Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:36:48

УДК 517.982.256+517.982.252

А. Р. Алимов

Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах

Установлено, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных) ограниченно компактное m -связное (связное по Менгеру) множество монотонно линейно связно и является солнцем. Показано, что пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного (m -связного) множества с замкнутым шаром клеточноподобно (имеет шейп точки), в частности ациклично (в конечномерном случае – стягиваемо), и является солнцем и что ограниченно слабо компактное m -связное множество монотонно линейно связно. Попутно теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей распространяется на случай сходимости относительно ассоциированной (по Брауну) нормы.

Библиография: 38 наименований.

Ключевые слова: солнце, ацикличное множество, клеточноподобное множество, монотонно линейно связное множество, связность по Менгеру, d -выпуклость, выпуклость по Менгеру, теорема Рейнуотера–Симонса.

DOI: 10.4213/im8128

§ 1. Введение и основные определения

Для ограниченного подмножества $M \neq \emptyset$ действительного линейного нормированного пространства X через $m(M)$ обозначается пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M (следуя [1], $m(M)$ называется *оболочкой Банаха–Мазура* (шаровой оболочкой) множества M). Множество $M \subset X$ называем m -связным (связным по Менгеру) [1], если $m(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем $m(\{x, y\}) = m(x, y)$. Несмотря на название, в бесконечномерном случае замкнутое m -связное множество не обязано быть связным.

Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Следуя [2], говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонна*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \text{ext } S^*$ (здесь и далее $\text{ext } S^*$ – множество крайних точек сферы S^* сопряженного пространства).

Замкнутое множество M называется *монотонно линейно связным* [3], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$.

Естественность m -связных множеств и монотонно линейно связных множеств при изучении связности солнц была показана в работах [1], [3]–[5]: для

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00022).

монотонно линейно связного солнца удается ответить на давно поставленный вопрос о связности (и даже ацикличности) пересечения солнца с шаром, что существенно дополняет известную теорему Л. П. Власова о солнечности ациклических множеств.

Для $x \in X$ и $\emptyset \neq M \subset X$ посредством $P_M x$ мы обозначаем метрическую проекцию на множество M (множество ближайших точек из M к x).

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства X называется *солнцем* [6], если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ (точка светимости) такая, что

$$y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x] \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (1.1)$$

Понятие солнца было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1958 г. при изучении чебышевских множеств, при этом под солнцем они понимали то, что сейчас называют строгим протосолнцем (такие множества M определяются тем, что (1.1) выполнено для любых $x \notin M$ и $y \in P_M x$).

Отметим [7], что чебышевское монотонно линейно связное множество всегда является солнцем; более того, если M – монотонно линейно связное множество и $P_M x = \{y\}$, $x \notin M$, то y – точка светимости. Из определения вытекает, что монотонная линейная связность сохраняется при пересечении монотонно линейно связного множества с экстремальной гиперплоскостью и, более того, с произвольным брусом (т. е. множеством, образованным пересечениями гиперполос, порожденных экстремальными точками сопряженной сферы [8]). Поскольку замкнутый шар является брусом, монотонно линейно связное множество необходимо B -монотонно линейно связно, т. е. его пересечение с любым замкнутым (а следовательно, и открытым) шаром монотонно линейно связно. Отсюда вытекает [5], что *монотонно линейно связное множество m -связно*. Обратное утверждение неверно – соответствующий пример предложен в [9]: $M = M_1 \cup M_2$, где $M_i = \{x \in C[0, 1] \mid x(0) = i, i = 1, 2\}$. Однако для замкнутых множеств в c_0 (см. [4]) и для ограниченно компактных множеств в произвольном сепарабельном пространстве X эти свойства эквивалентны (см. далее теорему 4.1).

В работе изучаются топологические и аппроксимативные свойства m -связных (связных по Менгеру) множеств и монотонно линейно связных множеств, исследуется их солнечность. В теореме 4.1 утверждается, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных пространствах) ограниченно компактное m -связное множество монотонно линейно связно и является солнцем. При этом пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного множества с замкнутым шаром клеточноподобно (имеет шейп точки), в частности ациклично, и является солнцем. Этот результат частично дополняет известную теорему Власова [6], согласно которой ограниченно компактное P -ациклическое подмножество банахова пространства является солнцем. Случай слабо компактных множеств рассматривается в теореме 4.2. При доказательстве теоремы 4.1 мы попутно обобщаем известную теорему Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости на случай сходимости относительно ассоциированной нормы (предложение 3.1).

§ 2. Ациклические и клеточноподобные множества

Теория гомологий (когомологий) связывает с каждым топологическим пространством X последовательности абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы гомологий), и $H^k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы когомологий), которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны, то и соответствующие группы гомологий изоморфны. Конструировать группы гомологий (когомологий) можно различными способами, из которых мы можем выделить следующие: конструкция, основанная на нервах покрытий, предложенная П. С. Александровым и обобщенная Э. Чехом; конструкция Л. Вьеториса, основанная на понятии истинных циклов и применимая к метрическим пространствам; конструкция, основанная на понятии сингулярных цепей (непрерывных образов симплицальных цепей).

Пусть A – произвольная нетривиальная абелева группа. Пространство (далее все пространства предполагаются метризуемыми) называется *ациклическим*, если его группа чеховских когомологий с коэффициентами из A тривиальна (не имеет циклов, за исключением границы). Таким образом, определение ациклическости зависит от выбранной группы коэффициентов. Здесь отметим, что гомологии Александрова–Чеха не образуют теории гомологий, не удовлетворяя аксиоме точности, а когомологии Чеха образуют теорию гомологий топологических пространств. С подробным изложением теории гомологий (когомологий) компактов, топологических и равномерных пространств можно ознакомиться в обзоре С. А. Мелихова [10].

В случае, если гомология (когомология) имеет компактный носитель (т. е. удовлетворяет аксиоме компактных носителей) и коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле, то понятия гомологической и когомологической ациклическости совпадают [11]. Однако в случае произвольной абелевой группы коэффициентов понятия гомологической и когомологической ациклическости могут быть различны. К примеру, 2-адический соленоид (предел обратной последовательности $S^1 \xleftarrow{f} S^1 \xleftarrow{f} \dots$, где $f = z^2$) ацикличесок в гомологиях Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$, а в когомологиях Чеха ациклическости нет (см., например, [12]).

Далее, если не оговорено противное, ациклическость будет пониматься относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе.

Непустое компактное пространство называется R_δ -множеством (см., например, [13, (2.11)]), если оно гомеоморфно пересечению счетной убывающей последовательности абсолютных ретрактов (или стягиваемых компактов [13, теорема 2.13]). R_δ -множества естественно возникают как пространства решений задачи Коши, а также автономных и неавтономных дифференциальных включений [14]–[16]. Результаты такого типа восходят к работам Ароншайна.

Компакт Y называется *клеточноподобным* (имеющим шейп точки), если существует ANR (абсолютный окрестностный ретракт) Z и вложение $i: Y \rightarrow Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [13, (82.4)]); само клеточноподобное множество при этом не обязано быть стягиваемым. Из известной характеристики Химана R_δ -множеств непосредственно следует, что R_δ -множество всегда клеточноподобно [17, § 4.2], [18, с. 50]. Поскольку всякое отображение компакта точечного шейпа в ANR гомотопически тривиально, компакт шейпа точки (клеточноподобный) стягивается во всякой своей

окрестности в любом объемлющем ANR. Как следствие, классы R_δ -множеств и клеточноподобных (шейпа точки) компактов совпадают.

Отметим, что клеточноподобность влечет ацикличность (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) [17, с. 854], при этом имеются примеры ациклических, но не клеточноподобных множеств, а также клеточноподобных, но не линейно связных множеств (синусоида топологов).

Следуя [6], если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что множество M обладает одним из следующих свойств:

P - Q , если при всех $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто и обладает свойством Q ;

B - Q , если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

$\hat{B}$ - Q , если $M \cap \hat{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

Таким образом, замкнутое подмножество конечномерного пространства P -непусто или является множеством существования (проксимinally). Соответственно, множество M P -ациклично, если $P_M x$ непусто и ациклично для любого x ; множество M B -ациклично, если пересечение M с любым замкнутым шаром ациклично.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. B -связные множества также называют V -связными (здесь буква V происходит из работ Л. П. Власова, который обозначал шары как $V(x, r)$). Наш термин B -связность согласуется с более привычным обозначением шаров как $B(x, r)$, а также с понятием “ограниченная связность” (bounded connectedness), введенным Д. Вулбертом в 1960-х годах.

А. Л. Браун [19, следствие 1.6.2] доказал, что если ограниченно компактное подмножество M банахова пространства P -ациклично (относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе), то M B -ациклично¹. Таким образом, ацикличность произвольного компактного m -связного множества влечет P - и B -ацикличность произвольного ограниченно компактного m -связного множества M . Это следует из того, что пересечение такого M с произвольным шаром $B(x, r)$ компактно и m -связно.

§ 3. Оболочка Банаха–Мазура. Монотонная линейная связность.

Классы пространств (MeI) и (Ex- w^* s).

Ассоциированная норма. Теорема Рейнуотера–Симонса

В настоящем параграфе изучается связь между введенной выше оболочкой Банаха–Мазура $m(\cdot, \cdot)$ и (функциональным) интервалом $[\cdot, \cdot]$ (определенным далее в (3.2)). Вводится класс (MeI) линейных нормированных пространств (включающий все сепарабельные), в котором $m(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$. Важным свойством оболочки Банаха–Мазура $m(\cdot, \cdot)$ является то, что $z \in m(x, y)$, если и только если z лежит метрически между x и y относительно так называемой ассоциированной (по Брауну) нормы $|\cdot|$. Такая норма вводится на пространствах класса (Ex- w^* s), который также включает в себя все сепарабельные банаховы пространства. Данное обстоятельство позволяет привлечь аппарат метрической выпуклости (лемма 5.A). Попутно мы распространяем известную теорему Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости относительно ассоциированной нормы (предложение 3.1).

¹На самом деле Браун показал в [19] несколько больше: если M – P -ациклическое аппроксимативно компактное подмножество банахова пространства и пересечение M с некоторым шаром B компактно, то $M \cap B$ ациклично.

Для начала отметим, что в пространстве $X = C(Q)$ структура $m(x, y)$, $x, y \in X$, вполне ясна:

$$m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket,$$

где

$$\llbracket x, y \rrbracket := \{z \in C(Q) \mid z(t) \in [x(t), y(t)] \quad \forall t \in Q\}. \quad (3.1)$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$ (где Q – локально компактное хаусдорфово пространство), это следует из характеристики [20] крайних точек (“значение в точке”) единичной сферы сопряженного пространства к $C_0(Q)$.

В общем случае по аналогии с (3.1) интервал $\llbracket x, y \rrbracket$ определяется выражением

$$\llbracket x, y \rrbracket := \{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(z) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \quad \forall \varphi \in \text{ext } S^*\}. \quad (3.2)$$

Следуя [1], а также [9], введем в рассмотрение класс пространств X , который мы обозначаем

$$(\text{MeI}): m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket \quad \forall x, y \in X.$$

Сокращение (MeI) происходит от английского “The hull $m(x, y)$ equals the interval $\llbracket x, y \rrbracket$ for all x, y ”. Автору не известны банаховы пространства, не лежащие в классе (MeI).

Заметим, что включение $m(x, y) \supset \llbracket x, y \rrbracket$ имеет место в любом линейном нормированном пространстве X (см., например, [5]). Также известно [5], [9], что равенство $m(x, y) = \llbracket x, y \rrbracket$ имеет место для достаточно широкого класса пространств и, в частности, для пространств, на единичной сфере которых гладкие точки всюду плотны (такой класс содержит слабо асплундовы, а следовательно, и сепарабельные пространства).

Несложно показать, что класс (MeI) содержит пространства $C(Q)$, где Q – хаусдорфов компакт, и, в частности, пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда). Также отметим, что если пространство X таково, что $\text{ext } S^*$ лежит в замыкании множества w^* -полуострых точек шара B^* (условие Морено), то $\llbracket x, y \rrbracket = m(x, y)$ для всех $x, y \in X$; такому условию, в частности, удовлетворяют конечномерные пространства и пространства со свойством пересечения Мазура. Напомним, что точка $f \in S^*$ называется w^* -полуострой точкой сопряженного шара B^* (см., например, [21]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется w^* -срез Sl шара B^* такой, что $\text{diam}(\{f\} \cup \text{Sl}) < \varepsilon$. Здесь $\text{Sl}(B^*, x, \delta) := \{g \in S^* \mid g(x) > 1 - \delta\}$, $0 < \delta < 1$, $x \in X$.

Далее также понадобится класс пространств

$$(\text{Ex-}w^*s): \text{ext } S^* \text{ } w^*\text{-сепарабельно,}$$

введенный Франчетти и Роверси [9]. При этом в определении класса (Ex- w^*s) мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i \in I} \subset \text{ext } S^* \quad w^*\text{-плотно в } \text{ext } S^*, \quad \text{card } I \leq \aleph_0, \quad F = -F.$$

Сокращение (Ex- w^*s) происходит от немецкого “Die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^* -separabel”.

Из теоремы Крейна–Мильмана сразу следует, что любое пространство из класса $(Ex-w^*s)$ имеет w^* -сепарабельный единичный шар B^* . Последнее условие эквивалентно [22] тому, что X изометрично изоморфно подпространству из ℓ^∞ . Также отметим, что имеются примеры пространств типа $X = C(K)$, где K – несепарабельный хаусдорфов компакт, или $X = \ell_1 \oplus \ell_2(\Gamma)$, $|\Gamma| = \mathfrak{c}$, для которых X^* w^* -сепарабельно, а единичный шар B^* не w^* -сепарабелен.

Далее, если X – сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^* -топология единичного шара B^* сопряженного пространства X^* метризуема. Соответственно, шар B^* w^* -сепарабелен [25, следствие 3.104]. Поэтому *любое сепарабельное пространство лежит в классе $(Ex-w^*s)$* . Также отметим, что класс $(Ex-w^*s)$ содержит *несепарабельное* пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда $\beta\mathbb{N}$, данный компакт сепарабелен, но не метризуем). При этом $C(Q)$ на несепарабельном Q и $c_0(\Gamma)$ на несчетном Γ не лежат в $(Ex-w^*s)$.

Было бы интересно получить характеризацию пространств класса $(Ex-w^*s)$.

Кратко суммируя сказанное выше относительно классов пространств (MeI) и $(Ex-w^*s)$, отметим, что класс $(MeI) \cap (Ex-w^*s)$ содержит все сепарабельные линейные нормированные пространства (в частности, все пространства $C(Q)$ на метризуемом компакте Q) и несепарабельное пространство ℓ^∞ .

Пусть $X \in (Ex-w^*s)$, $F = (f_i)_{i \in I}$ – семейство функционалов из $(Ex-w^*s)$, $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x)|. \quad (3.3)$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X , которую, следуя [1], мы называем *ассоциированной*. Ясно, что $|x| \leq \|x\| \sum \alpha_i$.

Важность ассоциированной нормы показывает следующий результат, который является естественным и простым обобщением следствия 3.2 из [1], доказанного Брауном в случае $\dim X < \infty$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть X – банахово пространство из класса $(MeI) \cap (Ex-w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство), и пусть $x, y \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

- а) $z \in m(x, y)$;
- б) $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ для всех $i \in I$, где $F = (f_i)_{i \in I}$ – семейство из определения класса $(Ex-w^*s)$;
- с) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in m(x, y)$. Поскольку $X \in (MeI)$, по определению имеем $f(z) \in [f(x), f(y)]$ для любого $f \in \text{ext } S^*$. В частности, выполнено условие б) и в силу (3.3) условие с). Обратно, пусть z находится между x и y относительно нормы $|\cdot|$. Ясно, что $|f_i(x - y)| \leq |f_i(x - z)| + |f_i(z - y)|$. Отсюда и из (3.3) имеем

$$|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$$

для всех i . Как следствие,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$$

для всех $f \in \text{ext } S^*$, поскольку (f_i) w^* -плотно в $\text{ext } S^*$. Окончательно имеем $z \in m(x, y)$ в силу того, что $X \in (MeI)$.

Следующий результат можно рассматривать как распространение известной теоремы Рейнуотера–Симонса (см., например, [25, § 3.11.8.5]) на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса $(Ex-w^*s)$ (в частности, на сепарабельных пространствах). Теорема Рейнуотера–Симонса утверждает, что ограниченная последовательность (x_n) в банаховом пространстве X слабо сходится к $x \in X$, если и только если последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$ для каждого функционала f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (например, для всех $f \in \text{ext } S^*$). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, имеется норма на $X \in (Ex-w^*s)$, относительно которой сходимость *последовательностей* равносильна слабой сходимости.

Напомним (см., например, [25, § 3.11.8]), что подмножество A единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* называется *границей* (Джеймса) для пространства X , если для каждого $x \in X$ найдется $f \in A$ такой, что $f(x) = \|x\|$. Из теоремы Крейна–Мильмана легко вытекает, что множество $\text{ext } S^*$ крайних точек сопряженного шара является границей для X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $X \in (Ex-w^*s)$ – банахово пространство, $F := (f_i)_{i \in I} \subset \text{ext } S^*$ – набор функционалов из определения класса $(Ex-w^*s)$. Пусть (x_n) – ограниченная последовательность в X . Рассмотрим следующие условия:

- а) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;
- б) $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ для любого $i \in I$;
- с) $x_n \xrightarrow{w} x$.

Тогда условия а) и б) эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия с). Если X^* сепарабельно, то условия а)–с) эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В импликации б) $\Rightarrow$ с) сепарабельность X^* существенна. Действительно, пусть $X = \ell^1$. Рассмотрим финитные последовательности из ℓ^∞ , состоящие из нулей и плюс-минус единиц. Таких последовательностей счетное число, и они w^* -плотны во множестве $\text{ext } S^*$. Однако из сходимости элементов из ℓ^1 на этих финитных последовательностях не следует их слабая сходимость. Данный факт отмечен П. А. Бородиным при обсуждении результатов работы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из предложения 3.1 вытекает, что пространство $(X, |\cdot|)$ всегда является пространством Шура относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ (пространство называется *пространством Шура*, если в нем сходимость последовательности по норме равносильна ее слабой сходимости; классическим примером такого пространства является пространство ℓ^1). Действительно, из определения ассоциированной нормы следует, что $|x| > \alpha_i |f_i(x)|$ для любого i , откуда вытекает, что любой элемент $f_i \in F$ лежит в $X_{|\cdot|}^*$. Теперь из условия б) предложения 3.1 следует, что если (x_n) сходится, то (x_n) $|\cdot|$ -сходится. Таким образом, для последовательности (x_n)

$$x_n \xrightarrow{w|\cdot|} x \iff x_n \xrightarrow{|\cdot|} x.$$

В результате имеем, что в пространстве $(X, |\cdot|)$ $w_{|\cdot|}$ -компактность совпадает с сильной $|\cdot|$ -компактностью, и, как следствие, если $(X, |\cdot|)$ рефлексивно, то оно конечномерно.

Данное замечание возникло в результате переписки с О. Нигардом, которому автор выражает искреннюю благодарность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Импликация а) $\Rightarrow$ б) вполне понятна: если $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$ (по норме $|\cdot|$), то сумма $\sum \alpha_i |f_i(x_n) - f_i(x)|$ мала при всех достаточно больших n ; как следствие, для каждого фиксированного j разность $|f_j(x_n) - f_j(x)|$ также мала при таких n .

Установим б) $\Rightarrow$ а). Для каждого n разобьем сумму $\sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x_n) - f_i(x)|$ на две: при $i \leq N$ и при $i > N$ (N выберем позже). Поскольку по условию последовательность (x_n) равномерно ограничена, то во второй сумме выполнено $|f_i(x_n) - f_i(x)| \leq C$ (где C не зависит от i, n). Как следствие, вторая сумма ограничена сверху суммой $\sum_{i > N} C \alpha_i < \infty$. По $\varepsilon > 0$ выбираем N , при котором вторая сумма меньше ε . Первая сумма конечная, и в ней выбираем большие n .

Импликация с) $\Rightarrow$ б) понятна. Предположим, что X^* сепарабельно. Докажем б) $\Rightarrow$ с). Заметим, что для банахова пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- 1) для X имеется сепарабельная граница;
- 2) граница $\text{ext } B^*$ сепарабельна;
- 3) пространство X^* сепарабельно.

Здесь импликации 3) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 1) понятны (в линейном нормированном пространстве сепарабельность множества наследуется его произвольными подмножествами), а первое условие влечет последнее в силу известной теоремы Годфроя–Роде (см., например, [25, теорема 3.122]), согласно которой $B^* = \overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|} A$ (здесь A – сепарабельная граница для X). Как следствие, шар B^* сепарабелен, а значит, пространство X^* также сепарабельно.

Далее, нам потребуется понятие (I)-генерирующего множества, введенного В.П. Фонфом и Й. Линденштрауссом. По определению множество $C \subset B^*$ (I)-генерирует шар B^* , если

$$B^* = \overline{\text{conv}} \left(\bigcup_i \overline{\text{conv}}^{w^*} C_i \right) \quad (3.4)$$

при любом представлении $C = \bigcup C_i$ в виде объединения счетного семейства множеств C_i . В данном определении буква I происходит от латинского “intermedius” и объясняется тем, что

$$B^* = \overline{\text{conv}} C \implies C \text{ (I)-генерирует } B^* \implies B^* = \overline{\text{conv}}^{w^*} C.$$

Положим $C_i := \{f_1, \dots, f_i\}$, $i \in I$ (где $F := (f_i)_{i \in I}$ – набор функционалов из определения класса (Ex- w^* s)). Ясно, что $F = \bigcup C_i$. Далее,

$$B^* = \overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|} \text{ext } B^* \quad (3.5)$$

по теореме Кадеца–Фонфа–Годфроя–Роде. Поскольку X^* сепарабельно, то граница $\text{ext } B^*$ также сепарабельна. Далее, $\text{ext } S^* \subset \overline{F}^{w^*}$ по определению класса (Ex- w^* s), следовательно, $\text{ext } S^* \subset (\bigcup_i \overline{\text{conv}}^{w^*} C_i)$. Окончательно, F (I)-генерирует шар B^* в силу (3.5) и (3.4).

Теперь осталось воспользоваться одним результатом, полученным независимо О. Нигардом [23] и О.Ф.К. Календой [24], который утверждает, что если $C \subset B^*$ (I)-генерирует шар B^* , то C – множество Рейнуотера, т.е. множество со свойством: если ограниченная последовательность $(x_n) \subset X$ сходится поточечно на C , то (x_n) сходится слабо. Предложение доказано.

§ 4. Основные результаты

Основными результатами работы являются следующие.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (E\text{-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство), и пусть множество $M \subset X$ – замкнуто и m -связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:

- а) M ограничено компактно (в норме $\|\cdot\|$ пространства X);
- б) $M \mid \cdot \mid$ -замкнуто и $m(x, y) \mid \cdot \mid$ -компактно для любых $x, y \in X$;
- с) $m(x, y) \|\cdot\|$ -компактно для любых $x, y \in X$.

Тогда M монотонно линейно связно. Если, кроме того, M ограничено компактно, то M P - и B -клеточноподобно, P - и B -ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем. Если X конечномерно, то M вдобавок P - и B -стягиваемо.

В [26] показано, что множество $M \subset X$ обладает непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε -выборкой из метрической проекции для всех $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда оно является $\check{B}$ -стягиваемым (B -стягиваемым в случае аппроксимативной компактности M). С учетом этого из теоремы 4.1 вытекает, что метрическая проекция на m -связное (монотонно линейно связное) замкнутое подмножество конечномерного пространства обладает непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε -выборкой для всех $\varepsilon > 0$. По-видимому, можно надеяться, что аналогичный результат верен и в бесконечномерном случае.

Для пространств с линейной вкладываемостью шаров [8] (в частности, в пространствах $\ell^1(n)$, $C(Q)$, где Q – метрический компакт, и $C_0(Q)$) теорема 4.1 частично усиливает результаты М. В. Балашова и Г. Е. Иванова [27, теорема 2.9, лемма 4.18] о линейной связности R -слабо выпуклых (по Виалю) множеств: в пространствах с линейной вкладываемостью шаров пересечение R -слабо выпуклого множества с замкнутым или открытым шаром m -связно [8, теорема 4.1].

Из теоремы 4.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (E\text{-}w^*s)$, и пусть множество $M \subset X$ замкнуто. Предположим, что для некоторой точки $x \notin M$ множество ее ближайших точек $P_M x$ компактно и m -связно. Тогда $P_M x$ монотонно линейно связно, P - и B -клеточноподобно, P - и B -ациклично и является солнцем.

Отметим, что если $M \subset X \in (\text{MeI})$ m -связно, то $P_M x$ также m -связно.

Действительно, пусть $u, v \in P_M x$. Поскольку M m -связно, найдется $z \in m(u, v) \cap M$, $z \neq u, v$. Предположим, что $z \notin S(x, \|x - u\|)$. Поскольку $\text{ext } S^*$ является границей для X , любую точку вне замкнутого шара (в нашем случае $B(x, \|x - u\|)$) всегда можно отделить от него экстремальным функционалом. Соответственно, $z \notin [u, v]$. Получаем противоречие, поскольку $z \in m(u, v)$, а в $X \in (\text{MeI})$ всегда выполнено $m(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$.

Для слабо компактных множеств имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть X – сепарабельное банахово пространство, и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено слабо компактно. Предположим, что M m -связно. Тогда M монотонно линейно связно.

До сих пор остается открытым следующий вопрос. Хорошо известен следующий результат Власова [6]: *в банаховом пространстве P -ациклическое ограниченно компактное множество является солнцем*². Было бы интересно, особенно учитывая теорему 4.2, распространить теорему Власова на случай ограниченно слабо компактных множеств хотя бы в сепарабельном случае. Проблема здесь в следующем: несмотря на то, что слабо компактное подмножество M сепарабельного банахова пространства метризуемо, а топология, порождаемая метрикой на M , совпадает со слабой топологией на M , теорема Эйленберга–Монтгомери не применима, поскольку метрическая проекция на M полунепрерывна сверху лишь сильно-слабо (носитель один, а топологии на нем разные). Отметим, что в общем случае также не решена задача о солнечности слабо компактных чебышевских множеств.

§ 5. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Первое утверждение теоремы доказывается при использовании некоторых схем из работы [9]. Монотонная линейная связность установлена в [3], а оставшиеся утверждения теоремы следуют из леммы 5.2, которая будет доказана ниже. Конечномерный случай вытекает из п. а) и теоремы Брауна [28], согласно которой пересечение m -связного замкнутого подмножества конечномерного X с замкнутым шаром n -связно для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ (т. е. каждое отображение во множество из k -сферы, $k \leq n$, непрерывно продолжается до отображения из $(k+1)$ -мерного шара). Отсюда и из известной характеристики абсолютных ретрактов (см., например, [29, теорема 11.1]) вытекает, что M стягиваемо и локально стягиваемо. Отметим [4], что условие б) теоремы 4.1 *a fortiori* выполнено в пространстве $X = c_0$.

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Напомним, что множество M называется *метрически выпуклым* или *d -выпуклым* (по Менгеру) [30] относительно метрики d , если для любых различных точек $x, y \in M$ множество $M \setminus \{x, y\}$ содержит точку z , находящуюся между x и y относительно метрики d , т. е. $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Следующий результат принадлежит Менгеру [30] (см. также [31, с. 24]).

ЛЕММА 5.А. Пусть (Y, d) – выпуклое по Менгеру полное метрическое пространство. Тогда для любых $x, y \in Y$ существует изометрия $f: [0, d(x, y)] \rightarrow Y$ такая, что $f(0) = x$ и $f(d(x, y)) = y$. Как следствие, Y линейно связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Достаточно рассмотреть ограниченное множество M . Хорошо известно (см., например, [25, предложение 3.107]), что слабо компактное подмножество банахова пространства с w^* -сепарабельным сопряженным метризуемо, причем топология, порождаемая метрикой на M , совпадает со слабой топологией на M . Также известно, что слабо компактное

²Доказательство теоремы Власова опирается на классическую теорему Эйленберга–Монтгомери о неподвижной точке (см., например, [13, следствие (32.12)]), при этом ациклическость понимается в смысле групп гомологий Александрова–Чеха с коэффициентами в поле (в работе Эйленберга–Монтгомери ациклическость понимается в смысле циклов Вьеториса и групп гомологий над полем коэффициентов). Однако гомологии Чеха изоморфны гомологиям Вьеториса на категории компактных метризуемых пространств, а понятия гомологической и когомологической ациклическости совпадают, если коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле и носитель компактен.

подмножество банахова пространства слабо полно (секвенциально слабо полно). В силу предложения 3.1 в пространствах класса $(\text{Ex-}w^*s)$, а следовательно, и в любых сепарабельных пространствах [5] w -полнота влечет $|\cdot|$ -полноту относительно ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|$. Теперь для применения леммы 5.A осталось заметить, что в сепарабельном пространстве m -связность множества эквивалентна его $|\cdot|$ -выпуклости (см. лемму 3.1).

Итак, по лемме 5.A любые две точки из M соединяются дугой $k(\cdot)$, осуществляющей изометрию. Применяя лемму 3.1, получаем, что $f_i(k(t))$ является монотонной функцией по t для каждого $i \in I$. Пусть теперь $f \in \text{ext } S^*$. Поскольку пространство X сепарабельно, существует подпоследовательность (f_i) из F , w^* -сходящаяся к f . Поэтому функция $f(k(t))$ также является монотонной. Теорема доказана.

Пусть пространство X лежит в классе $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$, и пусть $F = (f_i) \subset \text{ext } S^*$ – w^* -плотное в $\text{ext } S^*$ семейство из определения класса $(\text{Ex-}w^*s)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ограниченный линейный оператор $s_n: X \rightarrow \ell^\infty(n)$, определенный следующим образом:

$$s_n(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Отметим, что всегда $\|s_n(x)\| \leq \|x\|$ и $\|s_n(x)\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$. Последнее неравенство следует из того, что $\text{exp } S^*$ является границей Джеймса для пространства X , т. е. $\|x\| = \max\{f(x) \mid f \in \text{ext } S^*\}$.

Первое утверждение в следующей лемме доказывается небольшим видоизменением рассуждений из работы [9].

ЛЕММА 5.1. Пусть X – банахово пространство из класса $(\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство), и пусть $\emptyset \neq M \subset X$ ограниченно компактно. Тогда:

- 1) если M m -связно в X , то $s_n(M)$ монотонно линейно связано в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) если $s_n(M)$ m -связно в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M монотонно линейно связано в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Требуемое утверждение для $s_n(M)$ следует из леммы 3.1 с учетом того, что m -связное подмножество конечномерного пространства монотонно линейно связано.

2) Предположим теперь, что $s_n(M)$ m -связно в $\ell^\infty(n)$ для всех n . Пусть $x, y \in M$, $x \neq y$. Отсюда следует, что существует $\nu > 0$ такое, что если $n \geq \nu$, то $\|s_n(x) - s_n(y)\| \geq \varepsilon > 0$. Поскольку $s_n(M)$ m -связно, выберем такую точку $z_n \in M$, что $s_n(z_n) \in m(s_n(x), s_n(y))$ и

$$\|s_n(z_n) - s_n(x)\| = \|s_n(z_n) - s_n(y)\| = \frac{1}{2}\|s_n(x) - s_n(y)\| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Последнее равенство следует из непрерывности в силу леммы 5.A, примененной к замкнутому m -связному множеству $s_n(M)$. При $n \rightarrow \infty$ в силу компактности M имеем, при необходимости переходя к подпоследовательностям, что $z_n \rightarrow z \in M$. Ясно, что $\|s_n(z_n - x)\| \rightarrow \|z - x\|$ и $\|s_n(z_n - y)\| \rightarrow \|z - y\|$. Отсюда $z \neq x$, $z \neq y$. Остается показать, что $z \in m(x, y)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ из

леммы 3.1 вытекает, что

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leq f_i(z_n) \leq \max[f_i(x), f_i(y)], \quad i = 1, \dots, n,$$

поскольку $s_n(z_n) \in m(s_n(x), s_n(y))$. При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leq f_i(z) \leq \max[f_i(x), f_i(y)], \quad i \in I,$$

откуда $z \in m(x, y)$ по лемме 3.1. Теперь монотонная линейная связность m -связного множества M обеспечивается теоремой 4.1.

Отметим, что п. 2) леммы 5.1 не используется при доказательстве теоремы 4.1 и следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. Пусть $X \in (\text{MeI}) \cap (\text{Ex-}w^*s)$ – банахово пространство (в частности, X сепарабельно или $X = \ell^\infty$), и пусть множество $\emptyset \neq M \subset X$ ограничено компактно и m -связно. Тогда M P - и B -клеточноподобно, т. е. каждое из множеств

$$P_M x, \quad M \cap B(x, r), \quad x \in X, \quad r > 0,$$

клеточноподобно. В частности, множество M P - и B -ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий).

Прежде чем переходить к доказательству леммы 5.2, напомним, что *обратной системой топологических пространств* (см., например, [32, с. 56]) называется семейство $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$, где множество Σ частично упорядочено отношением $\prec$, X_α – топологическое хаусдорфово пространство и $\pi_\alpha^\beta: X_\beta \rightarrow X_\alpha$ – непрерывное отображение для любых $\alpha \prec \beta$, при этом $\pi_\alpha^\alpha = \text{id}_{X_\alpha}$ и $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$ для всех $\alpha \prec \beta \prec \gamma$. Следующее подпространство произведения $\prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$ называется обратным пределом системы $\mathcal{S}$ и обозначается

$$\varprojlim \mathcal{S} = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \mid \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha \quad \forall \alpha \prec \beta \right\}.$$

Если $\pi_\alpha: \varprojlim \mathcal{S} \rightarrow X_\alpha$ – ограничение проекции $p_\alpha: \prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ на ось α (каноническая проекция), то $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$ для всех $\alpha \prec \beta$.

Нам потребуется следующий известный результат, в котором утверждение 1) содержится, например, в [15], а утверждение 2) получено в [33] (см. также [16]). При этом утверждение а) является следствием классической теоремы А. Н. Тихонова о компактности; утверждение б) хорошо известно и принадлежит А. Г. Курошу и Н. Е. Стинроду.

ЛЕММА 5.В. 1) Пусть $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$ – обратная система. Тогда предел $\varprojlim \mathcal{S}$ является замкнутым подмножеством произведения $\prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$. Кроме того, выполнены следующие утверждения.

- а) Если X_α компактно для всякого $\alpha \in \Sigma$, то предел $\varprojlim \mathcal{S}$ компактен;
- б) Если X_α компактно и непусто для всякого $\alpha \in \Sigma$, то $\varprojlim \mathcal{S}$ компактно и непусто;
- с) Если X_α является континуумом для всякого $\alpha \in \Sigma$, то $\varprojlim \mathcal{S}$ является континуумом;
- д) Если X_α компактно и ациклично³ для всякого $\alpha \in \Sigma$, то предел $\varprojlim \mathcal{S}$ компактен и ацикличен;

³Относительно любой непрерывной теории когомологий.

е) Если X_α метризуемо для всякого $\alpha \in \Sigma$ и Σ счетно, то предел $\varprojlim S$ метризуем.

2) Если $\mathcal{S} = \{X_n, \pi_n^p, \Sigma\}$ – счетная обратная система и каждое X_n компактно и клеточноподобно, то обратный предел $\varprojlim S$ также компактен и является клеточноподобным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Пусть Ω – семейство всех конечных подмножеств из $F \subset \text{ext } S^*$. Поскольку множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно, то Ω счетно. Множество Ω направлено по включению, т.е. направлено отношением $\prec$, определенным следующим образом: $A \prec B$ в том и только в том случае, когда $A \subset B$. Для $A \in \Omega$ определим отображение $s_A: X \rightarrow \ell^\infty(A)$,

$$s_A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}.$$

Тогда s_A – линейный ограниченный оператор. Если $A, B \in \Omega$, $A \subset B$, то имеется естественный оператор сужения $\ell^\infty(B) \rightarrow \ell^\infty(A)$ и, следовательно, имеется естественное отображение сужения s_{BA} . Хорошо известно, что семейство $\{s_A \mid A \in \Omega\}$ образует обратную систему по отношению к отображениям сужения. Согласно утверждению 1) леммы 5.1 множества $s_A(M)$ являются компактными m -связными подмножествами пространства $\ell^\infty(A)$ и, следовательно, по теореме Брауна [19, теорема 1] бесконечно связными (а значит, клеточноподобными и адиклическими множествами).

В теории обратных систем хорошо известна следующая конструкция. Пусть $(X, \pi) = (X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma)$ – обратная система множеств, а Z – произвольное фиксированное множество. Пусть, далее, для каждого $\alpha \in \Sigma$ задано отображение $g_\alpha: Z \rightarrow X_\alpha$, причем эти отображения таковы, что $\pi_\alpha^\beta g_\beta = g_\alpha$ всякий раз, когда $\alpha \leq \beta$. Тогда оказывается, что существует (и притом единственное) отображение $g: Z \rightarrow X_\infty := \varprojlim (X, \pi)$, обладающее свойством $\pi_\alpha \circ g = g_\alpha$ при всех α . При этом если Z – топологическое пространство и все g_α – непрерывные отображения, то $g: Z \rightarrow X_\infty$ непрерывно.

Поскольку $\{s_A \mid A \in \Omega\}$ – обратная система, имеет место суперпозиция отображений $s_A = s_{BA} \circ s_B$ для $A, B \in \Omega$, $A \subset B$, где s_{BA} – отображение сужения (см. [34, с. 428]). Отсюда отображение $g: M \rightarrow M_\infty := \varprojlim s_A(M)$ непрерывно (по изложенному выше) и инъективно (см. [34, (6.9)]). Докажем его сюръективность.

Предположим, что

$$(x_A)_{A \in \Omega} \in \varprojlim s_A(M) \subset \prod_{A \in \Omega} s_A(M).$$

Для каждого $A \in \Omega$ выберем $y_A \in M$ таким образом, что $s_A(y_A) = x_A$. Тогда $(y_A)_{A \in \Omega}$ является сетью (направленностью) в M и вследствие компактности M имеет предельную точку $y \in M$. Остается доказать, что $s_A(y) = x_A$ для каждого $A \in \Omega$. Рассмотрим $A, B \in \Omega$, $B \supset A$. Тогда $s_A(y_B) = s_B(y_B)|_A = x_A$. Переходя к пределу по подсети, получаем, что $s_A(y) = x_A$.

Итак, отображение $g: M \rightarrow M_\infty$ непрерывно и по доказанному выше является биекцией. Хорошо известно [32, с. 169], что любое отображение компактного пространства в хаусдорфово замкнуто. Как следствие, непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом. Поскольку обратный предел M_∞ хаусдорфов [32, с. 171], предыдущее утверждение применимо в нашей ситуации. Итак, M гомеоморфно M_∞ .

Далее, хорошо известно, что клеточноподобность (равно как ацикличность) является топологическим свойством [13, с. 439]. Поскольку $M \simeq M_\infty$, из леммы 5.В следует, что M клеточноподобно (и, следовательно, ациклично), так как по упомянутой теореме Брауна каждое из $s_A(M)$ обладает таким свойством. При этом утверждение 2) леммы 5.В применимо в силу известного результата, состоящего в том, что множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно. Лемма доказана.

Ответ на обратный вопрос о монотонной линейной связности B -ациклических (P -ациклических) множеств в общем случае неизвестен. Здесь стоит отметить, что для любого $n \geq 3$ можно построить пример конечномерного пространства X_n , в котором существует не монотонно линейно связанное чебышевское множество (являющееся заведомо солнцем, а также P - и B -ациклическим множеством). Действительно, рассмотрим пространства X_n со свойством $\overline{\text{ext}}S^* = S^*$. Р.Р. Фелпс [35] показал, что свойство $\overline{\text{ext}}S^* = S^*$ выполнено для пространства X_n , если и только если каждое выпуклое ограниченное замкнутое подмножество в X_n представимо как пересечение замкнутых шаров (иными словами, $X_n \in (\text{МР})$, т. е. удовлетворяет свойству пересечения Мазура); как следствие, в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. Далее, для любого $n \geq 3$ в [36] построен пример пространства X'_n со свойством $\overline{\text{ext}}S^* = S^*$, содержащего неограниченное невыпуклое чебышевское множество M' (при этом любое ограниченное чебышевское множество в таком X'_n выпукло). Таким образом, M' служит примером не монотонно линейно связанного B -ациклического (P -ациклического) множества (чебышевского солнца).

В связи с этим же вопросом отметим, что Браун [1] ввел важный класс линейных нормированных пространств, так называемых (ВМ)-пространств (см. также [28], [37], [9]), которые оказались очень естественными в задаче об m -связности солнц. Пространства класса (ВМ) (в частности, $\ell^\infty(n)$ и c_0) являются “хорошими”, поскольку в них всякое ограниченно компактное солнце m -связно (см. [1], [4]) и, следовательно, монотонно линейно связано. Поскольку по теореме Власова ограниченно компактное P -ациклическое множество является солнцем, в таких пространствах P -ацикличность влечет монотонную линейную связность. Также отметим [38], что в конечномерном полиэдральном пространстве X_n каждое солнце монотонно линейно связано, если и только если $X_n \in (\text{ВМ})$. Соответственно, $\ell^1(n) \notin (\text{ВМ})$, $n \geq 3$, и поэтому в $\ell^1(n)$ существует не монотонно линейно связанное солнце. Однако не известно, будет ли такое солнце P -ациклическим (или даже хотя бы P -связным).

Автор благодарит И. Г. Царькова, А. А. Васильеву, Я.-Д. Хардтке, С. А. Богатого и У. Х. Каримова за обсуждения, а также рецензента за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Список литературы

1. A. L. Brown, “Suns in normed linear spaces which are finite dimensional”, *Math. Ann.*, **279**:1 (1987), 87–101.
2. B. Brosowski, F. Deutsch, J. Lambert, P. D. Morris, “Chebyshev sets which are not suns”, *Math. Ann.*, **212**:2 (1974), 89–101.

3. А. Р. Алимов, “Монотонная линейная связность чебышевских множеств в пространстве $C(Q)$ ”, *Матем. сб.*, **197**:9 (2006), 3–18; англ. пер.: A. R. Alimov, “Monotone path-connectedness of Chebyshev sets in the space $C(Q)$ ”, *Sb. Math.*, **197**:9 (2006), 1259–1272.
4. А. Р. Алимов, “Связность солнц в пространстве c_0 ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 3–18; англ. пер.: A. R. Alimov, “Connectedness of suns in the space c_0 ”, *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 651–666.
5. А. Р. Алимов, “Локальная солнечность солнц в линейных нормированных пространствах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:7 (2012), 3–14; англ. пер.: A. R. Alimov, “Local solarly of suns in normed linear spaces”, *J. Math. Sci.*, **197**:4 (2014), 447–454.
6. Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6(174) (1973), 3–66; англ. пер.: L. P. Vlasov, “Approximative properties of sets in normed linear spaces”, *Russian Math. Surveys*, **28**:6 (1973), 1–66.
7. А. Р. Алимов, “Монотонно линейно связное чебышевское множество является солнцем”, *Матем. заметки*, **91**:2 (2012), 305–307; англ. пер.: A. R. Alimov, “A monotone path connected Chebyshev set is a sun”, *Math. Notes*, **91**:2 (2012), 290–292.
8. A. R. Alimov, “Monotone path-connectedness of R -weakly convex sets in spaces with linear ball embedding”, *Eurasian Math. J.*, **3**:2 (2012), 21–30.
9. C. Franchetti, S. Roversi, *Suns, M -connected sets and P -acyclic sets in Banach spaces*, Preprint № 50139, Inst. di Mat. Appl. “G. Sansone”, 1988.
10. С. А. Мелихов, “Стирнродовские гомотопии”, *УМН*, **64**:3(387) (2009), 73–166; англ. пер.: S. A. Melikhov, “Steenrod homotopy”, *Russian Math. Surveys*, **64**:3 (2009), 469–551.
11. W. S. Massey, *Homology and cohomology theory*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **46**, Marcel Dekker, Inc., New York–Basel, 1978, xiv+412 pp.
12. K. Eda, U. H. Karimov, D. Repovš, “On (co)homology locally connected spaces”, *Topology Appl.*, **120**:3 (2002), 397–401.
13. L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, 2nd ed., Topol. Fixed Point Theory Appl., **4**, Springer, Dordrecht, 2006, xiv+539 pp.
14. L. Górniewicz, “Topological structure of solution sets: current results”, *Arch. Math. (Brno)*, **36** (2000), 343–382.
15. R. Dragoni, J. W. Macki, P. Nistri, P. Zecca, *Solution sets of differential equations in abstract spaces*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **342**, Harlow, Longman, 1996, xii+100 pp.
16. J. Andres, G. Gabor, L. Górniewicz, “Acyclicity of solution sets to functional inclusions”, *Nonlinear Anal.*, **49**:5 (2002), 671–688.
17. W. Kryszewski, “On the existence of equilibria and fixed points of maps under constraints”, *Handbook of topological fixed point theory*, Springer, Dordrecht, 2005, 783–866.
18. Shouchuan Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, v. II: *Applications*, Math. Appl., **500**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, xii+926 pp.
19. A. L. Brown, “Chebyshev sets and the shapes of convex bodies”, *Methods of functional analysis in approximation theory* (Bombay, 1985), Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **76**, Birkhäuser, Basel, 1986, 97–121.
20. B. Brosowski, F. Deutsch, “On some geometric properties of suns”, *J. Approximation Theory*, **10**:3 (1974), 245–267.
21. J. R. Giles, “The Mazur intersection problem”, *J. Convex Anal.*, **13**:3–4 (2006), 739–750.

22. E. N. Dancer, B. Sims, “Weak star separability”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **20**:2 (1979), 253–257.
23. O. Nygaard, “A remark on Rainwater’s theorem”, *Ann. Math. Inform.*, **32** (2005), 125–127.
24. O. F. K. Kalenda, “ (I) -envelopes of unit balls and James’ characterization of reflexivity”, *Studia Math.*, **182**:1 (2007), 29–40.
25. M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC, Springer, New York, 2011, xiv+820 pp.
26. И. Г. Царьков, “Геометрическая теория приближений в работах Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина”, *Соврем. Пробл. Матем. Механ.*, **4**:2 (2011), 57–78.
27. М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, “Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), 23–66; англ. пер.: M. V. Balashov, G. E. Ivanov, “Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces”, *Izv. Math.*, **73**:3 (2009), 455–499.
28. A. L. Brown, “On the connectedness properties of suns in finite-dimensional spaces”, *Workshop/Miniconference on functional analysis and optimization* (Canberra, 1988), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., **20**, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988, 1–15.
29. Sze-Tsen Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965, 234 pp.
30. K. Menger, “Untersuchungen über allgemeine Metrik”, *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 75–163.
31. K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, viii+244 pp.
32. *Encyclopedia of general topology*, eds. K. P. Hart, J. Nagata, J. E. Vaughan, Elsevier, Amsterdam, 2004, x+526 pp.
33. G. Gabor, “On the acyclicity of fixed point sets of multivalued maps”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **14**:2 (1999), 327–343.
34. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1966.
35. R. R. Phelps, “A representation theorem for bounded convex sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**:6 (1960), 976–983.
36. И. Г. Царьков, “Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **36**:1 (1984), 73–87; англ. пер.: I. G. Tsar’kov, “Bounded Chebyshev sets in finite-dimensional Banach spaces”, *Math. Notes*, **36**:1 (1984), 530–537.
37. A. L. Brown, “On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces”, *Proceedings of the Fourth international conference on functional analysis and approximation theory*, v. I (Potenza, 2000), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., **68**, part I, 2002, 315–328.
38. A. L. Brown, “Suns in polyhedral spaces”, *Seminar of mathematical analysis* (Malaga/Seville, 2002/2003), Colecc. Abierta, **64**, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville, 2003, 139–146.

АЛЕКСЕЙ РОСТИСЛАВОВИЧ АЛИМОВ
 (ALEXEY R. ALIMOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
 E-mail: alexey.alimov@gmail.com

Поступило в редакцию
 15.05.2013
 18.10.2013