Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Меркер, М. Сабзевари, Задача эквивалентности
Картана для невырожденных по Леви вещественных ги-
перповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, *Изв. РАН. Сер. матем.*,
2014, том 78, выпуск 6, 103–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:10:04

УДК 514.76

Ж. Меркер, М. Сабзевари

**Задача эквивалентности Картана
для невырожденных по Леви
вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$**

Подробно изучается задача эквивалентности Картана для невырожденных по Леви C^6 -гладких вещественных гиперповерхностей M^3 в $\mathbb{C}^2$. Все вычисления проведены эффективно в терминах функции, график которой локально задает гиперповерхность. В частности, явно найден единственный существенный (комплексный) инвариант $\mathfrak{J}$ изучаемой задачи. При сравнении полученных результатов с предыдущими [1] показано, что геометрия Картана–Танаки таких вещественных гиперповерхностей полностью соответствует их свойствам, относящимся к биголоморфной эквивалентности.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: CR-многообразия, невырожденность по Леви, существенные кручения, G -структуры, тензор кривизны.

DOI: 10.4213/im8145

§ 1. Введение

А. Пуанкаре в 1907 г. поставил [2] вопрос о том, когда две локально заданные вещественно-аналитические гиперповерхности Коши–Римана (далее для краткости CR) в $\mathbb{C}^2$ могут быть отображены друг на друга некоторым (локальным или глобальным) биголоморфизмом. Эта задача была полностью решена Э. Картаном [3] в 1932 г. с помощью оригинальной техники, развитой им (в 1900–1910 гг.) для исследования широкого класса проблем, известных сегодня как *задачи эквивалентности Картана*. Этот класс включает в себя появляющиеся в разнообразных контекстах вопросы об эквивалентности подмногообразий, дифференциальных уравнений (в том числе с частными производными) и других геометрических структур. Объединив эти на первый взгляд не связанные между собой задачи эквивалентности в своем потенциально универсальном подходе, Картан показал, что почти все вопросы о непрерывной классификации можно переформулировать в терминах специально приспособленных кореперов.

При поиске эквивалентности между кореперами обычно заранее известна *подгруппа неопределенности* $G \subset \mathrm{Gl}(n)$, связанная с конкретными геометрическими свойствами изучаемой задачи. Фундаментальная общая постановка вопроса такова. Два корепера $\Omega := \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ и $\Omega' := \{(\omega')^1, \dots, (\omega')^n\}$, заданные на двух n -мерных многообразиях M и M' , связаны геометрической

Работа второго автора частично поддержана ИРМ (грант № 91530040).

эквивалентностью посредством некоторого диффеоморфизма $\Phi: M \rightarrow M'$ тогда и только тогда, когда существует G -значная функция $g: M \rightarrow G$ такая, что $\Phi^*(\Omega) = g \cdot \Omega'$.

“Алгоритм” Картана (дающий на выходе зачастую непредсказуемые результаты) включает в себя три взаимосвязанных главных момента: *абсорбцию, нормировку, продолжение*.

Вкратце эта процедура такова. Из уравнения

$$\Omega := g \cdot \Omega' \quad (1.1)$$

взятием внешнего дифференциала получаются так называемые *структурные уравнения*

$$d\Omega = dg \wedge \Omega' + g \cdot d\Omega'.$$

Обращая (1.1) по формуле $\Omega' = g^{-1}\Omega$, подставим полученный результат в первое слагаемое:

$$dg \wedge \Omega' = dg \wedge g^{-1}\Omega = dg \cdot g^{-1} \wedge \Omega,$$

где $dg \cdot g^{-1} = \text{MC}_g$ – стандартная матрица Маурера–Картана матричной группы G :

$$\text{MC}_g := \left(\sum_{k=1}^n dg_k^i (g^{-1})_j^k \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{s=1}^r a_{js}^i \alpha^s,$$

все n^2 матричных элементов которой выражаются линейными комбинациями базисных левоинвариантных 1-форм $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ на G , где $r := \dim_{\mathbb{R}} G$, с некоторыми постоянными коэффициентами a_{js}^i . Тогда структурные уравнения принимают вид

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r a_{js}^i \alpha^s \wedge \omega^j + g \cdot d\Omega', \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь во втором слагаемом выразим 2-форму $d\Omega'$ в виде линейной комбинации 2-форм $\omega^j \wedge \omega^k$. Обычно этот шаг требует больших вычислений. Когда он сделан, то в получившихся (сложных) выражениях T_{jk}^i , называемых *коэффициентами кручения*:

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r a_{js}^i \alpha^s \wedge \omega^j + \sum_{1 \leq j < k \leq n} T_{jk}^i \cdot \omega^j \wedge \omega^k, \quad i = 1, \dots, n,$$

обычно обнаруживаются *надлежащие инварианты* изучаемой геометрической структуры.

Следующий основной шаг подхода Картана состоит в том, что, заменяя каждую из форм Маурера–Картана α^s на линейную комбинацию $\alpha^s + \sum_{j=1}^n z_j^s \omega^j$ с произвольными функциями-коэффициентами z_j^s (и тогда по необходимости заменяя также каждый коэффициент кручения T_{jk}^i на $T_{jk}^i + \sum_{s=1}^r (a_{js}^i z_k^s - a_{ks}^i z_j^s)$), стараются подобрать функции-коэффициенты z_j^s так, чтобы наибольшее возможное число коэффициентов кручения “абсорбировалось” в маурер-картановскую часть. Тогда оставшиеся неабсорбированные коэффициенты кручения (новые и в меньшем числе) становятся *истинными инвариантами*

изучаемой геометрической структуры. Конечно, “число” инвариантных коэффициентов кручения “вычисляется” с помощью линейной алгебры обычно путем (неявного) применения так называемой леммы Картана.

Поскольку оставшиеся коэффициенты кручения являются существенными и инвариантными, их нормируют, полагая равными константе, обычно 0, 1 или i , в зависимости от того, должны ли содержащиеся в них групповые параметры быть ненулевыми в матричной группе G для сохранения обратимости. Приравнивание этих существенных кручений к числам 0, 1 или i определяет некоторые матричные элементы матриц из G и тем самым уменьшает размерность группы G . В задачах эквивалентности высокого уровня [4], [5] эти потенциально нормируемые существенные кручения весьма многочисленны и (к сожалению) часто переопределены. Это заставляет проводить более глубокие явные вычисления для того, чтобы строго установить, какие групповые параметры действительно остаются и какие инварианты действительно возникают. Ожидается, что в конце этой длинной процедуры структурная группа G сведется к размерности 0, давая так называемую $\{e\}$ -структуру.

Если, как это часто случается, после нескольких шагов абсорбции-нормировки становится уже невозможно определить (редуцированное) множество оставшихся групповых параметров, то приходится добавить оставшиеся (модифицированные) формы Маурера–Картана к поднятому начальному кореперу Ω и продолжить базовое многообразие M до произведения $M^{\text{pr}} := M \times G$. Удивительное наблюдение Картана состоит в том, что решение исходной задачи эквивалентности может быть выведено из решения новой задачи на многообразии M^{pr} , снабженном новым корепером. Теперь вся процедура запускается *ab initio* для этой новой продолженной задачи. Этим вводится третий существенный момент алгоритма поиска эквивалентности: продолжение. Подробное изложение метода Картана можно найти в [4], [6], [7].

Замечательные достижения Э. Картана вдохновили его на создание элегантных теорий, известных сейчас как *геометрии Картана* и обобщающих оба прежних подхода к геометрии, принадлежащих Ф. Клейну и Б. Риману. Изучение гиперповерхностей в комплексных евклидовых пространствах¹ методом Картана осуществили другие математики, в том числе С.С. Чжень, Ю. Мозер [8] и Н. Танака [9], причем двумя на первый взгляд различными способами. В то время как работа Чжени и Мозера является довольно прямым развитием идей Картана, подход Танаки более алгебраичен и использует когомологии алгебр Ли, инфинитезимальные CR-автоморфизмы и так называемые *продолжения Танаки*.

Переходя к сути дела, рассмотрим C^6 -гладкую невырожденную по Леви вещественную гиперповерхность $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, проходящую через начало координат. В подходящих аффинных голоморфных координатах $(z, w) = (x + iy, u + iv)$ она записывается как график некоторой C^6 -гладкой определяющей функции:

$$v = \varphi(z, \bar{z}, u) := z\bar{z} + O(3)$$

с условием $\varphi(0) = 0$. Цель настоящей работы – так переформулировать картановское построение $\{e\}$ -структуры, ассоциированной с указанными гиперпо-

¹Размерности больше 2 (примеч. переводчика).

верхностями, чтобы его результат эффективно выражался в терминах единственного данного φ этой задачи.

В работе [1], мы, вдохновленные обзором [10], уже осуществили, следуя подходу Танаки, *эффективное* построение геометрии Картана, инвариантно ассоциированной с такими $M^3 \subset \mathbb{C}^2$. В качестве основного результата мы явно вычислили оба существенных вещественных коэффициента кривизны этой геометрии, обращение которых в нуль характеризует гиперповерхности M , биголоморфно эквивалентные *сфере Гейзенберга* $v = z\bar{z}$ (см. [1, теорема 7.4]). Теперь мы должны проследить, как задача эквивалентности Картана для вещественных гиперповерхностей M^3 сочетается с их геометрией Картана–Танаки. В частности, мы явно опишем тесную взаимосвязь между единственным *комплексным* существенным инвариантом задачи эквивалентности и двумя *вещественными* инвариантами геометрии Картана.

Работа устроена следующим образом. Сначала в § 2 ставится задача эквивалентности для невырожденных по Леви вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$. Для этого на них строятся надлежащие адаптированные кореперы. Взяв направляющие векторы $\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}$ комплексных прямых $T^{1,0}M, T^{0,1}M$ и добавив их скобку $\mathcal{T} := i[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}]$, получаем репер для $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TM$. Двойственная конструкция дает начальный комплексный *корепер* $\{\rho_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0\}$ для $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*M$. Затем описывается начальная группа неопределенности для локальной биголоморфной эквивалентности:

$$G := \left\{ g := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ \bar{b} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

В § 3 с процедуры абсорбции-нормировки начинает работу алгоритм эквивалентности. Нормировав групповой параметр a , мы переходим в § 4 к первому продолжению. А именно, задача эквивалентности изучаемых CR-многообразий M^3 продолжается до задачи эквивалентности 7-мерных продолженных пространств $M^{\text{pr}} := M^3 \times G$, снабженных начальным корепером $\{\rho_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0\}$, к которому добавлены еще четыре 1-формы Маурера–Картана $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ (отвечающие четырем оставшимся групповым параметрам $b, c, \bar{b}, \bar{c}$), и четырьмя новыми продолженными групповыми параметрами $r, s, \bar{r}, \bar{s}$. После этого новая продолженная задача эквивалентности рассматривается *ab initio*.

Известная лемма Картана (лемма 4.1) позволяет нам временно избежать сравнительно сложных вычислений (см. предложение 4.2), которые все-таки придется провести позже. После еще двух абсорбций-нормировок и одного продолжения изучаемая задача эквивалентности сводится к такой же задаче для некоторого (явно вычисленного) 8-мерного корепера $\{\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \delta\}$, имеющего уравнения $\{e\}$ -структуры

$$\begin{aligned} d\rho &= \alpha \wedge \rho + \bar{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \bar{\beta} \wedge \rho + \bar{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\ d\beta &= \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha} + \mathfrak{I}\bar{\zeta} \wedge \rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\bar{\alpha} &= \delta \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \bar{\beta}, \\
d\bar{\beta} &= \delta \wedge \bar{\zeta} + \bar{\beta} \wedge \alpha + \bar{\mathfrak{I}}\zeta \wedge \rho, \\
d\delta &= \delta \wedge \alpha + \delta \wedge \bar{\alpha} + i\beta \wedge \bar{\beta} + \mathfrak{I}\rho \wedge \zeta + \bar{\mathfrak{I}}\rho \wedge \bar{\zeta},
\end{aligned}$$

с единственным примарным комплексным инвариантом

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} := & -\frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} - \frac{7}{6} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} \\
& - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}^2}{c\bar{c}^3}.
\end{aligned}$$

Здесь фундаментальная функция P явно выражается через единственное данное φ исходной задачи по формуле

$$P := \frac{\ell_z - \ell A_u + A\ell_u}{\ell},$$

где

$$A := \frac{i\varphi_z}{1 - i\varphi_u}, \quad \ell := i(\bar{A}_z + A\bar{A}_u - A_{\bar{z}} - \bar{A}A_u),$$

причем множитель Леви ℓ нигде не обращается в нуль благодаря тому, что M предполагается невырожденным по Леви. Дальнейший вторичный инвариант $\mathfrak{I}$ выражается через первый $\mathfrak{J}$ по формуле

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{\bar{c}}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{J}}) - \bar{P}\bar{\mathfrak{J}}) - i\frac{b}{c\bar{c}}\bar{\mathfrak{J}}.$$

Наконец, в § 5 мы вкратце обсуждаем геометрию Картана–Танаки рассматриваемых гиперповерхностей M^3 и, зная результаты статей [1], [10], убеждаемся в том, что задача эквивалентности этих гиперповерхностей согласована с их геометрией Картана, так что ее комплексный существенный примарный инвариант $\mathfrak{I}$ может быть эффективно выражен через два вещественных существенных примарных инварианта, найденных в [1] (это также согласуется с результатами из [11]).

ТЕОРЕМА 1.1 (см. теорему 5.2 в конце работы). *Для невырожденных по Леви C^6 -гладких вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ имеет место следующее соотношение между существенным комплексным инвариантом $\mathfrak{I}$ их задачи эквивалентности и существенными вещественными инвариантами Δ_1 и Δ_4 их геометрии Картана:*

$$\mathfrak{I} = \frac{4}{c\bar{c}^3}(\Delta_1 + i\Delta_4).$$

В заключение введения отметим, что несмотря на известную тесную связь между эквивалентностью гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ и обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка [3], [8], [11]–[14] и на то, что (неявные) геометрические образы, стоящие за нашими результатами, также были известны (хотя часто со спрятанными вычислениями), для глубокого понимания сути метода Картана представляется необходимым дать полностью эффективное и систематическое изложение указанных (сложных) вычислительных аспектов.

На самом деле настоящая (предварительная) работа была написана как обзор оснований для намного более сложного исследования вопросов эквивалентности вложенных CR-структур, которое вскоре будет опубликовано в [4], [5]. В наши намерения входило сначала систематически развить вычислительный формализм на уровне простейших известных CR-структур $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, прежде чем использовать его для более тонкого изучения 5-мерных вещественно-аналитических CR-структур.

Замечательные работы В.К. Белошапки [15]–[19] выявили существование большого числа модельных порождающих CR-подмногообразий, алгебры инфинитезимальных автоморфизмов которых были там явно вычислены. Настоящая работа вместе с [4], [5], [19] представляет собой самый первый шаг к изучению (с позиций Картана) сохраняющих геометрию деформаций лишь немногих из этих моделей. Она оставляет открытой перспективу исследования высших моделей с аналогичным упором на *эффективность*.

§ 2. Постановка задачи эквивалентности

В этом параграфе строится (в терминах функции φ , задающей график) исходный комплексный корепер на рассматриваемом трехмерном CR-многообразии $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, а затем ставится задача эквивалентности. Сначала мы построим двойственный объект: *локальный репер* на M^3 .

2.1. Локальный репер, приспособленный к 3-мерным вложенным CR-структурам. Рассмотрим локальную C^6 -гладкую гиперповерхность $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, проходящую через начало координат. Выбрав аффинные голоморфные координаты $(z, w) = (x + iy, u + iv)$ так, что $\mathbb{R} \frac{\partial}{\partial v} \big|_0 \notin T_0 M$, мы по теореме о неявной функции можем представить M^3 как график над пространством переменных (x, y, u) . Поскольку любую функцию от

$$(x, y, u) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, u \right)$$

можно рассматривать как функцию от $(z, \bar{z}, u)$, этот график можно считать имеющим вид

$$v = \varphi(z, \bar{z}, u)$$

для некоторой C^6 -функции φ , $\varphi(0) = 0$. В дальнейшем все возникающие у нас инвариантные объекты (векторные поля, дифференциальные формы, коэффициенты кручения, существенные функции) будут зависеть только от функции φ и ее частных производных по трем (двум комплексным и одной вещественной) исходным координатам $(z, \bar{z}, u)$, рассматриваемым как *внутренние координаты* на M^3 .

Согласно [1], [12], [20] локальное $(1, 0)$ -векторное поле

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial z} + A \frac{\partial}{\partial w}$$

вблизи начала координат в $\mathbb{C}^2$ является *касательным* к M^3 тогда и только тогда, когда при сужении на M^3 его коэффициент A удовлетворяет условию

$$0 = \mathcal{L} \left(-\frac{w - \bar{w}}{2i} + \varphi \left(z, \bar{z}, \frac{w + \bar{w}}{2} \right) \right) = -\frac{1}{2i} A + \frac{1}{2} A \varphi_u + \varphi_z.$$

Для выполнения этого условия достаточно положить

$$A := \frac{-2\varphi_z}{i + \varphi_u},$$

что *de facto* является функцией только от $(z, \bar{z}, u)$. Далее, чтобы сузить $\mathcal{L}$ на M^3 , необходимо приравнять нулю (внешнее) векторное поле $\frac{\partial}{\partial v}$:

$$\mathcal{L}|_M = \frac{\partial}{\partial z} + A \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varphi_z}{i + \varphi_u} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь удобно ввести отдельное обозначение для возникшего коэффициента при $\frac{\partial}{\partial u}$, полагая

$$A := \frac{i\varphi_z}{1 - i\varphi_u}. \quad (2.1)$$

Не следует путать это обозначение с выражением $A = 2A$, которое, впрочем, нигде далее в статье не используется.

Таким образом, во внутренних для M^3 терминах CR-структура на M^3 , индуцированная с объемлющего пространства $\mathbb{C}^2$, кодируется комплексным $(1, 0)$ -векторным полем $\mathcal{L}$ и сопряженным к нему полем $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial z} + A \frac{\partial}{\partial u}, \quad \bar{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{A} \frac{\partial}{\partial u}.$$

На этом языке условие необращения в нуль скобки Ли

$$[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}] = (\bar{A}_z + A\bar{A}_u - A_{\bar{z}} - \bar{A}A_u) \frac{\partial}{\partial u}$$

в каждой точке из M^3 равносильно невырожденности M^3 по Леви в каждой точке, что предполагается выполненным всюду далее. Поскольку использовать вещественные функции несколько удобнее, мы введем важный множитель Леви

$$\ell := i(\bar{A}_z + A\bar{A}_u - A_{\bar{z}} - \bar{A}A_u). \quad (2.2)$$

Тогда вещественность $\ell \frac{\partial}{\partial u}$ в первом структурном соотношении скобок Ли вместе с формулой

$$[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}] = -i\ell \frac{\partial}{\partial u}$$

выражает благодаря множителю $-i$ в правой части ровно то, что значения скобки Ли чисто мнимые:

$$\overline{[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}]} = -[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}].$$

Для нормировки естественно также ввести вспомогательное вещественное поле

$$\mathcal{T} := \ell \frac{\partial}{\partial u}.$$

Это скалярное кратное поля $\frac{\partial}{\partial u}$ подобрано так, что скобка

$$[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}] = -i\mathcal{T}$$

выражается через $\mathcal{T}$ линейным соотношением с постоянным коэффициентом.

Теперь мы можем записать элементы *исходного комплексного репера* на M^3 в следующем порядке:

$$\begin{aligned} T &:= i(\bar{A}_z + A\bar{A}_u - A_{\bar{z}} - \bar{A}A_u)\frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathcal{L} &:= \frac{\partial}{\partial z} + A\frac{\partial}{\partial u}, \\ \bar{\mathcal{L}} &:= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{A}\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

и остается вычислить две еще не найденные скобки между ними.

Простые подсчеты показывают, что

$$[T, \mathcal{L}] = -PT, \quad [T, \bar{\mathcal{L}}] = -\bar{P}T \quad (2.4)$$

для некоторой (универсальной) рациональной функции P от струи второго порядка $J_{z,\bar{z},u}(A, \bar{A})$, а именно

$$P := \frac{\ell_z - \ell A_u + A\ell_u}{\ell}.$$

Можно было бы полностью расписать функцию P в терминах задающей график функции φ . В обозначениях из [1] имеем

$$P = \frac{1}{2}\Phi_1 - \frac{i}{2}\Phi_2,$$

причем полные выражения, в одну страницу длиной, для (числителей дробей) Φ_1 и Φ_2 в терминах $J_{x,y,u}^3\varphi$ приведены на с. 42 расширенного arxiv.org-варианта работы [1]. Поскольку вычисления в терминах φ неминуемо приводят к “переполнению” (см. конец [1]), оказывается удобным считать далее именно P основным объектом и выражать все встречающиеся величины через P , помня при этом, что P выражается явно через φ .

Заметим, что два структурных соотношения (2.4) между скобками Ли сопряжены друг другу просто потому, что $\bar{T} = T$. Имеем также следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Выполнено условие вещественности*

$$\mathcal{L}(\bar{P}) = \bar{\mathcal{L}}(P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выражений (2.4) ясно, что

$$[\bar{\mathcal{L}}, \underbrace{[T, \mathcal{L}]}_{-PT}] = -\bar{\mathcal{L}}(P)T - P\bar{P}T, \quad [\mathcal{L}, \underbrace{[\bar{\mathcal{L}}, T]}_{\bar{P}T}] = \mathcal{L}(\bar{P})T + \bar{P}P.$$

Отсюда по тождеству Якоби получаем

$$-\bar{\mathcal{L}}(P)T + \mathcal{L}(\bar{P})T = [\bar{\mathcal{L}}, [T, \mathcal{L}]] + [\mathcal{L}, [\bar{\mathcal{L}}, T]] = -[T, \underbrace{[\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}]}_T] = 0,$$

что и дает искомое равенство $\mathcal{L}(\bar{P}) = \bar{\mathcal{L}}(P)$.

2.2. Определение исходного корепера Картана. Все предварительные нормировки были заранее сделаны выше для того, чтобы двойственные объекты задавали хороший набор 1-форм. Принимая естественное соглашение о том, что корепер $\{du, dz, d\bar{z}\}$ двойствен к реперу $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$, введем корепер $\{\rho_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0\}$ как двойственный к реперу $\{\mathcal{T}, \mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}\}$. Иными словами, мы по определению полагаем

$$\begin{aligned}\rho_0(\mathcal{T}) &= 1, & \rho_0(\mathcal{L}) &= 0, & \rho_0(\bar{\mathcal{L}}) &= 0, \\ \zeta_0(\mathcal{T}) &= 0, & \zeta_0(\mathcal{L}) &= 1, & \zeta_0(\bar{\mathcal{L}}) &= 0, \\ \bar{\zeta}_0(\mathcal{T}) &= 0, & \bar{\zeta}_0(\mathcal{L}) &= 0, & \bar{\zeta}_0(\bar{\mathcal{L}}) &= 1.\end{aligned}$$

Из выражений (2.3) для векторных полей $\mathcal{T}, \mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}$ двойственные к ним 1-формы выражаются через функцию A (и, тем самым, через определяющую функцию φ):

$$\rho_0 := \frac{du - A dz - \bar{A} d\bar{z}}{\ell}, \quad \zeta_0 := dz, \quad \bar{\zeta}_0 := d\bar{z}. \quad (2.5)$$

Внешние дифференциалы этих 1-форм находятся с помощью так называемой формулы Картана

$$d\omega(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X}(\omega(\mathcal{Y})) - \mathcal{Y}(\omega(\mathcal{X})) - \omega([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]),$$

из которой вытекает

ЛЕММА 2.2. Пусть $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ – репер на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$ со структурой Ли

$$[\mathcal{L}_{i_1}, \mathcal{L}_{i_2}] = \sum_{k=1}^n a_{i_1, i_2}^k \mathcal{L}_k, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq n,$$

где a_{i_1, i_2}^k – некоторые функции на $\mathbb{R}^n$. Тогда двойственный к нему корепер $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$, определенный равенствами $\omega^k(\mathcal{L}_i) = \delta_i^k$, имеет вполне аналогичную структуру Дарбу–Картана с точностью до знака:

$$d\omega^k = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} a_{i_1, i_2}^k \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для применения леммы 2.2 удобно ввести вспомогательный массив

	$\mathcal{T}$	$\bar{\mathcal{L}}$	$\mathcal{L}$	
	$\boxed{d\rho_0}$	$\boxed{d\bar{\zeta}_0}$	$\boxed{d\zeta_0}$	
$[\mathcal{T}, \bar{\mathcal{L}}]$	$-\bar{P} \cdot \mathcal{T}$	0	0	$\boxed{\rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0}$
$[\mathcal{T}, \mathcal{L}]$	$-P \cdot \mathcal{T}$	0	0	$\boxed{\rho_0 \wedge \zeta_0}$
$[\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}]$	$+i \cdot \mathcal{T}$	0	0	$\boxed{\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_0}$

читая который по столбцам, мы с полной наглядностью получаем исходную структуру Дарбу–Картана в терминах нашей единственной основной функции P :

$$\begin{aligned}d\rho_0 &= P\rho_0 \wedge \zeta_0 + \bar{P}\rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + i\zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0, \\ d\zeta_0 &= 0, & d\bar{\zeta}_0 &= 0.\end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3. Комплексная структура на ядре контактной 1-формы ρ_0 . Закончим эту подготовительную часть статьи вдумчивым подведением итогов, в ходе которого откроется естественный геометрический смысл 1-формы ρ_0 . Определяющее уравнение гиперповерхности M^3 можно записать в виде

$$r = 0, \quad r = r(z, \bar{z}, u, v) := -v + \varphi(z, \bar{z}, u).$$

Для каждой функции $G = G(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ имеем классические определения ее $(1, 0)$ - и $(0, 1)$ -дифференциалов:

$$\partial G := G_z dz + G_w dw, \quad \bar{\partial} G := G_{\bar{z}} d\bar{z} + G_{\bar{w}} d\bar{w}.$$

Легко видеть, что полный вещественный дифференциал

$$dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv$$

равен сумме этих двух дифференциалов (голоморфного и антиголоморфного):

$$dG = \partial G + \bar{\partial} G.$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $r = 0$ – любое вещественное определяющее уравнение C^1 -гиперповерхности $M^3 \subset \mathbb{C}^2$. Тогда сужение

$$\varrho := i \partial r|_M$$

$(1, 0)$ -формы $i \partial r$ на M^3 является вещественной формой на M^3 :

$$\varrho = \bar{\varrho}.$$

Кроме того, в каждой точке $p \in M$ вещественное ядро формы ϱ в $T_p M$ отождествляется с комплексным касательным пространством в точке p :

$$\{X_p \in T_p M : \varrho(X_p) = 0\} = T_p^c M,$$

а ядро формы ϱ в комплексифицированном касательном пространстве $\mathbb{C} \otimes T_p M$ отождествляется с $\mathbb{C} \otimes T_p^c M$:

$$\{\mathcal{X}_p \in \mathbb{C} \otimes T_p M : \varrho(\mathcal{X}_p) = 0\} = \mathbb{C} \otimes T_p^c M = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из того, что равенство $r|_{M^3} \equiv 0$ при сужении на M^3 дает $dr = 0$, откуда $\partial r = -\bar{\partial} r$. Поэтому множитель i перед ∂r в определении ϱ делает последнюю форму вещественной (доказательства остальных утверждений см. в [12, с. 25]).

Применяя лемму 2.3 для $r(z, \bar{z}, u, v) = -v + \varphi(z, \bar{z}, u)$ и $w = u + iv$, имеем

$$dw = du + i dv = du + i d\varphi(z, \bar{z}, u) = du + i(\varphi_z dz + \varphi_{\bar{z}} d\bar{z} + \varphi_u du),$$

откуда можно выразить ϱ через функцию φ :

$$\begin{aligned} \varrho &= i \partial r|_{M^3} = i(r_z dz + r_w dw)|_{M^3} = i \left(\varphi_z dz + \left(\frac{1}{2} \varphi_u + \frac{i}{2} \right) dw \right) \\ &= i \left(\varphi_z dz + \left(\frac{1}{2} \varphi_u + \frac{i}{2} \right) (du + i \varphi_z dz + i \varphi_{\bar{z}} d\bar{z} + i \varphi_u du) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\varphi_u)^2 \right) du + \left(\frac{i}{2} \varphi_z - \frac{1}{2} \varphi_z \varphi_u \right) dz + \left(-\frac{i}{2} \varphi_{\bar{z}} - \frac{1}{2} \varphi_{\bar{z}} \varphi_u \right) d\bar{z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, простые вычисления (с учетом выражений (2.1), (2.2) и (2.5)) показывают, что

$$\rho_0 = -\frac{1}{\ell} \frac{2}{1 + \varphi_u^2} \varrho. \quad (2.8)$$

Из свойства необращения в нуль множителя Леви ℓ вытекает теперь равенство

$$\text{Ker}(\varrho) = \text{Ker}(\rho_0).$$

2.4. Дифференциальный подход к CR-эквивалентностям. Здесь объясняется, как запустить алгоритм Картана в изучаемом случае, т.е. для деформаций сферы Гейзенберга

$$w - \bar{w} = 2iz\bar{z}, \quad (2.9)$$

которые сохраняют геометрию в том смысле, что сохраняется невырожденность по Леви.

Рассмотрим две невырожденные по Леви вещественные гиперповерхности класса $\mathcal{C}^6$, представленные в двух системах координат (z, w) и (z', w') как графики

$$M^3: \quad 0 = -v + \varphi(z, \bar{z}, u), \quad (M')^3: \quad 0 = -v' + \varphi'(z', \bar{z}', u'),$$

причем задающие их функции заранее нормированы равенствами $\varphi = z\bar{z} + O(3)$ и $\varphi' = z'\bar{z}' + O(3)$. Общий вопрос состоит в выяснении того, *когда* эти две CR-гиперповерхности связаны между собой локальным биголоморфизмом

$$(z, w) \longmapsto (z', w') = (z'(z, w), w'(z, w))$$

объемлющего пространства $\mathbb{C}^2$ и, в этом случае, какими именно биголоморфизмами они связаны. Это то же самое, что потребовать, чтобы данное отображение переводило каждую точку из M^3 в некоторую отвечающую ей точку из $(M')^3$. Иными словами, равенство $v' = \varphi'(z', \bar{z}', u')$ должно выполняться всякий раз, когда $v = \varphi(z, \bar{z}, u)$.

Простой и хорошо известный факт [21, лемма 1.2.3] гарантирует, что M отображается в M' тогда и только тогда, когда существует вещественнозначная функция $a = a(z, w)$, определенная в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^2$, для которой выполнено следующее тождественное равенство функций от четырех вещественных координат пространства $\mathbb{C}^2$:

$$-v' + \varphi'(z', \bar{z}', u')|_{(z', w')=(z'(z, w), w'(z, w))} \equiv a(z, \bar{z}, w, \bar{w}) \cdot (-v + \varphi(z, \bar{z}, u)).$$

Опуская для простоты упоминание о взятии *прообраза*, мы запишем последнее равенство в виде

$$-v' + \varphi'(z', \bar{z}', u') = a(-v + \varphi(z, \bar{z}, u)),$$

или еще короче: $r' = ar$. Из такой записи сразу видно, что $r = 0$ влечет $r' = 0$, т.е. точки гиперповерхности M^3 переходят в точки $(M')^3$. Однако видно еще, что фундаментальные 1-формы $\varrho = i \partial r|_M$ и $\varrho' = i \partial r'|_{M'}$ этих двух пространств оказываются вещественными кратными друг друга:

$$i \partial r'|_{M'} = a i \partial r|_M + \underline{r i \partial a}|_{M_\circ},$$

причем коэффициентом является та же самая функция a , что и раньше.

Конечно, функция a сильно зависит от выбора эквивалентности $(z, w) \rightarrow (z', w')$ между M^3 и $(M')^3$ (если такая эквивалентность вообще существует), но идея Картана состоит в том, чтобы рассматривать ее как *неизвестную*. С учетом (2.8) полученное равенство $\varrho' = a\varrho$ можно переписать (обозначая той же буквой a некоторую новую функцию) в виде

$$\rho' = a\rho,$$

где $a := a(z, \bar{z}, u)$ – неизвестная вещественнозначная функция.

2.5. Матрица неопределенности. Построим соответствующую *матрицу неопределенности*, кодирующую голоморфные эквивалентности между гиперповерхностями M^3 и $(M')^3$, снабженными кореперами

$$\{\rho_0, dz, d\bar{z}\}, \quad \{\rho'_0, dz', d\bar{z}'\}.$$

Сужая первую компоненту предполагаемого биголоморфизма на M^3 , имеем

$$z' = z'(z, u + i\varphi(z, \bar{z}, u)),$$

откуда, дифференцируя по общей формуле $dg = g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z} + g_u du$, получим (см. (2.7))

$$\begin{aligned} dz' &= (z'_z + iz'_w \varphi_z) dz + (iz'_w \varphi_{\bar{z}}) d\bar{z} + (iz'_w \varphi_u + z'_u) du \\ &= (z'_z + iz'_w \varphi_z) dz + z'_w \{i\varphi_{\bar{z}} d\bar{z} + (i\varphi_u + 1) du\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С другой стороны, умножая фундаментальную 1-форму $\varrho = i\partial r|_M$ на некоторый (не причиняющий никаких неудобств) комплексный множитель, имеем

$$\frac{-2(1 + i\varphi_u)}{1 + (\varphi_u)^2} \varrho = (1 + i\varphi_u) du + i\varphi_{\bar{z}} d\bar{z} + \frac{\varphi_z(-i + \varphi_u)}{1 - i\varphi_u} dz,$$

что позволяет заменить 1-форму, стоящую в фигурных скобках после z'_w в (2.10) (и заодно выразить $\varrho = -\frac{1}{2}\ell(1 + (\varphi_u)^2)\rho_0$ через ρ_0 согласно (2.8)), по формуле

$$\begin{aligned} i\varphi_{\bar{z}} d\bar{z} + (i\varphi_u + 1) du &= -\frac{2(1 + i\varphi_u)}{1 + (\varphi_u)^2} \varrho - \frac{\varphi_z(-i + \varphi_u)}{1 - i\varphi_u} dz \\ &= \ell(1 + i\varphi_u)\rho_0 - \frac{\varphi_z(-i + \varphi_u)}{1 - i\varphi_u} dz. \end{aligned}$$

Тогда из (2.10) вытекает, что dz' – линейная комбинация (с некоторыми сложными коэффициентами) 1-форм dz и ρ , не содержащая $d\bar{z}$:

$$dz' = \underbrace{(z'_w \ell(1 + i\varphi_u))}_{=:b(z, \bar{z}, v)} \rho_0 + \underbrace{\left(z'_z + iz'_w \varphi_z - z'_w \frac{\varphi_z(-i + \varphi_u)}{1 - i\varphi_u} \right)}_{=:c(z, \bar{z}, v)} dz.$$

Тем самым получено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Две локально заданные вещественные $\mathcal{C}^1$ -гиперповерхности M^3 и $(M')^3$ в $\mathbb{C}^2$ эквивалентны посредством биголоморфизма тогда и только тогда, когда их фундаментальные кореперы

$$\{\rho_0, \zeta_0 = dz, \bar{\zeta}_0 = d\bar{z}_0\}, \quad \{\rho'_0, \zeta'_0 = dz', \bar{\zeta}'_0 = d\bar{z}'_0\}$$

переводятся один в другой посредством некоторой матрицы функций

$$\begin{pmatrix} \rho'_0 \\ \zeta'_0 \\ \bar{\zeta}'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ \bar{b} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix},$$

в которой $a := a(z, \bar{z}, v)$ – вещественнозначная функция на M^3 , а функции $b := b(z, \bar{z}, v)$ и $c := c(z, \bar{z}, v)$ комплекснозначны.

2.6. Структурная группа. Мы видели, что если CR-эквивалентность существует, то функции a , b и c зависят (довольно сложным образом) от той самой CR-эквивалентности, о существовании которой идет речь. Суть метода Картана состоит в том, чтобы рассматривать эти функции как *новые неизвестные* и, следовательно, добавить их в число *групповых переменных*. Поэтому выделим в $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ подгруппу всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ \bar{b} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ – произвольные параметры, и рассмотрим так называемый *поднятый корепер* на восьмимерном пространстве переменных $(z, \bar{z}, u, a, b, \bar{b}, c, \bar{c})$:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ \bar{b} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix},$$

т.е. $\rho = a\rho_0$, $\zeta = b\rho_0 + c\zeta_0$, $\bar{\zeta} = \bar{b}\rho_0 + \bar{c}\bar{\zeta}_0$. Конечно, 1-форма ρ вещественна, а $\bar{\zeta}$ сопряжена к ζ .

Итак, мы приготовили всё необходимое для запуска алгоритма эквивалентности Картана. Теперь нам предстоит осуществить нормировку, абсорбцию и продолжение.

§ 3. Абсорбция и нормировка

С задачей об эквивалентности вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ связана структурная матричная группа

$$G := \left\{ g := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ \bar{b} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Поднятый корепер записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} := g \cdot \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho_0 \\ b\rho_0 + c\zeta_0 \\ \bar{b}\rho_0 + \bar{c}\bar{\zeta}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Применяя к этим трем уравнениям дифференциальный оператор d и подставляя выражения для $d\rho_0$, $d\zeta_0$, $d\bar{\zeta}_0$ из (2.6), получаем

$$\begin{aligned} d\rho &= da \wedge \rho_0 + ai\zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + a\bar{P}\rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + aP\rho_0 \wedge \zeta_0, \\ d\zeta &= db \wedge \rho_0 + dc \wedge \zeta_0 + bi\zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + b\bar{P}\rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + bP\rho_0 \wedge \zeta_0, \\ d\bar{\zeta} &= d\bar{b} \wedge \rho_0 + d\bar{c} \wedge \bar{\zeta}_0 + \bar{b}i\zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + \bar{b}\bar{P}\rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 + \bar{b}P\rho_0 \wedge \zeta_0, \end{aligned}$$

или, эквивалентно, в матричных обозначениях:

$$d \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} da & 0 & 0 \\ db & dc & 0 \\ d\bar{b} & 0 & d\bar{c} \end{pmatrix}}_{dg} \wedge \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aP & a\bar{P} & ai \\ bP & b\bar{P} & bi \\ \bar{b}P & \bar{b}\bar{P} & \bar{b}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 \wedge \zeta_0 \\ \rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 \\ \zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (3.1) на обратную матрицу

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{\bar{b}}{a\bar{c}} & 0 & \frac{1}{\bar{c}} \end{pmatrix},$$

получаем выражение ρ_0 , ζ_0 , $\bar{\zeta}_0$ через ρ , ζ , $\bar{\zeta}$:

$$\rho_0 = \frac{1}{a}\rho, \quad \zeta_0 = -\frac{b}{ac}\rho + \frac{1}{c}\zeta, \quad \bar{\zeta}_0 = -\frac{\bar{b}}{a\bar{c}}\rho + \frac{1}{\bar{c}}\bar{\zeta}. \quad (3.3)$$

Теперь можно вычислить все три внешних произведения этих базисных 1-форм:

$$\begin{aligned} \rho_0 \wedge \zeta_0 &= \frac{1}{ac}\rho \wedge \zeta, & \rho_0 \wedge \bar{\zeta}_0 &= \frac{1}{a\bar{c}}\rho \wedge \bar{\zeta}, \\ \zeta_0 \wedge \bar{\zeta}_0 &= \frac{\bar{b}}{ac\bar{c}}\rho \wedge \zeta - \frac{b}{ac\bar{c}}\rho \wedge \bar{\zeta} + \frac{1}{c\bar{c}}\zeta \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заменяя первое слагаемое $dg \wedge (\rho_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)^t$ равенства (3.2) на

$$\underbrace{dg \cdot g^{-1}}_{\omega_{MC}} \wedge \underbrace{g \cdot \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix}}_{(\rho, \zeta, \bar{\zeta})^t}, \quad (3.5)$$

получаем из (3.2) формулу для внешнего дифференцирования поднятых 1-форм ρ , ζ , $\bar{\zeta}$:

$$d \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \bar{\beta} & 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}}_{\omega_{MC}} \wedge \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1\rho \wedge \zeta + \bar{U}_1\rho \wedge \bar{\zeta} + U_2\zeta \wedge \bar{\zeta} \\ V_1\rho \wedge \zeta + V_2\rho \wedge \bar{\zeta} + V_3\zeta \wedge \bar{\zeta} \\ \bar{V}_2\rho \wedge \zeta + \bar{V}_1\rho \wedge \bar{\zeta} - \bar{V}_3\zeta \wedge \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

в которую входят следующие коэффициенты кручения:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \frac{P\bar{c} + \bar{b}i}{c\bar{c}}, & U_2 &:= \frac{ai}{c\bar{c}}, \\ V_1 &:= \frac{Pb\bar{c} + \bar{b}bi}{ac\bar{c}}, & V_2 &:= \frac{\bar{P}bc - b^2i}{ac\bar{c}}, & V_3 &:= \frac{bi}{c\bar{c}}, \end{aligned}$$

и в которой участвуют три скалярных 1-формы Маурера–Картана:

$$\alpha := \frac{dc}{c}, \quad \beta := \frac{db}{a} - \frac{bdc}{ac}, \quad \gamma := \frac{da}{a}.$$

Полученные уравнения называются *структурными уравнениями* изучаемой задачи, а матрица ω_{MC} – *формой Маурера–Картана* группы G .

3.1. Абсорбция и нормировка. Одной из важнейших частей алгоритма эквивалентности Картана является шаг абсорбции-нормировки, который в общем виде описывается следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1 [4]. Пусть $\Theta := \{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ – поднятый корепер для задачи эквивалентности со структурными уравнениями

$$d\theta^i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{s=1}^r a_{ks}^i \beta^s + \sum_{j=1}^{k-1} T_{jk}^i \theta^j \right) \wedge \theta^k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда можно заменить каждую форму Маурера–Картана β^s и каждый коэффициент кручения T_{jk}^i по формулам

$$\begin{aligned} \beta^s &\mapsto \beta^s + \sum_{j=1}^n z_j^s \theta^j, & s = 1, \dots, r, \\ T_{jk}^i &\mapsto T_{jk}^i + \sum_{s=1}^r (a_{js}^i z_k^s - a_{ks}^i z_j^s), & i = 1, \dots, n, \quad 1 \leq j < k \leq n, \end{aligned} \tag{3.7}$$

для произвольных функций $z_\bullet$ на базовом многообразии M .

Мы хотим подобрать функции $z_\bullet$ так, чтобы как можно больше коэффициентов кручения обратилось в нуль.

Итак, выполняем замены вида

$$\begin{aligned} \alpha &\mapsto \alpha + p_1 \rho + q_1 \zeta + r_1 \bar{\zeta}, \\ \beta &\mapsto \beta + p_2 \rho + q_2 \zeta + r_2 \bar{\zeta}, \\ \gamma &\mapsto \gamma + p_3 \rho + q_3 \zeta + r_3 \bar{\zeta}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Они преобразуют структурные уравнения (3.6) к следующему виду (здесь и далее структурное уравнение для $d\bar{\zeta}$ не выписывается, так как оно всегда сопряжено к уравнению для $d\zeta$):

$$\begin{aligned} d\rho &= \gamma \wedge \rho + (U_1 - q_3) \rho \wedge \zeta + (\bar{U}_1 - r_3) \rho \wedge \bar{\zeta} + U_2 \zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta + (V_1 - q_2 + p_1) \rho \wedge \zeta + (V_2 - r_2) \rho \wedge \bar{\zeta} + (V_3 - r_1) \zeta \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что надлежащим выбором функций p_i, q_i, r_i можно обнулить все (модифицированные) коэффициенты кручения, кроме одного, а именно U_2 перед $\zeta \wedge \bar{\zeta}$ в конце первого равенства. Значит, этот коэффициент кручения U_2 существен, и из общей теории (см. [6]) вытекает, что U_2 (потенциально) дает *нормировку* некоторого группового параметра. В данном случае коэффициент U_2 такой простой, что его нормировка на $U_2 := i$ дает простую редукцию групповых параметров по формуле

$$a := c\bar{c}.$$

Тогда форма Маурера–Картана $\gamma = \frac{da}{a}$ заменяется на $\alpha + \bar{\alpha}$, а структурные уравнения (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} d\rho &= (\alpha + \bar{\alpha}) \wedge \rho + U_1 \rho \wedge \zeta + \bar{U}_1 \rho \wedge \bar{\zeta} + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta + V_1 \rho \wedge \zeta + V_2 \rho \wedge \bar{\zeta} + V_3 \zeta \wedge \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

с новыми коэффициентами кручения

$$U_1 := \frac{P\bar{c} + \bar{b}i}{c\bar{c}}, \quad V_1 := \frac{Pb\bar{c} + \bar{b}bi}{c^2\bar{c}^2}, \quad V_2 := \frac{\bar{P}bc - b^2i}{c^2\bar{c}^2}, \quad V_3 := \frac{bi}{c\bar{c}}$$

и новыми 1-формами Маурера–Картана

$$\alpha := \frac{dc}{c}, \quad \beta := \frac{db}{c\bar{c}} - \frac{bdc}{c^2\bar{c}}.$$

Попробуем выполнить второй шаг абсорбции-нормировки. Делая аналогичные замены

$$\alpha \mapsto \alpha + p_1\rho + q_1\zeta + r_1\bar{\zeta}, \quad \beta \mapsto \beta + p_2\rho + q_2\zeta + r_2\bar{\zeta},$$

получаем

$$\begin{aligned} d\rho &= (\alpha + \bar{\alpha}) \wedge \rho + (U_1 - q_1 - \bar{r}_1)\rho \wedge \zeta + (\bar{U}_1 - r_1 - \bar{q}_1)\rho \wedge \bar{\zeta} + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta + (V_1 - q_2 + p_1)\rho \wedge \zeta + (V_2 - r_2)\rho \wedge \bar{\zeta} + (V_3 - r_1)\zeta \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда видно, что можно обнулить все (модифицированные) коэффициенты кручения за счет выбора

$$q_1 := U_1 - \bar{V}_3, \quad q_2 := V_1 + p_1, \quad r_1 := V_3, \quad r_2 := V_2,$$

причем две оставшиеся функции $p_1 =: s, p_2 =: r$ можно выбирать *произвольно*. Полагая пока эти две функции равными нулю и возвращаясь к явным выражениям для U_1, V_1, V_2, V_3 , мы определяем две модифицированные формы Маурера–Картана

$$\alpha_0 = \frac{dc}{c} - \frac{P\bar{c} + 2i\bar{b}}{c\bar{c}}\zeta - \frac{ib}{c\bar{c}}\bar{\zeta}, \quad \beta_0 = \frac{db}{c\bar{c}} - \frac{bdc}{c^2\bar{c}} - \frac{Pb\bar{c} + ib\bar{b}}{c^2\bar{c}^2}\zeta - \frac{\bar{P}bc - ib^2}{c^2\bar{c}^2}\bar{\zeta} \quad (3.11)$$

и констатируем, что всё кручение абсорбировалось, так что структурные уравнения приняли очень простой вид

$$d\rho = (\alpha_0 + \bar{\alpha}_0) \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \quad d\zeta = \beta_0 \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta. \quad (3.12)$$

На этом этапе уже нельзя использовать какой-либо коэффициент кручения для редукции структурной группы.

Можно проверить, что два комплексных параметра r и s и их сопряженные являются *свободными переменными* в абсорбирующих уравнениях и, следовательно, согласно общей процедуре надо продолжить задачу эквивалентности.

§ 4. Продолжение задачи эквивалентности

4.1. Процедура продолжения. Заключив всю оставшуюся неопределенность в выбор α_0 и β_0 по формуле

$$\alpha := \alpha_0 + s\rho, \quad \beta := \beta_0 + r\rho + s\zeta, \quad (4.1)$$

будем иметь абсорбирующие уравнения вида (3.12) (только без нижнего индекса 0):

$$d\rho = (\alpha + \bar{\alpha}) \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \quad d\zeta = \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta. \quad (4.2)$$

Запустим процедуру продолжения. Эта часть алгоритма Картана основана на следующем общем результате (см. [6, предложение 12.13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть Θ и Θ' – поднятые кореперы для задачи эквивалентности, допускающей неинволютивную систему структурных уравнений и имеющей положительную степень неопределенности. Пусть Λ и Λ' – модифицированные формы Маурера–Картана после последнего шага абсорбции–нормировки. Тогда существование диффеоморфизма $\Phi: M \rightarrow M'$, переводящего Θ в Θ' при некотором выборе групповых параметров, эквивалентно существованию диффеоморфизма $\Psi: M \times G \rightarrow M' \times G'$, переводящего корепер (Θ, Λ) в (Θ', Λ') при некотором выборе продолженных групповых параметров.

Данный факт позволяет нам перейти от исходной задачи эквивалентности трехмерных гиперповерхностей M^3 , снабженных поднятыми кореперами $\{\rho, \zeta, \bar{\zeta}\}$, к задаче эквивалентности *продолженных многообразий* $M^{\text{pr}} := M^3 \times G$ с поднятыми кореперами (определенными на $M^{\text{pr}} \times G^{\text{pr}} = (M^3 \times G) \times G^{\text{pr}}$) из семи 1-форм $\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \psi, \varphi, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$, определяемых следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \\ \alpha \\ \beta \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{r} & 0 & \bar{s} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{g_{\text{pr}} \in G^{\text{pr}}} \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\beta}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

и с новой структурной группой G^{pr} – подгруппой в $\text{Gl}_{3+4}(\mathbb{C}) = \text{Gl}_7(\mathbb{C})$, образованной *продолженными групповыми параметрами* r, s и их сопряженными.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Формула (4.3) для элементов продолженной группы напоминает уравнения (3.3) из работы [13, с. 7], в которой изучается задача эквивалентности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

На самом деле по известным причинам (см., например, [11], [14]) существует *принцип переноса*, показывающий, что эти две, по-видимому, разные задачи эквивалентности решаются схожими способами. Однако наша основная цель – выйти за пределы так называемого *непараметрического подхода* (обычно требующего меньших усилий) и провести все вычисления эффективно в терминах одной функции P (а значит, и в терминах одной лишь функции $\varphi(z, \bar{z}, u)$, задающей гиперповерхность как график). На самом деле уже нашим выбором исходного репера $\{\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}, \mathcal{T}\}$ на TM^3 , который явно выражается через φ , мы отклонились от обычных подходов.

С полученными четырьмя дополнительными 1-формами $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ мы можем теперь начать первый цикл абсорбции и нормировки на продолженном 7-мерном пространстве.

Считая элемент $g_{\text{pr}} \in G^{\text{pr}}$ записанным в виде (4.3) и вводя сокращенные обозначения

$$\Omega_0 := (\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha_0, \beta_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \quad \Omega := (\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

мы получаем, что структурные уравнения

$$d\Omega = (dg_{\text{pr}} \cdot g_{\text{pr}}^{-1}) \wedge \Omega + g_{\text{pr}} \cdot d\Omega_0$$

принимают вид

$$d \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \\ \alpha \\ \beta \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\gamma} & 0 & \bar{\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \rho \\ \zeta \\ \bar{\zeta} \\ \alpha \\ \beta \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\rho \\ d\zeta \\ d\bar{\zeta} \\ sd\rho + d\alpha_0 \\ rd\rho + sd\zeta + d\beta_0 \\ \bar{s}d\rho + d\bar{\alpha}_0 \\ \bar{r}d\rho + \bar{s}d\bar{\zeta} + d\bar{\beta}_0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

для двух новых базисных 1-форм Маурера–Картана

$$\gamma := dr, \quad \delta := ds.$$

Чтобы явно найти коэффициенты кручения, которые должны возникнуть из четырех последних строк крайней справа (7×1) -матрицы в (4.4), надо выразить внешние производные форм α_0 и β_0 через поднятые 1-формы, что требует больших вычислений. Вместо того чтобы проводить эти вычисления напрямую, воспользуемся хорошо известным обходным маневром (см. [6], [7]), позволяющим временно обойти вычислительные трудности и заранее предвидеть, какими будут окончательные структурные уравнения после абсорбции.

ЛЕММА 4.1 (элементарная лемма Картана). Пусть $\{\omega^1, \dots, \omega^k\}$ – набор линейно независимых локальных 1-форм на некотором многообразии. Тогда k произвольных 1-форм $\theta^1, \dots, \theta^k$ удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^k \theta^i \wedge \omega^i = 0$ в том и только в том случае, если они выражаются в виде $\theta^i = \sum_{j=1}^k A_j^i \omega^j$ для некоторой симметрической матрицы локальных функций с $A_j^i = A_i^j$.

Возникла лемма 4.1 из желания не рассматривать явного выражения указанных функций A_j^i через $\theta^1, \dots, \theta^k, \omega^1, \dots, \omega^k$.

Пользуясь стандартной формулой дифференцирования внешнего произведения двух 1-форм λ и μ (обратите внимание на знак минус)

$$d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu - \lambda \wedge d\mu,$$

мы дифференцируем оба уравнения (4.2) и получаем

$$\begin{aligned} d^2\rho &= 0 \equiv \underbrace{(d\alpha + 2i\bar{\beta} \wedge \zeta + i\beta \wedge \bar{\zeta}) + (d\bar{\alpha} - 2i\beta \wedge \bar{\zeta} - i\bar{\beta} \wedge \zeta)}_{=:\Xi_1} \wedge \rho, \\ d^2\zeta &= 0 \equiv \underbrace{(d\alpha + 2i\bar{\beta} \wedge \zeta + i\beta \wedge \bar{\zeta})}_{=:\Xi_2} \wedge \zeta + \underbrace{(d\beta - \beta \wedge \bar{\alpha})}_{=:\Xi_3} \wedge \rho. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим в качестве “трюка”, что избыточное слагаемое $2i\bar{\beta} \wedge \zeta$ в Ξ_1 позволяет нам проверить соотношение вещественности

$$\Xi_1 = \Xi_2 + \bar{\Xi}_2,$$

которое используется в доказательстве следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Внешние дифференциалы новых продолженных поднятых 1-форм α и β имеют вид*

$$\begin{aligned} d\alpha &= \delta^{\text{modified}} \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta + W\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\beta &= \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho + \delta^{\text{modified}} \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (4.6)$$

для некоторого вещественного коэффициента кручения W и некоторых модифицированных 1-форм Маурера–Картана δ^{modified} и γ^{modified} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму Картана (лемму 4.1) к (4.5), получаем следующие выражения для Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 через некоторые 1-формы $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}$:

$$\Xi_1 = -\mathcal{C} \wedge \rho, \quad \Xi_2 = \mathcal{A}_{11} \wedge \zeta + \mathcal{A}_{12} \wedge \rho, \quad \Xi_3 = \mathcal{A}_{12} \wedge \zeta + \mathcal{A}_{22} \wedge \rho.$$

Соотношение $\Xi_2 + \bar{\Xi}_2 - \Xi_1 = 0$, полученное выше с помощью “трюка”, принимает теперь вид

$$\mathcal{A}_{11} \wedge \zeta + \mathcal{B}_{11} \wedge \bar{\zeta} + (\mathcal{A}_{12} + \bar{\mathcal{A}}_{12} + \mathcal{C}) \wedge \rho \equiv 0.$$

Еще одно применение леммы Картана дает (неявные) выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= R_{11}\zeta + R_{12}\bar{\zeta} + R_{13}\rho, & \mathcal{B}_{11} &= R_{12}\zeta + R_{22}\bar{\zeta} + R_{23}\rho, \\ \mathcal{A}_{12} + \bar{\mathcal{A}}_{12} + \mathcal{C} &= R_{13}\zeta + R_{23}\bar{\zeta} + R_{33}\rho \end{aligned}$$

через некоторые комплексные функции R_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Обозначая 1-формы $\mathcal{A}_{12}$ и $\mathcal{A}_{22}$ через δ^{modified} и γ^{modified} соответственно, запишем выражения для Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 в виде

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \overline{\delta^{\text{modified}}} \wedge \rho + \delta^{\text{modified}} \wedge \rho - R_{13}\zeta \wedge \rho - R_{23}\bar{\zeta} \wedge \rho, \\ \Xi_2 &= R_{12}\bar{\zeta} \wedge \zeta + R_{13}\rho \wedge \zeta + \delta^{\text{modified}} \wedge \rho, & \Xi_3 &= \delta^{\text{modified}} \wedge \zeta + \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho. \end{aligned}$$

Сравнивая их с первоначальным определением (4.5) 1-форм Ξ_2, Ξ_3, Ξ_3 , получаем

$$\begin{aligned} d\alpha &= -2i\bar{\beta} \wedge \zeta - i\beta \wedge \bar{\zeta} + (\delta^{\text{modified}} - R_{13}\zeta) \wedge \rho - R_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\beta &= \beta \wedge \bar{\alpha} + \delta^{\text{modified}} \wedge \zeta + \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho, \\ d\bar{\alpha} &= 2i\beta \wedge \bar{\zeta} + i\bar{\beta} \wedge \zeta + (\bar{\delta}^{\text{modified}} - R_{23}\bar{\zeta}) \wedge \rho + R_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Теперь из равенства $\bar{d}\bar{\alpha} = d\bar{\alpha}$ после очевидных упрощений получаем уравнение

$$-\bar{R}_{13}\bar{\zeta} \wedge \rho + \bar{R}_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta} = -R_{23}\bar{\zeta} \wedge \rho + R_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta}.$$

В силу линейной независимости $\bar{\zeta} \wedge \rho$ и $\zeta \wedge \bar{\zeta}$ заключаем отсюда, что

$$R_{23} = \bar{R}_{13}, \quad R_{12} = \bar{R}_{12}.$$

Иными словами, функция R_{12} вещественная, а в выражении для $d\bar{\alpha}$ можно заменить R_{23} на $\bar{R}_{13}$. Наконец, выполняя в уравнениях (4.7) переобозначение $\delta^{\text{modified}} - R_{13}\zeta \mapsto \delta^{\text{modified}}$ и полагая $W := -R_{12}$, преобразуем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} d\alpha &= -2i\bar{\beta} \wedge \zeta - i\beta \wedge \bar{\zeta} + (\underbrace{\delta^{\text{modified}} - R_{13}\zeta}_{\mapsto \delta^{\text{modified}}}) \wedge \rho \underbrace{- R_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta}}_{+W}, \\ d\beta &= \beta \wedge \bar{\alpha} + (\underbrace{\delta^{\text{modified}} - R_{13}\zeta}_{\mapsto \delta^{\text{modified}}}) \wedge \zeta + \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho, \\ d\bar{\alpha} &= 2i\beta \wedge \bar{\zeta} + i\bar{\beta} \wedge \zeta + (\underbrace{\bar{\delta}^{\text{modified}} - \bar{R}_{13}\bar{\zeta}}_{\mapsto \bar{\delta}^{\text{modified}}}) \wedge \rho \underbrace{+ R_{12}\zeta \wedge \bar{\zeta}}_{-W}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Предложение доказано.

Два уравнения (4.6) (вместе с их невыписанными сопряженными) и три уравнения (4.2) представляют собой новые структурные уравнения для задачи с δ^{modified} и γ^{modified} в качестве *модифицированных* форм Маурера–Картана после максимальной абсорбции коэффициентов кручения. Благодаря предложению 4.2 мы избежали сложных вычислений, в то же время получив некоторую существенную (и часто достаточную) информацию, как и сам Картан обычно делал в своих работах. Несмотря на это, мы приведем явные выражения для δ^{modified} и γ^{modified} . Однако, прежде чем сделать это, отметим следующую лемму, позволяющую сравнить любые два выражения для δ^{modified} и γ^{modified} , удовлетворяющие (4.6).

ЛЕММА 4.2. Пусть $\delta^{\text{modified}}, \gamma^{\text{modified}}$ и $\delta_0^{\text{modified}}, \gamma_0^{\text{modified}}$ – две пары 1-форм, удовлетворяющих уравнениям (4.6):

$$\begin{aligned} d\alpha &= \delta^{\text{modified}} \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta + W\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\beta &= \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho + \delta^{\text{modified}} \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha}; \\ d\alpha &= \delta_0^{\text{modified}} \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta + W\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\beta &= \gamma_0^{\text{modified}} \wedge \rho + \delta_0^{\text{modified}} \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Тогда необходимо имеем

$$\delta^{\text{modified}} = \delta_0^{\text{modified}} + p\rho, \quad \gamma^{\text{modified}} = \gamma_0^{\text{modified}} + p\zeta + q\rho \quad (4.9)$$

для некоторых (произвольных) функций p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидное вычитание дает, что

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (\delta^{\text{modified}} - \delta_0^{\text{modified}}) \wedge \rho, \\ 0 &\equiv (\gamma^{\text{modified}} - \gamma_0^{\text{modified}}) \wedge \rho + (\delta^{\text{modified}} - \delta_0^{\text{modified}}) \wedge \zeta. \end{aligned}$$

Применяя лемму Картана к первому уравнению, получаем первое уравнение в (4.9), подставляя которое во второе уравнение и применяя еще раз лемму Картана, завершаем доказательство.

Прямое вычисление дает следующую лемму, без которой никак не обойтись при явном проведении всех вычислений.

ЛЕММА 4.3. *Внешний дифференциал*

$$dG = \mathcal{L}(G) \cdot \zeta_0 + \bar{\mathcal{L}}(G) \cdot \bar{\zeta}_0 + \mathcal{T}(G) \cdot \rho_0$$

произвольной функции $G(z, \bar{z}, u)$ класса по крайней мере $\mathcal{C}^1$ на базовом многообразии $M \subset \mathbb{C}^2$ выражается в поднятом корепере следующим образом:

$$dG = \left(\frac{1}{c} \mathcal{L}(G) \right) \cdot \zeta + \left(\frac{1}{\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(G) \right) \cdot \bar{\zeta} + \left(-\frac{b}{c^2 \bar{c}} \mathcal{L}(G) - \frac{\bar{b}}{c \bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(G) + \frac{1}{c \bar{c}} \mathcal{T}(G) \right) \cdot \rho. \quad (4.10)$$

Теперь можно сравнить друг с другом два выражения для $d\alpha$, приведенные в (4.6) и (4.4), а именно

$$d\alpha = \delta^{\text{modified}} \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta + W\zeta \wedge \bar{\zeta}, \quad d\alpha = d\alpha_0 + \gamma \wedge \rho + s d\rho. \quad (4.11)$$

Здесь необходимо еще вычислить дифференциал $d\alpha_0$, пользуясь определением α_0 из соотношения (3.11):

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= \underline{d\left(\frac{dc}{c}\right)} - \left(\frac{1}{c} dP - P \frac{1}{c\bar{c}} dc + 2i \frac{1}{c\bar{c}} d\bar{b} - 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}\bar{c}} dc - 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}\bar{c}} d\bar{c} \right) \wedge \zeta \\ &\quad - \left(\frac{1}{c} P + 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} \right) d\zeta - \left(i \frac{1}{c\bar{c}} db - i \frac{b}{c\bar{c}\bar{c}} dc - i \frac{b}{c\bar{c}\bar{c}} d\bar{c} \right) \wedge \bar{\zeta} - i \frac{b}{c\bar{c}} d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

В силу выражений (4.1) и (3.11) можно записать

$$\begin{aligned} dc &= c\alpha_0 + \frac{P\bar{c} + 2i\bar{b}}{\bar{c}} \zeta + \frac{ib}{\bar{c}} \bar{\zeta} = c\alpha - cs\rho + \frac{P\bar{c} + 2i\bar{b}}{\bar{c}} \zeta + \frac{ib}{\bar{c}} \bar{\zeta}, \\ db &= c\bar{c}\beta_0 + b\alpha_0 + \frac{2Pb\bar{c} + 3ib\bar{b}}{c\bar{c}} \zeta + \frac{\bar{P}b}{\bar{c}} \bar{\zeta} \\ &= b\alpha + c\bar{c}\beta - (c\bar{c}r + bs)\rho + \left(\frac{2Pb\bar{c} + 3ib\bar{b}}{c\bar{c}} - s\bar{c}\bar{c} \right) \zeta + \frac{\bar{P}b}{\bar{c}} \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Эти уравнения вместе с (4.10) и (4.2) позволяют нам преобразовать второе выражение для $d\alpha$ в (4.11) к виду

$$d\alpha = \left\{ \left(\frac{b}{c^3 \bar{c}} \mathcal{L}(P) + \frac{\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(P) - \frac{1}{c^2 \bar{c}} \mathcal{T}(P) - \frac{Ps}{c} + 2ir - 2i \frac{s\bar{b}}{c\bar{c}} \right) \cdot \rho \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{c\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(P) + i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} - 2i \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} - 4 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} + is \right) \cdot \bar{\zeta} - 2i\bar{\beta} \Big\} \wedge \zeta \\
& + \left\{ \left(ir + i \frac{b\bar{s}}{c\bar{c}} \right) \cdot \rho + \left(-i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} + 2 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} + i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} - \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} + is \right) \cdot \zeta + i\beta \right\} \wedge \bar{\zeta} \\
& + \left\{ \left(-\frac{P}{c} - 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} + s \right) \cdot \beta + \left(-i \frac{b}{c\bar{c}} + s \right) \cdot \bar{\beta} + \gamma \right\} \wedge \rho.
\end{aligned}$$

Отделяя в этом длинном выражении коэффициент при $\zeta \wedge \bar{\zeta}$ (который есть не что иное, как функция, обозначенная нами ранее через W), мы получаем явное выражение для этого единственного существенного коэффициента кручения:

$$W = \frac{1}{c\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(P) - 2i \frac{b}{c^2\bar{c}} P + 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} \bar{P} + 6 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} + 2is - 2i\bar{s}. \quad (4.13)$$

Пользуясь леммой 2.1, легко понять, что функция W вещественнозначна, как было упомянуто в предложении 4.2.

Далее, приравнивая коэффициенты при $\bullet \wedge \rho$ в двух изучаемых нами выражениях для $d\alpha$, получаем явную формулу для δ^{modified} :

$$\begin{aligned}
\delta^{\text{modified}} = & \left(\frac{1}{c^2\bar{c}} \mathcal{T}(P) - \frac{b}{c^3\bar{c}} \mathcal{L}(P) - \frac{\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(P) + \frac{s}{c} P + 2i \frac{b\bar{s}}{c\bar{c}} - 2i\bar{r} \right) \cdot \zeta \\
& + \left(i \frac{b\bar{s}}{c\bar{c}} - ir \right) \cdot \bar{\zeta} + s\alpha - \left(\frac{1}{c} P + 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} \right) \cdot \beta + s\bar{\alpha} - i \frac{b}{c\bar{c}} \bar{\beta} + ds. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Рассмотрим аналогично два выражения

$$\begin{aligned}
d\beta &= \gamma^{\text{modified}} \wedge \rho + \delta^{\text{modified}} \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha}, \\
d\beta &= d\beta_0 + \delta \wedge \rho + r d\rho + \gamma \wedge \zeta + s d\bar{\zeta}
\end{aligned} \quad (4.15)$$

для $d\beta$ согласно (4.6) и (4.4), где $d\beta_0$ находится дифференцированием β_0 из определения (3.11):

$$\begin{aligned}
d\beta_0 = & \left(-\frac{1}{c\bar{c}^2} d\bar{c} \wedge db + \frac{b}{c^2\bar{c}^2} d\bar{c} \wedge dc \right) - \left(\frac{Pb}{c^2\bar{c}} + i \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} \right) d\zeta \\
& + \left(-\frac{b}{c^2\bar{c}} dP - \frac{P}{c^2\bar{c}} db + \frac{Pb}{c^2\bar{c}^2} d\bar{c} + 2 \frac{Pb}{c^3\bar{c}} dc - i \frac{\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} db - i \frac{b}{c^2\bar{c}^2} d\bar{b} \right. \\
& \quad \left. + 2i \frac{b\bar{b}}{c^3\bar{c}^2} dc + 2i \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} d\bar{c} \right) \wedge \zeta + \left(-\frac{\bar{P}b}{c\bar{c}^2} + i \frac{b^2}{c^2\bar{c}^2} \right) d\bar{\zeta} \\
& + \left(-\frac{b}{c\bar{c}^2} d\bar{P} - \frac{\bar{P}}{c\bar{c}^2} db + \frac{\bar{P}b}{c^2\bar{c}^2} dc + 2 \frac{\bar{P}b}{c\bar{c}^3} d\bar{c} \right. \\
& \quad \left. + 2i \frac{b}{c^2\bar{c}^2} db - 2i \frac{b^2}{c^3\bar{c}^2} dc - 2i \frac{b^2}{c^2\bar{c}^3} d\bar{c} \right) \wedge \bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Выполнив (довольно длинные) вычисления, подобные проведенным выше, мы приравняем коэффициенты при $\bullet \wedge \rho$ в двух выражениях для $d\beta$ из соотношений (4.15) и находим

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{modified}} = & \left(\frac{b}{c^3 \bar{c}^2} \mathcal{T}(P) - \frac{b^2}{c^4 \bar{c}^2} \mathcal{L}(P) - \frac{b\bar{b}}{c^3 \bar{c}^3} \bar{\mathcal{L}}(P) + \frac{bs}{c^2 \bar{c}} P \right. \\ & \left. - \frac{r}{c} P + i \frac{b\bar{b}s}{c^2 \bar{c}^2} - 2i \frac{\bar{b}r}{c\bar{c}} - i \frac{b\bar{r}}{c\bar{c}} + s\bar{s} \right) \cdot \zeta \\ & + \left(\frac{b}{c^2 \bar{c}^3} \mathcal{T}(\bar{P}) - \frac{b^2}{c^3 \bar{c}^3} \mathcal{L}(\bar{P}) - \frac{b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^4} \bar{\mathcal{L}}(\bar{P}) + \frac{b\bar{s}}{c\bar{c}^2} \bar{P} - i \frac{b^2 \bar{s}}{c^2 \bar{c}^2} \right) \cdot \bar{\zeta} \\ & + r\alpha - \left(\frac{b}{c^2 \bar{c}} P + i \frac{b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} - s + \bar{s} \right) \cdot \beta + 2r\bar{\alpha} + \left(-\frac{b}{c\bar{c}^2} \bar{P} + i \frac{b^2}{c^2 \bar{c}^2} \right) \cdot \bar{\beta} + dr. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Далее для простоты и согласованности обозначений мы не будем выписывать слово “modified” в записи δ^{modified} и γ^{modified} и обозначим эти 1-формы просто через δ и γ . Подводя итог наших рассуждений, мы теперь записываем структурные уравнения (4.4) в преобразованном виде

$$\begin{aligned} d\rho &= \alpha \wedge \rho + \bar{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \bar{\beta} \wedge \rho + \bar{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta + W\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\beta &= \gamma \wedge \rho + \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha}, \\ d\bar{\alpha} &= \bar{\delta} \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \bar{\beta} - \bar{W}\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\bar{\beta} &= \bar{\gamma} \wedge \rho + \bar{\delta} \wedge \bar{\zeta} + \bar{\beta} \wedge \alpha \end{aligned} \quad (4.17)$$

с уже модифицированными формами Маурера–Картана δ и γ , заданными формулами (4.14) и (4.16), и с вещественным коэффициентом кручения W , заданной формулой (4.13).

4.2. Абсорбция-нормировка. Используя преобразования структурных уравнений (4.17), применим процедуру абсорбции-нормировки. Для этого рассмотрим подстановки

$$\begin{aligned} \delta &\mapsto \delta + p_1 \rho + q_1 \zeta + r_1 \bar{\zeta} + s_1 \alpha + t_1 \bar{\alpha} + u_1 \beta + v_1 \bar{\beta}, \\ \gamma &\mapsto \gamma + p_2 \rho + q_2 \zeta + r_2 \bar{\zeta} + s_2 \alpha + t_2 \bar{\alpha} + u_2 \beta + v_2 \bar{\beta}. \end{aligned}$$

С помощью элементарных вычислений из линейной алгебры убеждаемся в том, что единственный коэффициент кручения W , как и ожидалось, нормируем.

Нормируя этот коэффициент на нуль, мы находим $\bar{s}$ в виде

$$\bar{s} = s - \frac{i}{2} \frac{1}{c\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(P) - \frac{b}{c^2 \bar{c}} P + \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} \bar{P} - 3i \frac{b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2}. \quad (4.18)$$

Следовательно, дифференцируя это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} d\bar{s} = ds - \left\{ 3i \frac{b}{c^2 \bar{c}^2} d\bar{b} + 3i \frac{\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} db - 6i \frac{b\bar{b}}{c^3 \bar{c}^2} dc - 6i \frac{b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} d\bar{c} + \frac{P}{c^2 \bar{c}} db + \frac{b}{c^2 \bar{c}} dP \right. \\ \left. - 2 \frac{Pb}{c^3 \bar{c}} dc - \frac{Pb}{c^2 \bar{c}^2} d\bar{c} - \frac{\bar{P}}{c\bar{c}^2} d\bar{b} - \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} d\bar{P} + \frac{\bar{P}\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} dc + 2 \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^3} d\bar{c} \right. \\ \left. - \frac{i}{2c^2 \bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(P) dc - \frac{i}{2c\bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(P) d\bar{c} + \frac{i}{2c\bar{c}} d\bar{\mathcal{L}}(P) \right\}, \quad (4.19) \end{aligned}$$

где подобно равенству (4.10) выполняется

$$\begin{aligned} d(\bar{\mathcal{L}}(P)) = \left(\frac{1}{c} \mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(P)) \right) \cdot \zeta + \left(\frac{1}{\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P)) \right) \cdot \bar{\zeta} \\ + \left(-\frac{b}{c^2 \bar{c}} \mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(P)) - \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P)) + \frac{1}{c\bar{c}} \mathcal{T}(\bar{\mathcal{L}}(P)) \right) \cdot \rho. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (4.12) для db , dc в уравнение (4.19), после ряда упрощений мы получаем

$$\begin{aligned} d\bar{s} = ds + \left(-\frac{\bar{P}\bar{r}}{\bar{c}} + \frac{Pr}{c} - 9 \frac{b^2 \bar{b}^2}{c^4 \bar{c}^4} + \frac{\mathcal{L}(P)b^2}{c^4 \bar{c}^2} + \frac{PPb^2}{c^4 \bar{c}^2} + \frac{\bar{P}P\bar{b}^2}{c^2 \bar{c}^4} - \frac{\bar{b}^2 \bar{\mathcal{L}}(\bar{P})}{c^2 \bar{c}^4} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2 \bar{c}^2} + i \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))b}{c^3 \bar{c}^2} + i \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} - 3 \frac{\mathcal{L}(\bar{P})b\bar{b}}{c^3 \bar{c}^3} - 2 \frac{Pbs}{c^2 \bar{c}} - 2 \frac{P\bar{P}b\bar{b}}{c^3 \bar{c}^3} \right. \\ \left. + 2 \frac{\bar{P}\bar{b}s}{c\bar{c}^2} + i \frac{P\mathcal{L}(\bar{P})b}{c^3 \bar{c}^2} - i \frac{\mathcal{L}(\bar{P})s}{c\bar{c}} - i \frac{\bar{P}\mathcal{L}(\bar{P})\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} - \frac{i}{2} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))b}{c^3 \bar{c}^2} + 3i \frac{\bar{b}r}{c\bar{c}} \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \frac{\mathcal{T}(\bar{\mathcal{L}}(P))}{c^2 \bar{c}^2} - 6i \frac{\bar{P}b\bar{b}^2}{c^3 \bar{c}^4} + 3i \frac{b\bar{r}}{c\bar{c}} - 6 \frac{b\bar{b}s}{c^2 \bar{c}^2} + 6i \frac{Pb^2 \bar{b}}{c^4 \bar{c}^3} - \frac{i}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c^2 \bar{c}^3} \right) \cdot \rho \\ + \left(\frac{Ps}{c} - \frac{i}{2} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c^2 \bar{c}} - \frac{\mathcal{L}(P)b}{c^3 \bar{c}} + 3i \frac{\bar{b}s}{c\bar{c}} + \frac{i}{2} \frac{P\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2 \bar{c}} \right. \\ \left. + 3 \frac{b\bar{b}^2}{c^3 \bar{c}^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} - 3i \frac{Pb\bar{b}}{c^3 \bar{c}^2} \right) \cdot \zeta \\ + \left(-\frac{\bar{P}^2 \bar{b}}{c\bar{c}^3} + 6 \frac{b^2 \bar{b}}{c^3 \bar{c}^3} + i \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}}{c\bar{c}^2} + \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})}{c\bar{c}^3} + 3i \frac{bs}{c\bar{c}} - 3i \frac{Pb^2}{c^3 \bar{c}^2} \right. \\ \left. - \frac{\bar{P}s}{c} + 3i \frac{\bar{P}b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} + \frac{\mathcal{L}(\bar{P})b}{c^2 \bar{c}^2} + \frac{P\bar{P}b}{c^2 \bar{c}^2} - \frac{i}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c\bar{c}^2} \right) \cdot \bar{\zeta} \\ + \left(3i \frac{b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} + \frac{i}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})}{c\bar{c}} - \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} + \frac{Pb}{c^2 \bar{c}} \right) \cdot \alpha + \left(-\frac{P}{c} - 3i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} \right) \cdot \beta \\ + \left(\frac{3i b\bar{b}}{c^2 \bar{c}^2} + \frac{i}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})}{c\bar{c}} - \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} + \frac{Pb}{c^2 \bar{c}} \right) \cdot \bar{\alpha} + \left(\frac{\bar{P}}{c} - 3i \frac{b}{c\bar{c}} \right) \cdot \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Сравнивая выражения для 1-формы δ и ее сопряженной (см. (4.14)), мы убеждаемся в том, что эта формула для $d\bar{s}$ в терминах ds и поднятых 1-форм ρ , ζ , $\bar{\zeta}$, α , β , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ позволяет нам выразить $\bar{\delta}$ через δ и поднятый корепер (ср. с (4.14)). При этом наши вычисления показывают, что коэффициенты

при $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ после упрощений тождественно обращаются в нуль, так что имеем

$$\bar{\delta} := \delta + iW_1\rho + W_2\zeta - \bar{W}_2\bar{\zeta} \quad (4.21)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} W_1 : & -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}(\bar{\mathcal{L}}(P))}{c^2\bar{c}^2} + \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}((\bar{P}))b}{c^3\bar{c}^2} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} \\ & + \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))b}{c^3\bar{c}^2} - i \frac{\mathcal{L}(P)b^2}{c^4\bar{c}^2} + i \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})\bar{b}^2}{c^2\bar{c}^4} \\ & + \left(-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})}{c\bar{c}} + i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} - 3 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} - i \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} \right) s + \left(3 \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} - i \frac{P}{c} \right) r \\ & + \left(-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})}{c\bar{c}} + i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} - 3 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} - i \frac{\bar{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} \right) \bar{s} + \left(3 \frac{b}{c\bar{c}} + i \frac{\bar{P}}{c} \right) \bar{r}, \\ W_2 : & i \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))}{c^2\bar{c}} - \frac{3}{2} i \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c^2\bar{c}} + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} + \frac{i}{2} \frac{P\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2\bar{c}} - 3i \frac{Pb\bar{b}}{c^3\bar{c}^2} + 3 \frac{b\bar{b}^2}{c^3\bar{c}^3} + 3i\bar{r}. \end{aligned}$$

Отметим, между прочим, что первый коэффициент кручения W_1 веществен.

Далее, наше определение $\bar{s}$ по формуле (4.18) изменяет выражения для $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, так что они уже больше не являются сопряженными к α и β . Поэтому мы заменим обозначения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ на $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соответственно. Подстановка полученного нового выражения для $\bar{\delta}$ в последнее структурное уравнение (4.17) преобразует его к виду

$$\begin{aligned} d\rho &= \alpha \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \tilde{\beta} \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\ d\beta &= \gamma \wedge \rho + \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \tilde{\alpha}, \\ d\tilde{\alpha} &= \delta \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \tilde{\beta} + W_2\zeta \wedge \rho - \bar{W}_2\bar{\zeta} \wedge \rho, \\ d\tilde{\beta} &= \bar{\gamma} \wedge \rho + \delta \wedge \bar{\zeta} + \tilde{\beta} \wedge \alpha + iW_1\rho \wedge \bar{\zeta} + W_2\zeta \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3. Абсорбция-нормировка структурного уравнения (4.22). Чтобы найти существенные коэффициенты кручения, мы, как и выше, делаем подстановки

$$\begin{aligned} \delta &\mapsto \delta + p_1\rho + q_1\zeta + r_1\bar{\zeta} + s_1\alpha + t_1\tilde{\alpha} + u_1\beta + v_1\bar{\beta}, \\ \gamma &\mapsto \gamma + p_2\rho + q_2\zeta + r_2\bar{\zeta} + s_2\alpha + t_2\tilde{\alpha} + u_2\beta + v_2\bar{\beta}. \end{aligned}$$

Они преобразуют структурное уравнение (4.22) к виду

$$\begin{aligned} d\alpha &= \delta \wedge \rho + q_1\zeta \wedge \rho + r_1\bar{\zeta} \wedge \rho + s_1\alpha \wedge \rho + t_1\tilde{\alpha} \wedge \rho + u_1\beta \wedge \rho \\ &\quad + v_1\bar{\beta} \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \tilde{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\ d\beta &= \gamma \wedge \rho + \delta \wedge \zeta + (q_2 - p_1)\zeta \wedge \rho + r_2\bar{\zeta} \wedge \rho + s_2\alpha \wedge \rho + t_2\tilde{\alpha} \wedge \rho + u_2\beta \wedge \rho \\ &\quad + v_2\bar{\beta} \wedge \rho + r_1\bar{\zeta} \wedge \zeta + s_1\alpha \wedge \zeta + t_1\tilde{\alpha} \wedge \zeta + u_1\beta \wedge \zeta + v_1\bar{\beta} \wedge \zeta + \beta \wedge \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{\alpha} &= \delta \wedge \rho + (q_1 + W_2)\zeta \wedge \rho + (r_1 - \overline{W}_2)\bar{\zeta} \wedge \rho + s_1\alpha \wedge \rho + t_1\tilde{\alpha} \wedge \rho \\
&\quad + u_1\beta \wedge \rho + v_1\tilde{\beta} \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \tilde{\beta}, \\
d\tilde{\beta} &= \bar{\gamma} \wedge \rho + \delta \wedge \bar{\zeta} + (\bar{q}_2 - p_1 - iW_1)\bar{\zeta} \wedge \rho + \bar{r}_2\zeta \wedge \rho + \bar{s}_2\tilde{\alpha} \wedge \rho + \bar{t}_2\alpha \wedge \rho + \bar{u}_2\tilde{\beta} \wedge \rho \\
&\quad + \bar{v}_2\beta \wedge \rho + (q_1 + W_2)\zeta \wedge \bar{\zeta} + s_1\alpha \wedge \bar{\zeta} + t_1\tilde{\alpha} \wedge \bar{\zeta} + u_1\beta \wedge \bar{\zeta} + v_1\tilde{\beta} \wedge \bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Чтобы обнулить как можно больше получаемых (модифицированных) коэффициентов кручения, необходимо решить следующую систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
0 &= q_1 = r_1 = s_1 = t_1 = u_1 = v_1, \quad 0 = r_2 = s_2 = t_2 = u_2 = v_2, \\
0 &= q_2 - p_1, \quad 0 = q_1 + W_2, \quad 0 = r_1 - \overline{W}_2, \quad 0 = \bar{q}_2 - p_1 - iW_1.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Легко понять, что после необходимого выбора

$$\begin{aligned}
q_1 &= 0, \quad r_i = s_i = t_i = u_i = v_i = 0, \quad i = 1, 2, \\
q_2 &= p_1, \quad \text{Im}(p_1) = -\frac{1}{2}W_1,
\end{aligned}$$

однородная система (4.23) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$0 \equiv W_2. \tag{4.24}$$

Иными словами, W_2 – единственное нормируемое выражение на этом шаге. Из выражения для этой функции убеждаемся в том, что она будет нормирована на ноль, как только мы положим

$$r := -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}}(\overline{P}))}{c\bar{c}^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{L}}(P))}{c\bar{c}^2} - \frac{i}{2} \frac{\overline{\mathcal{L}}(P)b}{c^2\bar{c}^2} - \frac{1}{6} \frac{\overline{P}\overline{\mathcal{L}}(P)}{c\bar{c}^2} + \frac{\overline{P}b\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} - i \frac{b^2\bar{b}}{c^3\bar{c}^3}. \tag{4.25}$$

С учетом выражения (4.25), которое понижает размерность группы, единственный оставшийся (несущественный) коэффициент кручения W_1 принимает вид

$$\begin{aligned}
W_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}(\overline{\mathcal{L}}(P))}{c^2\bar{c}^2} + \frac{\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\overline{P}))b}{c^3\bar{c}^2} + \frac{i}{3} \frac{P\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}}(\overline{P}))}{c^2\bar{c}^2} - \frac{i}{3} \frac{\overline{P}\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))}{c^2\bar{c}^2} \\
&\quad + \frac{i}{2} \frac{\overline{P}\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}}(P))}{c^2\bar{c}^2} - \frac{i}{2} \frac{P\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\overline{P}))}{c^2\bar{c}^2} + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}}(P))b}{c^3\bar{c}^2} + 3i \frac{\overline{\mathcal{L}}(P)b\bar{b}}{c^3\bar{c}^3} + \frac{i}{6} \frac{P\overline{P}\mathcal{L}(\overline{P})}{c^2\bar{c}^2} \\
&\quad - \frac{i}{6} \frac{P\overline{P}\overline{\mathcal{L}}(P)}{c^2\bar{c}^2} + \frac{i}{4} \frac{\mathcal{L}(\overline{P})\overline{\mathcal{L}}(P)}{c^2\bar{c}^2} + i \frac{\overline{\mathcal{L}}(\overline{P})\bar{b}^2}{c^2\bar{c}^4} - i \frac{\mathcal{L}(P)b^2}{c^4\bar{c}^2} - \frac{\overline{P}\overline{\mathcal{L}}(P)\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} \\
&\quad - \frac{\overline{P}\mathcal{L}(\overline{P})\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} + 2i \frac{P\overline{P}b\bar{b}}{c^3\bar{c}^3} - i \frac{\overline{P}^2\bar{b}^2}{c^2\bar{c}^4} - 4 \frac{\overline{P}b\bar{b}^2}{c^3\bar{c}^4} - i \frac{P^2b^2}{c^4\bar{c}^2} + 8 \frac{Pb^2\bar{b}}{c^4\bar{c}^3} + 9i \frac{b^2\bar{b}^2}{c^4\bar{c}^4} \\
&\quad + \left(-\frac{\mathcal{L}(\overline{P})}{c\bar{c}} + 2i \frac{Pb}{c^2\bar{c}} - 2i \frac{\overline{P}\bar{b}}{c\bar{c}^2} - 6 \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^2} \right) s.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Определив таким образом групповой параметр r , мы должны заново вычислить 1-форму γ , которая теперь может быть выражена линейной комбинацией элементов $\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ поднятого корепера, независимо от dr (ср. с (4.16)).

Для этого нам прежде всего потребуется еще и выражение для dr , а не только для r .

Дифференцируя функцию r из (4.25), получаем формулу

$$\begin{aligned} dr = & -\frac{1}{3c\bar{c}^2} d\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})) + \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{3c^2\bar{c}^2} dc + \frac{2\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{3c\bar{c}^3} d\bar{c} + \frac{1}{2c\bar{c}^2} d\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P)) \\ & - \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))}{2c^2\bar{c}^2} dc - \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))}{c\bar{c}^3} d\bar{c} - \frac{i}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(P)}{c^2\bar{c}^2} db - \frac{i}{2} \frac{b}{c^2\bar{c}^2} d\bar{\mathcal{L}}(P) \\ & + i \frac{\bar{\mathcal{L}}(P)b}{c^3\bar{c}^2} dc + i \frac{\bar{\mathcal{L}}(P)b}{c^2\bar{c}^3} d\bar{c} - \frac{\bar{P}}{6c\bar{c}^2} d\bar{\mathcal{L}}(P) - \frac{\bar{\mathcal{L}}(P)}{6c\bar{c}^2} d\bar{P} + \frac{\bar{P}\bar{\mathcal{L}}(P)}{6c^2\bar{c}^2} dc \\ & + \frac{\bar{P}\bar{\mathcal{L}}(P)}{3c\bar{c}^3} d\bar{c} + \frac{b\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} d\bar{P} + \frac{\bar{P}b}{c^2\bar{c}^3} d\bar{b} + \frac{\bar{P}\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} db - 2 \frac{\bar{P}b\bar{b}}{c^3\bar{c}^3} dc \\ & - 3 \frac{\bar{P}b\bar{b}}{c^2\bar{c}^4} d\bar{c} - 2i \frac{b\bar{b}}{c^3\bar{c}^3} db - i \frac{b^2}{c^3\bar{c}^3} d\bar{b} + 3i \frac{b^2\bar{b}}{c^4\bar{c}^3} dc + 3i \frac{b^2\bar{b}}{c^3\bar{c}^4}, \end{aligned}$$

в которой, аналогично выражениям (4.10) и (4.20), надо заменить дифференциалы по правилу

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})) &= \left(\frac{1}{c} \mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) \right) \cdot \zeta + \left(\frac{1}{\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) \right) \cdot \bar{\zeta} \\ &\quad + \left(-\frac{b}{c^2\bar{c}} \mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) - \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) + \frac{1}{c\bar{c}} \mathcal{T}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) \right) \cdot \rho, \\ d\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P)) &= \left(\frac{1}{c} \mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))) \right) \cdot \zeta + \left(\frac{1}{\bar{c}} \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))) \right) \cdot \bar{\zeta} \\ &\quad + \left(-\frac{b}{c^2\bar{c}} \mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))) - \frac{\bar{b}}{c\bar{c}^2} \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))) + \frac{1}{c\bar{c}} \mathcal{T}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P))) \right) \cdot \rho. \end{aligned}$$

Теперь с помощью (4.12) можно выразить dr через поднятый корепер ρ , ζ , $\bar{\zeta}$, α , β , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$. Поскольку получившаяся формула весьма длинна, мы не воспроизводим здесь промежуточные вычисления, а сразу утверждаем, что замена r и dr в выражении (4.16) для формы Маурера–Картана γ приводит (4.16) к виду

$$\gamma := V_1\rho + V_2\zeta + V_3\bar{\zeta}, \quad (4.27)$$

где функции-коэффициенты заданы формулами

$$\begin{aligned} V_1 := & -\frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{T}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))}{c^2\bar{c}^3} + \frac{\mathcal{T}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(P)))}{c^2\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))b}{c^3\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))\bar{b}}{c^2\bar{c}^4} \\ & - \frac{1}{2} \frac{b\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c^2\bar{c}^4} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P})))b}{c^3\bar{c}^3} + \frac{i}{6} \frac{\bar{P}\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c^2\bar{c}^3} - \frac{i}{6} \frac{\bar{P}\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c^2\bar{c}^3} \\ & - 3i \frac{b^2\bar{b}s}{c^3\bar{c}^3} - \frac{i}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))b^2}{c^4\bar{c}^3} - \frac{5i}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))b\bar{b}}{c^3\bar{c}^4} - \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))s}{c\bar{c}^2} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))Pb}{c^3\bar{c}^3} \\ & - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{P}b}{c^2\bar{c}^4} + \frac{3}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))s}{c\bar{c}^2} - \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))Pb}{c^3\bar{c}^3} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}b}{c^2\bar{c}^4} \\ & - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}b}{c^3\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))\bar{P}b}{c^3\bar{c}^3} + i \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))b^2}{c^4\bar{c}^3} + \frac{7i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))b\bar{b}}{c^3\bar{c}^4} \\ & - \frac{i}{12} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2\bar{c}^3} - \frac{3i}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})bs}{c^2\bar{c}^2} - 5 \frac{b^3\bar{b}^2}{c^5\bar{c}^5} - \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}s}{c\bar{c}^2} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})\bar{b}}{c^2\bar{c}^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})P\bar{P}b}{c^3\bar{c}^3} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}^2\bar{b}}{c^2\bar{c}^4} - \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})bb^2}{c^3\bar{c}^5} - 4 \frac{\mathcal{L}(\bar{P})b^2\bar{b}}{c^4\bar{c}^4} + 3 \frac{\bar{P}bb\bar{s}}{c^2\bar{c}^3} \\
& + \frac{\bar{P}^2b\bar{b}^2}{c^3\bar{c}^5} - \frac{1}{12} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\mathcal{L}(\bar{P})b}{c^3\bar{c}^3} - 3 \frac{P\bar{P}b^2\bar{b}}{c^4\bar{c}^4} + 3i \frac{Pb^3\bar{b}}{c^5\bar{c}^4} + \frac{5i}{6} \frac{P\mathcal{L}(\bar{P})b^2}{c^4\bar{c}^3} \\
& - 6i \frac{\bar{P}b^2\bar{b}^2}{c^4\bar{c}^5} + \frac{i}{12} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}}{c^2\bar{c}^3} - \frac{5i}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}b\bar{b}}{c^3\bar{c}^4}, \\
V_2 := & \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c^2\bar{c}^2} - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{c^2\bar{c}^2} - \frac{P\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c^2\bar{c}^2} + \frac{2}{3} \frac{P\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{c^2\bar{c}^2} \\
& - \frac{2i}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))b}{c^3\bar{c}^2} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}}{c^2\bar{c}^2} - i \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} + \frac{2i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} s^2 - \frac{\mathcal{L}(\bar{P})b^2}{c^4\bar{c}^2} \\
& + \frac{1}{3} \frac{P\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}}{c^2\bar{c}^2} + \frac{i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}\bar{b}}{c^2\bar{c}^3} + \frac{2i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})Pb}{c^3\bar{c}^2} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2\bar{c}^2} - 2i \frac{Pb^2\bar{b}}{c^4\bar{c}^3} + 2 \frac{b^2\bar{b}^2}{c^4\bar{c}^4}, \\
V_3 := & -\frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} - \frac{7}{6} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} \\
& - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}^2}{c\bar{c}^3}.
\end{aligned}$$

Отметим, что V_2 зависит от группового параметра s , а V_1 и V_3 не зависят.

Подстановка формулы (4.27) для γ в структурное уравнение (4.22) преобразует его к следующему виду (напомним, что W_2 становится нулем в силу определения r):

$$\begin{aligned}
d\rho &= \alpha \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\
d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\
d\bar{\zeta} &= \tilde{\beta} \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\
d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\
d\beta &= \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \tilde{\alpha} + V_2\zeta \wedge \rho + V_3\bar{\zeta} \wedge \rho = (\delta - V_2\rho) \wedge \zeta + \beta \wedge \tilde{\alpha} + V_3\bar{\zeta} \wedge \rho, \\
d\tilde{\alpha} &= \delta \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \tilde{\beta}, \\
d\tilde{\beta} &= \delta \wedge \bar{\zeta} + \tilde{\beta} \wedge \alpha + iW_1\rho \wedge \bar{\zeta} + \bar{V}_3\zeta \wedge \rho + \bar{V}_2\bar{\zeta} \wedge \rho \\
&= (\delta + iW_1\rho - \bar{V}_2\rho) \wedge \bar{\zeta} + \tilde{\beta} \wedge \alpha + \bar{V}_3\zeta \wedge \rho.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

К этому моменту мы имеем только один групповой параметр s . Полная абсорбция станет возможной в строгом смысле, только если выполняется следующее, на первый взгляд неправдоподобное, тождество:

$$V_2 = -iW_1 + \bar{V}_2, \tag{4.29}$$

так как оно позволило бы нам переобозначить

$$\delta := \delta - V_2\rho = \delta + (iW_1 - \bar{V}_2)\rho,$$

и подстановка этого выражения вместо δ не оказала бы влияния на предшествующие внешние сомножители $\delta \wedge \rho$ в $d\alpha$ и $d\tilde{\alpha}$.

Покажем, что тождество (4.29) действительно выполняется. После упрощений имеем

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 - iW_1 - V_2 = & \frac{1}{3c^2\bar{c}^2} (-3\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))) + 3\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))) + \mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))) \\ & - \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))) + P\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})) - P\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})) - \bar{P}\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P})) + \bar{P}\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Итак, чисто мнимое выражение (4.30) чудесным образом упростилось и не содержит группового параметра s . Чтобы показать, что оно тождественно равно нулю, мы применим следующий результат.

ЛЕММА 4.4 [1, предложение 6.1]. Пусть H_1, H_2 – такие векторные поля на многообразии M , что

$$[H_1, [H_1, H_2]] = \Phi_1[H_1, H_2], \quad [H_2, [H_1, H_2]] = \Phi_2[H_1, H_2]$$

для некоторых функций Φ_1, Φ_2 . Тогда выполняются следующие четыре тождества для производных третьего порядка:

$$\begin{aligned} 0 \equiv & -H_1(H_2(H_1(\Phi_2))) + 2H_2(H_1(H_1(\Phi_2))) - H_2(H_2(H_1(\Phi_1))) \\ & - \Phi_2 H_1(H_2(\Phi_1)) + \Phi_2 H_2(H_1(\Phi_1)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} 0 \equiv & -H_2(H_1(H_1(\Phi_2))) + 2H_1(H_2(H_1(\Phi_2))) - H_1(H_1(H_2(\Phi_2))) \\ & - \Phi_1 H_2(H_1(\Phi_2)) + \Phi_1 H_1(H_2(\Phi_2)), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} 0 \equiv & -H_1(H_1(H_1(\Phi_2))) + 2H_1(H_2(H_1(\Phi_1))) - H_2(H_1(H_1(\Phi_1))) \\ & + \Phi_1 H_1(H_1(\Phi_2)) - \Phi_1 H_2(H_1(\Phi_1)), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} 0 \equiv & H_2(H_2(H_1(\Phi_2))) - 2H_2(H_1(H_2(\Phi_2))) + H_1(H_2(H_2(\Phi_2))) \\ & - \Phi_2 H_2(H_1(\Phi_2)) + \Phi_2 H_1(H_2(\Phi_2)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Выражение (4.30) для функции $\bar{V}_2 - iW_1 - V_2$ тождественно равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая уравнение (4.32) из (4.31), имеем

$$\begin{aligned} 0 \equiv & 3H_2(H_1(H_1(\Phi_2))) - 3H_1(H_2(H_1(\Phi_2))) - H_2(H_2(H_1(\Phi_1))) + H_1(H_1(H_2(\Phi_2))) \\ & - \Phi_2 H_1(H_2(\Phi_1)) + \Phi_2 H_2(H_1(\Phi_1)) + \Phi_1 H_2(H_1(\Phi_2)) - \Phi_1 H_1(H_2(\Phi_2)). \end{aligned}$$

Остается положить в этом уравнении $\Phi_1 := P$, $\Phi_2 := \bar{P}$ и $H_1 = \mathcal{L}$, $H_2 = \bar{\mathcal{L}}$, учитывая условие вещественности $\mathcal{L}(\bar{P}) = \bar{\mathcal{L}}(P)$.

Полученное таким образом равенство

$$\delta - V_2\rho = \delta + iW_1\rho - \bar{V}_2\rho$$

позволяет сделать подстановку

$$\delta \mapsto \delta - V_2\rho.$$

Переобозначая единственный коэффициент кручения V_3 через $\mathfrak{J}$, получаем структурные уравнения (4.28) в упрощенном виде:

$$d\rho = \alpha \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta},$$

$$\begin{aligned}
d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\
d\bar{\zeta} &= \tilde{\beta} \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\
d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\
d\beta &= \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \bar{\alpha} + \mathfrak{I}\bar{\zeta} \wedge \rho, \\
d\tilde{\alpha} &= \delta \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \tilde{\beta}, \\
d\tilde{\beta} &= \delta \wedge \bar{\zeta} + \tilde{\beta} \wedge \alpha + \mathfrak{I}\zeta \wedge \rho,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

где единственная (модифицированная) форма Маурера–Картана δ задается (после упрощений) формулой

$$\begin{aligned}
\delta &= ds + \left(-s^2 + \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))}{c^2 \bar{c}^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c^2 \bar{c}^2} - \frac{2}{3} \frac{P\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{c^2 \bar{c}^2} + \frac{2i}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))b}{c^3 \bar{c}^2} \right. \\
&\quad + \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))P}{c^2 \bar{c}^2} + i \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} + \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}}{c^2 \bar{c}^2} - \frac{2i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} - \frac{2i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})Pb}{c^3 \bar{c}^2} \\
&\quad + \frac{\mathcal{L}(P)b^2}{c^4 \bar{c}^2} - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})P\bar{P}}{c^2 \bar{c}^2} - \frac{i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}\bar{b}}{c^2 \bar{c}^3} + \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\mathcal{L}(\bar{P})}{c^2 \bar{c}^2} - 2 \frac{b^2 \bar{b}^2}{c^4 \bar{c}^4} + 2i \frac{Pb^2 \bar{b}}{c^4 \bar{c}^3} \Big) \cdot \rho \\
&\quad + \left(\frac{Ps}{c} + 2i \frac{s\bar{b}}{c\bar{c}} - \frac{i}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(P))}{c^2 \bar{c}} + \frac{i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})P}{c^2 \bar{c}} - \frac{\mathcal{L}(P)b}{c^3 \bar{c}} + 2 \frac{b\bar{b}^2}{c^3 \bar{c}^3} - 2i \frac{Pb\bar{b}}{c^3 \bar{c}^2} \right) \cdot \zeta \\
&\quad + \left(i \frac{bs}{c\bar{c}} - \frac{i}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))}{c\bar{c}^2} + \frac{i}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))}{c\bar{c}^2} + \frac{i}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}}{c\bar{c}^2} + 2 \frac{b^2 \bar{b}}{c^3 \bar{c}^3} - i \frac{Pb^2}{c^3 \bar{c}^2} \right) \cdot \bar{\zeta} \\
&\quad + s\alpha - \left(\frac{P}{c} + 2i \frac{\bar{b}}{c\bar{c}} \right) \cdot \beta + s\tilde{\alpha} - i \frac{b}{c\bar{c}} \tilde{\beta}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Как отмечалось, коэффициент $\mathfrak{I}$ не зависит от единственного оставшегося группового параметра s и, тем самым, не может быть нормирован. Следовательно, этот коэффициент кручения действительно является *существенным инвариантом* задачи.

4.4. Второе продолжение. В сложившейся ситуации, когда один групповой параметр s остается неопределенным, а единственный существенный коэффициент кручения $\mathfrak{I}$ ненормируем, мы должны еще раз продолжить последние структурные уравнения (4.35), причисляя групповой параметр s к множеству базовых переменных $z, \bar{z}, u, b, \bar{b}, c, \bar{c}$ и добавляя 1-форму δ к кореперу $\{\rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}\}$. Прежде чем сделать этот шаг, докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.5. *Указанная в (4.36) модифицированная 1-форма δ однозначно определяется структурными уравнениями (4.35).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ и δ' – две формы, удовлетворяющие уравнениям (4.35). Тогда получаем

$$0 \equiv (\delta - \delta') \wedge \rho, \quad 0 \equiv (\delta - \delta') \wedge \zeta.$$

По лемме Картана отсюда вытекает, что $\delta - \delta'$ должно быть комбинацией, с одной стороны, только ρ , а с другой – только ζ . Поэтому $\delta - \delta' = 0$.

Лемма 4.5 означает, что при следующем продолжении нам не встретятся никаких новых (продолженных) групповых параметров, т. е. продолженная структурная группа автоматически сведется к $\{e\}$ -структуре. Тем самым, нам остается только вычислить $d\delta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Внешний дифференциал $d\delta$ имеет вид*

$$d\delta = \delta \wedge \alpha + \delta \wedge \bar{\alpha} + i\beta \wedge \bar{\beta} + \mathfrak{T}\rho \wedge \zeta + \bar{\mathfrak{T}}\rho \wedge \bar{\zeta} \quad (4.37)$$

для некоторой комплекснозначной функции $\mathfrak{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя $d\alpha$ из (4.35), имеем

$$0 \equiv d\delta \wedge \rho - \delta \wedge \alpha \wedge \rho - \delta \wedge \bar{\alpha} \wedge \rho - i\delta \wedge \zeta \wedge \bar{\zeta}_a - 2i\delta \wedge \bar{\zeta} \wedge \zeta_a - 2i\bar{\beta} \wedge \alpha \wedge \zeta_b \\ + 2i\bar{\beta} \wedge \alpha \wedge \zeta_b + 2i\bar{\beta} \wedge \beta \wedge \rho_c - i\delta \wedge \zeta \wedge \bar{\zeta}_a - i\beta \wedge \bar{\alpha} \wedge \bar{\zeta}_d + i\beta \wedge \bar{\alpha} \wedge \bar{\zeta}_d + i\beta \wedge \bar{\beta} \wedge \rho_c,$$

где подчеркнутые члены в сумме дают нуль. Получаем простое равенство

$$(d\delta - \delta \wedge \alpha - \delta \wedge \bar{\alpha} - i\beta \wedge \bar{\beta}) \wedge \rho \equiv 0. \quad (4.38)$$

С другой стороны, дифференцируя $d\beta$ и $d\bar{\beta}$, мы после простых преобразований находим, что

$$(d\delta - \delta \wedge \alpha - \delta \wedge \bar{\alpha} - i\beta \wedge \bar{\beta}) \wedge \zeta + \underbrace{(d\mathfrak{T} \wedge \bar{\zeta} - 3\mathfrak{T}\bar{\alpha} \wedge \bar{\zeta} + \mathfrak{T}\alpha \wedge \bar{\zeta})}_{\Gamma} \wedge \rho \equiv 0, \\ (d\delta - \delta \wedge \alpha - \delta \wedge \bar{\alpha} - i\beta \wedge \bar{\beta}) \wedge \bar{\zeta} + \underbrace{(d\bar{\mathfrak{T}} \wedge \zeta - 3\bar{\mathfrak{T}}\alpha \wedge \zeta + \bar{\mathfrak{T}}\bar{\alpha} \wedge \zeta)}_{\bar{\Gamma}} \wedge \rho \equiv 0. \quad (4.39)$$

Применяя лемму Картана (лемму 4.1) к равенству (4.38), имеем

$$d\delta = \delta \wedge \alpha + \delta \wedge \bar{\alpha} + i\beta \wedge \bar{\beta} + \xi \wedge \rho \quad (4.40)$$

для некоторой 1-формы ξ . Подставив это выражение для $d\delta$ в (4.39), получим

$$(\xi \wedge \zeta - \Gamma) \wedge \rho = 0, \quad (\xi \wedge \bar{\zeta} - \bar{\Gamma}) \wedge \rho = 0. \quad (4.41)$$

Применяя лемму Картана к первому уравнению в (4.41), имеем

$$\xi \wedge \zeta - \Gamma = \mathcal{A} \wedge \rho$$

для некоторой 1-формы $\mathcal{A}$, или, эквивалентно,

$$\xi \wedge \zeta - (d\mathfrak{T} - 3\mathfrak{T}\bar{\alpha} + \mathfrak{T}\alpha) \wedge \bar{\zeta} - \mathcal{A} \wedge \rho = 0.$$

Еще раз применяя лемму Картана, мы выводим отсюда, что

$$\xi = A_1\zeta + A_2\bar{\zeta} + A_3\rho \quad (4.42)$$

для некоторых функций A_1, A_2, A_3 . Вычитание сопряженного ко второму уравнению в (4.41) из первого дает равенство

$$(\xi \wedge \zeta - \bar{\xi} \wedge \bar{\zeta}) \wedge \rho \equiv 0,$$

согласно которому найдется 1-форма $\mathcal{C}$ такая, что

$$(\xi - \bar{\xi}) \wedge \zeta + \mathcal{C} \wedge \rho \equiv 0.$$

Опять применяя лемму Картана, получаем следующее равенство для некоторых комплекснозначных функций B_1, B_2 :

$$\xi - \bar{\xi} = B_1 \zeta + B_2 \rho. \quad (4.43)$$

Левая часть равенства (4.43) чисто мнимая, значит, коэффициент при ζ равен нулю: $B_1 = 0$. С другой стороны, из (4.42) имеем

$$\xi - \bar{\xi} = (A_1 - \bar{A}_2)\zeta + (A_2 - \bar{A}_1)\bar{\zeta} + (A_3 - \bar{A}_3)\rho.$$

Сравнивая последнее равенство с (4.43), получим $A_2 = \bar{A}_1$. Поэтому, обозначая $-A_1$ через $\mathfrak{T}$, мы выводим из (4.42) следующее выражение для 2-формы $\xi \wedge \rho$:

$$\xi \wedge \rho = \mathfrak{T} \rho \wedge \zeta + \bar{\mathfrak{T}} \rho \wedge \bar{\zeta}.$$

Для завершения доказательства достаточно подставить последнее выражение в равенство (4.40).

Добавляя полученный результат дифференцирования новой поднятой 1-формы δ к предыдущим структурным уравнениям, мы получаем новые структурные уравнения

$$\begin{aligned} d\rho &= \alpha \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \beta \wedge \rho + \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \tilde{\beta} \wedge \rho + \tilde{\alpha} \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= \delta \wedge \rho + 2i\zeta \wedge \bar{\beta} + i\bar{\zeta} \wedge \beta, \\ d\beta &= \delta \wedge \zeta + \beta \wedge \tilde{\alpha} + \mathfrak{I}\bar{\zeta} \wedge \rho, \\ d\tilde{\alpha} &= \delta \wedge \rho - 2i\bar{\zeta} \wedge \beta - i\zeta \wedge \tilde{\beta}, \\ d\tilde{\beta} &= \delta \wedge \bar{\zeta} + \tilde{\beta} \wedge \alpha + \bar{\mathfrak{I}}\zeta \wedge \rho, \\ d\delta &= \delta \wedge \alpha + \delta \wedge \tilde{\alpha} + i\beta \wedge \tilde{\beta} + \mathfrak{T}\rho \wedge \zeta + \bar{\mathfrak{T}}\rho \wedge \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Эти уравнения задают окончательную $\{e\}$ -структуру.

Осталось найти явную формулу для нового коэффициента $\mathfrak{T}$. Для этого используется та же процедура, что и для вывода формулы (4.13) коэффициента W . Сначала дифференцированием равенства (4.36) находится внешний дифференциал формы δ . К сожалению, ответ получается длинным (почти две страницы), поэтому мы его не приводим.

Другой, более короткий, путь состоит в тщательном сравнении указанного выражения для $d\delta$ с тем, которое приведено в (4.44). Приравнивание коэффициентов при $\rho \wedge \zeta$ дает компактное выражение для $\mathfrak{T}$, если воспользоваться равенствами (4.31)–(4.34) и их производными первого порядка относительно операторов $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathcal{L}}$. А именно, оказывается, что искомая функция $\mathfrak{T}$ выражается через существенный инвариант $\mathfrak{I}$ следующим образом:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{c} \left(\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{I}}) - \bar{P}\bar{\mathfrak{I}} \right) - i \frac{b}{cc} \bar{\mathfrak{I}}.$$

Теперь уже стандартно доказывается

ТЕОРЕМА 4.1. *Задача эквивалентности для строго псевдовыпуклых невырожденных по Леви гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ имеет единственный существующий примарный инвариант, а именно*

$$\mathfrak{I} = -\frac{1}{3} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{L}}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P})))}{c\bar{c}^3} - \frac{7}{6} \frac{\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(\bar{P}))\bar{P}}{c\bar{c}^3} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{\mathcal{L}}(\bar{P})}{c\bar{c}^3} + \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}(\bar{P})\bar{P}^2}{c\bar{c}^3}. \quad (4.45)$$

Входящая в это выражение фундаментальная функция $P := P(z, \bar{z}, u)$ явно выражается через функцию φ , графиком которой локально задается наша гиперповерхность, по формуле

$$P := \frac{\ell_z - \ell A_u + A \ell_u}{\ell},$$

где

$$A := \frac{i\varphi_z}{1 - i\varphi_u}, \quad \ell := i(\bar{A}_z + A\bar{A}_u - A_{\bar{z}} - \bar{A}A_u).$$

В частности, указанный инвариант обращается в нуль тогда и только тогда, когда гиперповерхность M^3 биголоморфно эквивалентна модельной сфере Гейзенберга, определяемой как график функции $v = z\bar{z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо лишь заметить, что при выборе

$$\varphi(z, \bar{z}, u) = z\bar{z}$$

имеем $P \equiv 0$ и, следовательно, $\mathfrak{I} \equiv 0$.

Обратно, если $\mathfrak{I} = 0$, то получаем $\mathfrak{T} = 0$ и построенная $\{e\}$ -структура отождествляется с уравнениями Маурера–Картана вещественной проективной группы. Сфера Гейзенберга возникает как орбита начала координат под действием указанной группы.

§ 5. Краткое сравнение с геометрией Картана–Танаки вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$

Обсудим вкратце геометрию Картана рассматриваемых вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$, имеющую прямое отношение к задаче эквивалентности таких гиперповерхностей. Это поможет нам лучше понять справедливую и в общем случае тесную связь между задачами эквивалентности и геометриями Картана. Будем использовать результаты, обозначения и терминологию из работы [1] (см. также [22]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть G – группа Ли с замкнутой подгруппой H , а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – соответствующие алгебры Ли. Геометрия Картана типа (G, H) на многообразии M задается главным H -расслоением

$$\pi: \mathcal{G} \rightarrow M$$

и $\mathfrak{g}$ -значной 1-формой ω (называемой *связностью Картана*) на $\mathcal{G}$, подчиненными следующим трем условиям:

- (i) отображение $\omega_p: T_p\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}$ является линейным изоморфизмом для каждой точки $p \in \mathcal{G}$;
- (ii) если $R_h(p) := ph$ – правый сдвиг расслоения $\mathcal{G}$ на элемент $h \in H$, то

$$R_h^*\omega = \text{Ad}(h^{-1}) \circ \omega;$$

- (iii) для каждого вектора $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$ имеем $\omega(H^\dagger) = \mathbf{h}$, где

$$H^\dagger|_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (R_{\exp(th)}(p))$$

– левоинвариантное векторное поле на $\mathcal{G}$, отвечающее $\mathbf{h}$.

Самая симметричная из всех геометрий Картана типа (G, H) , называемая *геометрией Клейна типа (G, H)* , получается при $M = G/H$, когда в качестве отображения $\pi: G \rightarrow G/H$ берется проекция на пространство левых смежных классов, а в качестве $\omega = \omega_{MC}: TG \rightarrow \mathfrak{g}$ берется форма Маурера–Картана на G .

В общем случае, пользуясь связностью Картана ω , можно с каждым элементом x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ассоциировать векторное поле $\widehat{X} := \omega^{-1}(x)$ на расслоении $\mathcal{G}$. Тогда инфинитезимальная версия условия (ii) гласит, что

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{[x, y]}_{\mathfrak{g}}$$

для всех y из $\mathfrak{h}$. В частном случае геометрий Клейна это равенство выполнено также и для всех y из $\mathfrak{g}$. Это обстоятельство побуждает нас ввести понятие *функции кривизны*

$$\kappa: \mathcal{G} \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), \mathfrak{g}),$$

ассоциированной со связностью Картана ω по формуле

$$\kappa_p(x, y) := \omega_p([\widehat{X}, \widehat{Y}]) - [x, y]_{\mathfrak{g}}, \quad p \in \mathcal{G}, \quad x, y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Эта функция кривизны в некотором смысле измеряет, насколько данная геометрия Картана далека от соответствующей ей геометрии Клейна. В частности, геометрия Картана локально эквивалентна соответствующей геометрии Клейна тогда и только тогда, когда ее функция кривизны тождественно равна нулю (см. [22]).

Вернемся к невырожденным по Леви вещественным гиперповерхностям M^3 , рассматриваемым как деформации сферы Гейзенберга $\mathbb{H}^3$. В [1] мы построили регулярную нормальную связность Картана типа (G, H) , где G – проективная группа, ассоциированная с 8-мерной проективной алгеброй Ли

$$\mathfrak{g} := \text{aut}(\mathbb{H}^3) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{t}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j})$$

всех инфинитезимальных CR-автоморфизмов сферы $\mathbb{H}^3$, причем полная таблица коммутаторов в этой алгебре имеет вид

	t	h ₁	h ₂	d	r	i ₁	i ₂	j
t	0	0	0	2t	0	h ₁	h ₂	d
h ₁	*	0	4t	h ₁	h ₂	6r	2d	i ₁
h ₂	*	*	0	h ₂	-h ₁	-2d	6r	i ₂
d	*	*	*	0	0	i ₁	i ₂	2j
r	*	*	*	*	0	-i ₂	i ₁	0
i ₁	*	*	*	*	*	0	4j	0
i ₂	*	*	*	*	*	*	0	0
j	*	*	*	*	*	*	*	0

а H – подгруппа G , ассоциированная с 5-мерной подалгеброй

$$\mathfrak{h} := \text{Span}_{\mathbb{R}}(d, r, i_1, i_2, j).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ градуирована в смысле Танаки [9]:

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}}_{\mathfrak{g}_-} \oplus \underbrace{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2}_{\mathfrak{h}},$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-2} &:= \text{Span}_{\mathbb{R}}(t), & \mathfrak{g}_{-1} &:= \text{Span}_{\mathbb{R}}(h_1, h_2), & \mathfrak{g}_0 &:= \text{Span}_{\mathbb{R}}(d, r), \\ \mathfrak{g}_1 &:= \text{Span}_{\mathbb{R}}(i_1, i_2), & \mathfrak{g}_2 &:= \text{Span}_{\mathbb{R}}(j). \end{aligned}$$

Здесь $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ является алгеброй символов Леви–Танаки для произвольной невырожденной по Леви гиперповерхности $M^3 \subset \mathbb{C}^2$.

Функция кривизны κ разлагается на однородные относительно этой градуировки компоненты:

$$\kappa := \kappa^{(0)} + \dots + \kappa^{(5)},$$

где $\kappa^{(s)}$ ставит в соответствие каждой паре

$$(p_{j_1}, p_{j_2}) \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_-, \quad p_{j_1} \in \mathfrak{g}_{j_1}, \quad j_i = -2, -1,$$

некоторый элемент из $\mathfrak{g}_{j_1+j_2+s}$. Оказывается, что все компоненты $\kappa^{(s)}$ функции кривизны представимы в виде

$$\kappa^{(s)} = \sum_{s=j-(j_1+j_2)} \kappa_{q_j}^{p_{j_1}p_{j_2}} p_{j_1}^* \wedge p_{j_2}^* \otimes q_j \quad (5.1)$$

для вещественнозначных функций $\kappa_{q_j}^{p_{j_1}p_{j_2}}(p)$, определяемых в каждой точке p расслоения $\mathcal{G}$ как коэффициент при q_j в выражении $\kappa(p)(p_{j_1}, p_{j_2})$, где $p_{j_1} \in \mathfrak{g}_{j_1}$, $p_{j_2} \in \mathfrak{g}_{j_2}$, $q_j \in \mathfrak{g}_j$ – упомянутые выше базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при $j_1, j_2 = -2, -1$ и $j = -2, -1, 0, 1, 2$.

Искомая геометрия Картана строилась в работе [1] путем обнуления всех компонент кривизны, для которых это возможно. А именно, последовательными усложнениями ω нам удалось обнулить компоненты $\kappa^{(0)}$ (наиболее легко), $\kappa^{(1)}$, $\kappa^{(2)}$ и $\kappa^{(3)}$, что потребовало в некоторых местах сложных вычислений из теории исключения. Эти вычисления были проведены в рамках мощного алгоритма Танаки [9], использующего такие современные понятия, как алгебры Ли инфинитезимальных CR-автоморфизмов, когомологии алгебр Ли, продолжение по Танаке и т. д. Окончательный их результат таков (см. [1, предложение 7.3, теорема 7.4]).

ТЕОРЕМА 5.1. *Геометрия Картана, ассоциированная с любой C^6 -гладкой невырожденной по Леви деформацией $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ сферы Гейзенберга $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{C}^2$, имеет функцию кривизны*

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa^{(4)} + \kappa^{(5)} = & \kappa_{i_1}^{h_1 t} h_1^* \wedge t^* \otimes i_1 + \kappa_{i_2}^{h_1 t} h_1^* \wedge t^* \otimes i_2 \\ & + \kappa_{i_1}^{h_2 t} h_2^* \wedge t^* \otimes i_1 + \kappa_{i_2}^{h_2 t} h_2^* \wedge t^* \otimes i_2 + \kappa_j^{h_1 t} h_1^* \wedge t^* \otimes j + \kappa_j^{h_2 t} h_2^* \wedge t^* \otimes j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{i_1}^{h_1 t} &= -\Delta_1 c^4 - 2\Delta_4 c^3 d - 2\Delta_4 c d^3 + \Delta_1 d^4, \\ \kappa_{i_2}^{h_1 t} &= -\Delta_4 c^4 + 2\Delta_1 c^3 d + 2\Delta_1 c d^3 + \Delta_4 d^4, \\ \kappa_{i_1}^{h_2 t} &= \kappa_{i_2}^{h_1 t}, \quad \kappa_{i_2}^{h_2 t} = -\kappa_{i_1}^{h_1 t}, \\ \kappa_j^{h_1 t} &= \hat{H}_1(\kappa_{i_2}^{h_2 t}) - \hat{H}_2(\kappa_{i_2}^{h_1 t}), \quad \kappa_j^{h_2 t} = -\hat{H}_1(\kappa_{i_1}^{h_2 t}) + \hat{H}_2(\kappa_{i_1}^{h_1 t}), \end{aligned}$$

причем существенные инварианты, явно выраженные через определяющую функцию φ , таковы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{384} [H_1(H_1(H_1(\Phi_1))) - H_2(H_2(H_2(\Phi_2))) + 11H_1(H_2(H_1(\Phi_2))) \\ &\quad - 11H_2(H_1(H_2(\Phi_1))) + 6\Phi_2 H_2(H_1(\Phi_1)) - 6\Phi_1 H_1(H_2(\Phi_2)) \\ &\quad - 3\Phi_2 H_1(H_1(\Phi_2)) + 3\Phi_1 H_2(H_2(\Phi_1)) - 3\Phi_1 H_1(H_1(\Phi_1)) + 3\Phi_2 H_2(H_2(\Phi_2)) \\ &\quad - H_1(\Phi_1)H_1(\Phi_1) + H_2(\Phi_2)H_2(\Phi_2) - 2(\Phi_2)^2 H_1(\Phi_1) + 2(\Phi_1)^2 H_2(\Phi_2) \\ &\quad - 2(\Phi_2)^2 H_2(\Phi_2) + 2(\Phi_1)^2 H_1(\Phi_1)], \\ \Delta_4 &= \frac{1}{384} [-3H_2(H_1(H_2(\Phi_2))) - 3H_1(H_2(H_1(\Phi_1))) + 5H_1(H_2(H_2(\Phi_2))) \\ &\quad + 5H_2(H_1(H_1(\Phi_1))) + 4\Phi_1 H_1(H_1(\Phi_2)) + 4\Phi_2 H_2(H_1(\Phi_2)) \\ &\quad - 3\Phi_2 H_1(H_1(\Phi_1)) - 3\Phi_1 H_2(H_2(\Phi_2)) - 7\Phi_2 H_1(H_2(\Phi_2)) - 7\Phi_1 H_2(H_1(\Phi_1)) \\ &\quad - 2H_1(\Phi_1)H_1(\Phi_2) - 2H_2(\Phi_2)H_2(\Phi_1) + 4\Phi_1 \Phi_2 H_1(\Phi_1) + 4\Phi_1 \Phi_2 H_2(\Phi_2)]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эта геометрия эквивалентна геометрии модельной гиперповерхности $\mathbb{H}^3$ тогда и только тогда, когда обе ее существенные кривизны $\kappa_{i_1}^{h_1 t}$, $\kappa_{i_2}^{h_1 t}$ тождественно обращаются в нуль, или, что то же самое, обе явно заданные вещественнозначные функции Δ_1 , Δ_4 от трех горизонтальных вещественных переменных (x, y, u) , где $z = x + iy$ и $w = u + iv$, тождественно равны нулю.

Проследивая построение фундаментальных векторных полей H_1 и H_2 в [1, § 5], мы убеждаемся в том, что они на самом деле равны вещественной и мнимой частям касательного векторного поля $\frac{1}{2}\bar{\mathcal{L}}$, введенного в настоящей работе. Более того, приведенные в [1] выражения для векторного поля T и функций Φ_1 , Φ_2 , удовлетворяющих соотношениям

$$[H_1, H_2] = 4T, \quad [H_1, T] = \Phi_1 T, \quad [H_2, T] = \Phi_2 T,$$

показывают, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}H_1 - \frac{i}{2}H_2, \quad \bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}H_1 + \frac{i}{2}H_2, \quad T = -4T, \\ P &= \frac{1}{2}\Phi_1 - \frac{i}{2}\Phi_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставляя выражения (5.4) в формулу (4.45) для единственного комплексного существенного инварианта $\mathfrak{J}$ задачи об эквивалентности вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ и тщательно сравнивая их с приведенными выше вещественными выражениями для существенных инвариантов Δ_1, Δ_4 геометрии Картана таких гиперповерхностей, мы приходим к следующему довольно неожиданному результату.

ТЕОРЕМА 5.2. *Существенный инвариант задачи эквивалентности и существенные инварианты геометрии Картана для невырожденных по Леви C^6 -гладких вещественных гиперповерхностей $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ связаны соотношением*

$$\mathfrak{J} = \frac{4}{c\bar{c}^3}(\Delta_1 + i\Delta_4). \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) показывает, насколько явно согласуются между собой задача эквивалентности и геометрия Картана.

Список литературы

1. J. Merker, M. Sabzevari, “Explicit expression of Cartan’s connection for Levi-nondegenerate 3-manifolds in complex surfaces, and identification of the Heisenberg sphere”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:5 (2012), 1801–1835; M. Aghasi, J. Merker, M. Sabzevari, *Effective Cartan–Tanaka connections on $\mathbb{C}^6$ strongly pseudoconvex hypersurfaces M^3 of $\mathbb{C}^2$* , 2011, 112 pp., arXiv: 1104.1509.
2. H. Poincaré, “Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme”, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **23**:1 (1907), 185–220.
3. É. Cartan, “Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes. I”, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), **11**:1 (1932), 17–90; II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (2), **1**:4 (1932), 333–354.
4. J. Merker, M. Sabzevari, *Cartan equivalence problem for 5-dimensional CR-manifolds in $\mathbb{C}^4$* (to appear).
5. S. Pocchiola, *Absolute parallelism and Cartan connection for 2-nondegenerate real hypersurfaces $M^5 \subset \mathbb{C}^3$ of constant Levi rank 1*.
6. P. J. Olver, *Equivalence, invariants and symmetry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.
7. R. B. Gardner, *The method of equivalence and its applications* (Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)), CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **58**, Philadelphia, PA, 1989, viii+127 pp.
8. С. С. Чжень, Ю. К. Мозер, “Вещественные гиперповерхности в комплексных многообразиях”, *УМН*, **38**:2(230) (1983), 149–193; пер. с англ.: S. S. Chern, J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds”, *Acta Math.*, **133**:1 (1974), 219–271.
9. N. Tanaka, “On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **10** (1970), 1–82.
10. V. Ezhov, B. McLaughlin, G. Schmalz, “From Cartan to Tanaka: getting real in the complex world”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **58**:1 (2011), 20–27.
11. J. Merker, “Nonrigid spherical real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ ”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:12 (2010), 1155–1182.
12. H. Jacobowitz, *An introduction to CR structures*, Math. Surveys Monogr., **32**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, x+237 pp.
13. C. Grissom, G. Thompson, G. Wilkens, “Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan’s equivalence method”, *J. Differential Equations*, **77**:1 (1989), 1–15.

14. P. Nurowski, G. A. J. Sparling, “Three-dimensional Cauchy–Riemann structures and second-order ordinary differential equations”, *Classical Quantum Gravity*, **20**:23 (2003), 4995–5016.
15. V. K. Beloshapka, “CR-varieties of the type $(1, 2)$ as varieties of “super-high” codimension”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:3 (1997), 399–404.
16. В. К. Белошапка, “Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации”, *УМН*, **57**:1(343) (2002), 3–44; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Real submanifolds in complex space: polynomial models, automorphisms, and classification problems”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 1–41.
17. В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 507–522; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Universal models for real submanifolds”, *Math. Notes*, **75**:4 (2004), 475–488.
18. В. К. Белошапка, “Представление группы голоморфных симметрий вещественного ростка в группе симметрий его модельной поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 515–518; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Representation of the group of holomorphic symmetries of a real germ in the symmetry group of its model surface”, *Math. Notes*, **82**:4 (2007), 461–463.
19. V. K. Beloshapka, V. Ezhov, G. Schmalz, “Canonical Cartan connection and holomorphic invariants on Engel CR manifolds”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:2 (2007), 121–133.
20. J. Merker, E. Porten, “Holomorphic extension of CR functions, envelopes of holomorphy, and removable singularities”, *IMRS Int. Math. Res. Surv.*, **2006**:1 (2006), Art. ID 28295, 287 pp.
21. O. Stormark, *Lie’s structural approach to PDE systems*, Encyclopedia Math. Appl., **80**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xvi+572 pp.
22. R. W. Sharpe, “Differential geometry. Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program”, *Grad. Texts in Math.*, **166**, Springer-Verlag, New York, 1997, xx+421 pp.

ЖОЭЛЬ МЕРКЕР
(JOEL MERKER)
Université Paris-Sud, Orsay Cedex, France
E-mail: joel.merker@math.u-psud.fr

Поступило в редакцию
05.07.2013

МАСУД САБЗЕВАРИ
(MASOUD SABZEVARI)
University of Shahrekord, Iran
E-mail: sabzevari@math.iut.ac.ir

Перевод с английского А. В. Домрина