Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

J. Wu, D. Wang, J. Zhao, Локализация собственных значений и оценка размаха комплексных матриц, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 217–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:53:55

УДК 512.64

Жунь-Лян У, Да-Фэй Ван, Цзянь-Го Чжао

Локализация собственных значений и оценка размаха комплексных матриц

Предложены новые методы локализации собственных значений и новые оценки сверху размаха комплексных матриц. Эти методы и оценки точнее, чем известные ранее.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: собственные значения, локализация, размах, оценки сверху, новые методы.

DOI: 10.4213/im8154

§ 1. Введение

Всюду далее $\mathbb{C}^{n \times n}$ – множество всех комплексных $(n \times n)$ -матриц, $\operatorname{tr} A$ – след матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|A\|$ – евклидова норма, A^* – эрмитово сопряженная матрица. Понятие *размаха* матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ было введено Л. Мирским [1] в 1956 г. по формуле

$$s(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

где λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, – собственные значения матрицы A . Мирский [1], [2] впервые изучил свойства размаха и получил ряд интересных результатов, в том числе оценки сверху и снизу размаха, из которых мы упомянем обобщаемую ниже оценку

$$s(A) \leq \left\{ 2\|A\|^2 - \frac{2}{n} |\operatorname{tr} A|^2 \right\}^{1/2}.$$

Разнообразные оценки (как сверху, так и снизу) размаха комплексных матриц любого размера были далее получены в работах [3]–[5]. Эти результаты мотивируют дальнейшее исследование понятия размаха.

В настоящей работе мы попытаемся продвинуться дальше. В § 2 мы комбинировем алгебраические и геометрические методы, чтобы оценить $s(A)$ сверху. Наш подход основан на том, что если все собственные значения матрицы локализованы в некотором круге или прямоугольнике, то ее размах не превосходит диаметра этого круга или длины диагонали прямоугольника. Таким образом, методы локализации собственных значений матриц дают оценки сверху для $s(A)$. При этом получаемые нами новые оценки сверху величины $s(A)$ оказываются точнее, чем известные ранее.

Работа выполнена при поддержке Китайского национального фонда естественных наук (грант № 70872123).

Для краткости введем обозначение $[A, B] = AB - BA$ и с каждой матрицей $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, записанной в виде

$$M = \begin{bmatrix} A_{k \times k} & B_{k \times (n-k)} \\ C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

связем следующие четыре матричнозначные функции:

$$M(x) = \begin{bmatrix} A_{k \times k} & x B_{k \times (n-k)} \\ x^{-1} C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_M(k, x) = \|M\|^2 - ((1 - x^2)\|B_{k \times (n-k)}\|^2 + (1 - x^{-2})\|C_{(n-k) \times k}\|^2) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n},$$

$$f_M(k, x) = \left((\Delta_M(k, x))^2 - \frac{1}{2} \| [M(x), M(x)^*] \|^2 \right)^{1/2} + \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n},$$

$$g_M(k, x) = \Delta_M(k, x) - (|x| \|B_{k \times (n-k)}\| - |x^{-1}| \|C_{(n-k) \times k}\|)^2 + \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n},$$

где $A_{k \times k}$ – главная $(k \times k)$ -подматрица, $1 \leq k \leq n-1$, матрицы M , а x – любое ненулевое вещественное число.

§ 2. Локализация собственных значений и оценка размаха комплексных матриц

В работе [6] предложен способ локализовать все собственные значения комплексной $(n \times n)$ -матрицы в одном круге и доказано, что все собственные значения произвольной комплексной $(n \times n)$ -матрицы A лежат в круге

$$\left| \lambda - \frac{\operatorname{tr} A}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \left(\|A\|^2 - \frac{|\operatorname{tr} A|^2}{n} \right) \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Отсюда легко вывести, что

$$s(A) \leq 2 \left(\frac{n-1}{n} \left(\|A\|^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr} A|^2 \right) \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Отметим, что в [7] уточнены размеры круга, содержащего все собственные значения комплексной $(n \times n)$ -матрицы M :

$$\begin{aligned} \left| \lambda - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right| &\leq \min_{1 \leq k \leq n-1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \\ &\times \left(\|M\|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} - (\|B_{k \times (n-k)}\| - \|C_{(n-k) \times k}\|)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из этого результата также выводится оценка

$$s(M) \leq \min_{1 \leq k \leq n-1} 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\|M\|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} - (\|B_{k \times (n-k)}\| - \|C_{(n-k) \times k}\|)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Далее мы уточним результаты указанных работ, предъявив гораздо меньшие круги, которые содержат все собственные значения данной комплексной

$(n \times n)$ -матрицы. Мы также укажем прямоугольники, содержащие все собственные значения данной комплексной $(n \times n)$ -матрицы. Соответственно, будут выведены различные оценки сверху размаха таких матриц.

Следующая лемма содержится в работе [8].

ЛЕММА 2.1. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – комплексные числа. Тогда при каждом i , $1 \leq i \leq n$, имеем

$$\left| z_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j \right|^2 \leq \frac{n-1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 - \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n z_j \right|^2 \right).$$

Из леммы 2.1 вытекает, что любые n комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ содержатся в круге

$$\left| z - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 - \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n z_j \right|^2 \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть матрица $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq \min(f_M, g_M), \quad (2.5)$$

где $f_M = \min_{x \neq 0} \min_{1 \leq k \leq n-1} f_M(k, x)$ и $g_M = \min_{x \neq 0} \min_{1 \leq k \leq n-1} g_M(k, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} M(x) &= \begin{bmatrix} A_{k \times k} & x B_{k \times (n-k)} \\ x^{-1} C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k \times k} & B_{k \times (n-k)} \\ C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{-1} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где I_k – единичная $(k \times k)$ -матрица, то $M(x)$ подобна M и, следовательно, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы $M(x)$. По неравенству Кресса [9] имеем

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq \left(\|M\|^4 - \frac{1}{2} \|[M, M^*]\|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Применив (2.7) к матрице $N = M(x) - \frac{\text{tr } M}{n} I$, получим

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq \left(\|N\|^4 - \frac{1}{2} \|[N, N^*]\|^2 \right)^{1/2} + \frac{|\text{tr } M|^2}{n}. \quad (2.8)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \|N\|^4 &= \left(\text{tr} \left(\left(M(x) - \frac{\text{tr } M}{n} I \right) \left(M(x) - \frac{\text{tr } M}{n} I \right)^* \right) \right)^2 \\ &= \left(\|M\|^2 - ((1-x^2)\|B_{k \times (n-k)}\|^2 + (1-x^{-2})\|C_{(n-k) \times k}\|^2) - \frac{|\text{tr } M|^2}{n} \right)^2 \\ &= (\Delta_M(k, x))^2, \end{aligned}$$

$$[N, N^*] = \left[M(x) - \frac{\operatorname{tr} M}{n} I, M(x)^* - \frac{\overline{\operatorname{tr} M}}{n} I \right] = [M(x), M(x)^*],$$

выводим неравенство

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq f_M. \quad (2.9)$$

С другой стороны, по неравенству Ту [10] имеем

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq \|M\|^2 - (\|B_{k \times (n-k)}\| - \|C_{(n-k) \times k}\|)^2. \quad (2.10)$$

Применяя (2.10) к матрице $N = M(x) - \frac{\operatorname{tr} M}{n} I$, получим оценку

$$\sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right|^2 \leq \left\| M(x) - \frac{\operatorname{tr} M}{n} I \right\|^2 - (|x| \|B_{k \times (n-k)}\| - |x^{-1}| \|C_{(n-k) \times k}\|)^2.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \leq g_M. \quad (2.11)$$

Объединяя (2.9) и (2.11), получаем неравенство (2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку

$$\min(f_M, g_M) \leq \min(f_M(k, 1), g_M(k, 1)),$$

неравенство (2.5) сильнее, чем (2.8) и (2.10).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда все собственные значения матрицы M содержатся в круге

$$\left| \lambda - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $z_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, в лемме 2.1, для каждого p , $1 \leq p \leq n$, имеем неравенство

$$\left| \lambda_p - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \right|^2 \leq \frac{n-1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \right|^2 \right) = \frac{n-1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right).$$

По лемме 2.2 получаем неравенство (2.12). Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 можно вывести, что

$$s(M) \leq 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда справедлива следующая оценка сверху размаха матрицы M :

$$s(M) \leq \sqrt{2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{tr} M = 0$. При $1 \leq k, l \leq n$, $k \neq l$, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 &= \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} + \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} \right|^2 \\ &= \frac{|\lambda_k - \lambda_l|^2}{2} + \sum_{j \neq k, l} \left| \lambda_j - \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} \right|^2 - n \left| \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} \right|^2. \end{aligned}$$

Замечая, что $\sum_{j \neq k, l} \left| \lambda_j - \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} \right|^2 \geq n \left| \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} \right|^2$, имеем

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \geq \frac{|\lambda_k - \lambda_l|^2}{2}. \quad (2.15)$$

Если $\operatorname{tr} M \neq 0$, то применение (2.15) к матрице $M(x) - \frac{\operatorname{tr} M}{n} I$ дает оценку

$$\sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right|^2 \geq \frac{|\lambda_k - \lambda_l|^2}{2}. \quad (2.16)$$

Из (2.15) и (2.16) вытекает, что (2.16) выполнено для всех матриц M независимо от того, будет ли $\operatorname{tr} M = 0$ или $\operatorname{tr} M \neq 0$. Таким образом,

$$s(M) = \max_{k \neq l} |\lambda_k - \lambda_l| \leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n}}. \quad (2.17)$$

По лемме 2.2 получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Отметим, что в [11] дана следующая оценка сверху размаха матрицы $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$s(M) \leq \sqrt{2} \left[\left(\|M\|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right)^2 - \frac{1}{2} \| [M, M^*] \|^2 \right]^{1/4}. \quad (2.18)$$

Далее, если M разбита на блоки и имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} A_{k \times k} & B_{k \times (n-k)} \\ C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

то получаем оценку

$$s(M) \leq \sqrt{2} \left[\|M\|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} - (\|B_{k \times (n-k)}\| - \|C_{(n-k) \times k}\|)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из замечания 2.1 вытекает, что оценка (2.14) сильнее, чем (2.18) и (2.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если $n \geq 3$, то имеем $2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} > \sqrt{2}$, поэтому оценка (2.14) сильнее, чем (2.13).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда все собственные значения матрицы M содержатся в круге

$$\left| \lambda - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} + \left| \operatorname{tr} M^2 - \frac{\operatorname{tr}^2 M}{n} \right| \right)^{1/2}. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{tr} M = 0$. Пусть $z_j = \operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_j)$, где $\theta = \arg \bar{\lambda}_p$ и $j, p = 1, 2, \dots, n$. По лемме 2.1 для каждого p , $1 \leq p \leq n$, имеем

$$|\lambda_p| = |z_p| = \left| z_p - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_j) \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_j))^2 \right)^{1/2}. \quad (2.21)$$

Легко проверить следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re}(e^{i\theta} \lambda_j))^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sqrt{2} \operatorname{Re} \lambda_j \cos \theta - \sqrt{2} \operatorname{Im} \lambda_j \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|\lambda_j|^2 + \operatorname{Re}(e^{2i\theta} \lambda_j^2)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{2i\theta} \operatorname{tr} M^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Объединяя (2.21) и (2.22), получаем

$$|\lambda_p|^2 \leq \left(\frac{n-1}{2n} \right) \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + |\operatorname{tr} M^2| \right). \quad (2.23)$$

Если $\operatorname{tr} M \neq 0$, то применение (2.23) к матрице $M(x) - \frac{\operatorname{tr} M}{n} I$ дает

$$\left| \lambda_p - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right|^2 \leq \left(\frac{n-1}{2n} \right) \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} + \left| \operatorname{tr} M^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} \right| \right). \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) вытекает, что (2.24) выполняется для всех матриц M независимо от того, будет ли $\operatorname{tr} M = 0$ или $\operatorname{tr} M \neq 0$. Теперь, применяя лемму 2.2, завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{tr} M^2 - \frac{\operatorname{tr}^2 M}{n} \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 - \frac{\operatorname{tr}^2 M}{n} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right)^2 \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{\operatorname{tr} M}{n} \right|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j \right|^2 - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n}, \end{aligned}$$

из которого вытекает, что оценка (2.20) сильнее, чем (2.12).

Из теоремы 2.3 выводим, что

$$s(M) \leq \min_{x \neq 0} \min_{1 \leq k \leq n-1} 2 \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} + \left| \operatorname{tr} M^2 - \frac{\operatorname{tr}^2 M}{n} \right| \right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть матрица $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда спектральный радиус $\rho(M)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(M) \leq \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2} \left(\min(f_M, g_M) - \frac{|\operatorname{tr} M|^2}{n} + \left| \operatorname{tr} M^2 - \frac{\operatorname{tr}^2 M}{n} \right| \right)^{1/2} + \frac{|\operatorname{tr} M|}{n}.$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда все собственные значения матрицы M расположены в прямоугольнике

$$\left[\frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M)}{n} - \alpha, \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M)}{n} + \alpha \right] \times \left[\frac{\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M)}{n} - \beta, \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M)}{n} + \beta \right],$$

где

$$\alpha = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} (\min(f_M, g_M) + \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2)) - \frac{(\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2},$$

$$\beta = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} (\min(f_M, g_M) - \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2)) - \frac{(\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $z_j = \operatorname{Re} \lambda_j$, а затем $z_j = \operatorname{Im} \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, в лемме 2.1, имеем

$$\left| \operatorname{Re} \lambda_j - \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M)}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_j)^2 - \frac{(\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2},$$

$$\left| \operatorname{Im} \lambda_j - \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M)}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (\operatorname{Im} \lambda_j)^2 - \frac{(\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Замечая, что

$$\sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_j)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2) \right),$$

$$\sum_{j=1}^n (\operatorname{Im} \lambda_j)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2) \right),$$

мы получаем оценки

$$\left| \operatorname{Re} \lambda_j - \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M)}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \times \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2) \right) - \frac{(\operatorname{Re}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2},$$

$$\left| \operatorname{Im} \lambda_j - \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M)}{n} \right| \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \times \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - \operatorname{Re}(\operatorname{tr} M^2) \right) - \frac{(\operatorname{Im}(\operatorname{tr} M))^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Теперь, используя лемму 2.2, завершаем доказательство теоремы.

Из теоремы 2.4 вытекает, что

$$s(M) \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}. \quad (2.26)$$

Авторы выражают благодарность анонимным рецензентам за их ценные комментарии и предложения по улучшению работы.

Список литературы

1. L. Mirsky, "The spread of a matrix", *Mathematika*, **3:2** (1956), 127–130.
2. L. Mirsky, "Inequalities for normal and Hermitian matrices", *Duke Math. J.*, **24:4** (1957), 591–599.

3. E. Deutsch, “On the spread of matrices and polynomials”, *Linear Algebra Appl.*, **22** (1978), 49–55.
4. P. R. Beesack, “The spread of matrices and polynomials”, *Linear Algebra Appl.*, **31** (1980), 145–149.
5. Bo Xun Tu, “On the spread of a matrix”, Chinese, *Fudan Xuebao*, **23**:4 (1984), 435–442.
6. Yi Xi Gu, “The distribution of eigenvalues of a matrix”, *Acta Math. Appl. Sinica*, **17**:4 (1994), 501–511.
7. Limin Zou, Youyi Jiang, “Estimation of the eigenvalues and the smallest singular value of matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **433**:6 (2010), 1203–1211.
8. Ó. Rojo, R. L. Soto, H. Rojo, Tin Yau Tam, “Eigenvalue localization for complex matrices”, *Proyecciones*, **11**:1 (1992), 11–19.
9. R. Kress, H. L. de Vries, R. Wegmann, “On nonnormal matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **8**:2 (1974), 109–120.
10. Bo Xun Tu, “A lower bound for the rank of a matrix and sufficient conditions for nonsingularity of a matrix. I”, Chinese, *Fudan Xuebao*, **21**:4 (1982), 416–422.
11. R. Sharma, R. Kumar, “Remark on upper bounds for the spread of a matrix”, *Linear Algebra Appl.*, **438**:11 (2013), 4359–4362.
12. H. Wolkowicz, G. P. H. Styan, “Bounds for eigenvalues using traces”, *Linear Algebra Appl.*, **29** (1980), 471–506.
13. H. Wolkowicz, G. P. H. Styan, “More bounds for eigenvalues using traces”, *Linear Algebra Appl.*, **31** (1980), 1–17.
14. J. L. Wu, “Distribution and estimation for eigenvalues of real quaternion matrices”, *Comput. Math. Appl.*, **55**:9 (2008), 1998–2004.
15. Junliang Wu, Limin Zou, Xiangping Chen, Shengjie Li, “The estimation of eigenvalues of sum, difference, and tensor product of matrices over quaternion division algebra”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:11–12 (2008), 3023–3033.
16. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989, 656 с.; пер. с англ.: R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, xiii+561 pp.
17. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, viii+607 pp.
18. R. S. Varga, *Geršgorin and his circles*, Springer Ser. Comput. Math., **36**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, x+226 pp.

ЖУНЬ-ЛЯН У (JUNLIANG WU)
 College of Mathematics and Statistics of Chongqing
 University, China
E-mail: jlwu678@163.com

Поступило в редакцию
 26.07.2013
 12.02.2014

ДА-ФЭЙ ВАН (DAFEI WANG)
 College of Mathematics and Statistics of Chongqing
 University, China

ЦЗЯНЬ-ГО ЧЖАО (JIANGUO ZHAO)
 College of Mathematics and Statistics of Chongqing
 University, China

Перевод с английского А. В. Домрина