Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Кайгородов, Ю. С. Попов, Альтернативные алгебры, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями и обратимые дифференцирования, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 75–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:42:51

УДК 512.554.5

И. Б. Кайгородов, Ю. С. Попов

Альтернативные алгебры, допускающие дифференцирование с обратимыми значениями и обратимые дифференцирования

Доказан аналог теоремы Бергена–Херстейна–Ланского для альтернативных алгебр (описаны альтернативные алгебры, допускающие дифференцирование с обратимыми значениями). Доказан аналог теоремы Моенса для альтернативных алгебр (показано, что конечномерная альтернативная алгебра над полем характеристики нуль является нильпотентной тогда и только тогда, когда допускает обратимое лейбниц-дифференцирование).

Библиография: 28 наименований.

Ключевые слова: дифференцирование, альтернативная алгебра, нильпотентная алгебра.

DOI: 10.4213/im8146

§ 1. Введение

Понятие дифференцирования с обратимыми значениями как дифференцирования кольца с единицей, принимающего только обратимые или нулевые значения, появилось в работе [1], где Дж. Берген, И. Н. Херстейн и Ч. Лански описали структуру ассоциативных колец, допускающих дифференцирование с обратимыми значениями. В дальнейшем результаты этой работы в ассоциативном случае получили обобщение в [2]–[6].

Другим интересным классом дифференцирований являются обратимые дифференцирования. Определение обратимого дифференцирования как дифференцирования, обратимого как линейное отображение, возникло в работе [7], где была доказана нильпотентность конечномерной алгебры Ли, допускающей обратимое дифференцирование. Исследования по этой теме были продолжены в работах [8], [9].

В настоящее время большой интерес представляет изучение неассоциативных алгебр и супералгебр с дифференцированиями. Например, в статьях [10], [11] описывается структура дифференциально простых альтернативных и йордановых алгебр, а в работах [12]–[19] приведено описание обобщений дифференцирований простых и полупростых альтернативных, йордановых и структуризуемых алгебр и супералгебр. Тем не менее, проблема характеристики алгебр из классических неассоциативных многообразий (таких как альтернативные,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-31122, 14-01-31084), Программы Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (грант МК-330.2013.1) и Фонда FAPESP (грант 2011/51132-9).

йордановы, структуризуемые и другие алгебры), допускающих дифференцирования с обратимыми значениями и обратимые дифференцирования, по сей день оставалась не рассмотренной. Настоящая работа призвана восполнить существующий пробел.

§ 2. Основные определения и тождества

Напомним стандартные обозначения:

$$(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$$

– ассоциатор элементов x, y, z ;

$$[x, y] := xy - yx$$

– коммутатор элементов x, y .

Алгебра A называется *альтернативной* (более подробную информацию об альтернативных алгебрах можно найти в [20]), если в A выполнены следующие тождества:

$$(x, x, y) = 0, \quad (x, y, y) = 0.$$

Легко проверить, что в произвольной альтернативной алгебре ассоциатор является кососимметрической функцией своих аргументов, а также выполнено *тождество эластичности* $x(yx) = (xy)x$. Хорошо известно [20, с. 35], что в любой альтернативной алгебре выполняется *среднее тождество Муфанга* $(xy)(zx) = x(yz)x$.

Ассоциативным центром алгебры A называется множество

$$N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = (0)\},$$

коммутативным центром алгебры A называется множество

$$K(A) = \{k \in A \mid [k, A] = [A, k] = (0)\},$$

а *центром* A – множество $Z(A) = N(A) \cap K(A)$.

Дифференцирование d называется *внутренним*, если оно лежит в минимальном подпространстве пространства всех линейных операторов, действующих на A , содержащем операторы левого и правого умножения на элементы алгебры A и замкнутом относительно коммутирования. В противном случае d называется *внешним*.

Наиболее важным классом альтернативных алгебр являются алгебры Кэли–Диксона. Определения и свойства алгебр Кэли–Диксона и процесса Кэли–Диксона могут быть найдены, например, в [20]. Известно, что любая алгебра Кэли–Диксона C над полем F восьмимерна, неассоциативна, альтернативна, проста, а также имеет единицу. Кроме того, C *квадратична* над F , т. е. любой $x \in C$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0, \tag{1}$$

где $t(x), n(x) \in F$, $t(x)$ – это F -линейное отображение, а $n(x)$ – строго невырожденная квадратичная форма, для которой выполнено равенство $n(xy) = n(x)n(y)$ при всех $x, y \in C$. Также на алгебре Кэли–Диксона действует симметрическая билинейная невырожденная форма $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$. Для подмножества $M \subseteq C$ через $M^\perp$ мы будем обозначать ортогональное дополнение к M относительно f .

Алгебра Кэли–Диксона, содержащая делители нуля, называется *расщепляемой*. Известно [20, с. 43], что элемент x расщепляемой алгебры Кэли–Диксона обратим тогда и только тогда, когда $n(x) \neq 0$. Известно также [20, с. 46], что любая расщепляемая алгебра Кэли–Диксона над полем F изоморфна *матричной алгебре Кэли–Диксона* $C(F)$, состоящей из матриц вида $a = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in F, u, v \in F^3$.

Сложению и умножению на скаляр элементов алгебры $C(F)$ будут соответствовать обычные матричные сложение и умножение на скаляр. Умножению элементов алгебры $C(F)$ будет соответствовать следующее умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & t \\ w & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta + (u, w) & \alpha t + \delta u - v \times w \\ \gamma v + \beta w + u \times t & \beta\gamma + (v, t) \end{pmatrix},$$

где для векторов $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in F^3$ через

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

обозначено их скалярное произведение, а векторное произведение – через

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

При этом представлении $t(a) = \alpha + \beta$, $n(a) = \alpha\beta - (u, v)$.

В случае, когда $\text{char}(F) \neq 2$, алгебра C может быть получена из F трехкратным применением процесса Кэли–Диксона к F с тождественной инволюцией и параметрами $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Мы не будем описывать все детали процесса Кэли–Диксона, а только предоставим формулу, определяющую умножение в алгебре $B = A + vA$, полученной применением процесса Кэли–Диксона к алгебре A с инволюцией $\bar{}$:

$$(a_1 + vb_1)(a_2 + vb_2) = (a_1 a_2 + \gamma b_2 \bar{b}_1) + v(\bar{a}_1 b_2 + a_2 b_1),$$

где $a_i, b_i \in A$, $v^2 = \gamma \in F$.

Также нам понадобится следующее утверждение [20], описывающее все простые альтернативные неассоциативные алгебры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – простая неассоциативная альтернативная алгебра. Тогда центр алгебры A является полем и A – алгебра Кэли–Диксона над своим центром.

§ 3. Альтернативные алгебры, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями

Пусть A – алгебра с единицей 1 над полем F . Через U мы обозначим множество обратимых элементов алгебры A . В этом параграфе мы будем рассматривать только дифференцирования с обратимыми значениями, т. е. такие

ненулевые дифференцирования d , что для любого $x \in A$ либо $d(x) \in U$, либо $d(x) = 0$.

Дж. Берген, И. Н. Херстейн и Ч. Лански в 1983 г. начали исследование, цель которого – установить связь между структурой кольца и особым поведением некоторого дифференцирования этого кольца. В своей статье [1] они описали ассоциативные кольца, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями. Они доказали, что такое кольцо есть либо тело, либо кольцо (2×2) -матриц над телом, либо факторкольцо кольца многочленов над телом характеристики 2. Также они описали тела, над которыми кольца (2×2) -матриц допускают внутренние дифференцирования с обратимыми значениями. В дальнейшем ассоциативные кольца, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями (и их обобщения), были рассмотрены в [2]–[6]. Так, в [2] было описано строение полупростых ассоциативных колец с инволюцией, допускающих дифференцирование, значения которого на симметрических элементах кольца являются обратимыми. В работе [3] описаны ассоциативные кольца с дифференцированием, значения которого на некотором нецентральной левом идеале обратимы. В работах [4] и [5] была изучена структура ассоциативных колец, допускающих α -дифференцирования с обратимыми значениями и их естественные обобщения – (σ, τ) -дифференцирования с обратимыми значениями. В работе [6] рассмотрены ассоциативные кольца, допускающие обобщенные дифференцирования с обратимыми значениями.

Цель настоящего параграфа – обобщить результаты Бергена, Херстейна и Лански в случае альтернативных алгебр.

Далее в этом параграфе A – это альтернативная алгебра с единицей 1 и дифференцированием d с обратимыми значениями. Следующие леммы были доказаны в [1] для ассоциативных алгебр и с незначительными изменениями могут быть обобщены в случае альтернативных алгебр, но для полноты изложения материала мы приведем их доказательства.

ЛЕММА 2. *Если $d(x) = 0$, то $x = 0$ или x обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим [20, с. 204], что в любой альтернативной алгебре выполнено следующее соотношение:

$$(a^{-1}, a, b) = 0. \quad (2)$$

Пользуясь этим соотношением, легко увидеть, что в произвольной альтернативной алгебре произведение двух обратимых элементов также является обратимым элементом: в силу (2) для обратимых a и b мы имеем

$$\begin{aligned} (b^{-1}a^{-1})(ab) &= a^{-1}((ab)b^{-1}) - (a^{-1}(ab))b^{-1} + (b^{-1}a^{-1})(ab) \\ &= -(a^{-1}, ab, b^{-1}) + (b^{-1}a^{-1})(ab) \\ &= -(b^{-1}, a^{-1}, ab) + (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}(ab)) = 1. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \neq 0$. По условию $d \neq 0$, поэтому существует $y \in A$ такой, что $d(y) \in U$. Следовательно, $d(yx) = d(y)x \in U$ и $d(y)^{-1}d(yx) = x$. Поскольку $d(y)$ и $d(yx)$ обратимы, то и x также обратим. Лемма доказана.

Приступим теперь к изучению структуры идеалов алгебры A .

ЛЕММА 3. а) Если $L \neq 0$ – односторонний идеал алгебры A , то $d(L) \neq (0)$.

б) Если I – собственный односторонний идеал алгебры A , то I максимальный и минимальный.

с) Если I – собственный идеал алгебры A , то $I^2 = (0)$.

д) Если $\text{char}(A) \neq 2$, то алгебра A проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку утверждение очевидно при $L = A$, достаточно доказать его для случая $L \neq A$. Если $0 \neq a \in L$, то по лемме 2 имеем $d(a) \neq 0$, поскольку a не обратим.

б) Достаточно показать, что любой собственный идеал в A является максимальным. Пусть $I \subset J$ – собственные односторонние идеалы в A . Легко видеть, что $d(I) \cap I = (0)$ и $I \oplus d(I)$ также является односторонним идеалом в A . В силу а) имеем $d(I) \neq (0)$, поэтому $d(I)$ содержит обратимые элементы, следовательно, $I \oplus d(I) = A$. Для произвольного $j \in J$ имеем $j = a + d(b)$, $a, b \in I$. Следовательно, $d(b) = j - a \in J \cap d(I) = (0)$, и поэтому $j = a \in I$.

с) Если $I \neq A$ – идеал в A , то

$$d(I^2) \subset d(I)I + Id(I) \subset I,$$

следовательно, в силу а) имеем $I^2 = (0)$, поскольку произведение двух идеалов в альтернативной алгебре также является идеалом [20, с. 115] и I не содержит обратимых элементов.

д) Пусть $2A \neq 0$ и $I \neq (0)$. Тогда в силу а) существует $b \in I$ такой, что $d(b) \in U$. Поскольку $b^2 = 0$, то

$$0 = d^2(b^2) = d^2(b)b + 2d(b)^2 + bd^2(b),$$

и, таким образом, $2d(b)^2 \in I$. Так как $d(b)$ обратим, то $d(b)^2$ также обратим и $2d(b)^2 = 0$, поэтому $2 = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Через $\text{Der}(A)$ мы обозначим множество всех дифференцирований алгебры A . Зафиксируем некоторое подмножество $D \subset \text{Der}(A)$. Идеал I называется D -идеалом, если для всех $\partial \in D$, $x \in I$ выполнено $\partial(x) \in I$. Алгебра A называется D -простой, если $A^2 \neq 0$ и A не имеет собственных D -идеалов (для более подробной информации о D -простых алгебрах см. работы [10], [11] и ссылки в них).

Непосредственным следствием леммы 3, а) является

ЛЕММА 4. Если альтернативная алгебра A допускает дифференцирование d с обратимыми значениями, то A является d -простой алгеброй.

Теперь, если $\text{char}(A) \neq 2$, применяя лемму 3, д) и теорему 1, мы можем заключить, что A или ассоциативна, или является алгеброй Кэли–Диксона над своим центром. Оставшийся случай, когда A не проста и не ассоциативна, рассмотрен в следующей лемме.

ЛЕММА 5. Если алгебра A не проста и не ассоциативна, то $A = C[x]/(x^2)$, где C – алгебра Кэли–Диксона над своим центром $Z(C)$, C – алгебра с делением, $\text{char}(C) = 2$, $d(C) = 0$, $d(x) = 1 + ax$ для некоторого $a \in Z(C)$ и d является внешним дифференцированием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3, b), d), мы имеем $\text{char}(A) = 2$, $I^2 = (0)$ для любого собственного идеала I в A , и все собственные односторонние идеалы в A одновременно минимальны и максимальны. Следовательно, A содержит единственный (левый, правый, двухсторонний) идеал M , и $M^2 = 0$. Повторяя ход рассуждений леммы 3, b), мы получим, что $A = M \oplus d(M)$, поэтому для любого $a \in A$ существуют $m, n \in M$ такие, что $d(a) = m + d(n)$. Следовательно, $m = d(a - n) \in M \cap d(A) = (0)$, и, обозначая $C = \ker(d)$, мы имеем $A = C + M$. По лемме 2 алгебра C с делением, поэтому $A = C \oplus M$. Определим линейные отображения $\lambda: M \rightarrow C$ и $\mu: M \rightarrow M$ правилом $d(m) = \lambda(m) + \mu(m)$ для всех $m \in M$. Легко видеть, что для любых $a \in C$, $b \in M$ верно

$$a\mu(b) + a\lambda(b) = ad(b) = d(ab) = \mu(ab) + \lambda(ab),$$

где $a\mu(b), \mu(ab) \in M$ и, следовательно, $a\lambda(b) = \lambda(ab) \in \lambda(M)$; аналогично, $\lambda(ba) = \lambda(b)a \in \lambda(M)$. Тем самым, $\lambda(M)$ – идеал в C .

Поскольку C проста и $\lambda(M) \neq (0)$, то C изоморфна M как левому C -модулю. Полагая $x = \lambda^{-1}(1)$, мы имеем $A = C \oplus Cx$. Пользуясь тем, что λ – изоморфизм модулей, легко увидеть, что $[x, C] = 0$. С учетом соотношения

$$3(k, x, y) = 3(y, k, x) = 3(x, y, k) = [xy, k] - x[y, k] - [x, k]y = 0,$$

выполненного для любых $k \in K(B)$, $x, y \in B$ в любой альтернативной алгебре B [20, с. 136], принимая во внимание структуру A , мы получаем, что $x \in Z(A)$. Таким образом, $A \cong C[x]/(x^2)$. Из неассоциативности A и теоремы 1 следует, что C является алгеброй Кэли–Диксона над своим центром $Z(C)$. Легко видеть, что $\mu(x) = ax$ для некоторого $a \in C$. Поскольку $x \in Z(A)$ и $\text{char}(A) = 2$, для произвольного $c \in C$ выполнено

$$0 = d(cx + xc) = c(1 + ax) + (1 + ax)c = cax + axc = (ca + ac)x.$$

Так как C является алгеброй с делением, то $ca + ac = 0$, следовательно, $a \in Z(C)$.

Наконец, поскольку любой идеал A инвариантен относительно действия любого внутреннего дифференцирования, $x \in M$ и $d(x) \notin M$, очевидно, что d не является внутренним. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – альтернативная алгебра с единицей 1, допускающая дифференцирование d с обратимыми значениями. Тогда:

- 1) A – ассоциативная алгебра и выполнено одно из следующих условий:
  - а) A – ассоциативное тело D ;
  - б) A – алгебра матриц $M_2(D)$ над ассоциативным телом D ;
  - с) A – факторалгебра алгебры многочленов $D[x]/(x^2)$ над ассоциативным телом D , более того, $\text{char}(D) = 2$, $d(D) = 0$ и $d(x) = 1 + ax$ для некоторого a из центра D , и d является внешним дифференцированием;
- 2) A – альтернативная неассоциативная алгебра и выполнено одно из следующих условий:
  - а) A – алгебра Кэли–Диксона над своим центром $Z(A)$;
  - б) A – факторалгебра алгебры многочленов $C[x]/(x^2)$ над алгеброй Кэли–Диксона с делением, более того, $\text{char}(C) = 2$, $d(C) = 0$ и $d(x) = 1 + ax$ для некоторого a из центра C , и d является внешним дифференцированием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в ассоциативном случае следует из [1], а в неассоциативном – из теоремы 1 и лемм 3, 5.

Теперь, для того чтобы закончить классификацию, нам осталось лишь описать расщепляемые алгебры Кэли–Диксона, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями. Их структуру описывает

ЛЕММА 7. *Алгебра C , являющаяся расщепляемой алгеброй Кэли–Диксона над своим центром Z , допускает дифференцирование d с обратимыми значениями тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

I) C получена процессом Кэли–Диксона из своего ассоциативного подтела B : $C = B \oplus vB$, $v^2 = \gamma \in Z$, $\gamma \neq 0$, где $B = \ker(d)$ и $\dim_Z B = 4$, более того, в этом случае произвольное дифференцирование d с обратимыми значениями имеет вид $d(a + vb) = v(bu)$, где $a, b \in B$ и $u \in B$ – фиксированный элемент такой, что $t(u) = 0$;

II) C раскладывается в прямую сумму векторных пространств: $C = B \oplus xB$, где $t(x) = 0$, $B = \ker(d)$, B является подполем в C , $B = B^\perp$ и $\dim_Z B = 4$, более того, в этом случае произвольное дифференцирование d с обратимыми значениями имеет вид $d(a + xb) = b$, где $a, b \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [21]), что любое дифференцирование алгебры C является внутренним. С учетом этого факта легко видеть, что $Z \subseteq \ker(d)$ и d является Z -линейным отображением. Поэтому мы будем рассматривать C как Z -алгебру. Допустим, что C допускает дифференцирование d с обратимыми значениями. Рассмотрим подпространство $V \subset C$ такое, что $\dim_Z V = 4$ и V не содержит обратимых элементов. К примеру (с учетом того, что $C \cong C(F)$ – матричная алгебра Кэли–Диксона над F), мы можем взять

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in Z, u \in Z^3 \right\}.$$

Из леммы 2 следует, что $\dim_Z d(V) = 4$ и $V \cap d(V) = (0)$, поэтому $C = V \oplus d(V)$. В частности, для любого $x \in C$ существуют $u, v \in V$ такие, что $d(x) = u + d(v)$. Следовательно, $u = d(x - v) \in V \cap d(A) = (0)$. Обозначая $B = \ker(d)$, мы получаем $C = B + V$. По лемме 2 имеем, что B является алгеброй с делением, следовательно, $C = B \oplus V$ и $\dim_Z B = 4$. Поскольку B проста и $Z(C) \subseteq Z(B)$, то, применяя теорему 1, мы получаем, что B является ассоциативной подалгеброй в C . Согласно [20, с. 39] в C выполняется следующее соотношение:

$$a \circ b - t(a)b - t(b)a - f(a, b) = 0. \quad (3)$$

Полагая $b = d(a)$, получим

$$a \circ d(a) - t(a)d(a) - t(d(a))a - f(a, d(a)) = 0. \quad (4)$$

Действуя d на соотношение (1), имеем

$$a \circ d(a) - t(a)d(a) = 0. \quad (5)$$

Вычитая (4) из (5), получим $t(d(a))a + f(a, d(a)) = 0$. Если a и 1 линейно независимы над Z , то

$$f(a, d(a)) = 0. \quad (6)$$

Если $a \in Z$, то $a \in \ker(d)$, поэтому соотношение (6) в данном случае очевидно. Линеаризуя (6), получим $f(a, d(b)) + f(d(a), b) = 0$. Следовательно, поскольку $B = \ker(d)$, для произвольного $a \in C$ имеем $f(d(a), B) = -f(a, d(B)) = 0$, поэтому $d(C) \subseteq B^\perp$. Рассмотрим два случая.

1) Если ограничение формы f на B является невырожденным, то согласно [20, с. 32, теорема 1] алгебра C может быть получена из B посредством процесса Кэли–Диксона, т. е. $C = B + vB$, $v^2 = \gamma \neq 0$, $B^\perp = vB$. В частности, $d(v) = vu$ для некоторого $u \in B$, поэтому для произвольных $a, b \in B$ мы имеем

$$d(a + vb) = d(v)b = (vu)b = v(bu).$$

В силу [20, с. 26] для произвольных $x, y, w \in C$ имеем

$$n(x)f(y, w) = f(xy, xw).$$

Подставляя в последнее равенство $x = v$, $y = 1$, $w = u$ и используя (6), мы получим

$$0 = f(v, vu) = n(v)t(u).$$

Поскольку $v^2 = \gamma \in Z$, $\gamma \neq 0$, то $n(v) \neq 0$ и $t(u) = 0$.

2) Теперь допустим, что ограничение f на B вырождено. Тогда существует $0 \neq b \in B$ такой, что $f(b, B) = 0$. Следовательно, $0 = f(b, b) = 2n(b)$. Поскольку b обратим, то $n(b) \neq 0$, поэтому $\text{char}(C) = 2$. Согласно [20, с. 26] в C выполнено следующее соотношение:

$$f(x, z)f(y, w) = f(xy, zw) + f(xw, zy). \quad (7)$$

Подставляя $x = b$, $z = a$, $y = b^{-1}c$, $w = 1$ в (7), где $a, c \in B$, мы получим

$$0 = f(b, a)f(b^{-1}c, 1) = f(c, a) + f(b, ab^{-1}c).$$

Произвольность a, c влечет $f(B, B) = 0$, т. е. $B \subseteq B^\perp$.

Покажем, что имеет место обратное включение. Допустим, что существует $x \in B^\perp$, $x \notin B$. Из (2) и кососимметричности ассоциатора получаем, что $\dim_Z xB = 4$ и $C = B \oplus xB$. Используя (7), имеем

$$f(a, xc) = f(a \cdot 1, xc) = -f(ac, x) + f(a, x)f(1, c) = 0$$

для любых $a, c \in B$. Следовательно, $xB \subset B^\perp$ и $C = B^\perp$, что противоречит невырожденности формы f . Обозначим $x = d^{-1}(1)$. Очевидно, что $x \notin B$ и $C = B \oplus xB$. Соотношение (6) влечет $0 = f(x, 1) = t(x)$. Осталось лишь доказать, что B является полем. Из определения f и того, что $f(B, B) = 0$, для произвольных a, c имеем

$$0 = f(a, c) = n(a + c) - n(a) - n(c),$$

а значит, n является гомоморфизмом колец B и Z . Из простоты B и $n(1) = 1$ следует, что $\ker(n) = 0$. Таким образом, мы показали, что B является подполем в Z .

Теперь предположим, что выполнены условия I) или II), и покажем, что алгебра C обладает дифференцированием с обратимыми значениями.

Допустим, что условие I) выполнено, т.е. C получена из B процессом Кэли–Диксона. Пусть $0 \neq u$ – элемент из B такой, что $t(u) = 0$. Рассмотрим отображение $d: a + vb \mapsto v(bu)$, где $a, b \in B$. Покажем, что d является дифференцированием. Действительно, для любых $a_1, b_1, a_2, b_2 \in B$ мы имеем

$$\begin{aligned} d(a_1 + vb_1)(a_2 + vb_2) + (a_1 + vb_1)d(a_2 + vb_2) \\ = \gamma(b_2(u + \bar{u})\bar{b}_1) + v((a_2b_1 + \bar{a}_1b_2)u) \\ = \gamma(b_2t(u)\bar{b}_1) + v((a_2b_1 + \bar{a}_1b_2)u) = v((a_2b_1 + \bar{a}_1b_2)u) \\ = d((a_1a_2 + \gamma b_2\bar{b}_1) + v(\bar{a}_1b_2 + a_2b_1)) = d((a_1 + vb_1)(a_2 + vb_2)). \end{aligned}$$

Также имеем

$$n(d(a + vb)) = n(v(bu)) = n(v)n(b)n(u) = -\gamma n(b)n(u) \neq 0,$$

если $b \neq 0$, поскольку B – алгебра с делением. Следовательно, $d(a + vb)$ обратим для любых $a \in B$, $0 \neq b \in B$, поэтому d – дифференцирование с обратимыми значениями.

Допустим теперь, что выполнено условие II). Рассмотрим отображение $d: a + xb \mapsto b$. Покажем, что d – дифференцирование с обратимыми значениями. Поскольку $B = B^\perp$, для всех $a \in B$ выполнено $t(a) = 0$. С учетом (3) и того, что $\text{char}(C) = 2$, получим

$$[x, a] = x \circ a = t(a)x + t(x)a + f(a, x) = f(a, x) \in Z, \quad (8)$$

в частности, $d([x, a]) = 0$. Подставляя x в (1), получим, что $x^2 \in Z$. Используя соотношение (8), легко проверить, что для произвольных $a, c \in B$ выполнено следующее соотношение:

$$(a, c, x) = af(c, x) + f(a, x)c + f(x, ac). \quad (9)$$

Следовательно, имеем $d((a, c, x)) = 0$. Докажем теперь, что d является дифференцированием. Для произвольных $a, b, c, h \in B$ имеем

$$\begin{aligned} d((ax + b)(cx + h)) &= d((ax)(cx) + (ax)h + b(cx) + bh) \\ &= d((ax)(cx)) + d((ax)h) + d(b(cx)) + d(bh). \end{aligned}$$

Рассмотрим два последних слагаемых:

$$d((ax)h) = d((xa)h) = d(x(ah)) = ah, \quad d(b(cx)) = d((bc)x) = bc.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} d(ax + b)(cx + h) + (ax + b)d(cx + h) &= a(cx + h) + (ax + b)c \\ &= a(cx) + ah + (ax)c + bc. \end{aligned}$$

Таким образом, нам надо показать, что $d((ax)(cx)) = a(cx) + (ax)c$. Преобразуя соответствующие выражения, получим

$$\begin{aligned} a(cx) + (ax)c &= (ac)x + (a, c, x) + a(xc) + (a, x, c) \\ &= (ac)x + a(cx + f(c, x)) = (a, c, x) + af(c, x). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя среднее тождество Муфанг, имеем

$$\begin{aligned} d((ax)(cx)) &= d((xa + f(a, x))cx) = d((xa)(cx)) + f(a, x)d(cx) \\ &= d(x(ac)x) + f(a, x)c = d(x(x(ac) + f(x, ac))) + f(a, x)c \\ &= d(x^2(ac)) + f(x, ac) + f(a, x)c = f(x, ac) + f(a, x)c, \end{aligned} \quad (11)$$

поскольку $x^2 \in Z$ и $d(x^2(ac)) = n(x)d(ac) = 0$. Приравнявая выражение (10) и соотношение (11), получим соотношение (9), которое, как было показано ранее, выполняется тождественно. Следовательно, d является дифференцированием алгебры C . Поскольку d принимает значения в поле B , то очевидно, что d – дифференцирование с обратимыми значениями. Лемма доказана.

ПРИМЕР 8. В работе [22] был построен пример расщепляемой алгебры Кэли–Диксона C , имеющей подполе размерности 4. Рассмотрим несовершенное поле F характеристики 2 и элементы $\alpha, \beta \in F$ такие, что $\alpha, \beta, \alpha\beta$ линейно независимы над F^2 . Тогда подалгебра B матричной алгебры Кэли–Диксона $C(F)$, порожденная элементами

$$\begin{pmatrix} 0 & (\alpha, 0, 0) \\ (1, 0, 0) & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & (0, \beta, 0) \\ (0, 1, 0) & 0 \end{pmatrix},$$

является подполем в C и $\dim_F B = 4$.

Отметим, что доказательство основного утверждения этого параграфа (теорема 6) похоже на доказательство в ассоциативном случае, но такой ход рассуждений нельзя использовать в случае йордановых алгебр, поскольку произведение двух обратимых элементов в йордановой алгебре не обязательно является обратимым и произведение двух идеалов не обязательно является идеалом. Поэтому естественным образом возникает

ПРОБЛЕМА 9. Классифицировать все йордановы (и, более общо, структуризуемые) алгебры, допускающие дифференцирования с обратимыми значениями.

§ 4. Классификация нильпотентных альтернативных алгебр посредством обратимых лейбниц-дифференцирований

Все рассматриваемые в этом параграфе алгебры являются конечномерными над полем характеристики нуль. Н. Джекобсон в 1955 г. доказал [7], что конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль, допускающая невырожденное (обратимое) дифференцирование, является нильпотентной. Вопрос

о том, верно ли обратное утверждение, был открыт до опубликования работы [23], в которой был построен пример нильпотентной алгебры Ли, все дифференцирования которой являются нильпотентными (а следовательно, и вырожденными). Такие алгебры Ли называются *характеристически нильпотентными*.

Изучение дифференцирований алгебр Ли привело к появлению понятия их естественного обобщения – *преддифференцирования* алгебры Ли, которое является дифференцированием тройной лиевой системы, индуцированной этой алгеброй. В статье [8] было доказано, что результат Джекобсона верен и для преддифференцирований. Примеры нильпотентных алгебр Ли, все преддифференцирования которых нильпотентны, были приведены в [8], [24].

В работе [9] было определено обобщение понятий дифференцирований и преддифференцирований – *лейбниц-дифференцирование* порядка k . В. А. Моенс доказал, что конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль нильпотентна тогда и только тогда, когда она допускает обратимое лейбниц-дифференцирование. После этого А. Фиаловски, А. Х. Худойбердыев и Б. А. Омиров [25] показали, что для определения лейбниц-дифференцирования, данного в работе [9], аналогичный результат для алгебр Лейбница не выполнен. А именно, они построили пример ненильпотентной алгебры Лейбница, допускающей обратимое лейбниц-дифференцирование. Для обобщения результатов работы [9] в случае алгебры Лейбница они ввели определение лейбниц-дифференцирования алгебры Лейбница, согласующееся со случаем лейбниц-дифференцирования алгебр Ли, и доказали, что алгебра Лейбница нильпотентна тогда и только тогда, когда она допускает обратимое лейбниц-дифференцирование. Отметим, что существуют ненильпотентные конечномерные алгебры Филиппова (n -лиевы алгебры) с обратимыми дифференцированиями [26].

Цель настоящего параграфа – доказать аналог теоремы Моенса для альтернативных алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Лейбниц-дифференцирование* (по Моенсу) *порядка n* алгебры A – это эндоморфизм ϕ этой алгебры, удовлетворяющий тождеству

$$\phi(\dots(x_1x_2)\dots)x_n = \sum_{i=1}^n (\dots(\dots(x_1x_2)\dots\phi(x_i))\dots)x_n.$$

Определение 10 можно интерпретировать в терминах n -арных алгебр: для любой алгебры A на ее векторном пространстве мы можем определить структуру n -арной алгебры A_n с умножением

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]_n = (\dots(a_1a_2)\dots)a_n.$$

Как и в алгебрах с бинарным умножением, скажем, что линейное отображение d является дифференцированием n -арной алгебры B , если оно удовлетворяет тождеству

$$d([x_1, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n].$$

Тогда ϕ является лейбниц-дифференцированием порядка n алгебры A , если и только если оно является дифференцированием A_n . Определение идеала легко обобщается в случае n -арной операции умножения: подпространство $I \subseteq B$ называется *идеалом*, если

$$[I, B, \dots, B]_n \subseteq I, \dots, [B, \dots, B, I]_n \subseteq I.$$

n -арная алгебра B называется *разрешимой*, если ее производный ряд

$$S_1 = B, \quad S_2 = [S_1, \dots, S_1]_n, \quad \dots, \quad S_{t+1} = [S_t, \dots, S_t]_n, \quad \dots$$

обрывается на нуле. Для любой конечномерной n -арной алгебры C через $\text{rad}(C)$ мы обозначим максимальный разрешимый идеал в C . Этот радикал определен корректно, поскольку сумма двух разрешимых идеалов в C также является разрешимым идеалом в C .

ТЕОРЕМА 11. *Конечномерная альтернативная алгебра над полем характеристики нуль нильпотентна тогда и только тогда, когда она допускает обратимое лейбниц-дифференцирование.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – конечномерная альтернативная алгебра с обратимым лейбниц-дифференцированием ϕ порядка n и $\beta(A)$ – ее нильпотентный радикал (известно, что в конечномерном случае он совпадает с $\text{rad}(A)$ – разрешимым радикалом A). Из [20, с. 336] следует, что $A/\beta(A)$ разлагается в прямую сумму своих минимальных идеалов, каждый из которых есть или полная матричная алгебра над некоторым телом, или алгебра Кэли–Диксона над своим центром. Следовательно, алгебра $A/\beta(A)$ имеет единицу 1. Мы будем рассматривать A как прямую сумму: $A = A^s + \beta(A)$, где A^s – полупростая альтернативная алгебра, изоморфная $A/\beta(A)$ (разложение Веддерберна–Мальцева). Используя идею доказательства из [9], мы покажем, что $\phi(\beta(A)) \subseteq \beta(A)$. Отметим, что в случае, когда ϕ является дифференцированием, это было доказано для всех алгебр с локально нильпотентным радикалом в [27].

Шаг 1. Докажем, что разрешимые радикалы $\text{rad}(A_n)$ и $\text{rad}(A)$ соответственно алгебр A_n и A совпадают. Очевидно, что $\text{rad}(A) \subseteq \text{rad}(A_n)$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\pi: A \rightarrow A^s$. Легко видеть, что $\pi(\text{rad}(A_n))$ – разрешимый идеал в A^s : применяя π к обеим частям соотношения

$$[A, \dots, \text{rad}(A_n), \dots, A]_n \subseteq \text{rad}(A_n)$$

и используя тот факт, что в A^s есть единица, мы имеем

$$\pi(\text{rad}(A_n))A^s + A^s\pi(\text{rad}(A_n)) \subseteq \pi(\text{rad}(A_n)).$$

Следовательно, поскольку алгебра A^s полупроста, мы имеем $\pi(\text{rad}(A_n)) = 0$.

Шаг 2. Докажем теперь, что $\phi(\beta(A)) \subseteq \beta(A)$. Пусть $\beta(A) = \tau = \tau_1 = \text{rad}(A_n)$ и $\tau_{t+1} = [\tau_t, \tau_t, \dots, \tau_t]_n$. Тогда мы имеем

$$\tau = \tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \dots \supseteq \tau_p \supseteq \tau_{p+1} = 0.$$

Поскольку произведение двух идеалов в альтернативной алгебре снова является идеалом, то τ_t – идеал в A_n для любого t .

Покажем, что включение $\phi^i(\tau_t) \subseteq \tau$ выполнено для любого i . Используем индукцию по t . База индукции тривиальна для $t = p + 1$. Допустим теперь, что $\phi^i(\tau_{t+1}) \subseteq \tau$ для всех i . Докажем, что включение $\phi^i(\tau_t) \subseteq \tau$ выполняется для любого i .

Множество $\tau + \phi(\tau_t)$ является разрешимым идеалом в A_n , поскольку

$$\begin{aligned} [A, \dots, A, \tau + \phi(\tau_t), A, \dots, A]_n &\subseteq \tau + \tau_t + \phi(\tau_t) = \tau + \phi(\tau_t), \\ [\tau + \phi(\tau_t), \dots, \tau + \phi(\tau_t)]_n &\subseteq \tau + [\phi(\tau_t), \dots, \phi(\tau_t)]_n \subseteq \tau + \phi^n(\tau_{t+1}) \subseteq \tau. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\tau + \phi^k(\tau_t)$ является разрешимым идеалом в A_n для любого k . Используя индукционное предположение, мы имеем

$$\begin{aligned} &[A, \dots, A, \tau + \phi^k(\tau_t), A, \dots, A]_n \\ &\subseteq \tau + \phi([A, \dots, A, \phi^{k-1}(\tau_t), A, \dots, A]_n) \\ &\quad + \sum [A, \dots, \phi(A), \dots, A, \phi^{k-1}(\tau_t), A, \dots, A]_n \subseteq \dots \\ &\dots \subseteq \tau + \sum_{a_0 + \dots + a_{n-1} = k, a_i \geq 0} \phi^{a_0}([\phi^{a_1}(A), \dots, \phi^{a_{l-1}}(A), \tau_t, \phi^{a_l}(A), \dots, \phi^{a_{n-1}}(A)]_n) \\ &\quad + \phi^k([A, \dots, A, \tau_t, A, \dots, A]_n) \\ &\subseteq \tau + \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i(\tau_t) + \phi^k(\tau_t) = \tau + \tau_t + \phi^k(\tau_t) = \tau + \phi^k(\tau_t), \\ &[\tau + \phi^k(\tau_t), \dots, \tau + \phi^k(\tau_t)]_n \subseteq \tau + [\phi^k(\tau_t), \dots, \phi^k(\tau_t)]_n \subseteq \tau + \phi^{kn}(\tau_{t+1}) \subseteq \tau. \end{aligned}$$

Следовательно, $\phi^i(\tau_t) \subseteq \tau$ и $\phi(\tau) \subseteq \tau$.

Шаг 3. Поскольку ϕ является обратимым дифференцированием, т. е. имеет нулевое ядро, то $\phi(A/\beta(A)) = A/\beta(A)$, что противоречит унитарности $A/\beta(A)$, так как $\phi(1) = n\phi(1)$ и $\dim(\phi(A/\beta(A))) < \dim(A/\beta(A))$. Из полученного противоречия следует $A = \beta(A)$, т. е. алгебра A нильпотентна.

Шаг 4. Обратное утверждение также верно: чтобы доказать, что нильпотентная альтернативная алгебра A индекса нильпотентности s имеет обратимое лейбниц-дифференцирование порядка $n = \lceil \frac{s}{2} \rceil + 1$, достаточно рассмотреть ее сумму векторных пространств: $A = W + A^n$, и линейное отображение ϕ , определенное формулой

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in W, \\ nx, & \text{если } x \in A^n. \end{cases}$$

Легко видеть, что ϕ является лейбниц-дифференцированием A порядка n . Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Над полями положительной характеристики существуют нильпотентные альтернативные алгебры, все дифференцирования которых вырождены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неассоциативные альтернативные алгебры размерности, не превосходящей 7, были классифицированы в работе [28]. Используя

эту классификацию, определим над полем характеристики 3 семимерную алгебру A с базисом $\{e_1, e_2, e_3, u_1, u_2, v, w\}$ следующей таблицей умножения (все остальные произведения равны нулю):

$$\begin{aligned} e_1^2 &= u_1, & e_2^2 &= u_2, & e_2 e_3 &= e_3 e_2 = -v, & e_3 e_1 &= u_2, & e_1 e_3 &= u_2, \\ e_1 u_1 &= u_1 e_1 = v, & e_2 u_2 &= u_2 e_2 = w, & e_1 v &= v e_1 = u_1^2 = w. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $A^2 = \langle u_1, u_2, v, w \rangle$, $A^3 = \langle v, w \rangle$, $A^4 = \langle w \rangle$. Тогда для любого дифференцирования D алгебры A мы имеем

$$D(v) = D((e_1 e_1) e_1) \in A^4, \quad D(w) = D(((e_1 e_1) e_1) e_1) \in A^4,$$

следовательно, существует $x \neq 0$ такой, что $D(x) = 0$.

Ограничение, налагаемое на характеристику поля в формулировке теоремы 11, является существенным.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Для произвольной альтернативной алгебры над полем положительной характеристики p тождественное преобразование является лейбниц-дифференцированием порядка $p + 1$.

Условие, требующее конечномерности алгебры, также является существенным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Свободная альтернативная алгебра с n порождающими допускает обратимое дифференцирование, но не является нильпотентной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть дифференцирование, действующее тождественно на порождающих алгебры.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Теорема 11, замечание 13, утверждение 14 имеют место и в ассоциативном случае.

Как оказалось, результат Херстейна [7] верен и в случае йордановых алгебр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Любая конечномерная йорданова алгебра над полем характеристики нуль, допускающая обратимое дифференцирование, является нильпотентной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из работы А. М. Слинько [27] следует, что $d(\beta(J)) \subseteq \beta(J)$ для любого дифференцирования d йордановой алгебры J над полем характеристики нуль. Воспроизводя шаг 3 из доказательства теоремы 11, мы получаем желаемый результат.

Как было показано выше и в [25], аналог теоремы Моенса верен не только для алгебр в хорошо изученных многообразиях, таких как многообразия ассоциативных алгебр и алгебр Ли, но и для алгебр, являющихся их обобщениями (альтернативных алгебр и алгебр Лейбница). С учетом замечания 15 естественным образом возникает

ПРОБЛЕМА 17. Выполнена ли теорема Моенса в классах йордановых алгебр и алгебр Мальцева?

В заключение авторы выражают благодарность И. П. Шестакову (Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу, Бразилия) и А. П. Пожидаеву (Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия) за проявленный интерес к работе и конструктивные замечания.

Список литературы

1. J. Bergen, I. N. Herstein, C. Lanski, “Derivations with invertible values”, *Canad. J. Math.*, **35**:2 (1983), 300–310.
2. A. Giambruno, P. Misso, F. C. Polcino Milies, “Derivations with invertible values in rings with involution”, *Pacific J. Math.*, **123**:1 (1986), 47–54.
3. J. Bergen, L. Carini, “Derivations with invertible values on a Lie ideal”, *Canad. Math. Bull.*, **31**:1 (1988), 103–110.
4. Jui Chi Chang, “ α -derivations with invertible values”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **13**:4 (1985), 323–333.
5. M. Hongan, H. Komatsu, “ (σ, τ) -derivations with invertible values”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **15**:4 (1987), 411–415.
6. H. Komatsu, A. Nakajima, “Generalized derivations with invertible values”, *Comm. Algebra*, **32**:5 (2004), 1937–1944.
7. N. Jacobson, “A note on automorphisms and derivations of Lie algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**:2 (1955), 281–283.
8. I. Bajo, “Lie algebras admitting non-singular pre-derivations”, *Indag. Math. (N.S.)*, **8**:4 (1997), 433–437.
9. W. A. Moens, “A characterisation of nilpotent Lie algebras by invertible Leibniz-derivations”, *Comm. Algebra*, **41**:7 (2013), 2427–2440.
10. А. А. Попов, “Дифференциально простые альтернативные алгебры”, *Алгебра и логика*, **49**:5 (2010), 670–689; англ. пер.: A. A. Popov, “Differentiably simple alternative algebras”, *Algebra and Logic*, **49**:5 (2010), 456–469.
11. А. А. Попов, “Дифференциально простые йордановы алгебры”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:4 (2013), 890–901; англ. пер.: A. A. Popov, “Differentiably simple Jordan algebras”, *Siberian Math. J.*, **54**:4 (2013), 713–721.
12. В. Т. Филиппов, “О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр”, *Алгебра и логика*, **39**:5 (2000), 618–625; англ. пер.: V. T. Filippov, “On δ -derivations of prime alternative and Malcev algebras”, *Algebra and Logic*, **39**:5 (2000), 354–358.
13. И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **46**:5 (2007), 585–605; англ. пер.: I. B. Kaygorodov, “On δ -derivations of simple finite-dimensional Jordan superalgebras”, *Algebra and Logic*, **46**:5 (2007), 318–329.
14. И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и левых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **49**:2 (2010), 195–215; англ. пер.: I. B. Kaygorodov, “ δ -superderivations of simple finite-dimensional Jordan and Lie superalgebras”, *Algebra and Logic*, **49**:2 (2010), 130–144.
15. А. И. Шестаков, “Тернарные дифференцирования сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:5 (2012), 1178–1195; англ. пер.: A. I. Shestakov, “Ternary derivations of separable associative and Jordan algebras”, *Siberian Math. J.*, **53**:5 (2012), 943–956.
16. A. Shestakov, *Ternary superderivations of Jordan superalgebras*, arXiv:1309.7299.
17. В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок”, *Алгебра и анализ*, **23**:4 (2011), 40–58; англ. пер.:

- V. N. Zhelyabin, I. B. Kaygorodov, “On δ -superderivations of simple superalgebras of Jordan brackets”, *St.-Peterburg Math. J.*, **23**:4 (2012), 665–677.
18. И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр”, *Матем. заметки*, **91**:2 (2012), 200–213; англ. пер.: I. B. Kaygorodov, “ δ -superderivations of semisimple finite-dimensional Jordan superalgebras”, *Math. Notes*, **91**:2 (2012), 187–197.
  19. I. Kaygorodov, E. Okhapkina, “ δ -derivations of semisimple finite-dimensional structurable algebras”, *J. Algebra Appl.*, **13**:4 (2014), 1350130, 12 pp.
  20. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978, 431 с.; англ. пер.: K. A. Zhevlakov, A. M. Slin’ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Pure Appl. Math., **104**, Academic Press, Inc., New York–London, 1982, xi+371 pp.
  21. A. Elduque, “On triality and automorphisms and derivations of composition algebras”, *Linear Algebra Appl.*, **314**:1-3 (2000), 49–74.
  22. S. M. Gagola, “Maximal subalgebras of the octonions”, *J. Pure Appl. Algebra*, **217**:1 (2013), 20–21.
  23. J. Dixmier, W. G. Lister, “Derivations of nilpotent Lie algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**:1 (1957), 155–158.
  24. D. Burde, “Lie algebra prederivations and strongly nilpotent Lie algebras”, *Comm. Algebra*, **30**:7 (2002), 3157–3175.
  25. A. Fialowski, A. Kh. Khudoyberdiyev, B. A. Omirov, “A characterization of nilpotent Leibniz algebras”, *Algebr. Represent. Theory*, **16**:5 (2013), 1489–1505.
  26. M. P. Williams, “Nilpotent n -Lie algebras”, *Comm. Algebra*, **37**:6 (2009), 1843–1849.
  27. А. М. Слинько, “Замечание о радикалах и дифференцированиях колец”, *Сиб. матем. журн.*, **13**:6 (1972), 1395–1397; англ. пер.: A. M. Slin’ko, “Remark on radicals and differentiation of rings”, *Siberian Math. J.*, **13**:6 (1972), 984–986.
  28. М. И. Бадалов, “О нильпотентных альтернативных алгебрах”, *Алгебра и логика*, **23**:3 (1984), 245–265; англ. пер.: M. I. Badalov, “Nilpotent alternative algebras”, *Algebra and Logic*, **23**:3 (1984), 167–181.

ИВАН БОРИСОВИЧ КАЙГОРОДОВ

(IVAN B. KAYGORODOV)

Universidade de São Paulo,

Instituto de Matemática e Estatística, Brazil;

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: kib@math.nsc.ru

Поступило в редакцию

15.07.2013

ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ ПОПОВ

(YURY S. POPOV)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск;

Новосибирский государственный университет

E-mail: yuri.ppv@gmail.com