta(r) = q(r)/\sqrt{r-1}$ получаем гипергеометрическое уравнение

$$r(1-r)\eta'' + (d-1-dr)\eta' - \frac{d-1}{2}\eta = 0, \quad 1 \leq r < \infty.$$

В качестве $\eta(r) = \eta_d(r)$ возьмем решение этого уравнения, голоморфное в области $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < \infty, -\pi < \theta < \pi\}$ и нормированное условием $\eta(1) = 1$. Индекс d у функции η не будем выписывать, чтобы не усложнять обозначения.

В единичном круге с центром в точке $\zeta = 1$ функция $\eta(\zeta)$ представима своим рядом Тейлора с вещественными коэффициентами. Поэтому $q(r) = \eta(r)\sqrt{r-1}$ и $q'(r)$ принимают вещественные значения для всех $r \in (1, \infty)$. Кроме того, имеем

$$q(r) = \sqrt{r-1}(1 + O(r-1)), \quad q'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r-1}}(1 + O(r-1)) \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Следовательно, существует такое $\rho > 1$, что $q(r)$, $q'(r)$ положительны в промежутке $(1, \rho]$. Очевидно, неравенство (3) будет справедливым для таких $\rho > 1$ в силу леммы 2.

Предположим, что уравнение $q'(r) = 0$ не имеет корней на луче $1 < r < \infty$. Следовательно, функции $q'(r)$ и $q(r) = \int_1^r q'(t) dt$ положительны на всем луче $1 < r < \infty$. Тогда по лемме 2 неравенство (3) должно быть справедливым для любого $\rho > 1$, что невозможно. Действительно, для $d \geq 2$ и $\rho > 2$ рассмотрим допустимую функцию $f_0(r)$, равную $r-1$ при $1 < r \leq 2$ и равную 1 при $2 < r < \infty$. Неравенство (3) для этой функции сводится к следующему утверждению:

$$\frac{3}{4} \int_1^2 r^{d-1} dr > \frac{1}{4} \int_2^\rho \frac{r^{d-1}}{(r-1)^2} dr.$$

Однако это неравенство неверно для достаточно больших $\rho > 2$, так как интеграл в правой части стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$. Если $1 < d < 2$ и $\rho > 2$, то аналогичное противоречие возникает с допустимой функцией $f_1(r)$, равной $r - 1$ при $1 < r \leq 2$ и равной $(r/2)^{1-d/2}$ при $2 < r < \infty$. Действительно, неравенство (3) для функции $f_1(r)$ равносильно неравенству

$$\frac{3}{4} \int_1^2 r^{d-1} dr + \frac{(1-d/2)^2}{4^{1-d/2}} \int_2^\rho \frac{dr}{r} > \frac{1}{4^{2-d/2}} \int_2^\rho \frac{r}{(r-1)^2} dr. \quad (11)$$

Применением тривиального неравенства $r/(r-1)^2 > 1/r$ для оценки снизу интеграла из правой части в (11) и простыми преобразованиями получаем

$$2^d \int_1^2 r^{d-1} dr > \frac{(d-1)(3-d)}{12} \int_2^\rho \frac{dr}{r},$$

что неверно для достаточно больших $\rho > 2$ при $1 < d < 2$.

Полученные противоречия доказывают, что для любого $d \in (1, \infty)$ уравнение

$$q'(r) = \frac{\eta(r)}{2\sqrt{r-1}} + \sqrt{r-1}\eta'(r) = 0$$

имеет по крайней мере один корень $r \in (1, \infty)$. Наименьший из корней обозначим через $\rho_d = 1 + \Lambda_d$. Очевидно, число $\Lambda_d > 0$ однозначно описано условиями

$$\eta(\rho_d) + 2(\rho_d - 1)\eta'(\rho_d) = 0, \quad \eta(r) + 2(r-1)\eta'(r) > 0, \quad 1 < r < \rho_d, \quad (12)$$

равносильными определению постоянной $\Lambda_d = \rho_d - 1$.

Чтобы применить лемму 2 на отрезке $[1, \rho] \subset [1, 1 + \Lambda_d]$, нам остается показать, что $q(r) > 0$ при $1 < r \leq 1 + \Lambda_d$. Этот факт устанавливается просто: если $q(r_0) = 0$ в некоторой точке $r_0 \in (1, 1 + \Lambda_d]$, то по теореме Ролля существует нуль $q'(r)$ в интервале $r_1 \in (1, r_0)$, что противоречит соотношениям (12).

Таким образом, применение леммы 2 в промежутке $[1, \rho]$ с выбранными функциями $p(r) = r^{d-1}$ и $q(r) = \eta(r)\sqrt{r-1}$ доказывает неравенство (3) при любом $\rho \in (1, 1 + \Lambda_d]$.

Покажем теперь точность констант. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\rho \in (1, \infty)$.

Точность постоянной $1/4$ получается по схеме Харди. Действительно, рассмотрим допустимую функцию f_1 , определенную формулой $f_1(r) = (r-1)^{(1+\varepsilon_1)/2}$, где $0 < \varepsilon_1 < \sqrt{1+\varepsilon} - 1$. Тогда $2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < \varepsilon$ и

$$\int_1^\rho (f_1')^2(r) r^{d-1} dr = \frac{(1+\varepsilon_1)^2}{4} \int_1^\rho \frac{r^{d-1}}{(r-1)^{1-\varepsilon_1}} dr < \frac{1+\varepsilon}{4} \int_1^\rho \frac{r^{d-1} f_1^2(r)}{(r-1)^2} dr,$$

что и требовалось получить.

Для доказательства точности постоянной Λ_d рассмотрим функцию f_2 такую, что $f_2(r)$ равна $c(r-1)^{1/2+\sigma}$ при $r \in [1, 1+\sigma]$, равна $q(r)$ при $r \in (1+\sigma, 1+\Lambda_d]$ и равна $q(1+\Lambda_d)$ при $r \in [1+\Lambda_d, \infty)$, где $\sigma \in (0, 1)$ – некоторая постоянная, $c = c(\sigma) = q(1+\sigma)/\sigma^{1/2+\sigma}$, причем $q(r) = \sqrt{r-1}\eta(r)$ – функция, использованная выше.

Отметим, что $f_2'(1+\Lambda_d) = q'(1+\Lambda_d) = 0$, $(r^{d-1}f_2'(r))' = -r^{d-1}f_2(r)(r-1)^{-2}/4$ при $r \in (1+\sigma, 1+\Lambda_d]$ и справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_1^{1+\Lambda_d} \frac{f_2^2(r)}{(r-1)^2} r^{d-1} dr - \int_1^{1+\Lambda_d} (f_2')^2(r) r^{d-1} dr \\ = - \int_1^{1+\Lambda_d} r^{d-1} \left(f_2'(r) - f_2(r) \frac{q'(r)}{q(r)} \right)^2 dr, \end{aligned}$$

легко выводимая по схеме доказательства леммы 2.

Пользуясь этими свойствами и прямыми вычислениями, получаем

$$\frac{1}{4} \int_1^{1+\Lambda_d+\varepsilon} \frac{f_2^2(r)}{(r-1)^2} r^{d-1} dr - \int_1^{1+\Lambda_d+\varepsilon} (f_2')^2(r) r^{d-1} dr = A - B(\sigma),$$

где величина

$$A = \frac{q^2(1+\Lambda_d)}{4} \int_{1+\Lambda_d}^{1+\Lambda_d+\varepsilon} \frac{r^{d-1}}{(r-1)^2} dr$$

положительна и не зависит от $\sigma \in (0, 1)$, тогда как величина $B(\sigma)$ определена формулой

$$B(\sigma) = c^2(\sigma) \int_1^{1+\sigma} r^{d-1} \left(\frac{\sigma}{(r-1)^{1/2-\sigma}} - (r-1)^{1/2+\sigma} \frac{\eta'(r)}{\eta(r)} \right)^2 dr,$$

и нетрудно показать, что $B(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Следовательно, при достаточно малых $\sigma \in (0, 1)$ мы будем иметь искомого противоположное неравенство для функции f_2 . Этим и завершается доказательство теоремы.

Приведем вычисления и оценки постоянных Λ_d . Пользуемся подстановкой Эйлера $\zeta \rightarrow 1-\zeta$, не меняющей множество особых точек гипергеометрического уравнения. Для функции $u = u_d$, определенной равенством $u(\xi) := \eta(1-\xi)$ и голоморфной в области $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, получаем гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$\xi(1-\xi)u'' + (1-d\xi)u' - \frac{d-1}{2}u = 0, \quad -\infty < \xi \leq 0.$$

Следовательно, для гипергеометрической функции $u(\xi) = F(\alpha, \beta; 1; \xi)$ параметр γ равен 1, а два других параметра α и β определяются, как известно, из системы уравнений $\alpha + \beta = d-1$, $\alpha\beta = (d-1)/2$.

1) Пусть $d = 2$. Имеем $\alpha = (1+i)/2$ и $\beta = (1-i)/2$, по формуле (7) леммы 1 для всех $\xi \in (-\infty, 1)$ справедливо интегральное представление

$$u(\xi) = F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; \xi\right) = \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \xi}} dx.$$

Рассмотрим функцию v_2 , определенную равенством $v_2(\xi) = \eta(1+\xi) \equiv u(-\xi)$. Получаем, что величина $\xi = \Lambda_2$ является первым положительным корнем уравнения типа Лямба

$$v_2(\xi) + 2\xi v_2'(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < \infty,$$

или, что то же самое, уравнения

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \operatorname{ch}^2 x}{(\operatorname{ch}^2 x + \xi)^{3/2}} dx = 0, \quad -1 < \xi < \infty.$$

При $x \rightarrow \infty$ подынтегральная функция убывает как e^{-x} , поэтому вычисление первого положительного корня последнего уравнения не представляет особых сложностей. Расчеты показывают, что $\Lambda_2 \approx 2.492921$.

Пусть $d = 3$; тогда $u(\xi) = F(1, 1; 1; \xi) = (1 - \xi)^{-1}$, $q(r) = \sqrt{r-1}/r$ при $r > 1$. Уравнение $q'(r) = 0$ имеет единственный корень, равный 2.

Следовательно, имеем $\Lambda_3 = 1$.

2) Покажем, что $1/(d-2) \leq \Lambda_d < 1$ при $d > 3$ и Λ_d монотонно убывает с ростом $d \in (1, \infty)$.

Пусть $d > 3$, полагаем $\tilde{q}(r) = r^{(1-d)/2} \sqrt{r-1}$ (ср. с [9]). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{(r^{d-1} \tilde{q}'(r))'}{r^{d-1} \tilde{q}(r)} &= -\frac{1}{4(r-1)^2} - \frac{(d-1)(d-3)}{4r^2} < -\frac{1}{4(r-1)^2}, \\ \tilde{q}'(r) &= \frac{d-1-r(d-2)}{2r^{d/2} \sqrt{r-1}} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < r-1 < \frac{1}{d-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (3) верно для любого $\rho \in (1, 1 + 1/(d-2)]$, поэтому $\Lambda_d \geq 1/(d-2)$.

Возьмем функцию $q \in C^2(1, \rho)$ такую, что $q(r) > 0$, $q'(r) > 0$ при всех $r \in (1, \rho)$. Если $1 < m \leq d$ и $(r^{d-1} q'(r))' / (r^{d-1} q(r)) = -(1/4)(r-1)^{-2}$, то

$$\frac{(r^{m-1} q'(r))'}{r^{m-1} q(r)} = -\frac{1}{4(r-1)^2} - \frac{(d-m)q'(r)}{rq(r)} < -\frac{1}{4(r-1)^2}.$$

Следовательно, $\Lambda_m \geq \Lambda_d$. Предположим, что $m < d$ и $\Lambda_m = \Lambda_d$. Тогда $\Lambda_m = \Lambda_d = \Lambda_\xi$ для всех $\xi \in [m, d]$. С учетом аналитической зависимости интеграла Эйлера от параметров получаем, что $\Lambda_m = \Lambda_\xi$ для всех $\xi \in (1, \infty)$. Полученное противоречие показывает, что условие $1 < m < d$ влечет строгое неравенство $\Lambda_m > \Lambda_d$.

3) Пусть $d > 3$; тогда согласно формуле Эйлера (5)

$$u(\xi) = F(\alpha, \beta; 1; \xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}}{(1-t\xi)^\alpha} dt, \quad \xi \in (-\infty, 1),$$

где

$$\alpha = \frac{d-1 + \sqrt{(d-1)(d-3)}}{2}, \quad \beta = \frac{d-1 - \sqrt{(d-1)(d-3)}}{2} \in (0, 1).$$

Легко видеть, что функция $u(\xi)$ и все ее производные положительны.

Пользуясь снова заменой $v_d(\xi) = \eta(1 + \xi) \equiv u(-\xi)$ и уравнением $v_d(\xi) + 2\xi v'_d(\xi) = 0$, получаем, что $\xi = \Lambda_d$ является первым положительным корнем уравнения

$$\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta} \{1 - (2\alpha-1)\xi t\}}{(1+\xi t)^{\alpha+1}} dt = 0, \quad -1 < \xi < \infty.$$

Приведем еще несколько значений постоянных с четырьмя верными знаками после запятой: $\Lambda_4 \approx 0.6174$, $\Lambda_5 \approx 0.4453$, $\Lambda_6 \approx 0.3479$, $\Lambda_7 \approx 0.2854$.

Асимптотику для больших d удалось найти лишь численно. Расчеты показывают, что $\Lambda_d > (\pi/2)/(d-1)$ для всех $d \geq 3$ и, по-видимому, выполнено предельное равенство $\lim_{d \rightarrow \infty} (d-1)\Lambda_d = \pi/2$.

§ 4. Доказательства теорем 1, 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно условию теоремы для любой граничной точки $y \in \partial\Omega$ ограниченной области Ω существует шар $B_y = \{x \in \mathbb{R}_d : |x - y| < r_d\}$, где $r_d = \delta_0(\Omega)/\Lambda_d$, такой, что $|y - x_y| = r_d$ и $\Omega \cap B_y = \emptyset$.

Пусть $f \in C_0^1(\Omega)$, где f – вещественнозначная функция, $f \not\equiv 0$. Через $K = \text{supp } f$ обозначим носитель этой функции. Рассмотрим фиксированное число $\varepsilon = \text{dist}(K, \partial\Omega)/2$. Очевидно, $\varepsilon > 0$, так как носитель функции и граница области являются компактными множествами.

Пусть $x'_y = x_y + \varepsilon(y - x_y)/r_d$; тогда $|y - x'_y| < r_d$. Возьмем совокупность новых шаров $B'_y = \{x \in \mathbb{R}_d : |x - x'_y| < r_d\}$, полученных сдвигом B_y в сторону области на расстояние $\varepsilon > 0$. Совокупность шаров B'_y , $y \in \partial\Omega$, образует открытое покрытие $\partial\Omega$. По лемме Гейне–Бореля существует конечное подпокрытие в силу компактности границы области.

Итак, существует конечное число различных шаров $B_1, B_2, \dots, B_m$, имеющих одинаковые радиусы $r_d = \delta_0(\Omega)/\Lambda_d$ и таких, что

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^m B_j, \quad K = \text{supp } f \subset \Omega' := \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^m \bar{B}_j, \quad \partial\Omega' \subset \Omega.$$

Тогда имеем $\text{dist}(x, \partial\Omega') \leq \text{dist}(x, \partial\Omega)$ для любого $x \in \Omega'$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in \Omega \setminus \Omega'$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx &= \int_{\Omega'} |\nabla f|^2 dx \geq c_2(\Omega') \int_{\Omega'} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega')} dx \\ &\geq c_2(\Omega') \int_{\Omega'} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} dx = c_2(\Omega') \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} dx. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что в этих неравенствах можно полагать $c_2(\Omega') = 1/4$, т. е. докажем, что для выбранной ранее функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega'} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega'} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega')} dx. \quad (13)$$

Для этого рассмотрим граничные множества $S_j = \partial B_j \cap \partial\Omega'$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда $\partial\Omega' = \bigcup_{j=1}^m S_j$. Такое представление будет допустимым разбиением. Действительно, пусть $k \neq j$, x_j и x_k – центры шаров B_j и B_k соответственно. Тогда эквидистантное множество $\{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, \partial B_j) = \text{dist}(x, \partial B_k)\}$ является плоскостью размерности $d-1$, ортогональной к отрезку $[x_j, x_k]$ и проходящей через среднюю точку этого отрезка. Следовательно, множества притяжения $S_j(\Omega')$

для различных j не имеют попарно общих внутренних точек, и для любой функции $g: \bar{\Omega}' \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C(\bar{\Omega}')$, имеет место равенство

$$\int_{\Omega'} g(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_{S_j(\Omega')} g(x) dx.$$

Очевидно, неравенство (13) будет справедливо, если мы докажем, что для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ имеет место неравенство

$$\int_{S_j(\Omega')} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{S_j(\Omega')} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, S_j)} dx \quad (14)$$

для произвольной функции $f \in C^1(\overline{S_j(\Omega')})$, удовлетворяющей следующему граничному условию: $f(x) = 0$ для всех точек $x \in S_j$.

Интегралы в (14) запишем в сферической системе координат с центром в точке x_j , где x_j — центр шара B_j . Имеем $x - x_j = r\omega$, $|x - x_j| = r$, $dx = r^{d-1} dr d\omega$ и формулу

$$S_j(\Omega') = \{x_j + r\omega \in \Omega': x_j + r_d\omega \in S_j, r_d < r \leq \varphi_j(\omega)\},$$

где $\varphi_j: (S_j - x_j)/r_d \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая непрерывная функция. Переходя к повторным интегралам, получаем эквивалентное (14) неравенство

$$\int_{(S_j - x_j)/r_d} d\omega \int_{r_d}^{\varphi_j(\omega)} \left(|\nabla f|^2 - \frac{1}{4} \frac{|f|^2}{(r - r_d)^2} \right) r^{d-1} dr \geq 0 \quad (15)$$

для гладкой функции $f(x_j + r\omega)$, удовлетворяющей граничному условию $f(x_j + r_d\omega) = 0$. Поскольку для любой точки $x = x_j + r\omega \in S_j(\Omega')$

$$\text{dist}(x, S_j) = r - r_d \leq \varphi_j(\omega) - r_d \leq \delta_0(\Omega') < \delta_0(\Omega) = r_d \Lambda_d,$$

внутренний интеграл в (15) может быть представлен в виде

$$I(\omega) = \int_{r_d}^{r_d \rho_j(\omega)} \left(|\nabla f|^2 - \frac{1}{4} \frac{|f|^2}{(r - r_d)^2} \right) r^{d-1} dr,$$

где $1 \leq \rho_j(\omega) \leq 1 + \Lambda_d$, а гладкая функция $f(x_j + r\omega)$ удовлетворяет граничному условию $f(x_j + r_d\omega) = 0$. Заменой переменных $t = r/r_d$ приходим к интегралу по отрезку $[1, \rho_j(\omega)]$ и применяем теорему 3 с учетом неравенств

$$\rho_j(\omega) \leq 1 + \Lambda_d, \quad |\nabla f| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|.$$

Получаем, что $I(\omega)$ неотрицателен при любых $\omega \in (S_j - x_j)/r_d$. Таким образом, неравенство (15), а следовательно, неравенства (13), (14) справедливы. Однако, как показано выше, неравенство (13) влечет (1) для области Ω с константой $c_2(\Omega) \geq 1/4$.

Обратное неравенство $c_2(\Omega) \leq 1/4$ получается следующим образом. Очевидно, существует точка $y_0 \in \partial\Omega$, являющаяся граничной точкой некоторого

шара $B^+ \subset \Omega$. Возьмем второй шар B^- , лежащий вне области Ω и обладающий свойством $y_0 \in \partial B^-$. Существование такого шара радиусом $r_d = \delta_0(\Omega)/\Lambda_d$ гарантировано условиями теоремы 1. Поэтому граничная точка y_0 является регулярной по Е. Б. Дэвису и, следовательно (см. [2]), $c_2(\Omega) \leq 1/4$. Таким образом, $c_2(\Omega) = 1/4$.

Дополнительное утверждение теоремы о том, что $c_2(\Omega \times \mathbb{R}^k) = 1/4$ при любом $k \in \mathbb{N}$, является следствием легко устанавливаемого факта $c_2(\Omega \times \mathbb{R}^k) = c_2(\Omega)$. Теорема доказана.

Приведем теперь с доказательством уточненную версию неравенства Е. Б. Дэвиса [2], применяемую в доказательстве теоремы 2. Отметим попутно, что постоянная $\Gamma^4(1/4)/(4\pi^2)$ давно известна и широко используется в геометрической теории функций комплексного переменного. Она связана с эллиптической модулярной функцией $\lambda(t)$ и коэффициентом гиперболической метрики $\lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(\zeta)$ расширенной плоскости без трех точек. А именно, хорошо известны формулы

$$\frac{1}{2\lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(-1)} = i\lambda'(1+i) = \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \approx 4.3768796,$$

которые можно найти, например, в книге [21] и статьях [22]–[24]. Эта константа оказалась полезной и для нас при оценках различных геометрических характеристик областей (см. [10], [11], [25]).

ТЕОРЕМА 4 (неравенство Е. Б. Дэвиса; ср. с [2]). *Пусть $0 < T \leq \beta_0/2$, где $\beta_0 = 3\pi - 4 \arctg(\Gamma^4(1/4)/(8\pi^2)) \approx 4.856$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$, $f \not\equiv 0$, $\int_0^T (f')^2(\theta) d\theta < \infty$, имеют место неравенство*

$$\int_0^T (f')^2(\theta) d\theta > \frac{1}{4} \int_0^T \frac{f^2(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (16)$$

при условии $0 < T \leq \pi/2$ и неравенство

$$\int_0^T (f')^2(\theta) d\theta > \frac{1}{4} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{f^2(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^T f^2(\theta) d\theta \right] \quad (17)$$

при условии $\pi/2 \leq T \leq \beta_0/2$. Постоянные $1/4$ и β_0 являются точными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала неравенство (17). Для этого применим лемму 2, полагая $a = 0$, $c = \pi/2$, $b = T \in (\pi/2, \beta_0/2]$, $p(\theta) \equiv 1$ в условиях леммы 2, а функцию $q(\theta)$ будем искать как решения двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$q''(\theta) + \frac{1}{4\sin^2 \theta} q(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

$$q''(\theta) + \frac{1}{4} q(\theta) = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \infty, \quad (19)$$

выбранные таким образом, чтобы $q \in C^1(0, \infty)$, $q'(\theta) > 0$ при $0 < \theta < \beta_0/2$, $q'(\beta_0/2) = 0$. Поскольку общее решение $q_2(\theta)$ уравнения (19) дано простой формулой $q_2(\theta) = C \sin(\theta/2 - \theta_0)$, основная задача заключается в построении подходящего решения $q_1(\theta)$ уравнения (18) и вычислении значений $q_1(\pi/2)$, $q'_1(\pi/2)$.

Известно (см. [26, дифференциальное уравнение (2.25)]), что решения уравнения (18) могут быть выражены через гипергеометрические функции. А именно, замены переменных $\xi = \sin^2 \theta$, $q_1(\theta) = \sqrt{\sin \theta} \eta(\xi)$ позволяют найти $\eta(\xi)$ как решение гипергеометрического уравнения (4) с коэффициентами $\gamma = 1$, $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/4$. По формуле Эйлера (5) имеем

$$\eta(\xi) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; \xi\right) = \frac{1}{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)} \int_0^1 \frac{t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}}{(1-\xi t)^{1/4}} dt.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta(1) = \frac{1}{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma^2(3/4)},$$

где $B(x, y)$ – бэта-функция Эйлера.

Можно показать, что $\eta'(1^-) = \infty$, поэтому вычисление $q'_1(\pi/2)$ оказывается более сложным. Функции $q_1(\theta) = \sqrt{\sin \theta} \eta(\sin^2 \theta)$ и $q'_1(\theta)$ представлены формулами

$$q_1(\theta) = \frac{1}{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)} \int_0^1 \left(\frac{\sin^2 \theta}{1-t \sin^2 \theta}\right)^{1/4} t^{-3/4}(1-t)^{-1/4} dt,$$

$$q'_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{2\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)\sqrt{\sin \theta}} I_1(\theta), \quad I_1(\theta) = \int_0^1 \frac{t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}}{(1-t \sin^2 \theta)^{5/4}} dt.$$

Для любых $\theta \in (0, \pi/2)$ и $t \in (0, 1)$ имеют место неравенства

$$0 \leq \frac{t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}}{(1-t \sin^2 \theta)^{5/4}} - \frac{(1-t)^{-1/4}}{(1-t \sin^2 \theta)^{5/4}} \leq \frac{t^{-3/4} - 1}{(1-t)^{3/2}}.$$

Мажоранта в последнем неравенстве представляет собой функцию, интегрируемую в интервале $(0, 1)$, поэтому

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\cos \theta) I_1(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\cos \theta) I_2(\theta), \quad I_2(\theta) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-1/4}}{(1-t \sin^2 \theta)^{5/4}} dt.$$

В интеграле $I_2(\theta)$ совершим замену переменных $1-t = x \operatorname{ctg}^2 \theta$. Тогда

$$I_2(\theta) = \frac{1}{\cos \theta \sin^{3/2} \theta} \int_0^{\operatorname{tg}^2 \theta} \frac{dx}{x^{1/4}(1+x)^{5/4}}.$$

Следовательно,

$$q'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)} \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/4}(1+x)^{5/4}} = \frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma^2(1/4)}.$$

Таким образом, $q'_1(\pi/2)/q_1(\pi/2) = 2\Gamma^2(3/4)/\Gamma^2(1/4) = 4\pi^2/\Gamma^4(1/4)$. Полагаем теперь

$$q_2(\theta) = C \sin \frac{\theta + \pi - \beta_0/2}{2}, \quad C = \frac{q_1(\pi/2)}{\sin((3\pi - \beta_0)/4)}.$$

Тогда $q_1(\pi/2) = q_2(\pi/2)$ и $q'_2(\beta_0/2) = 0$. Склейка производных, т. е. формула $q'_1(\pi/2) = q'_2(\pi/2)$, обеспечена равенством

$$\operatorname{ctg} \frac{3\pi - \beta_0}{4} = \frac{8\pi^2}{\Gamma^4(1/4)},$$

равносильным определению β_0 .

Итак, для построенной функции $q(\theta) = \{q_1(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi/2; q_2(\theta), \pi/2 \leq \theta \leq \beta_0/2\}$ выполнены все условия леммы 2, тем самым неравенство (17) доказано.

Очевидно, неравенство (16) является следствием неравенства (17), примененного к функции $f_1(\theta) = \{f(\theta), 0 \leq \theta \leq T; f(T), T \leq \theta \leq \pi/2\}$. Точность постоянных $1/4$ и β_0 обоснована в [2], поэтому мы не будем рассматривать этот вопрос.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поясним сначала случай, когда выполняется требование 2) определения 3, т. е. $\Omega = \Omega_m \times \mathbb{R}^{d-m}$, где $\Omega_m \in \Theta_{1/4}(m)$ для некоторого m , $2 \leq m < d$. Пусть $x = (x', x'')$, $x' \in \Omega_m$ и $x'' \in \mathbb{R}^{d-m}$. Очевидно, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x', \partial\Omega_m)$, поэтому (2) равносильно следующему неравенству:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-m}} dx'' \int_{\Omega_m} \left(|\nabla f|^2 dx' - \frac{|f|^2}{4 \operatorname{dist}^2(x', \partial\Omega_m)} \right) dx' \geq 0 \quad \forall f \in C_0^1(\Omega).$$

В последнем неравенстве внутренний интеграл будет неотрицательным, если теорема будет верна для $\Omega_m \in \Theta_{1/4}(m)$, т. е. в меньшей размерности.

Пусть $d \geq 2$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}(d)$ и $f \in C_0^1(\Omega)$. Обозначим $K = \operatorname{supp} f$.

Предположим теперь, что неравенство (2) справедливо в любой области $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$. Рассмотрим последовательно два основных случая, когда выполняется требование 1) определения 3.

Пусть существует область $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$, обладающая свойством $K \subset \Omega' \subset \Omega$. Тогда $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega') \leq \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ для всех $x \in \Omega'$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in \Omega \setminus \Omega'$. Поэтому неравенство с постоянной $1/4$ в области $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$ влечет неравенство (2) для выбранной функции $f \in C_0^1(\Omega)$ в области $\Omega \in \Theta_{1/4}(d)$.

Если существует последовательность областей $\Omega'_n \in \Theta_{1/4}^0(d)$ с указанным в определении 3 аппроксимационным свойством для функций расстояния, то для выбранной функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega)} dx &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_n} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega'_n)} dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_n} |\nabla f|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство теоремы с постоянной $1/4$ достаточно доказать лишь для областей $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$. Рассмотрим сначала двумерный случай.

Пусть $d = 2$, и пусть область $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}^0(2)$. Образуем представление границы $\partial\Omega' = \bigcup_{j=1}^m S_j$, где S_j выбраны специальным образом. А именно, предполагаем, что S_j — часть границы одного из трех следующих типов:

1) S_j – окружность или дуга окружности, удовлетворяющая требованию P_2) определения 1;

2) S_j – отрезок прямой, соединяющий две вершины, внутренние по отношению к области углы в которых не превосходят π ;

3) S_j – объединение двух прямолинейных отрезков, причем множество притяжения $S_j(\Omega')$ представляет собой допустимый сектор (см. п. P_3) определения 1).

Согласно определению 1, если две различные кривые S_j имеют общую вершину, внутренний угол в этой вершине должен быть строго меньше π . Поэтому множества притяжения $S_j(\Omega')$ для разных j не имеют общих внутренних точек. Следовательно, разбиение границы является допустимым. Как и при доказательстве теоремы 1, нам достаточно доказать для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ неравенство

$$\int_{S_j(\Omega')} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{S_j(\Omega')} \frac{|f|^2}{\text{dist}^2(x, S_j)} dx$$

для произвольной функции $f \in C^1(\overline{S_j(\Omega')})$, удовлетворяющей граничному условию: $f(x) = 0$ для всех точек $x \in S_j$. Множества притяжения имеют три различных типа, в каждом из них приходится использовать различные одномерные неравенства Харди.

1) Множество притяжения $S_j(\Omega')$ – дуга окружности (или вся окружность), удовлетворяющая требованию P_2) определения 1. Требуемое неравенство обосновано в доказательстве теоремы 1 для размерности $d = 2$.

2) $S_j(\Omega')$ – множество притяжения прямолинейного отрезка. С точностью до поворота и параллельного переноса множества притяжения требуемое неравенство можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b dx \int_0^{\varphi_j(x)} \left(|\nabla f|^2 - \frac{|f|^2}{4y^2} \right) dy \geq 0.$$

Поскольку $f(x, 0) = 0$ и $|\nabla f| \geq |\partial f / \partial y|$, внутренний интеграл неотрицателен в силу неравенства Харди в интервале $(0, \infty)$. Отсюда следует неотрицательность двойного интеграла по $S_j(\Omega')$.

3) $S_j(\Omega')$ – допустимый сектор, функция f обращается в нуль на отрезках прямых, образующих угол раствора $\beta \in (\pi, \beta_0]$. В этом случае пользуемся полярными координатами $x = x_0 + r \cos \theta$, $y = y_0 + r \sin \theta$ с центром в вершине сектора (x_0, y_0) . Требуемое неравенство является следствием неравенств теоремы 4 и известного неравенства $|\nabla f| \geq |\partial f / \partial \theta| / r$.

Рассмотрим случай 3) подробнее. Поскольку S_j – объединение двух отрезков l' , l'' , образующих стороны внутреннего угла $\beta \in (\pi, \beta_0]$ в вершине A , то расстояние $\text{dist}((x, y), S_j)$ равно либо $\text{dist}((x, y), l')$, либо $\text{dist}((x, y), A)$, либо $\text{dist}((x, y), l'')$.

Переходя к повторным интегралам, будем иметь неравенство вида

$$\int_0^{r_3} r dr \int_{S_r} \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{|f|^2}{4 \text{dist}^2((x, y), S_j)} \right) d\theta \geq 0,$$

где $S(r)$ – пересечение множества притяжения с окружностью $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$.

Для доказательства неотрицательности внутреннего интеграла $I(r)$ в этом неравенстве приходится рассматривать несколько случаев, допустимых по нашему определению.

Если сечение $S(r)$ – дуга окружности, стягивающая весь угол раствора $\beta \in (\pi, \beta_0]$, то неравенство $r^2 I(r) \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 d\theta &\geq \frac{1}{4} \int_0^\beta \frac{r^2 |f|^2}{\text{dist}^2((x, y), S_j)} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{|f|^2}{\sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\beta - \pi/2} |f|^2 d\theta + \frac{1}{4} \int_{\beta - \pi/2}^\beta \frac{|f|^2}{\sin^2(\beta - \theta)} d\theta, \end{aligned}$$

где $f|_{\theta=0} = f|_{\theta=\beta} = 0$. Это неравенство доказано Е. Б. Дэвисом в [2]. Он рассматривал круговой сектор, когда реализуется лишь этот случай.

Однако согласно нашему определению допустимого сектора возможны и другие случаи, когда сечение $S(r)$ – одна и (или) две дуги окружности S' и (или) S'' , стягивающих углы, определяемые неравенствами следующего вида: $0 < \theta \leq \beta'$ и (или) $\beta'' \leq \theta < \beta$, где $0 < \beta' \leq \beta_0/2$ и $0 < \beta - \beta'' \leq \beta_0/2$. Интегралы по дугам такого вида являются неотрицательными. Например, если сечение $S(r)$ содержит дугу S' , то требуемые неравенства имеют вид

$$\int_0^{\beta'} |g'(\theta)|^2 d\theta \geq \frac{1}{4} \int_0^{\beta'} \frac{|g(\theta)|^2}{\sin^2 \theta} d\theta$$

при условии $\beta' \in (0, \pi/2]$ и

$$\int_0^{\beta'} |g'(\theta)|^2 d\theta \geq \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{|g(\theta)|^2}{\sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\beta'} |g(\theta)|^2 d\theta$$

при условии $\pi/2 < \beta' \leq \beta_0/2$. В обоих неравенствах $g: [0, \beta'] \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, $g(\theta) := f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$, удовлетворяющая граничному условию $g(0) = 0$.

Оба эти неравенства доказаны в теореме 4. Если сечение $S(r)$ содержит дугу S'' второго типа, то неотрицательность рассматриваемого интеграла по дуге S'' вытекает из тех же двух неравенств, примененных к функции $g(\beta - \theta)$.

Пусть теперь $d \geq 3$, область $\Omega' \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит семейству $\Theta_{1/4}^0(d)$ и $f \in C_0^1(\Omega')$. В этом случае существование допустимого разбиения $\partial\Omega' = \bigcup_{j=1}^m S_j$, где S_j выбраны специальным образом, предусмотрено определением 2. А именно, для каждого S_j имеет место одно из описаний (i)–(iv) множества притяжения с точностью до параллельного переноса и вращения. Как и ранее, доказываем требуемые неравенства типа Харди для каждого множества притяжения, применяя подходящие неравенства Харди к внутренним интегралам. Кратко опишем лишь основные моменты этой рутинной части доказательства.

Случай, когда множество притяжения имеет тип (i), подобен случаю 1) при $d = 2$: к внутреннему интегралу можно применить неравенство Харди в интервале $(0, \infty)$.

Случай (ii), когда S_j – сфера или область на сфере, фактически разобран в доказательстве теоремы 1.

В случае (iii) рассматриваем повторные интегралы, в которых внутренний интеграл является двойным интегралом по допустимому сектору. Применяем неравенства теоремы 4.

Поясним подробнее случай (iv). Без ограничения общности будем считать, что $\rho_j = 1$ в описании множества притяжения. Тогда $\varphi_j(x') \leq 1 + \Lambda_m$. Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Точнее, возьмем сначала декартовы координаты $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^d$, где $x' = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-m}$. Затем введем сферическую систему координат в $\mathbb{R}^m$ равенствами $x' = r\omega_{m-1} \in \mathbb{R}^m$, $|x'| = r$.

Поскольку дифференциальный элемент объема в цилиндрических координатах есть $dx = r^{m-1} dx'' d\omega_{m-1} dr$, то требуемое неравенство по множеству притяжения типа (iv) можно представить в виде

$$\int_{S_j} dx'' d\omega_{m-1} \int_1^{\varphi_j(x')} \left(|\nabla f|^2 - \frac{|f|^2}{4(r-1)^2} \right) r^{m-1} dr \geq 0, \quad f|_{r=1} = 0.$$

Поскольку $\varphi_j(x') \leq 1 + \Lambda_m$, внутренний интеграл неотрицателен, что следует из теоремы 3. Теорема доказана полностью.

§ 5. Некоторые примеры и применения

Приведем несколько примеров, подтверждающих разнообразие областей, принадлежащих семейству $\Theta_{1/4}(d)$.

1. Прежде всего отметим, что $\Theta_{1/4}(d)$ содержит в себе все те области, которые удовлетворяют условию теоремы 1. Очевидно, все ограниченные выпуклые области удовлетворяют условию теоремы 1 автоматически.

Нетрудно также показать, что любая выпуклая область, не совпадающая со всем пространством, принадлежит семейству $\Theta_{1/4}(d)$.

Действительно, пусть задан компакт $K \subset \Omega$. Возьмем открытый шар $B \subset \mathbb{R}^d$ такой, что $K \subset B$. В качестве $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(d)$ можно взять внутренность выпуклого многогранника такого, что $K \subset \Omega' \subset \Omega \cap B$. Отметим, что теорему существования выпуклого многогранника, сколь угодно точно аппроксимирующего ограниченное выпуклое множество, можно найти в [27, гл. 6, п. 6.1.3].

2. Семейство $\Theta_{1/4}(d)$ содержит также ряд областей, граница которых имеет счетное множество компонент. Ограничимся указанием одной плоской счетно-связной области, принадлежащей $\Theta_{1/4}(2)$. Пусть

$$\Omega = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : |x| < \infty, |y| < \frac{5}{2} \right\} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z - 3n| < 1 + \varepsilon_n\},$$

где $\varepsilon_n \in [0, 1/2)$.

В качестве $\Omega' \in \Theta_{1/4}^0(2)$ со свойством $K \subset \Omega' \subset \Omega$ можно взять область $\Omega \cap \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| < 3m + 3/2, |y| < 5/2\}$ с достаточно большим $m \in \mathbb{N}$. Область Ω' имеет четыре угловые точки с $\theta_k = \pi/2$. Свойства $P_1)$ и $P_3)$ выполнены автоматически, а свойство $P_2)$ легко проверяется.

3. Пусть $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная или неограниченная выпуклая область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega_0)$. Пусть $\overline{B}_1(a_j)$ – замкнутые круги радиусом 1, имеющие произвольные центры a_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть, далее,

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{B}_1(a_j) \neq \emptyset.$$

Если $\delta_0(\Omega) \leq 1$, то область Ω принадлежит $\Theta_{1/4}(3)$.

Действительно, для любого компакта $K \subset \Omega$ существует выпуклый многогранник Ω'_0 такой, что $K \subset \Omega'_0 \subset \Omega_0$. Тогда внутренний радиус области

$$\Omega' = \Omega'_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{B}_1(z_j)$$

меньше или равен единице. Требуемое в (ii) условие $\varphi_j(x') \leq \rho(j)(1 + \Lambda_3)$ верно, так как $\varphi_j(x') \leq \delta_0(\Omega) + \rho(j)$ по определению внутреннего радиуса, $\Lambda_3 = 1$, и все $\rho(j) = 1$ в рассматриваемом случае.

Очевидно, аналогичный пример можно дать в произвольной размерности и для шаров произвольных радиусов, что приведет лишь к техническому усложнению описания. Отметим также, что этот пример обобщает теорему 2.4 из [9], где рассмотрен случай одного шара, замыкание которого лежит в выпуклой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$.

В заключение укажем одно применение теорем 1, 2.

Пусть Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Через $P(\Omega)$ обозначим функционал, определенный формулой

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^1(\Omega)} \left(2 \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 / \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Для плоских областей величина $P(\Omega)$ имеет несколько физических интерпретаций. Например, если Ω – односвязная область на плоскости, то $P(\Omega)$ – коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω . Для произвольной плоской области функционал $P(\Omega)$ является (по модели Буссинеске) характеристикой расхода вязкой жидкости, текущей в трубе с поперечным сечением Ω (см. [28], [29]). Классические приближенные формулы Кулона, Коши и Сен-Венана выражают $P(\Omega)$ через площадь Ω и моменты инерции Ω относительно центра масс и главных осей. Экспериментально и теоретически было обнаружено, что эти формулы справедливы лишь для узких классов областей. Поэтому математическая теория развивалась по пути создания точных утверждений, выражаемых односторонними изопериметрическими неравенствами (см. [28]–[31]).

В [28] сформулирована проблема нахождения функционала, позволяющего получить двусторонние оценки $P(\Omega)$ на множестве плоских односвязных областей. Геометрический функционал, эквивалентный $P(\Omega)$, был найден автором в [30]. В этой статье доказано, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) dx \leq P(\Omega) \leq 64 \int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) dx. \quad (20)$$

Отметим, что оценка снизу в (20) справедлива для произвольных областей, а оценка сверху получена в [30] с применением неравенства Харди для плоских односвязных областей. Обобщения оценок сверху для произвольных областей, в которых справедливо неравенство Харди (1) с известной положительной константой $c_2(\Omega)$, были получены в [31].

С применением теорем 1, 2 мы можем дополнить эти результаты следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $d \geq 2$. Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, принадлежащей семейству $\Theta_{1/4}(d)$, справедливо неравенство

$$P(\Omega) \leq 16 \int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) dx.$$

Действительно, применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца к произведению функций $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ и $u(x)/\text{dist}(x, \partial\Omega)$ и неравенство (2), для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left(2 \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2 &\leq 4 \int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) dx \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{\text{dist}^2(x, \partial\Omega)} dx \\ &\leq 16 \int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) dx \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы с учетом определения функционала $P(\Omega)$.

Список литературы

1. Г. Харди, Дж. И. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948, 456 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952, xii+324 pp.
2. E. B. Davies, “The Hardy constant”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **46**:4 (1995), 417–431.
3. T. Matskewich, P. E. Sobolevskii, “The best possible constant in generalized Hardy’s inequality for convex domains in $\mathbb{R}^n$ ”, *Nonlinear Anal.*, **28**:9 (1997), 1601–1610.
4. H. Brezis, M. Marcus, “Hardy’s inequalities revisited”, Dedicated to E. De Giorgi, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **25**:1-2 (1998), 217–237.
5. M. Marcus, V. J. Mizel, Y. Pinchover, “On the best constant for Hardy’s inequality in $\mathbb{R}^n$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:8 (1998), 3237–3255.
6. E. B. Davies, “A review of Hardy inequalities”, *The Maz’ya anniversary collection*, v. 2 (Rostock, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., **110**, Birkhäuser, Basel, 1999, 55–67.
7. G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas, “A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:6 (2004), 2169–2196 (electronic).
8. D. H. Armitage, Ü. Kuran, “The convexity of a domain and the superharmonicity of the signed distance function”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **93**:4 (1985), 598–600.
9. F. Avkhadiiev, A. Laptev, “Hardy inequalities for nonconvex domains”, *Around the research of Vladimir Maz’ya*, v. I, Int. Math. Ser. (N. Y.), **11**, Springer, New York, 2010, 1–12.

10. F. G. Avkhadiev, “Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants”, *Lobachevskii J. Math.*, **21** (2006), 3–31 (electronic).
11. Ф. Г. Авхадиев, “Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сб. статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 8–18; англ. пер.: F. G. Avkhadiev, “Hardy-type inequalities on planar and spatial open sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255**:1 (2006), 2–12.
12. S. Fillipas, V. Maz’ya, A. Tertikas, “On a question of Brezis and Marcus”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **25**:4 (2006), 491–501.
13. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, “Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains”, *Z. Angew. Math. Mech.*, **87**:8-9 (2007), 632–642.
14. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, “Weighted Hardy inequalities with sharp constants”, *Lobachevskii J. Math.*, **31**:1 (2010), 1–7.
15. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, “Sharp Hardy-type inequalities with Lamb’s constants”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **18**:4 (2011), 723–736.
16. Ф. Г. Авхадиев, Р. Г. Насибуллин, И. К. Шафигуллин, “Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 9, 90–94; англ. пер.: F. G. Avkhadiev, R. G. Nasibullin, I. K. Shafigullin, “Hardy-type inequalities with power and logarithmic weights in domains of the Euclidean space”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55**:9 (2011), 76–79.
17. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, “On the best constants for the Brezis–Marcus inequalities in balls”, *J. Math. Anal. Appl.*, **396**:2 (2012), 473–480.
18. Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, “Весовые оценки операторов Римана–Лиувилля и приложения”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 289–312; англ. пер.: D. V. Prokhorov, V. D. Stepanov, “Weighted estimates for the Riemann–Liouville operators and applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243** (2003), 278–301.
19. Ф. Г. Авхадиев, “Семейства областей, обладающих максимальной константой Харди”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 59–63; англ. пер.: F. G. Avkhadiev, “Families of domains with best possible Hardy constant”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **57**:9 (2013), 49–52.
20. H. Lamb, “Note on the induction of electric currents in a cylinder placed across the lines of magnetic force”, *Proc. London Math. Soc.*, **s1-15**:1 (1883), 270–275.
21. J. E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1944, 243 pp.
22. Г. М. Голузин, “Некоторые теоремы покрытия в теории аналитических функций”, *Матем. сб.*, **22(64)**:3 (1948), 353–372.
23. J. A. Hempel, “The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky”, *J. London Math. Soc.* (2), **20**:3 (1979), 435–445.
24. J. A. Jenkins, “On explicit bounds in Landau’s theorem. II”, *Canad. J. Math.*, **33**:3 (1981), 559–562.
25. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, *Schwarz–Pick type inequalities*, Front. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, viii+156 pp.
26. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, 3-е изд., Наука, М., 1965, 703 с.; пер. с нем.: E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, v. I: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 9 Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1977, xxvi+668 pp.
27. Г. Хадвигер, *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии*, Наука, М., 1966, 416 с.; пер. с нем.: H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundlehren Math. Wiss., **93**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957, xiii+312 pp.

28. Г. Поля, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, ГИФМЛ, М., 1962, 336 с.; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud., **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951, xvi+279 pp.
29. C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Monogr. Stud. Math., **7**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.–London, 1980, x+228 pp.
30. Ф. Г. Авхадиев, “Решение обобщенной задачи Сен-Венана”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 3–12; англ. пер.: F. G. Avkhadiev, “Solution of the generalized Saint Venant problem”, *Sb. Math.*, **189**:12 (1998), 1739–1748.
31. M. Bañuelos, M. van den Berg, T. Carrol, “Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion”, *J. London Math. Soc.* (2), **66**:2 (2002), 499–512.

ФАРИТ ГАБИДИНОВИЧ АВХАДИЕВ
(FARIT G. AVKHADIEV)
Казанский (Приволжский) федеральный
университет
E-mail: favhadiev@kpfu.ru

Поступило в редакцию
16.04.2013
10.02.2014