Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, Уравнение Лиувилля как уравнение Шрёдингера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 4, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:01:31

УДК 517.43

В. В. Козлов

Уравнение Лиувилля как уравнение Шрёдингера

Показано, что неотрицательное решение уравнения Лиувилля для произвольной (не только гамильтоновой) динамической системы допускает факторизацию $\psi\psi^*$, причем ψ удовлетворяет уравнению Шрёдингера некоторого специального вида. Соответствующая квантовая система есть результат квантования по Вейлю гамильтоновой системы с линейным по импульсам гамильтонианом. Обсуждается строение спектра уравнения Шрёдингера специального вида на многомерном торе. Показано, что в аналитическом случае собственные функции могут иметь лишь конечную гладкость. Найденные обобщенные решения уравнения Шрёдингера дают естественные примеры несамосопряженных расширений эрмитовых дифференциальных операторов. Указаны условия существования гладкой инвариантной меры динамической системы, выраженные через условия устойчивости сопряженных уравнений в вариациях.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: квантование по Вейлю, эрмитов оператор, несамосопряженное расширение, инвариантное многообразие, инвариантная мера.

DOI: 10.4213/im8143

1. Факторизация плотности и квантование по Вейлю. Обсудим круг вопросов, связанных с квантованием динамических систем общего вида. Сначала напомним одно давнее наблюдение, восходящее к Лиувиллю: любую замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно представить как часть некоторой системы дифференциальных уравнений Гамильтона. Более точно это означает следующее.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M; \quad (1.1)$$

гладкое многообразие M^n – ее фазовое пространство. Пусть $\Gamma = T^*M$; локальные координаты на Γ – это $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, где y – ковекторы на M – элементы из кокасательной плоскости T_x^*M . Пространство Γ снабжено естественной симплектической структурой

$$\sum_{k=1}^n dy_k \wedge dx_k.$$

Введем функцию Гамильтона

$$H = y \cdot v = \sum_{j=1}^n y_j v_j(x). \quad (1.2)$$

Функция H инвариантно определена: это значение ковектора y в точке $x \in M$ на векторе $v(x)$. Соответствующие дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = v(x), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T y \quad (1.3)$$

имеют инвариантное многообразие $\{(x, y) \in \Gamma: y = 0\}$, диффеоморфное M , и ограничение этих уравнений на M , очевидно, совпадает с исходной системой (1.1). Отметим, что вторая группа уравнений (1.3) имеет смысл линейной системы, сопряженной к системе уравнений в вариациях для системы (1.1).

Каноническую гамильтонову систему с гамильтонианом (1.2) можно квантовать по обычному правилу: координаты x_j заменяются операторами умножения на x_j , а импульсы y_j – на операторы дифференцирования

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

После этого гамильтониан H переходит в дифференциальный оператор $\hat{H}$ (оператор Гамильтона), который определяет эволюцию квантовой системы:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (1.4)$$

Как известно, операторы умножения и дифференцирования не коммутируют, что приводит к общей проблеме квантования гамильтоновых систем (см., например, [1]). В нашем случае имеются два “последовательных” подхода к квантованию. В первом из них мы сначала умножаем на функции v_j , а затем дифференцируем. Во втором – сначала применяем оператор дифференцирования, а потом умножаем на компоненты векторного поля v . Конечно, возможны и промежуточные варианты, когда порядок операций умножения и дифференцирования по различным координатам разный. Однако такой подход нельзя признать последовательным, поскольку он приводит к уравнениям, неинвариантным относительно замен переменных.

В первом случае уравнение Шрёдингера (1.4) принимает вид уравнения Лиувилля (уравнения неразрывности)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi v) = 0, \quad (1.5)$$

во втором получаем уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0, \quad (1.6)$$

определяющее законы сохранения – первые интегралы динамической системы (1.1).

Оба уравнения (1.5) и (1.6) сохраняют свой вид при заменах переменных $x_1, \dots, x_n$. Отметим, что в эти уравнения не входит постоянная Планка $\hbar$ и оба уравнения имеют вещественную форму, хотя волновая функция ψ , конечно, комплекснозначная. Уравнения (1.5) и (1.6) совпадают, если исходная система (1.1) бездивергентная ($\operatorname{div} v = 0$).

Однако ни один из этих двух подходов нельзя признать правильным, поскольку каждый из дифференциальных операторов Гамильтона

$$-i\hbar \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi v_j)}{\partial x_j}, \quad -i\hbar \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

в общем случае не является симметрическим (эрмитовым) оператором. Их полусумма

$$\hat{H} = -\frac{i\hbar}{2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi v_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right] \quad (1.8)$$

есть эрмитов оператор

$$\int_M (\hat{H}\psi_1) \cdot \psi_2^* d^n x = \int_M \psi_1 \cdot (\hat{H}\psi_2)^* d^n x$$

для всех комплекснозначных функций ψ_1, ψ_2 на M . Для линейных дифференциальных операторов произвольного порядка этот круг вопросов обсуждается, например, в [2]. Поскольку в квантовой механике наблюдаемые операторы (в первую очередь, оператор Гамильтона) должны быть эрмитовыми, вместо уравнений (1.5) и (1.6) из (1.8) выводим уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial(\psi v_j)}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (1.9)$$

Соответствие $H \mapsto \hat{H}$, где дифференциальный оператор $\hat{H}$ определяется формулой (1.8), есть квантование по Вейлю.

Поскольку оператор (1.8) эрмитов, то

$$\int_M \psi\psi^* d^n x \quad (1.10)$$

не зависит от времени. Впрочем, постоянство этого интеграла легко выводится непосредственно из уравнения (1.9). В квантовой механике рассматриваются только такие волновые функции, для которых интеграл (1.10) равен единице. Поэтому произведение

$$\rho = \psi\psi^* \quad (1.11)$$

имеет смысл плотности распределения вероятностей ($\rho \geq 0$ и интеграл от ρ по всему фазовому пространству равен 1).

ТЕОРЕМА 1. *Произведение $\rho = \psi\psi^*$ удовлетворяет уравнению Лиувилля*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением с использованием уравнения (1.9).

Таким образом, каждое неотрицательное решение уравнения Лиувилля допускает факторизацию (1.11), причем каждый из сомножителей удовлетворяет

уравнению (1.9). Представление (1.11) не единственно: если ρ – положительное решение уравнения неразрывности (1.5), то функции

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\alpha}, \quad \psi^* = \sqrt{\rho} e^{-i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

удовлетворяют (1.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для бездивергентных динамических систем (1.1) (например, гамильтоновых) хорошо известен следующий прием: после умножения уравнения (1.5) (или (1.6)) на мнимую единицу получаем уравнение шрёдингеровского типа с эрмитовым дифференциальным оператором (см., например, [3], [4]). Наше наблюдение состоит в том, что деквантование такой системы приводит к гамильтоновой системе с линейным по импульсам гамильтонианом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Динамика систем с гироскопическими силами описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона с гамильтонианом в виде суммы $H_2 + H_1 + H_0$, где H_j – однородный полином по импульсам степени j . Сюда, в частности, относится задача о нерелятивистской частице в заданном магнитном поле. Пусть потенциальная энергия H_0 сводится к константе, а в некоторой области фазового пространства гироскопическое слагаемое H_1 превалирует над кинетической энергией. Тогда уравнение Шрёдингера можно заменить приближенным уравнением вида (1.9). В частности, это касается движения заряженной частицы в очень сильном магнитном поле.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не исключено, что квантование линейных по импульсам гамильтонианов может дать эрмитовы операторы, спектр которых совпадает с нетривиальными нулями дзета-функции Римана. В работе [5] эта идея обсуждается применительно к классическому гамильтониану

$$H = xy.$$

Однако здесь еще предполагается, что координата x и сопряженный импульс y ограничены некоторыми константами. Поэтому в действительности соответствующие классическая и квантовая системы будут нелинейными.

Для бездивергентных векторных полей (когда $\operatorname{div} v = 0$) уравнение Шрёдингера совпадает с каждым из уравнений (1.5) и (1.6). Уравнения (1.5), (1.6) и уравнение (1.9) по сути эквивалентны и в более общем случае, когда динамическая система (1.1) допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью ($\operatorname{div}(\rho v) = 0$, $\rho > 0$). Например, если ψ – первый интеграл, то $\rho\psi$ удовлетворяет уравнению Лиувилля, а если ψ – решение уравнения Лиувилля, то $\psi/\sqrt{\rho}$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера, и т. д.

Эти наблюдения можно выразить иначе. Если система (1.1) допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью, то всё M можно покрыть набором локальных карт так, что:

- 1) в пределах каждой карты $\operatorname{div} v = 0$;
- 2) якобиан преобразования локальных координат при переходе от карты к карте – ненулевая константа.

2. О гладкости собственных функций. Хорошо известно, что собственные значения эрмитова оператора с *гладкими* собственными функциями на компактном многообразии могут быть только вещественными. Следовательно, стационарные состояния квантовой системы будем искать в виде

$$\psi = e^{-i\lambda t} \psi_0(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Это является решением уравнения (1.8). Поэтому функция ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial(\psi_0 v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_j} v_j \right] = 2\lambda i \psi_0. \quad (2.1)$$

Покажем, что для *аналитического* векторного поля v на аналитическом компактном многообразии M решения (2.1) могут иметь лишь конечную гладкость.

В качестве примера рассмотрим систему (1.1) на n -мерном торе $M = \mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$ следующего вида:

$$\dot{x}_j = \frac{\omega_j}{F}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.2)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_n$ – постоянные рационально независимые частоты, $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – вещественно-аналитическая положительная функция. К такому виду приводятся системы на двумерном торе с интегральным инвариантом, а также системы на многомерных торах с полным набором многозначных интегралов (см. работы [6], [7] и имеющиеся в них ссылки).

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$\psi_0 = A e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}, \quad (2.3)$$

где k_j – наперед заданные целые числа, а $A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ – однозначная функция без нулей. После подстановки (2.3) в уравнение (2.1) и простых преобразований приходим к соотношению

$$i \sum_{j=1}^n k_j \omega_j + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\omega_j}{A} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{\omega_j}{2F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right] = \lambda i F.$$

Усредняя обе части равенства по n -мерному тору и учитывая, что $\ln A$ – однозначная функция на $\mathbb{T}^n$, получаем следующую формулу для спектра оператора Гамильтона (1.8):

$$\lambda = \frac{\sum k_j \omega_j}{\langle F \rangle}, \quad \langle F \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F d^n x > 0. \quad (2.4)$$

Отметим, что частоты $\omega_j / \langle F \rangle$, $1 \leq j \leq n$, получаются из правых частей системы (2.2) после применения операции усреднения

$$(\cdot) \mapsto \int_{\mathbb{T}^n} (\cdot) F d^n x \bigg/ \int_{\mathbb{T}^n} F d^n x.$$

Это инвариантное определение усреднения системы по инвариантной мере $d\mu = F d^n x$. Таким образом, спектр оператора (1.8) состоит из целочисленных комбинаций “частот” исходной динамической системы (2.2). В типичной ситуации этот спектр всюду плотно заполняет всю числовую ось.

Полагая далее

$$A = \sqrt{F} e^{i\Phi},$$

получаем для функции Φ линейное уравнение в частных производных

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \lambda(F - \langle F \rangle). \quad (2.5)$$

Пусть

$$F = \sum F_m e^{i(m,x)}, \quad F_0 = \langle F \rangle, \quad \Phi = \sum \Phi_m e^{i(m,x)}$$

– ряды Фурье вещественных периодических функций на торе. Из (2.5) получим формулу для коэффициентов Фурье искомой функции Φ :

$$\Phi_m = \frac{(k, \omega) F_m}{\langle F \rangle(m, \omega)}, \quad m \neq 0.$$

Пусть F аналитична и все ее коэффициенты Фурье F_m отличны от нуля; они экспоненциально быстро стремятся к нулю при $|m| \rightarrow \infty$. Хорошо известно, что всегда можно так подобрать рационально независимые частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$, что отношение $F_m/(m, \omega)$ будет убывать по степенному закону (как коэффициенты Фурье функции из $C^s(\mathbb{T}^n)$, $s \geq 1$, но не из $C^{s+1}(\mathbb{T}^n)$).

3. О собственных значениях дифференциального оператора на торе. Рассмотрим динамическую систему (1.1) на n -мерном торе ($M = \mathbb{T}^n$). Предположим, что она допускает интегральный инвариант (инвариантную меру) с гладкой плотностью F :

$$\operatorname{div}(Fv) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(Fv_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.1)$$

Оказывается, в этом случае можно так подобрать угловые переменные $x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi$, что в этих переменных инвариантная мера будет иметь вид $d\mu = \langle F \rangle d^n x$. Это следствие общей теоремы Мозера о формах объема на замкнутых многообразиях [8]. Простое доказательство теоремы Мозера для случая тора содержится в работе [9].

В частности, в новых переменных система (1.1) будет бездивергентной, и поэтому все три дифференциальных оператора (1.7) и (1.8) будут совпадать. Спектр линейного дифференциального оператора, конечно, не зависит от выбора угловых переменных на $\mathbb{T}^n$. Поэтому (без ущерба для общности) мы рассмотрим второй оператор (1.7), связанный с уравнением (1.6). Будем искать его решение в виде

$$\psi = e^{-i\lambda t} e^{i(k,x)} A, \quad A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}.$$

Для функции A получаем уравнение

$$i\lambda A = i(k, v) A + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A}{\partial x_j} v_j. \quad (3.2)$$

Если однозначная функция A не имеет нулей на $\mathbb{T}^n$, то (3.2) (с учетом (3.1)) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda F = (k, v)F - i \sum_{j=1}^n \frac{\partial(F v_j \ln A)}{\partial x_j}.$$

Усредняя обе части равенства по n -мерному тору, получим следующую формулу для *возможных* собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda &= (k, \langle v \rangle), \quad \langle v \rangle = (\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle), \\ \langle v_j \rangle &= \int v_j F d^n x \Big/ \int F d^n x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формула (3.3), очевидно, обобщает формулу (2.4). Если средние значения $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ рационально несоизмеримы, то собственные значения (3.3) различны при разных наборах целых чисел $k_1, \dots, k_n$.

Вопрос о наличии гладкой собственной функции с собственным значением из набора (3.3) более сложный. Например, для системы (2.2) он сводится к задаче о разрешимости уравнения (2.5). Для сильно несоизмеримых наборов частот $\omega_1, \dots, \omega_n$ уравнение (2.5) всегда имеет гладкое решение, но в этом случае исходная система (2.2) приводится к системе с постоянными правыми частями

$$\dot{x}_j = \frac{\omega_j}{\langle F \rangle}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.4)$$

Согласно эргодической теореме Биркгофа, для почти всех $x \in \mathbb{T}^n$ каждое решение уравнения (1.6) сходится по Чезаро при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ к *одной и той же* функции – первому интегралу системы (1.1). Этот результат можно интерпретировать в рамках обсуждаемого круга вопросов следующим образом.

После усреднения по времени слагаемое

$$e^{-i\lambda t} \psi_0(x) \quad (3.5)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, если $\lambda \neq 0$. В частности, состояния статистического равновесия по Гиббсу системы с инвариантной мерой в прошлом и будущем совпадают (обсуждение см. в [10]).

Ситуация резко меняется, когда динамическая система (1.1) не допускает инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно обычной меры Лебега на M (порожденной некоторой римановой метрикой). В этом случае слабые пределы вероятностных распределений с гладкой начальной плотностью при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, как правило, не совпадают. Более того, в общем случае инвариантные меры будут сингулярными (их плотности – обобщенные функции).

Это можно проиллюстрировать на примере уравнения (1.9): оно имеет обобщенное решение вида (3.5), но при этом λ будет чисто мнимым. Такое свойство на первый взгляд кажется парадоксальным, поскольку λ – собственное значение эрмитова оператора (1.8).

Продемонстрируем это на примере дифференциального уравнения на окружности

$$\dot{x} = \sin x, \quad x \in \mathbb{T}^1. \quad (3.6)$$

Оно имеет два равновесия: $x = 0$ и $x = \pi$. Первое из них неустойчиво, а второе асимптотически устойчиво. Уравнение (1.9) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\psi \sin x)}{\partial x} + \sin x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.7)$$

Подстановка (3.5) дает следующее уравнение для функции ψ_0 :

$$2i\lambda\psi_0 = \frac{\partial(\psi_0 \sin x)}{\partial x} + \sin x \frac{\partial \psi_0}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Пусть $\sum \psi_s e^{isx}$ – ряд Фурье функции ψ_0 . Из (3.8) получаем соотношение для коэффициентов Фурье

$$2i\lambda\psi_s = \frac{2s+1}{2} \psi_{s+1} - \frac{2s-1}{2} \psi_{s-1}.$$

Оно допускает решение $\psi_s = \text{const}$, если положить $\lambda = -i/2$. Следовательно, уравнение (3.7) имеет *обобщенное* решение

$$\psi = e^{t/2} \delta(x), \quad (3.9)$$

где $\delta(x)$ – 2π -периодическая δ -функция Дирака. Аналогично получаем еще одно обобщенное решение

$$\psi = e^{-t/2} \delta(x - \pi). \quad (3.10)$$

Их линейная комбинация также удовлетворяет (3.7).

Решения (3.9) и (3.10) вещественные. Их квадраты должны удовлетворять уравнению Лиувилля для динамической системы (3.6). Однако произведение δ -функций корректно не определено, и поэтому решения уравнения Лиувилля следует изучать независимо. Пусть ρ_0 – гладкая начальная вероятностная плотность распределения на $\mathbb{T}^1$. Тогда решение уравнения Лиувилля с начальным условием ρ_0 при $t \rightarrow +\infty$ слабо сходится к $\delta(x - \pi)$, а при $t \rightarrow -\infty$ – к $\delta(x)$. Как и следовало ожидать, эти пределы не совпадают.

4. О несамосопряженных расширениях эрмитовых дифференциальных операторов. Как мы уже видели, уравнение (2.1) может иметь решение $\psi_0: M \rightarrow \mathbb{C}$ лишь конечного (наперед заданного) класса гладкости (даже если M – замкнутое многообразие с аналитической структурой и v – аналитическое векторное поле на M). Поэтому наряду с гладкими собственными функциями целесообразно рассматривать и негладкие (обобщенные) решения уравнения (2.1). Для бездивергентных векторных полей эта задача хорошо изучена (см., например, [4]). Имеется полный ортонормированный набор обобщенных собственных функций, по которым можно разложить решения уравнения (1.9) (и эквивалентных ему уравнений (1.5) и (1.6)). Мы рассмотрим случай, когда $\text{div } v \neq 0$, и обобщим формулы (3.9) и (3.10).

Пусть N – замкнутое m -мерное *инвариантное* многообразие динамической системы (1.1). В окрестности этого многообразия так выберем локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ на M , чтобы N задавалось уравнениями

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0.$$

Таким образом, $x_1, \dots, x_{n-1}$ – локальные координаты на N . Ввиду предположения инвариантности поле v касается N . Следовательно,

$$v_{m+1}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \dots = v_n(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть $\tilde{v}$ – ограничение векторного поля v на инвариантное многообразие N . Оно имеет компоненты

$$v_1(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad v_m(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Предположим, что ограничение динамической системы (1.1) на N имеет инвариантную меру $d\nu$ с гладкой положительной плотностью. Другими словами, в подходящих локальных координатах $x_1, \dots, x_m$ на N поле $\tilde{v}$ бездивергентное (а инвариантной мерой $d\nu$ служит элемент объема $d^m x = dx_1 \dots dx_m$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $i\Lambda$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, – собственное значение, а $\varphi: N \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывно дифференцируемая собственная функция оператора дифференцирования вдоль векторного поля $\tilde{v}$, не имеющая нулей. Тогда уравнения (1.5), (1.6) и уравнение (1.9) имеют обобщенное решение вида

$$\psi = e^{i\lambda t} \psi_0(x),$$

где

$$i\lambda = i\Lambda + \varkappa, \quad \varkappa = \frac{\alpha}{\text{vol } N} \int_N \text{div } v \, d\nu, \quad (4.2)$$

$$\psi_0(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_m) \delta(x_{m+1}) \dots \delta(x_n), \quad (4.3)$$

$\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, а $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 1$ для уравнений (1.5), (1.9) и (1.6) соответственно.

Положения равновесия системы (1.1) – это нульмерные инвариантные множества. В этом случае $\varkappa/\alpha$ совпадает с дивергенцией векторного поля v , вычисленной в положении равновесия. Из формул (4.2) и (4.3) сразу же выводятся формулы (3.9) и (3.10).

Если $\varkappa \neq 0$, то λ (собственное значение оператора Гамильтона) будет комплексным. Таким образом, теорема 2 дает естественные примеры несамосопряженных расширений эрмитовых дифференциальных операторов. Равенство $\varkappa = 0$ тесно связано с условием существования гладкой инвариантной меры для исходной динамической системы (1.1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть система дифференциальных уравнений (1.1) допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью. Тогда

$$\int_N \text{div } v \, d\nu = 0. \quad (4.4)$$

Показатель $\varkappa$ из формулы спектра (4.2) – важная характеристика устойчивости инвариантного многообразия. Действительно, если $\varkappa > 0$ ($\varkappa < 0$) и сопряженные уравнения в вариациях для замкнутого инвариантного многообразия N приводимы, то N неустойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow +\infty$ (соответственно, $t \rightarrow -\infty$). Если $\dim N = 0$ или $\dim N = 1$, то N приводимо

(в первом случае это тривиально, а для периодических траекторий – это теорема Флоке–Ляпунова). При $\dim N \geq 2$ свойство приводимости не всегда имеет место уже для многомерного тора (обсуждение и ссылки можно найти в [11]). Тем не менее остается интересным вопрос: будет ли N неустойчивым, если поток на N эргодичен и интеграл в (4.2) положителен?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Умножая уравнение (2.1) на пробную дифференцируемую функцию ω , носитель которой сосредоточен в окрестности инвариантного многообразия N , и интегрируя по частям, получим

$$i\lambda \int_M \psi_0 \omega d^n x - \frac{1}{2} \int_M \sum_{j=1}^n \left[\psi_0 v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \psi_0 \frac{\partial(\omega v_j)}{\partial x_j} \right] d^n x = 0.$$

После подстановки (4.3) в последнее равенство имеем

$$i\lambda \int_N \varphi \tilde{\omega} d^m x - \int_N \sum_{j=1}^m \varphi \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} d^m x - \frac{1}{2} \int_N \sum_{j=1}^m \varphi \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j} d^m x = 0. \quad (4.5)$$

Здесь $\tilde{\omega}$ – ограничение функции ω на многообразии N . При $j \leq m$ имеем

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}.$$

Функция $\varphi \neq 0$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tilde{v}_j = \Lambda \varphi.$$

Положим $\tilde{\omega} = \varphi^{-1}$. Эта функция удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \tilde{v}_j = -\Lambda \tilde{\omega}.$$

С учетом последнего уравнения из равенства (4.5) получаем искомое равенство для спектра (4.2). Аналогично доказываются соотношения (4.2) и (4.3) для уравнений (1.5) и (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ – плотность инвариантной меры

$$\operatorname{div}(\rho v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \rho \operatorname{div} v = 0.$$

Поскольку $\rho > 0$, то

$$\dot{\omega} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j} v_j = -\operatorname{div} v, \quad \omega = \ln \rho. \quad (4.6)$$

Пусть $t \mapsto x(t)$ – решение системы (1.1) с траекторией на N . Тогда из соотношения (4.6) имеем

$$\frac{\omega(x(t)) - \omega(x(0))}{t} = -\frac{1}{t} \int_0^t (\operatorname{div} v)_{x(s)} ds.$$

Так как N компактно, то функция $t \mapsto \omega(x(t))$ ограничена. Следовательно,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\operatorname{div} v)_{x(t)} dt = 0.$$

Применяя к ограничению динамической системы (1.1) на N эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина, приходим к равенству (4.4).

5. Инвариантные меры с гладкой плотностью. Согласно классической теореме Крылова–Боголюбова каждая динамическая система на компактном многообразии допускает инвариантную меру. Однако зачастую она сингулярна относительно меры Лебега на фазовом пространстве, порожденной какой-либо римановой метрикой. В п. 4 отмечены некоторые необходимые условия для существования инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. Ниже указаны достаточные условия, связанные с устойчивостью линейных уравнений в вариациях.

Уравнение в вариациях для системы (1.1) – это следующее линейное уравнение

$$\dot{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} \xi, \quad \xi \in T_x M. \quad (5.1)$$

С одной стороны, если

$$t \mapsto x(t) \quad (5.2)$$

– решение системы (1.1), то (5.1) будет классическим уравнением в вариациях для решения (5.2), если в матрице Якоби переменную x заменить функцией времени согласно (5.2).

С другой стороны, под решением системы (5.1) можно понимать функцию $\xi(t, x)$, $x \in M$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} v = \frac{\partial v}{\partial x} \xi. \quad (5.3)$$

В частности, поля симметрий $([\xi, v]=0)$ составляют стационарные решения уравнения (5.3). Напомним, что поле $\xi = v$ порождает тривиальную группу симметрий. Кроме того, если $\xi(x)$ – стационарное поле симметрий, то

$$t \mapsto \xi(x(t)),$$

где $x(\cdot)$ – решение (5.2), есть решение классического уравнения в вариациях.

Сопряженная к (5.1) линейная система есть

$$\dot{y} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^T y, \quad y \in T_x^* M. \quad (5.4)$$

Это второе уравнение гамильтоновой системы (1.3). Хорошо известно, что $y \cdot \xi$ не зависит от времени. Поскольку $\xi = v$ – решение уравнений в вариациях (5.3), то $y \cdot v = \text{const}$. Это замечание, конечно, есть частный случай общей теоремы о постоянстве стационарного гамильтониана на решениях соответствующей гамильтоновой системы.

Задачу об устойчивости линейных уравнений (5.4) можно решать с помощью функции Ляпунова

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (\Phi(x) y, y), \quad (5.5)$$

квадратичной по импульсам. Элементы матрицы Φ – гладкие функции от $x \in M$. Эта квадратичная форма положительно определена при всех x и

$$\dot{f} = 0,$$

где $\dot{f}$ – производная функции f в силу замкнутой системы уравнений (1.1) и (5.4). Предположим, что квадратичная форма (5.5) положительно определена и удовлетворяет более общему условию $\dot{f} \leq 0$. Тогда f – первый интеграл системы (1.1) и (5.4). Это замечание – простое следствие теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема. Кроме того, наличие такой функции Ляпунова гарантирует устойчивость и всех неавтономных линейных систем уравнений в вариациях

$$\dot{y} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x(t)}^T y.$$

Квадратичная форма

$$\frac{1}{2}(G\dot{x}, \dot{x}), \quad G = \Phi^{-1},$$

двойственная (5.5), задает риманову метрику $(G dx, dx)$ на M . Эта метрика определяет естественную меру

$$d\mu = \sqrt{|G|} d^n x \quad (5.6)$$

– риманов элемент объема M .

ТЕОРЕМА 4. Пусть равновесие $y = 0$ сопряженной системы (5.4) устойчиво по Ляпунову: существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы (5.5). Тогда динамическая система (1.1) допускает инвариантную меру (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\Phi(x)y, y)} d^n y. \quad (5.7)$$

Покажем сначала, что

$$\rho = c(\sqrt{|\Phi|})^{-1}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Для этого выполним линейную замену переменных

$$y = Ap, \quad A^T \Phi A = I,$$

где I – единичная матрица n -го порядка. Тогда

$$\rho = \int e^{-(p, p)} |A| d^n p = c|A| = c(\sqrt{|\Phi|})^{-1},$$

где

$$c = \int e^{-(p, p)} d^n p > 0.$$

Осталось доказать инвариантность меры (5.6). Мы это установим для меры c более общей плотностью

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) d^n y,$$

где F – интеграл полной системы дифференциальных уравнений (1.1) и (5.4). В рассматриваемом случае F совпадает с экспонентой в интеграле (5.7). Все проводимые ниже преобразования легко обосновать для плотности (5.7).

Поскольку F – первый интеграл, то

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} v_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^T y \right]_j = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по $\mathbb{R}^n = \{y\}$. После интегрирования первое слагаемое будет равно

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k, \quad (5.8)$$

а второе (после интегрирования по частям) –

$$\sum_{j=1}^n \int F \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d^n y = \rho \operatorname{div} v. \quad (5.9)$$

Суммируя (5.8) и (5.9), получим уравнение Лиувилля $\operatorname{div}(\rho v) = 0$, что и требовалось показать.

В заключение проиллюстрируем теорему 4 некоторыми простыми примерами.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 1$ и M совпадает с окружностью $\{x \bmod 2\pi\}$. Если поле v не имеет нулей, то в качестве функции Ляпунова можно принять положительно определенную квадратичную форму $(yv)^2$. Формула (5.7) дает гладкую плотность $c/v(x)$, c – ненулевая константа.

ПРИМЕР 2. Пусть M – группа Ли и v – правоинвариантное векторное поле на M . Тогда фазовый поток системы (1.1) будет семейством левых сдвигов на M . Все эти преобразования сохраняют любую левоинвариантную метрику на M , но тогда в качестве функции Ляпунова можно взять левоинвариантную метрику, представленную в канонических переменных x, y . Соответствующая инвариантная мера (5.6) – это левоинвариантная мера на группе M . Если группа M компактна, то инвариантная мера (5.6) будет совпадать с биинвариантной мерой Хаара.

ПРИМЕР 3. Предположим, что, кроме поля $u_1 = v$, имеется еще $n - 1$ касательных векторных полей

$$u_2, \dots, u_n, \quad (5.10)$$

которые коммутируют с полем v , и векторы $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы в каждой точке M . В этом случае линейные по импульсам функции $y \cdot u_1$ и $y \cdot u_j$ находятся в инволюции. Поэтому в качестве функции Ляпунова можно взять квадратичную форму

$$\sum_{j=1}^n (y \cdot u_j(x))^2.$$

Если M замкнуто и векторные поля (5.10) также коммутируют между собой, то M диффеоморфно n -мерному тору и в некоторых угловых координатах компоненты векторных полей $u_1, \dots, u_n$ будут константами. Инвариантная мера –

это стандартная мера Лебега на торе. Однако в общем случае векторные поля (5.10) не обязаны коммутировать.

Автор благодарен И. В. Воловичу и О. Г. Смолянову за обсуждения.

Список литературы

1. А. А. Кириллов, “Геометрическое квантование”, *Динамические системы* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **4**, ВИНТИ, М., 1985, 141–176.
2. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Гостехиздат, М., 1954, 351 с.; англ. пер.: М. А. Naïmark, *Linear differential operators*, v.I, II, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1967, 1968, xiii+144 pp., xv+352 pp.
3. И. Пригожин, *Неравновесная статистическая механика*, Мир, М., 1964, 314 с.; пер. с англ.: I. Prigogine, *Non-equilibrium statistical mechanics*, Monographs in Statistical Physics and Thermodynamics, **I**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York–London, 1962, viii+319 pp.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции*, Вып. 3, Физматлит, М., 1958, 275 с.; англ. пер.: I. M. Gel’fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, v. 3, Theory of differential equations, Academic Press, New York–London, 1967, x+222 pp.
5. M. V. Berry, J. P. Keating, “ $H = xp$ and the Riemann zeros”, *Supersymmetry and trace formulae: chaos and disorder*, Cambridge, UK, September 8–20, 1997, NATO ASI Series. Series B. Physics, **370**, eds. I. V. Lerner et al., Kluwer Academic Press, New York, NY, 1999, 355–367.
6. А. Н. Колмогоров, “О динамических системах с интегральным инвариантом на торе”, *Докл. АН СССР*, **93**:5 (1953), 763–766.
7. В. В. Козлов, “Динамические системы на торе с многозначными интегралами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 201–218; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Dynamical systems with multivalued integrals on a torus”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256** (2007), 188–205.
8. J. Moser, “On the volume elements on a manifold”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120**:2 (1965), 286–294.
9. В. В. Козлов, “К теореме Боля об аргументе”, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 72–80; англ. пер.: V. V. Kozlov, “On Bohl’s argument theorem”, *Math. Notes*, **93**:1 (2013), 83–89.
10. В. В. Козлов, “Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре”, *Докл. РАН*, **382**:5 (2002), 602–605; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Thermal equilibrium in the sense of Gibbs and Poincaré”, *Dokl. Math.*, **65**:1 (2002), 125–128.
11. D. V. Treshchev, “An estimate of irremovable nonconstant terms in the reducibility problem”, *Dynamical systems in classical mechanics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **168**, ed. V. V. Kozlov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 91–128.

ВАЛЕРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ КОЗЛОВ
(VALERII V. KOZLOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vvkozlov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
04.07.2013