Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, Й. Микеш, Лапласиан Ходжа–де Рама
и оператор Тачибаны на компактном римановом мно-
гообразии со знакоопределенным оператором кривизны,
Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 2, 167–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:20:52

УДК 514.764.25+515.168.5

С. Е. Степанов, Й. Микеш

Лапласиан Ходжа–де Рама и оператор Тачибаны на компактном римановом многообразии со знакоопределенным оператором кривизны

Проведен сравнительный анализ спектральных свойств операторов Ходжа–де Рама и Тачибаны на компактных римановых многообразиях со знакоопределенным ограниченным оператором кривизны. Найдены грани их спектров и дана оценка их кратностей.

Библиография: 32 наименования.

Ключевые слова: риманово многообразие, оператор кривизны, эллиптические операторы, собственные значения и формы, конформно киллинговые формы, гармонические формы.

DOI: 10.4213/im8156

§ 1. Введение

1.1. Спектральная геометрия – область математики, которая исследует взаимосвязи между геометрией многообразия и спектрами определенных на нем дифференциальных операторов. Спектральная геометрия является активно развивающейся математической дисциплиной, задачи которой мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики.

В настоящей статье будут рассмотрены операторы Ходжа–де Рама и Тачибаны, действующие на дифференциальных формах компактного риманова многообразия. Если изучение собственных значений и, вообще, спектра первого из операторов можно отнести к классике римановой геометрии (см., например, [1, с. 102–131], [2, с. 334–344], [3, с. 119–212]), то второй оператор, который так же, как и оператор Ходжа–де Рама, является эллиптическим, был введен в рассмотрение сравнительно недавно (см. [4]). В статьях [5] и [6] было начато исследование спектральных свойств этого оператора. Так, в частности, в [5] были найдены нижние грани спектров операторов Ходжа–де Рама и Тачибаны на компактных конформно плоских римановых многообразиях четной размерности со знакоопределенной скалярной кривизной.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Czech Science Foundation: P201/11/0356.

1.2. В предлагаемой статье будет проведен сравнительный анализ спектральных свойств операторов Ходжа–де Рама и Тачибаны на компактных римановых многообразиях со знакоопределенным ограниченным оператором кривизны. В частности, будут найдены грани их спектров и дана оценка их кратностей.

В основе статьи лежит доклад авторов на Международной конференции “DGA-2013” (прошедшей 19–23 августа 2013 г. в г. Брно, Чешская республика).

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Пусть (M, g) – риманово многообразие, которое будем рассматривать как связное класса C^∞ многообразие M размерности $n \geq 2$ с метрическим тензором g и связностью Леви–Чивита ∇ . Пусть, далее, TM и T^*M – его касательное и кокасательное расслоения, а $\Lambda^r M = \Lambda^r(T^*M)$ и $S^q M = S^q(T^*M)$ – расслоения дифференциальных r -форм и ковариантных симметрических q -тензоров на M . Обозначим через $C^\infty TM$, $C^\infty T^*M$, $C^\infty \Lambda^r M$ и $C^\infty S^q M$ векторные пространства всех их C^∞ -сечений. При этом сделаем исключение для пространства $C^\infty \Lambda^r M$ дифференциальных r -форм на M , которое обозначим через $\Omega^r(M)$.

Метрика в слоях каждого из этих пространств индуцируется римановой метрикой g , а в случае компактного (без границы) многообразия M в пространствах задается метрика Ходжа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ или, иначе, глобальное скалярное произведение. Так, посредством формулы

$$\langle \omega, \theta \rangle = \int_M \frac{1}{r!} g(\omega, \theta) d\text{Vol} \quad (2.1)$$

для любых $\omega, \theta \in \Omega^r(M)$ задается метрика Ходжа в $\Omega^r(M)$.

Обозначим через $d: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ известный оператор внешнего дифференцирования. Если $d\omega = 0$, то r -форма ω называется замкнутой. Оператор кодифференцирования $d^*: \Omega^{r+1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ определяется как формально сопряженный к d относительно метрики Ходжа (2.1) посредством равенства $\langle \omega, d^*\theta \rangle = \langle d\omega, \theta \rangle$ для произвольных $\omega \in \Omega^r(M)$ и $\theta \in \Omega^{r+1}(M)$. Если $d^*\omega = 0$, то r -форма ω называется козамкнутой.

2.2. Ж.-П. Бургиньон (см. [7]) доказал существование базиса $\{d, d^*, D\}$ в пространстве естественных (относительно изометрических диффеоморфизмов) дифференциальных операторов первого порядка, действующих на пространстве $\Omega^r(M)$, со значениями в пространстве однородных тензоров на (M, g) . Вид третьего базисного оператора D установлен не был. Для случая $r = 1$ уточнялось (см. [7, с. 274]), что ядро D составляют инфинитезимальные конформные преобразования многообразия (M, g) .

С помощью операторов d и d^* базиса строится хорошо известный оператор или, иначе, лапласиан Ходжа–де Рама $\Delta = d^*d + dd^*$, который является самосопряженным неотрицательным эллиптическим дифференциальным

оператором второго порядка $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$. Оператор Δ коммутирует с двумя исходными операторами $d\Delta = \Delta d$ и $d^*\Delta = \Delta d^*$, и оператором Ходжа $*\Delta = \Delta*$, который является известным изоморфизмом векторных пространств, $*$: $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{n-r}(M)$. На компактном многообразии (M, g) имеется ортогональное относительно метрики (2.1) разложение Ходжа

$$\Omega^r(M) = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } \Delta, \quad (2.2)$$

где $\text{Ker } \Delta$ составляют *гармонические r -формы*, образующие на многообразии (M, g) конечномерное векторное пространство $\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R})$, размерность которого равна числу Бетти $b_r(M)$ многообразия (M, g) для $r = 1, \dots, n-1$. Числа Бетти обладают *двойственностью Пуанкаре*: $b_r(M) = b_{n-r}(M)$.

Вид третьего базисного оператора D определен в [8] и [9], где также было доказано, что его ядро составляют конформно киллинговые r -формы (см. [10], [11]). В работе [4] найден оператор D^* , формально сопряженный к D относительно метрики Ходжа (2.1), а затем построен дифференциальный оператор второго порядка

$$D^*D = \frac{1}{r(r+1)} \left(\bar{\Delta} - \frac{1}{r+1} d^*d - \frac{1}{n-r+1} dd^* \right), \quad (2.3)$$

где $\bar{\Delta} := \nabla^*\nabla$ – *грубый лапласиан Бохнера* (см. [12, с. 77]). Через ∇^* здесь обозначен оператор, формально сопряженный к ∇ относительно метрики Ходжа (2.1). В статьях [4]–[6] и [13] изучены свойства оператора D^*D . В частности, доказано, что оператор D^*D эллиптический и на компактном многообразии (M, g) его ядро составляют *конформно киллинговые r -формы*, образующие конечномерное пространство $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$. Размерность последнего названа в [14] *числом Тачибаны* $t_r(M)$ по аналогии с числом Бетти $b_r(M)$. Доказано, что числа Тачибаны обладают свойством двойственности: $t_r(M) = t_{n-r}(M)$, и являются скалярными конформными инвариантами многообразия (M, g) . В [5] и [6] установлены различные связи между числами Бетти и Тачибаны и кривизной многообразия (M, g) .

Пространство $\mathbf{K}^r(M, \mathbb{R})$ козамкнутых конформно киллинговых r -форм (или, иначе, киллинговых r -форм [10], [15]) является подпространством пространства $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ с размерностью $k_r(M)$, названной *числом Киллинга* многообразия (M, g) . В свою очередь, пространство $\mathbf{P}^r(M, \mathbb{R})$ замкнутых конформно киллинговых r -форм, названных в [16] *планарными r -формами*, является подпространством пространства $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ с размерностью $p_r(M)$, названной *числом планарности* многообразия (M, g) . Числа $k_r(M)$ и $p_r(M)$ являются скалярными проективными инвариантами, обладают свойством двойственности: $k_r(M) = p_{n-r}(M)$, и, кроме того, на компактном многообразии (M, g) постоянной положительной кривизны удовлетворяют равенству $t_r(M) = k_r(M) + p_r(M)$ (см. [5], [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Обзор публикаций о конформно киллинговых, киллинговых и планарных формах и их многочисленных приложениях можно найти во введениях к нашим статьям [5] и [6].

2.5. На римановом многообразии (M, g) в локальной системе координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ компоненты тензора кривизны R определяются из равенств

$$R_{lij}^k X^l = \nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k,$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования в направлении $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $X := X^k \partial_k$ – произвольное векторное поле, $X \in C^\infty TM$, для $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$. Благодаря тензору кривизны R на многообразии (M, g) определяется линейный симметрический оператор кривизны $\mathring{R}: S_0^2 M \rightarrow S_0^2 M$ равенствами (см. [17])

$$\mathring{R}(\varphi_{il}) = R_{ijkl} \varphi^{jk} := g^{km} g^{jp} R_{ijkl} \varphi_{mp} \quad (2.4)$$

для локальных компонент $\varphi_{ij} := \varphi(\partial_i, \partial_j)$ произвольного поля $\varphi \in C^\infty S_0^2 M$. Здесь $S_0^2 M$ – расслоение ковариантных симметрических бесследовых 2-тензоров на M .

Оператор $\mathring{R}$ изучался во многих статьях и монографиях и известен своими многочисленными приложениями (см. [12, с. 76, 472], [17]–[20] и др.). Остановимся на двух из них, поскольку их результатами нам придется воспользоваться далее.

Оператор Ходжа–де Рама Δ допускает разложение Вейценбёка (см. [1, с. 171], [2, с. 336], [12, с. 77], [21, с. 211], [22, с. 172–174]) вида

$$\Delta = \bar{\Delta} + H_r, \quad (2.5)$$

где $H_r: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ – алгебраический симметрический оператор, который известным образом (см., например, [10], [15]) линейно зависит от тензоров кривизны R и Риччи Ric метрики g . В частности, для многообразия (M, g) постоянной кривизны δ имеем $H_r(\omega) = r(n-r)\delta\omega$. Отметим важное свойство

$$*H_r = H_{n-r}*, \quad (2.6)$$

или, подробнее, $*H_r(\omega) = *\Delta\omega - *\bar{\Delta}\omega = \Delta(*\omega) - \bar{\Delta}(*\omega) = H_{n-r}(*\omega)$.

В каждой точке $x \in M$ зададим квадратичную форму $F_r: \Lambda^r(T_x M) \otimes \Lambda^r(T_x M) \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $F_r(\omega, \omega) = g(\mathring{H}_r(\omega), \omega)$ для произвольной формы $\omega \in \Omega^r(M)$. Если оператор кривизны $\mathring{R}$ положительно определен на $S_0^2 M$ и ограничен снизу некоторым числом $\delta > 0$, то при всех r , удовлетворяющих неравенству $2r \leq n$, имеем (см. [17])

$$F_r(\omega, \omega) \geq (n-r)\delta g(\omega, \omega) \quad (2.7)$$

для произвольной формы $\omega \in \Omega^r(M)$. В этом случае для n -мерного компактно-ориентированного риманова многообразия (M, g) на основе двойственности чисел Бетти в статье [17] было доказано, что $b_1(M) = 0, \dots, b_{n-1}(M) = 0$. Этот результат явился аналогом известной теоремы Мейера о гомологической сфере (см. [23]).

Если оператор кривизны $\mathring{R}$ отрицательно определен на $S_0^2 M$ и ограничен сверху некоторым отрицательным числом $-\varepsilon$, то (см. [24])

$$F_r(\omega, \omega) \leq -(n-r)\varepsilon g(\omega, \omega) \quad (2.8)$$

для произвольной r -формы $\omega \in \Omega^r(M)$ и всех r , удовлетворяющих неравенству $2r \leq n$. В этом случае для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) на основе [11, теорема 4] и свойства двойственности чисел Тачибаны заключаем, что $t_1(M) = 0, \dots, t_{n-1}(M) = 0$. Этот результат является аналогом доказанной в [13] теоремы об исчезновении чисел Тачибаны.

В заключение на основании равенства (2.6) и тождества $g(*\omega, *\omega) = g(\omega, \omega)$ делаем вывод о том, что неравенства (2.7) и (2.8) справедливы для всех $r = 1, \dots, n-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Наряду с оператором кривизны $\hat{R}$ известен оператор кривизны $\bar{R}: \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ (см. [19]–[21, с. 35–37] и др.), который также активно используется в римановой геометрии. Примерами служат упомянутые выше теоремы Мейера [23] и Степанова [13]. Поэтому $\hat{R}$ называют еще *оператором кривизны второго вида* (см., например, [19]).

§ 3. Первое собственное значение оператора Ходжа–де Рама и числа Тачибаны, Киллинга и планарности

3.1. Рассмотрим спектральные свойства лапласиана Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ на компактном многообразии (M, g) (см., например, [1, с. 102–131], [2, с. 334–344], [3, с. 119–212]). Число λ^r , для которого найдется не равная тождественно нулю форма $\omega \in \Omega^r(M)$ такая, что $\Delta\omega = \lambda^r\omega$, называется *собственным значением* оператора Δ . При этом ω называется *собственной формой* лапласиана Δ , отвечающей собственному значению λ^r . Собственные r -формы, отвечающие фиксированному λ^r , образуют конечномерное векторное подпространство $V_{\lambda^r}(M)$ в пространстве $\Omega^r(M)$, называемое *собственным подпространством*, соответствующим λ^r , а его размерность называется *кратностью* собственного значения λ^r .

Пространство $\Omega^r(M)$ имеет базис $\omega_1, \omega_2, \dots$ из счетного числа ортогональных относительно метрики Ходжа r -форм. При этом отвечающие им собственные значения составляют дискретный *спектр оператора* Δ , который задается в виде неубывающей последовательности действительных чисел $\text{Spec}^{(r)}(\Delta) = \{0 \leq \lambda_1^r \leq \lambda_2^r \leq \dots \rightarrow \infty\}$ такой, что $\text{Spec}^{(r)}(\Delta) = \text{Spec}^{(n-r)}(\Delta)$. При этом $\dim V_{\lambda_a^r}(M) < \infty$ и пространства $V_{\lambda_a^r}(M)$ и $V_{\lambda_b^r}(M)$ ортогональны относительно метрики Ходжа, если $a \neq b$. Спектр $\text{Spec}^{(r)}(\Delta)$ имеет в качестве нижней грани нуль тогда и только тогда, когда $b_r(M) \neq 0$. При этом факт примыкания спектра Δ к 0 не зависит от g .

3.2. Докажем утверждение, которое служит аналогом теоремы Галлота–Мейера (см. [25]) об оценке первого собственного значения λ_1^r оператора Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть (M, g) является n -мерным компактным римановым многообразием, оператор кривизны $\hat{R}$ которого положительно определен на $S_0^2 M$ и ограничен снизу некоторым числом $\delta > 0$. Тогда для оператора

Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ его первое собственное значение λ_1^r удовлетворяет неравенству $\lambda_1^r \geq \min\{r(n-r+1)\delta, (r+1)(n-r)\delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_1^r(d)$ и $\lambda_1^r(d^*)$ – первые собственные значения оператора Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ при ограничении его на подпространства точных и коточных r -форм. Заметим, что эти подпространства сохраняются при воздействии на них оператора Δ , поскольку он коммутирует с d и d^* . Тогда разложение Ходжа (2.2) влечет $V_{\lambda^r}(M) = (V_{\lambda^r}(M) \cap \text{Im } d) \oplus (V_{\lambda^r}(M) \cap \text{Im } d^*)$, а потому

$$\lambda_1^r = \min\{\lambda_1^r(d), \lambda_1^r(d^*)\}. \quad (3.1)$$

В результате, для того чтобы получить оценку собственного значения λ_1^r , надо найти оценку собственных значений $\lambda_1^r(d)$ и $\lambda_1^r(d^*)$.

Предположим, что оператор кривизны $\hat{R}$ риманова многообразия (M, g) размерности $n \geq 2$ положительно определен и ограничен снизу числом $\delta > 0$. Тогда согласно изложенному в п. 2.5 выполняется $F_r(\omega, \omega) \geq (n-r)\delta g(\omega, \omega)$ для произвольной формы $\omega \in C^\infty \Lambda^r M$ и всех $1 \leq r \leq n-1$. В результате имеем $b_r(M) = 0$, а потому $\lambda_1^r \neq 0$ и $\text{Спец}^{(r)}(\Delta) = \{0 < \lambda_1^r \leq \lambda_2^r \leq \dots \rightarrow \infty\}$.

Оператору D^*D в силу разложения Вейценбёка (2.5) придадим вид

$$D^*D\omega = \frac{1}{r(r+1)} \left(\Delta\omega - H_r(\omega) - \frac{1}{r+1} d^*d\omega - \frac{1}{n-r+1} dd^*\omega \right) \quad (3.2)$$

для произвольной формы $\omega \in C^\infty \Lambda^r M$. Далее, принимая во внимание выражение $\Delta = d^*d + dd^*$ для лапласиана Ходжа–де Рама Δ , формулу (3.2) представим в следующем виде:

$$D^*D\omega = \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{r}{r+1} \Delta\omega - H_r(\omega) + \frac{n-2r}{(r+1)(n-r+1)} dd^*\omega \right). \quad (3.3)$$

Умножим скалярно обе части равенства (3.3) на r -форму ω и, полагая многообразие компактным, проинтегрируем новое равенство. В итоге получим интегральную формулу

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+1} \langle \Delta\omega, \omega \rangle - r \int_M g(H_r(\omega), \omega) d\text{Vol} \\ = \frac{2r-n}{(r+1)(n-r+1)} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle + r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $g(H_r(\omega), \omega) = F_r(\omega, \omega) \geq (n-r)\delta \|\omega\|^2$, а потому

$$\frac{r}{r+1} \langle \Delta\omega, \omega \rangle - r(n-r)\delta \langle \omega, \omega \rangle \geq \frac{2r-n}{(r+1)(n-r+1)} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle + r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle. \quad (3.5)$$

Если при этом $\Delta\omega = \lambda^r\omega$, то из (3.5) выведем следующее интегральное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+1} (\lambda^r - (r+1)(n-r)\delta) \langle \omega, \omega \rangle \\ \geq \frac{2r-n}{(r+1)(n-r+1)} \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle + r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда при $d^*\omega = 0$ из (3.6) следует $\lambda_1^r(d^*) \geq (r+1)(n-r)\delta$.

С другой стороны, оператору D^*D за счет разложения Вейценбёка (2.5) придадим вид

$$D^*D\omega = \frac{1}{r(r+1)} \left(\frac{n-r}{n-r+1} \Delta\omega - H_r(\omega) - \frac{n-2r}{(r+1)(n-r+1)} d^*d\omega \right). \quad (3.7)$$

Затем на основе условия теоремы о положительной определенности и ограниченности снизу оператора кривизны $\mathring{R}$ из (3.7) получим интегральное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{n-r}{n-r+1} \langle \Delta\omega, \omega \rangle - r(n-r) \delta \langle \omega, \omega \rangle \\ \geq \frac{n-2r}{(r+1)(n-r+1)} \langle d\omega, d\omega \rangle + r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если при этом положить $\Delta\omega = \lambda^r \omega$, то из (3.8) следует

$$\frac{n-r}{n-r+1} (\lambda^r - r(n-r+1)\delta) \langle \omega, \omega \rangle \geq \frac{n-2r}{(r+1)(n-r+1)} \langle d\omega, d\omega \rangle + r(r+1) \langle D\omega, D\omega \rangle. \quad (3.9)$$

И наконец, для $d\omega = 0$ из (3.9) выводим ограничение $\lambda_1^r(d) \geq r(n-r+1)\delta$. В итоге в соответствии с (3.1) приходим к условию

$$\lambda_1^r \geq \min\{r(n-r+1)\delta, (r+1)(n-r)\delta\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При интегрировании, если компактное риманово многообразие (M, g) не ориентировано, надо воспользоваться его ориентированным двулистным накрытием.

Докажем теорему о нижней грани спектра оператора Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ и его кратности в случае компактного многообразия (M, g) с положительным ограниченным снизу оператором кривизны $\mathring{R}$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть (M, g) является n -мерным ($n \geq 2$) компактным римановым многообразием, оператор кривизны $\mathring{R}$ которого положительно определен на $S_0^2 M$ и ограничен снизу некоторым числом $\delta > 0$. Пусть, далее, первое собственное значение λ_1^r оператора Ходжа–де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ достигает своего наименьшего значения:

1) $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta < r(n-r+1)\delta$; тогда кратность λ_1^r не превзойдет $k_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$ и отвечающая λ_1^r собственная r -форма ω будет киллинговой;

2) $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta < r(r+1)(n-r)\delta$; тогда кратность λ_1^r не превзойдет $p_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$ и отвечающая λ_1^r собственная r -форма ω будет планарной;

3) $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta = r(n-r+1)\delta$; тогда кратность λ_1^r не превзойдет $t_r(\mathbb{S}^{2r}) = \frac{(2r+2)!}{2(r+1)!}$ и отвечающая λ_1^r собственная r -форма ω будет конформно киллинговой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Неравенство $(r+1)(n-r)\delta < r(n-r+1)\delta$ равносильно $n < 2r$. Если предположить, что найдется r -форма ω такая, что

$\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta$ при $n < 2r$, то из (3.6) последует $d^*\omega = 0$ и $D\omega = 0$. В данном случае r -форма ω будет киллинговой. При этом кратность собственного значения $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta$ не превзойдет числа Киллинга $k_r(M)$. С другой стороны, для произвольной киллинговой r -формы ω на евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$ постоянной кривизны $\delta > 0$ из (3.3) выводим $\Delta\omega = (r+1)(n-r)\delta\omega$. В дополнение укажем (см. [5], [13], [26]), что $k_r(M) \leq k_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$.

2) Неравенство $r(n-r+1)\delta < (r+1)(n-r)\delta$ равносильно $n > 2r$. Если предположить, что найдется r -форма ω такая, что $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta$ при $n > 2r$, то из (3.9) последует $d\omega = 0$ и $D\omega = 0$. В данном случае r -форма ω будет планарной. При этом кратность собственного значения $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta$ не превзойдет числа планарности $p_r(M)$. С другой стороны, для произвольной планарной r -формы ω на евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$ постоянной кривизны $\delta > 0$ из (3.7) выводим $\Delta\omega = r(n-r+1)\delta\omega$. В дополнение укажем (см. [5], [13], [26]), что $p_r(M) \leq p_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$.

3) Равенство $(r+1)(n-r)\delta = r(n-r+1)\delta$ равносильно $n = 2r$. В этом случае ω является конформно киллинговой r -формой, отвечающей собственному значению $\lambda_1^r = r(r+1)\delta$, кратность которого не превзойдет числа Та-чибаны $t_r(M)$. С другой стороны, для произвольной конформно киллинговой r -формы ω на евклидовой сфере $\mathbb{S}^{2r}$ постоянной кривизны $\delta > 0$ из (3.3) последует $\Delta\omega = r(r+1)\delta\omega$. В дополнение укажем (см. [5], [13], [26]), что $t_r(M) \leq t_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Теорема 3.3 аналогична (без учета оценки кратностей собственных значений) теореме 2.4 работы [15], где в условии участвует требование положительной определенности оператора кривизны $\bar{R}$.

3.3. Проиллюстрируем утверждения из п. 3.2 на примере n -мерного ($n \geq 4$) конформно плоского риманова многообразия (M, g) , тензор кривизны R которого, как известно (см. [12, с. 87], [27]), допускает инвариантное представление

$$R(X, Y, Z, V) = L(Y, V)g(X, Z) - L(Y, Z)g(X, V) + L(X, Z)g(Y, V) - L(X, V)g(Y, Z), \quad (3.10)$$

где $L = (n-2)^{-1}(\text{Ric} - (2n-2)^{-1}sg)$ и $X, Y, Z, V \in C^\infty TM$. Справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть (M, g) – полное односвязное конформно плоское многообразие размерности $n \geq 4$ с тензором $L \geq \frac{1}{2}\delta g$. Тогда для оператора Ходжа-де Рама $\Delta: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ его собственное значение λ_1^r удовлетворяет неравенству $\lambda_1^r \geq \min\{r(n-r+1)\delta, (r+1)(n-r)\delta\}$. Если:

1) $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta < r(n-r+1)\delta$, то кратностью λ_1^r является $k_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$, а отвечающая λ_1^r собственная r -форма ω является киллинговой;

2) $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta < (r+1)(n-r)\delta$, то кратностью λ_1^r является $p_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$, а отвечающая λ_1^r собственная r -форма ω является планарной;

3) $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta = (r+1)(n-r)\delta$, то $\lambda_1^r = r(r+1)\delta$ и кратностью λ_1^r является $t_r(\mathbb{S}^{2r}) = \frac{(2r+2)!}{2(r+1)!}$, при этом отвечающая ему собственная r -форма ω является конформно киллинговой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что многообразие (M, g) полное и $L \geq \frac{1}{2}\delta g$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда $\text{Ric} \geq (n-1)\delta g$, и в результате (M, g) становится компактным многообразием (см. [1, с. 226], [21, с. 171, 270]). Одновременно с этим из (3.10) при $L \geq \frac{1}{2}\delta g$ выводим, что оператор кривизны $\hat{R}$ многообразия (M, g) является положительно определенным и ограниченным снизу числом $\delta > 0$. В результате имеем $F_r(\omega, \omega) \geq (n-r)\delta g(\omega, \omega)$. Тогда на основании леммы 3.1 заключаем, что $\lambda_1^r \geq \min\{r(n-r+1)\delta, (r+1)(n-r)\delta\}$. В статье [28] для компактного конформно плоского многообразия (M, g) с положительно определенным тензором Ric получено аналогичное условие. Кроме того, в [28] доказано, что если λ_1^r достигает своего наименьшего значения, то (M, g) – многообразие постоянной кривизны. С учетом последнего предположим, что $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta < r(n-r+1)\delta$; тогда $n < 2r$ и (M, g) – многообразие постоянной кривизны. В этом случае ω будет киллинговой r -формой, притом для произвольной киллинговой r -формы на многообразии (M, g) постоянной кривизны $\delta > 0$ из (3.3) выводим $\Delta\omega = (r+1)(n-r)\delta\omega$. Следовательно, кратностью λ_1^r будет $k_r(M)$.

Если $\lambda_1^r = r(n-r+1)\delta < (r+1)(n-r)\delta$, то $n > 2r$ и (M, g) – многообразие постоянной кривизны. В этом случае ω будет планарной r -формой, притом для произвольной планарной r -формы на многообразии (M, g) постоянной кривизны $\delta > 0$ из (3.3) выполняется $\Delta\omega = r(n-r+1)\delta\omega$. Следовательно, кратностью λ_1^r будет $p_r(M)$.

В том случае, когда $\lambda_1^r = (r+1)(n-r)\delta = r(n-r+1)\delta$, имеем $n = 2r$. Тогда ω будет конформно киллинговой r -формой на многообразии (M, g) постоянной кривизны. В результате кратностью собственного значения $\lambda_1^r = r(r+1)\delta$ будет $t_r(M)$.

Напомним, что односвязное компактное риманово многообразие (M, g) постоянной кривизны $\delta > 0$ изометрично евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$, где число Киллинга

$$k_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$$

равно кратности $\lambda_1^r(d^*)$ (см. [29]). В свою очередь, число планарности

$$p_r(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

равно кратности $\lambda_1^r(d)$ (см. [29]), а число Тачибаны есть

$$t_r(\mathbb{S}^{2r}) = \frac{(2r+2)!}{2(r+1)!}$$

для первого собственного значения лапласиана Ходжа–де Рама Δ , действующего на r -формах сферы $\mathbb{S}^{2r}$ (см. [29]).

В заключение отметим, что в работах [8], [9] и [26] нами выписаны локальные компоненты киллинговой, планарной и конформно киллинговой r -форм на n -мерном ($n \geq 2$) псевдоримановом многообразии постоянной кривизны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Результаты следствия 3.5 не изменятся, если в условии требование $L \geq \frac{1}{2}\delta g$ заменить более слабым $\text{Ric} \geq \delta g$, но в этом случае оператор $\mathring{R}$ может и не быть положительно определенным на $S_0^2 M$.

§ 4. Первое собственное значение оператора Тачибаны и число Бетти

4.1. Оператор $\square := r(r+1)D^*D$ назовем *оператором Тачибаны* (ср. с [4], [5] и [13]). Как и D^*D , оператор Тачибаны $\square$ эллиптический, и его ядро на компактном многообразии (M, g) является конечномерным векторным пространством $\mathbf{T}^r(M, \mathbb{R})$ конформно киллинговых r -форм размерности $t_r(M)$. Кроме перечисленных, оператор $\square$ обладает рядом других свойств. Некоторые из них раскрывает следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть (M, g) – n -мерное компактное риманово многообразие. Тогда для всех $r = 1, \dots, n-1$ оператор Тачибаны $\square: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ является самосопряженным неотрицательным оператором и при этом $*\square = \square*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Тачибаны $\square: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ обладает следующим свойством симметрии $\langle \square \omega, \theta \rangle = r(r+1)\langle D\omega, D\theta \rangle = \langle \omega, \square \theta \rangle$ для произвольных $\omega, \theta \in \Omega^r(M)$, а потому является самосопряженным и неотрицательным. Действие оператора Тачибаны $\square$ на форму $\omega \in \Omega^r(M)$ определяется равенством

$$\square \omega = \bar{\Delta} \omega - \frac{1}{r+1} d^* d \omega - \frac{1}{n-r+1} d d^* \omega,$$

и тогда

$$\begin{aligned} *(\square \omega) &= *\bar{\Delta} \omega - \frac{1}{r+1} *(d^* d \omega) - \frac{1}{n-r+1} *(d d^* \omega) \\ &= \bar{\Delta}(*\omega) - \frac{1}{r+1} d d^*(*\omega) - \frac{1}{n-r+1} d^* d(*\omega) = \square(*\omega), \end{aligned}$$

где использованы свойства $*\bar{\Delta} = \bar{\Delta}*$, $*d^*d = dd^*$ и $*dd^* = d^*d*$ оператора Ходжа (см. [21, с. 204], [22, с. 167]). В итоге приходим к равенству $*\square = \square*$. Лемма доказана.

Сформулируем очевидное следствие (см. также [14]).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Числа Тачибаны, Киллинга и планарности n -мерного компактного риманова многообразия (M, g) обладают следующим свойством дуальности: $t_r(M) = t_{n-r}(M)$ и $k_r(M) = p_{n-r}(M)$ для всех $r = 1, \dots, n-1$.

4.2. Число μ^r , для которого найдется соответствующая ему r -форма $\omega \in C^\infty \Lambda^r M$, не равная тождественно нулю и такая, что $\square \omega = \mu^r \omega$, названо в [4] и [5] *собственным значением* оператора Тачибаны $\square$. При этом r -форма ω названа *собственной формой* оператора $\square$, отвечающей собственному значению μ^r . Обозначим через $V_{\mu^r}(M)$ *собственное векторное пространство* оператора Тачибаны $\square$, состоящее из всех собственных r -форм, отвечающих μ^r . Его размерность назовем *кратностью* собственного значения μ^r .

Опираясь на теорию эллиптических самосопряженных операторов на компактных (без границы) многообразиях [30] и используя лемму 4.1, заключаем, что оператор Тачибаны $\square: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ на компактном римановом многообразии (M, g) обладает дискретным вещественным спектром $\text{Spec}^{(r)}(\square) = \{0 \leq \mu_1^r \leq \mu_2^r \leq \dots \rightarrow \infty\}$ таким, что $\text{Spec}^{(r)}(\square) = \text{Spec}^{(n-r)}(\square)$. При этом $\dim V_{\mu_a^r}(M) < \infty$ и пространства $V_{\mu_a^r}(M)$ и $V_{\mu_b^r}(M)$ ортогональны относительно метрики Ходжа, если $a \neq b$. Очевидно, что спектр $\text{Spec}^{(r)}(\square)$ имеет в качестве нижней грани нуль тогда и только тогда, когда $t_r(M) \neq 0$, причем факт замыкания спектра $\square$ к нулю зависит только от конформного класса метрики многообразия (M, g) .

Теперь мы готовы доказать основную теорему данного параграфа.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть (M, g) – n -мерное компактное риманово многообразие, оператор кривизны $\hat{R}$ которого отрицательно определен на $S_0^2 M$ и ограничен сверху некоторым числом $-\varepsilon < 0$. Тогда для каждого $r = 1, \dots, n-1$ первое собственное значение μ_1^r оператора Тачибаны $\square: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ удовлетворяет неравенству $\mu_1^r \geq r(n-r)\varepsilon$. Если при этом $\mu_1^r = r(n-r)\varepsilon$, то отвечающая μ_1^r собственная r -форма ω является гармонической и кратность μ_1^r не превышает $b_r(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор кривизны $\hat{R}$ многообразия (M, g) отрицательно определен на $S_0^2 M$ и ограничен сверху некоторым числом $-\varepsilon < 0$. Тогда согласно п. 2.5 будет справедливым неравенство $F_r(\omega, \omega) \leq -(n-r)\varepsilon g(\omega, \omega)$ для произвольной формы $\omega \in C^\infty \Lambda^r M$ и всех $1 \leq r \leq n-1$, а в результате получим $t_r(M) = 0$. В этом случае $\mu_1^r \neq 0$ и, следовательно, $\text{Spec}^{(r)}(\square) = \{0 < \mu_1^r \leq \mu_2^r \leq \dots \rightarrow \infty\}$.

Воспользуемся формулой (3.2), которую согласно выражению $\Delta = d^*d + dd^*$ для лапласиана Ходжа–де Рама Δ представим в виде

$$\square \omega = -H_r(\omega) + \frac{r}{r+1} d^* d \omega + \frac{n-r}{n-r+1} dd^* \omega. \quad (4.1)$$

Умножим скалярно обе части (4.1) на r -форму ω , а затем, полагая многообразие (M, g) компактным, проинтегрируем полученное равенство. В результате получим формулу

$$\langle \square \omega, \omega \rangle + r \int_M F_r(\omega, \omega) d\nu = \frac{r}{r+1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n-r}{n-r+1} \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle. \quad (4.2)$$

Согласно предположению имеем $F_r(\omega, \omega) \leq -(n-r)\varepsilon g(\omega, \omega)$, а потому

$$\langle \square \omega, \omega \rangle - r(n-r)\varepsilon \langle \omega, \omega \rangle \geq \frac{r}{r+1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n-r}{n-r+1} \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle. \quad (4.3)$$

Полагаем, что $\square \omega = \mu^r \omega$. Тогда из (4.3) следует неравенство $\mu^r \geq r(n-r)\varepsilon > 0$. Если найдется r -форма ω , которая будет собственной формой оператора Тачибаны $\square$, отвечающей $\mu_1^r = r(n-r)\varepsilon$, то из (4.2) с необходимостью последует $d\omega = d^* \omega = 0$, что означает гармоничность формы ω (см. [1, с. 107]). В этом

случае кратность собственного значения μ_1^r будет не больше размерности пространства гармонических r -форм $\mathbf{H}^r(M, \mathbb{R})$, которая на компактном многообразии (M, g) равна числу Бетти $b_r(M)$. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим компактное гиперболическое многообразие $(\mathbb{H}^n, g_0)$ со стандартной метрикой g_0 постоянной кривизны -1 . В этом случае справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *На односвязном компактном гиперболическом многообразии $(\mathbb{H}^n, g_0)$ со стандартной метрикой g_0 постоянной кривизны -1 первое собственное значение μ_1^r оператора Тачибаны $\square: \Omega^r(\mathbb{H}^n) \rightarrow \Omega^r(\mathbb{H}^n)$ достигает нижней грани спектра тогда и только тогда, когда $n = 2r$. При этом $\mu_1^r = r^2$ и его кратность равна $b_r(\mathbb{H}^{2r})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае компактного гиперболического многообразия $(\mathbb{H}^n, g_0)$ формула (4.2) примет вид

$$\langle \square \omega, \omega \rangle - r(n-r) \langle \omega, \omega \rangle \geq \frac{r}{r+1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n-r}{n-r+1} \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle. \quad (4.4)$$

Предположим, что $\square \omega = \mu^r \omega$. Тогда из (4.4) следует

$$(\mu^r - r(n-r)) \langle \omega, \omega \rangle = \frac{r}{r+1} \langle d\omega, d\omega \rangle + \frac{n-r}{n-r+1} \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle. \quad (4.5)$$

Из (4.5) вытекает ограничение $\mu^r \geq r(n-r) > 0$. Если найдется r -форма ω , отвечающая собственному значению $\mu^r = r(n-r)$, то из (4.5) следует, что $d\omega = d^* \omega = 0$, т.е. форма ω является гармонической (см. [1, с. 107]). Обратно, на основании (4.1) заключаем, что произвольная гармоническая r -форма ω на $(\mathbb{H}^n, g_0)$ является собственной формой оператора Тачибаны $\square$, а отвечающее ей собственное значение $\mu^r = r(n-r)$ имеет кратность, равную $b_r(\mathbb{H}^n)$.

С другой стороны, известно (см. [31] и [32]), что на n -мерном односвязном полном римановом многообразии (M, g) постоянной кривизны -1 не существует L^2 -гармонических r -форм, т.е. r -форм с интегрируемым скалярным квадратом, если $n \neq 2r$. Согласно изложенному на n -мерном компактном односвязном многообразии $(\mathbb{H}^n, g_0)$ не существует гармонических r -форм с интегрируемым скалярным квадратом, если $n \neq 2r$. Для других размерностей μ_1^r не достигает нижней грани спектра. Следствие доказано.

Список литературы

1. J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 6th ed., Universitext, Springer, Heidelberg, 2011, xiv+611 pp.
2. I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure Appl. Math., **115**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984, xiv+362 pp.
3. M. Craioveanu, M. Puta, T.M. Rassias, *Old and new aspects in spectral geometry*, Math. Appl., **534**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, x+445 pp.
4. С.Е. Степанов, “Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 452–458; англ. пер.: S.E. Stepanov, “A new strong Laplacian on differential forms”, *Math. Notes*, **76**:3 (2004), 420–425.

5. S. E. Stepanov, J. Mikeš, “Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds”, *Differential Geom. Appl.*, **31**:4 (2013), 486–495.
6. S. E. Stepanov, J. Mikeš, “Betti and Tachibana numbers”, *Miskolc Math. Notes*, **14**:2 (2013), 475–486.
7. Ж.-П. Бургиньон, “Формулы Вейценбёка в размерности 4”, *Четырёхмерная риманова геометрия*, Семинар А. Бессе 1978/79, Мир, М., 1985, 260–279; пер. с фр.: J.-P. Bourguignon, “Formules de Weitzenböck en dimension 4”, *Geometrie riemannienne en dimension 4*, Semin. Arthur Besse, Paris 1978/79, Textes Math., **3**, Cedec, Paris, 1981, 308–333.
8. S. E. Stepanov, “On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field”, *J. Geom. Phys.*, **33**:3-4 (2000), 191–209.
9. S. E. Stepanov, “A class of closed forms and special Maxwell’s equations”, *Tensor (N.S.)*, **58**:3 (1997), 233–242.
10. S. Tachibana, S. Yamaguchi, “The first proper space of Δ for p -forms in compact Riemannian manifolds of positive curvature operator”, *J. Differential Geom.*, **15**:1 (1980), 51–60.
11. T. Kashiwada, “On conformal Killing tensor”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **19** (1968), 67–74.
12. А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Мир, М., 1990, 704 с.; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, xii+510 pp.
13. С. Е. Степанов, “Кривизна и числа Тачибаны”, *Матем. сб.*, **202**:7 (2011), 135–146; англ. пер.: S. E. Stepanov, “Curvature and Tachibana numbers”, *Sb. Math.*, **202**:7 (2011), 1059–1069.
14. С. Е. Степанов, “О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 902–907; англ. пер.: S. E. Stepanov, “Some conformal and projective scalar invariants of Riemannian manifolds”, *Math. Notes*, **80**:6 (2006), 848–852.
15. S. Tachibana, “On Killing tensors in Riemannian manifolds of positive curvature operator”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **28**:2 (1976), 177–184.
16. С. Е. Степанов, “Векторное пространство конформно киллинговых форм на римановом многообразии”, *Геометрия и топология. 4*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **261**, ПОМИ, СПб., 1999, 240–265; англ. пер.: S. E. Stepanov, “The vector space of the conformal Killing forms on a Riemannian manifold”, *J. Math. Sci. (New York)*, **110**:4 (2002), 2892–2906.
17. S. Tachibana, K. Ogiue, “Les variétés riemanniennes dont l’opérateur de courbure restreint est positif sont des sphères d’homologie réelle”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **289** (1979), A29–A30.
18. S. Nishikawa, “On deformation of Riemannian metrics and manifolds with positive curvature operator”, *Curvature and topology of Riemannian manifolds* (Katata, 1985), Lecture Notes in Math., **1201**, Springer, Berlin, 1986, 202–211.
19. T. Kashiwada, “On the curvature operator of the second kind”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **44**:2 (1993), 69–73.
20. J.-P. Bourguignon, H. Karcher, “Curvature operators: pinching estimates and geometric examples”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **11**:1 (1978), 71–92.
21. P. Petersen, *Riemannian geometry*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **171**, Springer, New York, 2006, xvi+401 pp.
22. Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956, 250 с.; пер. с фр.: G. de Rham, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Sci. Ind., **1222**, = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, III, Hermann et Cie, Paris, 1955, vii+196 pp.

23. D. Meyer, “Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **272** (1971), A482–A485.
24. С.Е. Степанов, И.И. Цыганок, “Теоремы существования и несуществования конформно киллинговых форм”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, №10, 54–61; англ. пер.: S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok, “Theorems of existence and of vanishing of conformally killing forms”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **58**:10 (2014), 46–51.
25. S. Gallot, D. Meyer, “Sur la première valeur propre du p -spectre pour les variétés à opérateur de courbure positif”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **276** (1973), A1619–A1621.
26. S. E. Stepanov, J. Mikesch, I. Hinterleitner, “Projective mappings and dimensions of vector spaces of three types of Killing–Yano tensors on pseudo Riemannian manifolds of constant curvature”, *AIP Conf. Proc.*, **1460** (2012), 202–205.
27. S. Tachibana, “On the proper space of Δ for m -forms in $2m$ dimensional conformally flat Riemannian manifolds”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **29**:2 (1978), 111–115.
28. D. Perrone, “On the minimal eigenvalue of the Laplacian operator for p -forms in conformally flat Riemannian manifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **86**:1 (1982), 103–108.
29. I. Iwasaki, K. Katase, “On the spectra of Laplace operator on $\Lambda^*(S^n)$ ”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **55**:4 (1979), 141–145.
30. М.С. Агранович, “Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **63**, ВИНТИ, М., 1990, 5–129; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Elliptic operators on closed manifolds”, *Partial differential equations VI*, Encyclopaedia Math. Sci., **63**, Springer, Berlin, 1994, 1–130.
31. J. Dodziuk, “ L^2 harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **77**:3 (1979), 395–400.
32. H. Donnelly, “The differential form spectrum of hyperbolic space”, *Manuscripta Mathematica*, **33** (1981), 365–385.

СЕРГЕЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ СТЕПАНОВ
 (SERGEY E. STEPANOV)
 Финансовый университет при Правительстве
 Российской Федерации, г. Москва
E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Поступило в редакцию
 05.08.2013
 14.02.2014

ЙОЗЕФ МИКЕШ
 (JOSEF MIKEŠ)
 Palacký University Olomouc, Czech Republic
E-mail: Josef.Mikes@upol.cz