Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Мибах, Псевдовыпуклые не штейновы области в примарных поверхностях Хопфа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 191–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:47:00

УДК 517.554

Х. Мибах

Псевдовыпуклые не штейновы области в примарных поверхностях Хопфа

С помощью техники, развитой А. Хиршовицем, описываются псевдовыпуклые не штейновы области в примарных поверхностях Хопфа.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: поверхности Хопфа, псевдовыпуклые области, проблема Леви.

DOI: 10.4213/im8139

§ 1. Введение

Пусть H – примарная поверхность Хопфа. Н. Левенберг и Х. Ямагучи [1] дали описание тех локально псевдовыпуклых областей $D \subset H$ с вещественно-аналитической границей, которые не являются штейновыми. В настоящей заметке их результат обобщается на случай произвольных псевдовыпуклых областей с помощью идей, развитых А. Хиршовицем в [2] и [3]. Обзор этих идей в несколько обобщенном виде дается в § 2. В § 3 изложены сведения о структуре примарных поверхностей Хопфа и описывается некоторое (имеющее особенность) голоморфное слоение $\mathcal{F}$ поверхности H . Это позволяет нам сформулировать основную теорему, которая затем и доказывается в § 4, 5.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset H$ – псевдовыпуклая область. Если D не штейнова, то вместе с каждой точкой $p \in D$ в ней содержится топологическое замыкание $\overline{F}_p$ слоя $F \in \mathcal{F}$, проходящего через p .

Автор выражает благодарность К. Ольеклаусу за полезные обсуждения по теме статьи и С. Ю. Немировскому за предложение, как доказывать лемму 5.4, а также П. Хайнцнеру за приглашение по программе SFB/TR 12 в Рурский университет (Бохум, Германия), где была написана часть статьи.

§ 2. Обзор методов Хиршовица

В этом параграфе методы, развитые А. Хиршовицем [3], излагаются для несколько более общей ситуации.

Пусть X – комплексное многообразие с голоморфным касательным расслоением $TX \rightarrow X$, и пусть $\pi: \mathbb{P}TX \rightarrow X$ – проективизированное голоморфное касательное расслоение. Непрерывная функция на X называется *строго плюрисубгармонической* на X , если она всюду локально является суммой непрерывной плюрисубгармонической и гладкой строго плюрисубгармонической функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для любой плюрисубгармонической функции $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ определим $S(\varphi)$ как множество всех $[v] \in \mathbb{P}T X$ таких, что φ представима в окрестности точки $\pi[v]$ в виде суммы плюрисубгармонической функции и гладкой функции, строго субгармонической на любом ростке голоморфной кривой, определяющей $[v]$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ – плюрисубгармоническая функция. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) множество $S(\varphi)$ открыто в $\mathbb{P}T X$;
- 2) если $S(\varphi) = \mathbb{P}T X$, то φ строго плюрисубгармонична на X ;
- 3) если ряд $\sum_k \varphi_k$ сходится равномерно на компактах в X и $\varphi_k \in \mathcal{C}(X)$, то $S(\sum_k \varphi_k) \supset \bigcup_k S(\varphi_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, предложение 1.3].

Для всякой плюрисубгармонической функции $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ определим множество

$$C(\varphi) = \mathbb{P}T X \setminus \{[v] \in \mathbb{P}T X; \varphi \text{ гладка в окрестности } \pi[v], \partial\varphi(v) \neq 0\}$$

и положим

$$C(X) := \bigcap_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}(X) \\ \text{плюрисубгармоническая}}} C(\varphi). \quad (2.1)$$

Каждое множество $C(\varphi)$ (и, тем самым, $C(X)$) замкнуто в $\mathbb{P}T X$. Следующая лемма представляет собой небольшое обобщение предложения 1.5 из [3].

ЛЕММА 2.3. Пусть X – комплексное многообразие и $\Omega := X \setminus \pi(C(X))$. Тогда существует плюрисубгармоническая функция $\psi \in \mathcal{C}(X)$, строго плюрисубгармоническая на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение $\pi: \mathbb{P}T X \rightarrow X$ собственное, множество Ω открыто в X . Если Ω пусто, то доказательство очевидно. Поэтому будем считать, что Ω – непустое открытое подмножество в X и, в частности, $\mathbb{P}T X \setminus C(X)$ непусто.

Каждому $[v] \in \mathbb{P}T X \setminus C(X)$ соответствует плюрисубгармоническая функция $\varphi_{[v]} \in \mathcal{C}^\infty(X)$, для которой $\partial\varphi_{[v]}v \neq 0$. Покажем, что функция $\psi_{[v]} := \exp \circ \varphi_{[v]}$ строго плюрисубгармонична в направлении $[v]$. Для этого вычислим

$$\partial\bar{\partial}\psi_{[v]} = e^{\varphi_{[v]}} (\partial\varphi_{[v]} \wedge \bar{\partial}\varphi_{[v]} + \partial\bar{\partial}\varphi_{[v]}).$$

Иными словами, получается, что $[v] \in S(\psi_{[v]})$. Поскольку X имеет счетную базу топологии, получаем открытое покрытие

$$\mathbb{P}T X \setminus C(X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S(\psi_k).$$

Найдутся числа $\lambda_k > 0$ такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k$ будет сходиться равномерно на компактах в X . Чтобы доказать это утверждение, выберем счетное

исчерпание $X = \bigcup_j K_j$ такими компактными подмножествами, что $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$. Для каждого j найдется $\lambda_{k,j} > 0$ такое, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,j} \|\psi_k\|_{K_j}$$

сходится. Поскольку $\|\psi_k\|_{K_j} \leq \|\psi_k\|_{K_{j+1}}$ при каждом j , можно считать, что $\lambda_{k,j'} \leq \lambda_{k,j}$ для всех $j \leq j'$. Полагая $\lambda_k := \lambda_{k,k}$ и замечая, что каждый компакт $K \subset X$ содержится в K_{j_0} при некотором j_0 , мы заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|\psi_k\|_K \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|\psi_k\|_{K_{j_0}} \leq \sum_{k=1}^{j_0} \lambda_k \|\psi_k\|_{K_{j_0}} + \sum_{k=j_0+1}^{\infty} \lambda_{k,j_0} \|\psi_k\|_{K_{j_0}} < \infty,$$

чем и доказано сделанное утверждение. Из него вытекает, что предельная функция $\psi := \sum_k \psi_k$ непрерывна и для нее $S(\psi) \supset \bigcup_k S(\psi_k) \supset \mathbb{P}TX \setminus C(X)$, так что она строго плюрисубгармонична на Ω . Лемма доказана.

В дальнейшем будем называть комплексное многообразие X *псевдовыпуклым*, если на нем существует непрерывная плюрисубгармоническая исчерпывающая функция $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть X – псевдовыпуклое комплексное многообразие, а $\gamma: U \rightarrow X$ – интегральная кривая голоморфного векторного поля на X , где U – область из $\mathbb{C}$. Если $\gamma'(U)$ пересекается с $C(X)$, то $\gamma'(U)$ содержится в $C(X)$. Если X допускает гладкую плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию, то из включения $\gamma'(U) \subset C(X)$ вытекает, что множество $\gamma(U)$ относительно компактно в X . В частности, в этом случае имеем $U = \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – голоморфное векторное поле на X с интегральной кривой γ . Допустим, что $\gamma'(0) = \xi(x_0) \in C(X)$. Достаточно показать, что 0 является внутренней точкой множества всех тех $t \in U$, для которых $\gamma'(t) \in C(X)$, так как тогда замкнутое множество $(\gamma')^{-1}(C(X))$ будет также и открытым, а значит, совпадающим с U . Иными словами, надо доказать, что для любой плюрисубгармонической функции $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, гладкой в окрестности точки $x_t := \gamma(t)$, мы имеем $\xi(\varphi)(x_t) = 0$ как только $|t|$ достаточно мал.

Для этого выберем $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ так, что

$$x_0 = \gamma(t_0) \in X_\alpha := \{x \in X; \rho(x) < \alpha\},$$

где ρ – непрерывная плюрисубгармоническая исчерпывающая функция на X . Обозначим локальный голоморфный поток поля ξ через Φ^ξ . При достаточно малом $|t|$ имеем

$$\Phi_t^\xi(X_{\alpha+1}) \supset X_\alpha \ni x_t := \Phi_t^\xi(x_0).$$

Поскольку отображение $\Phi_t^\xi: X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$ голоморфно, функция $\varphi_t := \varphi \circ \Phi_t^\xi$ непрерывна и плюрисубгармонична на X_α , а также гладка в окрестности точки x_0 , какова бы ни была плюрисубгармоническая функция $\varphi \in \mathcal{C}(X_{\alpha+1})$, гладкая в окрестности точки x_t . Следуя доказательству предложения 1.6 из [3],

построим непрерывную плюрисубгармоническую функцию ψ_t на X , совпадающую с φ_t в окрестности точки x_0 . Выберем $\beta \in \mathbb{R}$ так, что $\varphi_t(x_0) < \beta < \alpha$, и заметим, что множество $K := \rho^{-1}(\beta) \subset X_\alpha$ компактно. Выберем далее такую возрастающую выпуклую функцию χ на $\mathbb{R}$, что

$$\chi(\rho(x_0)) < \varphi_t(x_0), \quad \chi(\beta) > \|\varphi_t\|_K.$$

Наконец, определим функцию $\psi_t: X \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\psi_t(x) := \begin{cases} \max(\varphi_t(x), \chi \circ \rho(x)), & \rho(x) \leq \beta, \\ \chi \circ \rho(x), & \rho(x) \geq \beta. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что ψ_t непрерывна, плюрисубгармонична и совпадает с φ_t в некоторой окрестности точки x_0 . Следовательно, можно вычислить

$$\xi\varphi(x_t) = \frac{d}{ds} \Big|_t \varphi(\Phi_s^\xi(x_0)) = \xi\varphi_t(x_0) = \xi\psi_t(x_0) = 0,$$

так как $\xi_{x_0} = \gamma'(0) \in C(X)$. Отсюда мы видим, что $\gamma'(t) \in C(X)$ для всех $t \in U$, достаточно близких к 0, чем и доказана первая часть леммы.

Если исчерпывающая функция ρ гладкая, то в приведенном рассуждении можно взять $\varphi = \rho$. Тогда получаем, что множество $\gamma(U)$ лежит в слое функции ρ и, следовательно, является относительно компактным.

§ 3. Формулировка основной теоремы

Фиксируем числа $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $0 < |a_1| \leq |a_2| < 1$. Автоморфизм

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad (z_1, z_2) \mapsto (a_1 z_1, a_2 z_2),$$

порождает свободное собственное действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. По определению компактная комплексная поверхность $H_a := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$, отвечающая паре $a = (a_1, a_2)$, называется *примарной поверхностью Хопфа*. Обозначим $[z_1, z_2] := \pi(z_1, z_2)$, где $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow H_a$ – отображение факторизации.

Голоморфное действие тора $T = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ на H_a имеет три орбиты. А именно, можно записать

$$H_a = E_1 \cup H_a^* \cup E_2,$$

где $H_a^* := (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{Z}$ – открытая T -орбита, а $E_1 := (\mathbb{C}^* \times \{0\})/\mathbb{Z} = T \cdot [1, 0]$ и $E_2 := (\{0\} \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{Z} = T \cdot [0, 1]$ – эллиптические кривые.

Заметим, что множество H_a^* является связной абелевой комплексной группой Ли и, следовательно, может быть записано в виде $\mathbb{C}^2/\Gamma_3$, где Γ_3 – дискретная подгруппа ранга 3 в $\mathbb{C}^2$. Отображение $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma_3 \cong H_a^*$ задает универсальное накрытие группы H_a^* . Обозначим вещественную линейную оболочку множества Γ_3 через V и положим $W := V \cap iV$. Тогда возможны два случая: либо множество $p(W)$ плотно в $V/\Gamma_3 \cong (S^1)^3$, либо оно замкнуто и,

следовательно, компактно, а тогда совпадает с некоторой эллиптической кривой E . В первом случае имеем $\mathcal{O}(H_a^*) = \mathbb{C}$, т. е. H_a^* является группой Кузена, а во втором случае $H_a^* \cong \mathbb{C}^* \times E$.

Следующий результат установлен в [4, § V.18].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Открытая орбита H_a^* не кузенова тогда и только тогда, когда $a_1^{k_1} = a_2^{k_2}$ для некоторых взаимно простых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если существуют взаимно простые целые числа k_1, k_2 такие, что $a_1^{k_1} = a_2^{k_2}$, то имеем эллиптическое слоение

$$H_a \rightarrow \mathbb{P}_1, \quad [z_1, z_2] \mapsto [z_1^{k_1} : z_2^{k_2}].$$

Его общий слой есть эллиптическая кривая $E = \mathbb{C}^*/(z \sim cz)$, где $c := a_1^{k_1} = a_2^{k_2}$. Отметим, что для пары $a = (a_1, a_2)$ общего положения открытое подмножество H_a^* является группой Кузена.

Допустим, что орбита H_a^* кузенова, и обозначим через $\xi \in \mathfrak{t}$ образующую относительно компактной однопараметрической подгруппы $p(W)$. Пусть ξ_{H_a} – голоморфное векторное поле, индуцированное действием T на H_a . Непосредственно проверяется, что поле ξ_{H_a} не имеет нулей на H_a и, следовательно, задает голоморфное слоение на H_a . Заметим, что открытое подмножество H_a^* содержит вместе с каждой точкой $p \in H_a^*$ слой $F \in \mathcal{F}$, проходящий через p , и что слои сужения $\mathcal{F}|_{H_a^*}$ относительно компактны в H_a^* . Замыкание каждого слоя $F \subset H_a^*$ в H_a^* является компактной гладкой леви-плоской гиперповерхностью. Фактически эти гиперповерхности суть слои плюригармонической функции

$$[z_1, z_2] \mapsto \frac{\log |z_1|}{\log |a_1|} - \frac{\log |z_2|}{\log |a_2|}$$

на H_a^* (см. [1]). Если H_a – эллиптическая поверхность, то она слоится на эллиптические кривые, причем множество H_a^* опять содержит вместе с каждой точкой слой, проходящий через эту точку, и слои компактны в H_a^* . Таким образом, всегда получаем голоморфное слоение $\mathcal{F}$ (с особенностями) множества H_a такое, что слои $\mathcal{F}|_{H_a^*}$ относительно компактны в H_a^* .

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть H_a – примарная поверхность Хопфа, а $D \subset H_a$ – псевдовыпуклая область. Если D не штейнова, то D содержит вместе с каждой точкой $p \in D$ топологическое замыкание $\overline{F}_p$ слоя $F \in \mathcal{F}$, проходящего через p .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Для локально псевдовыпуклых областей с гладкой вещественно-аналитической границей этот результат был получен Н. Левенбергом и Х. Ямагучи с помощью теории s -робеновских функций (см. [1]).

§ 4. Существование плюрисубгармонических исчерпаний

В этом параграфе будет показано, что всякая гладко ограниченная локально псевдовыпуклая область $D \subset H_a$ допускает непрерывную плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию. Для этого мы модифицируем доказательство Хиршовица теоремы 2.1 из [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть область $D \subset H_a$ локально псевдовыпукла и ни E_1 , ни E_2 не являются компонентами ∂D . Тогда D допускает непрерывную плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Условия предложения 4.1 выполнены для локально псевдовыпуклых гладко ограниченных областей D . Поэтому теорема 3.3 действительно обобщает основной результат работы [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Множество

$$\Omega := \{(x, \xi) \in D \times \mathfrak{t}; \exp(\xi) \cdot x \in D\}$$

по определению открыто в $D \times \mathfrak{t}$ и содержит $D \times \{0\}$. Из локальной псевдовыпуклости D в H_a вытекает, что Ω локально псевдовыпукло в $D \times \mathfrak{t}$.

Определим расстояние до границы $d: D \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ по формуле

$$d(x) := \sup\{r > 0; \{x\} \times B_r(0) \subset \Omega\}.$$

Элементарно проверяется, что функция d полунепрерывна снизу. В силу локальной псевдовыпуклости Ω в $D \times T$ каждая точка $x \in \bar{D}$ имеет открытую штейнову окрестность U такую, что множество $\Omega \cap (U \times \mathfrak{t})$ псевдовыпукло. По результату Лелона [5, теорема 2.4.2] функция $-\log d$ плюрисубгармонична на $U \cap D$ и, следовательно, всюду на D .

Заметим, что $-\log d \equiv -\infty$ в том и только в том случае, когда D содержит H_a^* . Поскольку ни E_1 , ни E_2 не являются компонентами ∂D , отсюда вытекает равенство $D = H_a$, так что этот случай можно далее не рассматривать.

Для каждой точки $x \in H_a$ орбитальное отображение $\mathfrak{t} \rightarrow T \cdot x$, $\xi \mapsto \exp(\xi) \cdot x$, открыто и имеет образ $T \cdot x$. Значит, $-\log d(x)$ стремится к бесконечности, когда x стремится к какой-либо точке из ∂D . Поскольку граница ∂D компактна, отсюда вытекает, что $-\log d$ есть исчерпывающая функция.

В заключение доказательства напрямую проверяется, что функция d полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in D$, для которой $d(x) \neq \infty$. Поэтому для любой константы $C > 0$ функция $\sup(C, -\log d)$ задает непрерывное плюрисубгармоническое исчерпание области D .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из доказательства предложения 4.1 видно, что полярное множество $\{-\log d = -\infty\}$ непусто тогда и только тогда, когда D содержит E_1 или E_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. К. Дидерих и Э. Форнесс [6] построили относительно компактную псевдовыпуклую область с гладкой вещественно-аналитической границей в некотором $\mathbb{P}_1$ -расслоении над поверхностью Хопфа, не допускающую исчерпания псевдовыпуклыми подобластями.

§ 5. Доказательство теоремы 3.3

Начнем со следующего простого, но важного наблюдения.

ЛЕММА 5.1. *Область H_a^* допускает гладкую плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию. В частности, если область $D \subset H_a$ псевдовыпукла, то $D^* := D \cap H_a^*$ также псевдовыпукла.*

Если H_a^* – группа Кузена, то лемма 5.1 вытекает из [7, предложение 2.4]. Если H_a^* не является группой Кузена, то $H_a^* \cong \mathbb{C}^* \times E$, очевидно, имеет гладкое плюрисубгармоническое исчерпание.

Пусть $D \subset H_a$ – псевдовыпуклая, но не штейнова область. Если псевдовыпуклая область $D^* \subset H_a^*$ не штейнова, то топологическое замыкание каждого пересекающегося с D^* слоя $F \in \mathcal{F}|_{H_a^*}$ содержится в D^* (см. [8, теорема 3.1]). Поскольку слои $\mathcal{F}$ – относительно компактные орбиты некоторой однопараметрической подгруппы тора T , из непрерывности действия $T \times H_a \rightarrow H_a$ вытекает, что для каждой точки $p \in D$ топологическое замыкание слоя, проходящего через p , содержится в D . Поэтому будем считать, что область $D^* \neq D$ штейнова. Для завершения доказательства теоремы 3.3 осталось показать, что тогда область D также штейнова.

Сначала заметим, что D не может содержать ни E_1 , ни E_2 , если D^* штейнова. Действительно, в силу отмеченной выше непрерывности слоев $\mathcal{F}$, если бы кривая E_1 содержалась в D , некоторые относительно компактные слои $\mathcal{F}$ лежали бы в D^* , вопреки предположению о штейновости D^* .

Рассмотрим подмножество $C(D) \subset \mathbb{P}TD$, определенное формулой (2.1), где $\pi: \mathbb{P}TD \rightarrow D$ – проективизированное касательное расслоение. Доказательство следующей леммы существенно использует явное описание структуры примарных поверхностей Хопфа.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $D \subset H_a$ – псевдовыпуклая область. Если область $D^* = D \cap H_a^*$ штейнова, то $\pi(C(D)) \subset D^* \setminus D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\pi(C(D))$ пересекается с D^* . Будучи абелевой комплексной группой Ли, H_a^* обладает биинвариантной мерой Хаара. Поэтому обычное рассуждение, использующее свертки, позволяет равномерно на компактах аппроксимировать непрерывную плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию области D такими гладкими функциями. Применяя лемму 2.4, мы получаем теперь существование комплексной однопараметрической подгруппы A в T и точки $x \in D^*$ таких, что множество $A \cdot x$ относительно компактно в D . Заметим, что это множество не является относительно компактным в области D^* , поскольку последняя предполагается штейновой.

Покажем, что замыкание такой кривой $A \cdot x$ в D (а значит, и сама область D) обязательно содержит E_1 или E_2 , что, как отмечалось выше, противоречит нашему предположению о штейновости D^* . Для этого запишем

$$A = \{(e^{tz_1}, e^{tz_2}); t \in \mathbb{C}\}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

Если $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$, то непосредственно видно, что замыкание множества $A \cdot x$ содержит E_2 или E_1 . Поэтому будем считать, что $z_1, z_2 \neq 0$. Если $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$, то уже замыкание A в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ содержит $\{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$, так что замыкание множества $A \cdot x$ в D содержит $E_1 \cup E_2$. Осталось разобрать случай, когда

$$A = \{(e^t, e^{\lambda t}); t \in \mathbb{C}\}, \quad \lambda = \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}.$$

Зададим гладкое отображение $\pi_A: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ формулой

$$\pi_A(w_1, w_2) := \frac{|w_1|^\lambda}{|w_2|}.$$

Замыкание $\bar{A}$ множества A в $T = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ содержится в ядре отображения π_A . Поскольку множество $\bar{A} \cdot x$ замкнуто и некомпактно в D^* , мы заключаем, что мультипликативная группа, порожденная $\pi_A(a_1, a_2) = \frac{|a_1|^\lambda}{|a_2|}$, замкнута и некомпактна в $\mathbb{R}^{>0}$. Иными словами, имеем $|a_1|^\lambda \neq |a_2|$. Выберем теперь $t_m \in \mathbb{C}$ так, что $a_1^m e^{t_m} = c$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$|a_2^m e^{\lambda t_m}| = \left(\frac{|a_2|}{|a_1|^\lambda} \right)^m |c|^\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{|a_2|}{|a_1|^\lambda} \neq 1,$$

мы видим, что последовательность $(a_2^m e^{\lambda t_m})$ сходится к нулю при $m \rightarrow +\infty$ или $m \rightarrow -\infty$. Отсюда вытекает, что и в этом случае замыкание множества $A \cdot x$ в D содержит E_1 или E_2 . Лемма доказана.

Объединяя леммы 5.2, 2.3, мы получаем существование такой плюрисубгармонической функции φ на D , которая строго плюрисубгармонична на D^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Согласно [9] (см. формулировку в [10, п. I.5.E]) можно, не теряя общности, считать функцию φ гладкой на D^* .

Как сказано выше, D не может содержать ни E_1 , ни E_2 . Поэтому $D \cap E_1$ и $D \cap E_2$ – замкнутые штейновы подмногообразия в D . Тогда из следующей леммы вытекает штейновость D , чем и завершается доказательство теоремы 3.3.

ЛЕММА 5.4. Пусть X – связное комплексное многообразие, снабженное плюрисубгармонической исчерпывающей функцией φ . Допустим, что в X существует замкнутое штейново подмногообразие A с конечным числом связных компонент такое, что φ строго плюрисубгармонична на $X \setminus A$. Тогда многообразие X штейново.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $X_\alpha := \{\varphi < \alpha\}$. В качестве первого шага докажем штейновость X_n для всех $n \geq 1$.

Поскольку A штейново, каждое множество $A_n := A \cap X_n$ является замкнутым штейновым подмногообразием в X_n . Согласно работе [11] найдется открытая штейнова окрестность U_{n+1} множества A_{n+1} в X_{n+1} . Тем самым, существует строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция ψ_{n+1} на U_{n+1} . Возьмем произвольную относительно компактную открытую окрестность V_n множества A_n в U_{n+1} , а также срезающую функцию χ_{n+1} , тождественно равную 1 на V_n и обращающуюся в нуль всюду вблизи ∂U_{n+1} . Тогда функция $\chi_{n+1}\psi_{n+1}: X \rightarrow \mathbb{R}$ строго плюрисубгармонична в окрестности множества A_n и ее форма Леви равномерно ограничена снизу на X_n . Обозначим также через ρ_n плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию на X_n , которая строго плюрисубгармонична и гладка на $X_n \setminus A_n$. Тогда для достаточно больших k функция $\chi_{n+1}\psi_{n+1}|_{X_n} + ke^{\rho_n}$ будет гладкой и строго плюрисубгармонической исчерпывающей функцией на X_n . Поэтому X_n штейново.

Теперь, зная, что X_n штейновы, мы можем применить следствие 1 из работы [12], согласно которому X_{n-1} является областью Рунге в X_n при каждом $n \geq 2$. Тогда $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ — исчерпание Рунге многообразия X штейновыми относительно компактными открытыми подмножествами. Отсюда вытекает штейновость X (см. [13, теорема VII.A.10]). Лемма доказана.

Список литературы

1. N. Levenberg, H. Yamaguchi, *Pseudoconvex domains in the Hopf surface*, [arXiv: 1205.3346](#).
2. A. Hirschowitz, “Pseudoconvexité au-dessus d’espaces plus ou moins homogènes”, *Invent. Math.*, **26**:4 (1974), 303–322.
3. A. Hirschowitz, “Le problème de Lévi pour les espaces homogènes”, *Bull. Soc. Math. France*, **103**:2 (1975), 191–201.
4. W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+436 pp.
5. P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)* (Été, 1967), Séminaire de mathématiques supérieures, **28**, Les Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Que., 1968, 298 pp.
6. K. Diederich, J. E. Fornæss, “A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion”, *Manuscripta Math.*, **39**:1 (1982), 119–123.
7. A. T. Huckleberry, “Remarks on homogeneous complex manifolds satisfying Levi conditions”, *Boll. Unione Mat. Ital.* (9), **3**:1 (2010), 1–23.
8. B. Gilligan, C. Miebach, K. Oeljeklaus, “Pseudoconvex domains spread over complex homogeneous manifolds”, *Manuscripta Math.*, **142**:1-2 (2013), 35–59.
9. R. Richberg, “Stetige streng pseudokonvexe Funktionen”, *Math. Ann.*, **175**:4 (1968), 257–286.
10. J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, 2012, 455 pp., <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.

11. Yum Tong Siu, “Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood”, *Invent. Math.*, **38**:1 (1976/77), 89–100.
12. R. Narasimhan, “The Levi problem for complex spaces. II”, *Math. Ann.*, **146**:3 (1962), 195–216.
13. Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969, 395 с.; пер. с англ.: R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, xiv+317 pp.

ХРИСТИАН МИБАХ
(CHRISTIAN MIEBACH)
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées,
Université du Littoral Côte d’Opale, France
E-mail: miebach@lmpa.univ-littoral.fr

Поступило в редакцию
24.06.2013

Перевод с английского А. В. Домрина