Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев, Pullback-аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 4, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:44:09

УДК 517.9

В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев

Pullback-аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров

Изучается качественная динамика слабых решений неавтономной модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров на основании теории pullback-аттракторов пространств траекторий. Для рассматриваемой модели устанавливается существование слабых решений, определяется семейство пространств траекторий, вводится понятие траекторного и минимального pullback-аттракторов и доказывается существование этих аттракторов.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: pullback-аттракторы, пространство траекторий, слабо концентрированные водные растворы полимера, слабые решения, теоремы существования.

DOI: 10.4213/im8163

§ 1. Введение

При изучении динамики систем особое значение имеют свойства, сохраняющиеся при длительной эволюции системы. При этом естественно возникает понятие аттрактора как множества в фазовом пространстве системы, в определенном смысле притягивающего ее траектории. Если система имеет аттрактор, то состояния системы, не принадлежащие аттрактору, можно считать ненаблюдаемыми в том смысле, что время их существования заведомо ограничено. Все существенные свойства динамики такой системы сосредоточены в ее аттракторе. При этом сам аттрактор может являться небольшой частью фазового пространства (что математически может выражаться, например, в свойстве компактности).

Для автономной системы, т. е. системы, закон эволюции которой не меняется со временем, все моменты абсолютного времени равнозначны. Поэтому для автономной системы требование длительной эволюции означает, что промежуток между начальным моментом и моментом наблюдения должен быть велик. Если же система неавтономна, то становятся важными и абсолютные значения на временной шкале начального момента и момента наблюдения. Понятие аттрактора может переноситься на неавтономный случай разными способами. Один способ заключается в том, что начальный момент фиксируется и изучается поведение системы в отдаленном будущем, т. е. момент наблюдения отодвигается к $+\infty$. Такая точка зрения приводит к аттракторам, называемым

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00041), Российского научного фонда (проект № 14-21-00066) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 1.1539.2014/К).

в англоязычной литературе forward attractors. Другой способ, становящийся популярным в последние годы, состоит в том, что фиксируется момент наблюдения и для данных начальных условий начальный момент отодвигается в отдаленное прошлое по сравнению с моментом наблюдения. Этот путь приводит к так называемым pullback-аттракторам (pullback attractors). Таким образом, при рассмотрении pullback-притягивания фиксируются момент наблюдений и множество начальных данных (или семейство множеств начальных данных; см. далее). Начальный же момент изменяется, отодвигаясь к $-\infty$, и для каждого значения начального момента мы получаем *новое* множество траекторий. Этот подход отличается от forward-притягивания, для которого обычно фиксируется множество траекторий и рассматриваются сдвиги по этим траекториям.

Отметим также, что для использования понятия pullback-аттрактора нет необходимости требовать разрешимости рассматриваемых уравнений на всей числовой оси. В действительности достаточно рассматривать решения на полупрямых вида $[\tau, +\infty)$ для всевозможных $\tau \in \mathbb{R}$. Такие задачи всегда можно заменой времени свести к задачам на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Forward- и pullback-аттракторы не зависят друг от друга и характеризуют динамику системы с разных сторон. Даже существование аттракторов одного вида не влечет существования аттракторов другого вида, в чем мы убедимся далее.

Теория pullback-аттракторов для обыкновенных дифференциальных уравнений (в том числе в банаховых пространствах) хорошо разработана (см., например, монографию [1] и содержащуюся в ней библиографию). В работе [2] развивается теория pullback-аттракторов пространств траекторий.

Существенной особенностью pullback-аттракторов является применимость к таким системам, траектории которых неограничены при $t \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим понятие pullback-аттрактора на простейшем примере неавтономного дифференциального уравнения на $\mathbb{R}$:

$$u' + u = t + 1, \quad u(\tau) = a. \quad (1.1)$$

Решения задачи Коши (1.1) будем рассматривать на промежутках $[\tau, +\infty)$. Решение можно выписать явно:

$$u = U(t; \tau, a) \stackrel{\text{def}}{=} t + (a - \tau)e^{-(t-\tau)}. \quad (1.2)$$

Заметим, что при фиксированных τ и a в пределе $t \rightarrow +\infty$ имеем $u(t) \approx t$, поэтому задача (1.1) заведомо не имеет forward-аттрактора в силу неограниченности траекторий. Однако эта задача имеет pullback-аттрактор.

Зафиксируем момент наблюдения, для определенности $t = 0$. Значением решения задачи (1.1) в этот момент является

$$u(0) = U(0; \tau, a) = (a - \tau)e^{\tau}. \quad (1.3)$$

Если зафиксировать также и начальное условие a , то, очевидно, $U(0; \tau, a) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Это значит, что решение задачи (1.1), начавшееся в точке a , в момент времени $t = 0$ сколь угодно близко к нулю, если только предшествующий период эволюции достаточно велик. (При этом речь идет, очевидно, о разных решениях: решения, начавшиеся в точке a в моменты времени $\tau_1 \neq \tau_2$, различны.) Иными словами, если начальный момент времени находится в отдаленном

прошлом по отношению к моменту наблюдения, то начальное условие “забывается”. Говорят, что одноточечное множество $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ в фазовом пространстве системы обладает свойством pullback-притягивания в момент времени $t = 0$.

Из уравнения (1.3) также следует, что множество $\mathcal{A}_0$ обладает свойством не только pullback-притягивания индивидуальных траекторий, но также равномерно pullback-притягивает траектории, начинающиеся в ограниченных множествах. В самом деле, если D – ограниченное множество в $\mathbb{R}$, и $|a| \leq r$ для $a \in D$, то для любого решения задачи (1.1) с начальным условием $a \in D$ имеем

$$|u(0)| \leq (r + |\tau|)e^\tau \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Более того, можно еще увеличить класс равномерно притягиваемых множеств траекторий, допуская расширение множества начальных значений при уменьшении τ . Именно, предположим, что для каждого момента $\tau \in \mathbb{R}$ задано множество $D_\tau \subset \mathbb{R}$, причем $|a| \leq r(\tau)$ для каждого $a \in D_\tau$, где $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – такая функция, что

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^\tau r(\tau) = 0.$$

Как и выше, нетрудно убедиться в том, что множество $\mathcal{A}_0$ равномерно притягивает множества решений задачи (1.1), для которых $a \in D_\tau$. Множество семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$, обладающих указанным выше свойством (каждое со своей функцией $r_{\mathbf{D}}$), обозначим через $\mathfrak{D}$. Можно сказать, что множество $\mathcal{A}_0$ $\mathfrak{D}$ -pullback-притягивает решения задачи (1.1), делая явное указание на множество равномерно притягиваемых семейств решений. Отметим, что $\mathfrak{D}$ содержит все семейства $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$, для которых $D_\tau = D$ – одно и то же ограниченное множество при любых τ .

Выбор момента наблюдения $t = 0$ был произволен. В действительности несложно проверить, что в произвольный момент наблюдения $t = \theta$ свойство $\mathfrak{D}$ -pullback-притягивания выполнено для множества $\mathcal{A}_\theta = \{\theta\}$. Все семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ называется *pullback-аттрактором* задачи (1.1). Таким образом, особенностью pullback-аттрактора является то, что он представляет собой не одно множество в фазовом пространстве системы, а семейство множеств, зависящих от времени.

Рассмотренный элементарный пример имеет свойство единственности решения начальной задачи (1.1). В различных задачах математической гидродинамики часто не представляется возможным установить единственность решения эволюционной задачи с заданным начальным условием. В таких случаях динамика уравнения описывается в терминах пространств траекторий [2]–[6], и наряду с притягивающими множествами в фазовом пространстве рассматриваются так называемые *траекторные аттракторы*. Составляющими элементами последних являются функции времени, на которые “становятся похожи” траектории системы. Поясним смысл понятия траекторного аттрактора на рассматриваемом примере.

Выше отмечалось, что если значение $t - \tau$ велико, для решения задачи (1.1) с фиксированным начальным условием приближенно имеем $u \approx t$. Придадим этому наблюдению строгий смысл. Через $\widetilde{\mathcal{H}}_\tau^+$ обозначим множество решений задачи (1.1) на $[\tau, +\infty)$, когда a пробегает $\mathbb{R}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $u_\tau \in \widetilde{\mathcal{H}}_\tau^+$ – решение задачи с начальным значением $u_\tau(\tau) = a$. Если вести наблюдения начиная

с фиксированного момента θ , то наблюдению будет доступна лишь часть решения u_τ , а именно ограничение

$$u_\tau|_{[\theta, +\infty)}(t) = t + (a - \tau)e^{-(t-\tau)}, \quad t \geq \theta.$$

Заметим, что здесь

$$|(a - \tau)e^{-(t-\tau)}| \leq |a - \tau|e^{-(\theta-\tau)},$$

и нетрудно показать, что в действительности

$$u_\tau|_{[\theta, +\infty)} \rightarrow \tilde{u}_\theta \quad \text{в } C[\theta, +\infty),$$

где $\tilde{u}_\theta: [\theta, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $\tilde{u}_\theta(t) = t$.

Можно было бы сказать, что семейство одноэлементных множеств $\tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{\mathcal{U}}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$, $\tilde{\mathcal{U}}_\theta = \{\tilde{u}_\theta\}$, является траекторным pullback-аттрактором задачи (1.1). Однако в действительности траекторные аттракторы определяются несколько иначе.

В теории траекторных аттракторов множество $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ обычно рассматривается как универсальная область определения функций, заданных на полупрямой. Поэтому в качестве пространств траекторий задачи (1.1), начинающихся в момент τ , рассматриваются не решения этой задачи, определенные на $[\tau, +\infty)$, а функции, полученные из таких решений сдвигом $t \mapsto t - \tau$. Таким образом, функция $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *траекторией* задачи (1.1), соответствующей начальному моменту τ , если функция $u: [\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = v(t - \tau)$, является решением задачи (1.1) с некоторым a . Множество таких траекторий обозначается $\mathcal{H}_\tau^+$. Оно связано с прежним обозначением $\widetilde{\mathcal{H}_\tau^+}$ соотношением $\mathcal{H}_\tau^+ = \{u(\cdot - \tau): u \in \widetilde{\mathcal{H}_\tau^+}\}$.

Стоит отметить, что траектории, принадлежащие пространству $\mathcal{H}_\tau^+$, являются решениями задачи

$$v' + v = t + \tau + 1, \quad v(0) = a, \quad (1.4)$$

которая получается из (1.1) заменой времени $t \mapsto t - \tau$ и в которую τ входит как числовой параметр.

Таким образом, имеем семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\theta^+\}_{\theta \in \mathbb{R}}$. Его *минимальным* траекторным pullback-аттрактором называется семейство $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$, где $\mathcal{U}_\theta = \{v_\theta\}$ и $v_\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой $v_\theta(t) = t + \theta$. Легко видеть, что $\mathcal{U}_\theta = \{u(\cdot - \theta): u \in \widetilde{\mathcal{U}}_\theta\}$.

Отметим, что в данном случае имеет место равенство $\mathcal{A}_\theta = \{v(0): v \in \mathcal{U}_\theta\}$. Оно является частным случаем общей теоремы о связи траекторных и глобальных аттракторов [2]. Отметим также, что сдвиг областей определения на $\mathbb{R}_+$ является техническим приемом. На практике он означает, что для изучения аттракторов задачи (1.1) удобно перейти к задаче (1.4).

Общую схему построения траекторных и глобальных pullback-аттракторов можно описать следующим образом. Пусть имеется задача

$$u'(t) = A(t, u(t)), \quad u(\tau) = u_\tau, \quad (1.5)$$

в которой τ и u_τ не фиксируются. В теории траекторных аттракторов традиционно рассматриваются траектории, определенные на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, поэтому вместе с (1.5) рассмотрим задачу

$$v'(t) = A(t + \tau, v(t)), \quad v(0) = u_\tau, \quad (1.6)$$

так что функция u , определенная на $[\tau, +\infty)$, является решением задачи (1.5) тогда и только тогда, когда функция $v(\cdot + \tau)$, определенная на $\mathbb{R}_+$, является решением задачи (1.6). Подбираются два подходящих банаховых пространства $E \subset E_0$, и для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ определяется непустое пространство траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$, состоящее из решений задачи (1.6), которые принадлежат классу

$$\mathcal{T} = C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$$

и, возможно, удовлетворяют специальным требованиям (например, энергетическим оценкам). На основании оценок, которым удовлетворяют решения, определяется класс $\mathfrak{D}$ семейств множеств, для которых должно выполняться условие равномерного pullback-притягивания. После этого строится $\mathfrak{D}$ -pullback-поглощающее семейство множеств в $\mathcal{T}$, удовлетворяющее свойству типа компактности, и на основании абстрактных теорем можно сделать вывод о существовании траекторного и глобального $\mathfrak{D}$ -pullback-аттракторов данного семейства траекторий.

В настоящей работе мы применяем описанную схему к модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров. Основным результатом является теорема 2.2 о существовании траекторных и минимальных pullback-аттракторов слабых решений этой модели. Теорема доказывается на основе оценок решений с использованием абстрактных результатов работы [2]. Важным подготовительным результатом является теорема 2.1, обосновывающая существование траекторий, удовлетворяющих специальным оценкам. По своей сути это теорема существования решений рассматриваемой задачи. Для доказательства разрешимости используется аппроксимационно-топологический метод: мы улучшаем свойства уравнения, добавляя член высшего порядка, и сводим задачу к существованию особых точек вполне непрерывного векторного поля. Для полученного поля мы строим нелинейную гомотопию, соединяющую его с тождественным отображением, и применяем теорию степени Лерэ–Шаудера. Разрешимость исходной задачи устанавливается путем предельного перехода.

Мы не предполагаем ограниченности плотности внешних сил в рассматриваемой модели.

Опишем рассматриваемую гидродинамическую модель.

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - 2\kappa \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \mathcal{E}(u)}{\partial x_i} \right) \\ + \operatorname{grad} p = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \quad (1.8)$$

$$u|_{\partial\Omega \times [\tau, +\infty)} = 0, \quad (1.9)$$

$$u|_{t=\tau} = a. \quad (1.10)$$

Здесь $u(x, t)$ – вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке x в момент времени t ; $p(x, t)$ – давление жидкости в точке x в момент времени t ; $f(x, t)$ – вектор плотности внешних сил, $\mathcal{E}(u) = (\mathcal{E}_{ij})$ – тензор скоростей деформации, который представляет собой симметрическую матрицу порядка n с компонентами

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

$a(x)$ – начальное условие, $\nu > 0$, $\kappa > 0$, через Div обозначено взятие дивергенций строк матрицы. Неизвестными функциями являются u и p .

В задаче (1.7)–(1.10) известные параметры ν , κ , а также плотность внешних сил f мы считаем раз и навсегда зафиксированными. Начальный момент $\tau \in \mathbb{R}$ и начальное условие a не фиксируются.

Модель движения слабо концентрированных водных растворов полимеров (1.7), (1.8) теоретически обоснована в [7] и подтверждена экспериментальными исследованиями [8]. Различные результаты по задаче (1.7)–(1.10) содержатся в работах [9]–[12].

Дальнейшее изложение построено следующим образом.

В § 2 приводятся необходимые определения теории pullback-аттракторов, вводится понятие слабого решения рассматриваемой гидродинамической задачи, определяются пространства траекторий и формулируется основной результат: теорема 2.2 о существовании pullback-аттракторов.

В § 3 изучается аппроксимационная задача. Для этой задачи устанавливаются априорные оценки. Для доказательства разрешимости аппроксимационной задачи она переформулируется в виде задачи о существовании неподвижной точки вполне непрерывного векторного поля в банаховом пространстве. Показывается, что полученное поле соединяется нелинейной гомотопией с тождественным отображением, и существование неподвижной точки устанавливается с помощью теории степени Лерэ–Шаудера.

В § 4 рассматривается предельный переход от решений аппроксимационной задачи к решениям невозмущенной задачи и таким образом доказывается существование слабых решений исходной гидродинамической задачи, удовлетворяющих оценке специального вида. Эта теорема гарантирует непустоту введенных пространств траекторий.

В § 5 доказывается теорема 2.2 о существовании pullback-аттракторов.

Краткое изложение приведенных здесь результатов можно найти в [13].

§ 2. Постановка задачи и основной результат

2.1. Pullback-аттракторы пространств траекторий. Приведем основные определения абстрактной теории pullback-аттракторов пространств траекторий [2], необходимые для формулировки основного результата.

Пусть $E \subset E_0$ – банаховы пространства, E рефлексивно. Каждому $\tau \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие непустое множество

$$\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; E). \quad (2.1)$$

Множества $\mathcal{H}_\tau^+$ называются *пространствами траекторий*, а их элементы – *траекториями*. Семейство $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ будем называть *семейством пространств траекторий*.

Мы будем рассматривать и другие семейства множеств, зависящие от параметра, пробегающего $\mathbb{R}$. Будем предполагать, что каждое из множеств, входящих в такое семейство, непусто.

Зададим класс семейств множеств $\mathfrak{D}$ над E , причем будем считать, что для каждого семейства $\mathbf{D} = \{D_t\} \in \mathfrak{D}$ имеем $D_t \neq \emptyset$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для каждого $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$ рассмотрим семейство $\mathbf{H}^+(\mathbf{D}) = \{\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})\}$, где

$$\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) = \{u \in \mathcal{H}_\tau^+ : u(0) \in D_\tau\}. \quad (2.2)$$

Обозначим через $T(h)$ оператор сдвига, который действует на функции по правилу

$$(T(h)g)(s) = g(s + h).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, называется *$\mathfrak{D}$ -pullback-притягивающим* для $\mathcal{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется предельное соотношение

$$\sup_{u \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{v \in P_\theta} \|T(\theta - \tau)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, называется *$\mathcal{T}$ -относительно компактным*, если:

- (i) P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$;
- (ii) для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\varphi_\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для каждой траектории $u \in P_\theta$ при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\|u(t)\|_E \leq \varphi_\theta(t)$.

Такое семейство называется *$\mathcal{T}$ -компактным*, если множество P_θ замкнуто (и, таким образом, компактно) в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$.

Для семейства $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $P_\tau \subset \mathcal{T}$, и для $h \in \mathbb{R}$ обозначим через $T(h)\mathbf{P}$ семейство множеств

$$(T(h)\mathbf{P})_\tau = T(h)P_{\tau-h}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Также будем считать, что включение семейств $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}'$, где $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $\mathbf{P}' = \{P'_\tau\}$, $P_\tau, P'_\tau \subset \mathcal{T}$, по определению означает, что $P_\tau \subset P'_\tau$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Семейство $\mathbf{P}$, состоящее из непустых множеств в $\mathcal{T}$, называется *траекторным $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

- (i) $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -компактным;
- (ii) $T(h)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ для всех $h \geq 0$;
- (iii) $\mathbf{P}$ является $\mathfrak{D}$ -pullback-притягивающим.

Траекторный $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактор $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$, $\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{T}$, для $\mathbf{H}^+$ называется *минимальным*, если он содержится в любом траекторном $\mathfrak{D}$ -pullback-аттракторе $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\} \subset E$ называется *минимальным $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

- (i) $\mathcal{A}_\theta$ компактно в E_0 и ограничено в E при всех $\theta \in \mathbb{R}$;
- (ii) для всех $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется условие pullback-притягивания

$$\sup_{v \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{a \in \mathcal{A}_\theta} \|v(\theta - \tau) - a\|_{E_0} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad (2.5)$$

(iii) $\mathbf{A}$ содержится в любом семействе $\mathbf{A}' = \{\mathcal{A}'_\theta\}$, $\mathcal{A}'_\theta \subset E$, удовлетворяющем условиям (i) и (ii).

В приложениях к дифференциальным уравнениям данные понятия возникают следующим образом.

Рассмотрим неавтономное дифференциальное уравнение

$$u'(\theta) = A(t, u(\theta)), \quad (2.6)$$

где $A: D(A) \rightarrow R(A)$, $D(A) = \mathbb{R} \times E_A$, $E_A \subset E$. Вместе с уравнением (2.6) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v'(t) = A(t + \tau, v(t)), \quad (2.7)$$

так что если $u(\theta)$ – решение уравнения (2.6) на $[\tau, +\infty)$, то $v(t) = u(\tau + t)$ – решение уравнения (2.7) на $[0, +\infty) = \mathbb{R}_+$, и обратно. Для $\tau \in \mathbb{R}$ в качестве пространства $\mathcal{H}_\tau^+$ выбирается некоторое множество решений уравнения (2.7). Решения могут пониматься в сильном, слабом или другом смысле, но пространство траекторий должно быть непусто и должно содержаться в классе $\mathcal{T}$. Таким образом, можно считать, что траектории, принадлежащие $\mathcal{H}_\tau^+$, описывают сценарий эволюции системы, начинающийся в момент абсолютного времени τ , однако траектории параметризуются относительным временем (т. е. временем t , прошедшим с ее начала).

Для pullback-аттракторов, притягивающих ограниченные множества, класс семейств $\mathfrak{D}$ может состоять по крайней мере из всех равномерно ограниченных семейств множеств; в зависимости от оценок на решения уравнения этот класс может быть шире.

2.2. Слабая постановка начально-краевой задачи. В теории пространств траекторий обычно рассматривают траектории, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. В связи с этим наряду с задачей (1.7)–(1.10) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\kappa \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) \\ + \operatorname{grad} p = F, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (2.9)$$

$$v|_{\partial\Omega \times [0, +\infty)} = 0, \quad (2.10)$$

$$v|_{t=0} = a. \quad (2.11)$$

Здесь значение правой части F в (2.8) заранее не уточняется. Если $F(x, t) = f(x, t + \tau)$, то задача (1.7)–(1.10) получается из задачи (1.7)–(1.10) линейной заменой независимого переменного t , переводящей τ в 0.

Пусть $\{V^\alpha\}$ – шкала пространств, порожденная оператором Стокса $A = -\pi\Delta$, где π – проектор Лерэ (см. [14, гл. 3, § 4]). При $\alpha \geq 0$ пространство V^α состоит из функций, принадлежащих V^0 ; при $\alpha < 0$ пространство V^α шире, чем V^0 . Если $\alpha \geq 0$, то пространство $V^{-\alpha}$ естественно изометрично пространству, сопряженному к V^α , поэтому эти пространства можно отождествить, что мы и будем делать. При $\alpha > \beta$ имеет место плотное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$. При $\alpha \geq 0$ имеет место непрерывное вложение $V^\alpha \subset (H^\alpha(\Omega))^n$, причем норма $\|\cdot\|_\alpha$ эквивалентна норме, индуцированной на V^α из $(H^\alpha(\Omega))^n$ (см. [14, гл. 3, § 4]). В частности, отсюда следует, что при $\alpha > \beta \geq 0$ имеет место компактное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$.

Нас будут особо интересовать пространства V^0, V^1, V^3 и сопряженные к ним. В пространстве V^1 норма задается формулой

$$\|v\|_1 = \left(\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx \right)^{1/2},$$

а в пространстве V^3 норма определяется формулой

$$\|v\|_3 = \left(\int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) \, dx \right)^{1/2}$$

(для двух матриц $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ порядка n полагаем $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$).

Можно построить максимальное замыкание оператора Стокса A , которое будем обозначать той же буквой и которое осуществляет топологический изоморфизм пространств V^α и $V^{\alpha-2}$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Оператор $A: V^1 \rightarrow V^{-1}$ действует по правилу

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx, \quad u, v \in V^1.$$

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями для пространств суммируемых функций на отрезке числовой оси со значениями в банаховом пространстве. Все производные по времени будут пониматься в смысле распределений со значениями в V^{-1} .

Для определения слабого решения на отрезке введем пространства

$$W_1[0, T] = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_1[0, T]} = \|v\|_{L_\infty(0, T; V^1)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})};$$

и пространство $W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v , определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$, принимающих значения в V^1 и таких, что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит $W_1[0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Слабым решением задачи (2.8)–(2.11) на отрезке $[0, T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0, T]$ такую, что тождество

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(t) \varphi dx + \kappa \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi dx \\ & - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \kappa \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & - \kappa \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} v_k(t) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \int_{\Omega} F \varphi dx \quad (2.12) \end{aligned}$$

выполнено почти всюду на $(0, T)$ для любой функции $\varphi \in V^3$ и выполнено начальное условие

$$v(0) = a. \quad (2.13)$$

Слабым решением задачи (2.8)–(2.11) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является слабым решением данной задачи на этом отрезке.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно показать, что для функции $v \in W_1[0, T]$ все члены, стоящие в левой части тождества (2.12), имеют смысл. Всякая функция из $W_1[0, T]$ принадлежит пространству $C([0, T]; V^{-1})$, поэтому для функции v класса $W_1[0, T]$ имеют смысл значение в точке и, следовательно, начальное условие (2.11).

Тождество (2.12) получается из системы (2.8)–(2.10) стандартным образом: в предположении, что имеется классическое решение, уравнение (2.8) умножается на пробную функцию $\varphi \in V^3$ скалярно в $L_2(0, T; V^0)$, после чего в некоторых членах производится интегрирование по частям; вследствие соленоидальности функции φ член $\text{grad } p$ исключается из уравнения.

2.3. Теоремы существования pullback-аттракторов. В настоящем пункте формулируются основные результаты о существовании pullback-аттракторов рассматриваемой гидродинамической модели.

Непрерывное вложение пространств $V^1 \subset V^0$ соответствует неравенству Пуанкаре

$$\|u\|_0 \leq K_0 \|u\|_1, \quad u \in V^1, \quad (2.14)$$

где K_0^2 – первое собственное значение оператора Стокса A .

Введем постоянную

$$\alpha = \frac{\nu}{K_0^2 + \kappa}, \quad (2.15)$$

которую будем использовать до конца работы (здесь K_0 – постоянная из неравенства (2.14), а ν и κ – параметры задачи (1.7)–(1.10)).

Будем предполагать, что плотность внешних сил f в уравнении (1.7) принадлежит пространству $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; V^0)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha \xi} \|f(\xi)\|_{-1}^2 d\xi < \infty \quad (2.16)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь α определяется формулой (2.15)).

Зафиксируем число $\delta \in (0, 1]$. В качестве банаховых пространств, необходимых для введения класса $\mathcal{T}$, возьмем $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ задачи (1.7)–(1.10) рассматривается множество слабых решений v задачи (2.8)–(2.11) с правой частью $F = T(\tau)f$ и некоторым начальным условием $a \in V^1$ (своим для каждого v), удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_1^2 \leq e^{-\alpha t} \left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 \right) \|v(0)\|_1^2 + \frac{1}{\nu \varkappa} \int_0^t e^{\alpha \xi} \|f(\xi + \tau)\|_{-1}^2 d\xi \right). \quad (2.17)$$

Эти пространства траекторий образуют семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для каждого $a \in V^1$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\tau^+$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая начальному условию $v(0) = a$.*

Теорема 2.1 является переформулировкой в терминах траекторий теоремы 4.1 о существовании слабых решений, доказываемой ниже.

Опишем класс $\mathfrak{D}$ притягивающихся семейств множеств. Пусть $\mathcal{R}$ – множество таких функций $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, что функция $\tau \mapsto e^{\alpha \tau} (r(\tau))^2$ возрастает и

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{\alpha \tau} (r(\tau))^2 = 0. \quad (2.18)$$

Класс $\mathfrak{D}$ состоит из семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$, $D_\tau \subset V^1$, для которых существуют функции $r_{\mathbf{D}} \in \mathcal{R}$ такие, что $\|w\|_1 \leq r_{\mathbf{D}}(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $y \in D_\tau$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $f \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}, V^0)$ удовлетворяет условию (2.16). Тогда семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+$ имеет минимальный траекторный $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактор $\mathbf{U}$ и минимальный $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактор $\mathbf{A} = \mathbf{U}(0)$.*

Теорема 2.2 будет доказана в § 5.

§ 3. Аппроксимационная задача и существование траекторий

Для изучения системы (1.7)–(1.9) используется аппроксимационная задача. Чтобы сформулировать эту задачу, введем операторы

$$A^3: V^3 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle A^3 u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \quad u \in V^3, \quad \varphi \in V^3,$$

$$B_1: (L_4(\Omega))^n \rightarrow V^{-1},$$

$$\langle B_1(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad u \in (L_4(\Omega))^n, \quad \varphi \in V^1,$$

$$B_2: V^1 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle B_2(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad u \in V^1, \quad \varphi \in V^3,$$

$$B_3: V^1 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle B_3(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad u \in V^1, \quad \varphi \in V^3.$$

Операторы определены корректно, так как в любом случае

$$u_i \in L_4(\Omega), \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \in L_2(\Omega),$$

и в силу вложения $V^3 \subset (H^3(\Omega))^n$ также имеем $\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \in H^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ при $\varphi \in V^3$.

Через I обозначим тождественный оператор на любом пространстве, а также различные операторы вложения.

Введем обозначение для экспоненциальной функции: для $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$e_\beta(t) = e^{\beta t}.$$

Для данной функции $F \in L_2(0, T; V^0)$ рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра $\lambda \in [0, 1]$:

$$(I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \kappa A)v' + \lambda(\nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v)) = \lambda F, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon \in (0, 1]$.

Решения уравнения (3.1) на отрезке рассматриваются в пространстве

$$W_2[0, T] = \{v: v \in C([0, T]; V^3), v' \in L_2(0, T; V^3)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{W_2[0, T]} = \|v\|_{C([0, T]; V^3)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^3)}.$$

Решения уравнения (3.1) на полуоси $\mathbb{R}_+$ рассматриваются в классе функций $W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящем из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^3)$ таких, что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ принадлежит $W_2[0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Решением уравнения (3.1) на отрезке $[0, T]$ называем функцию $v \in W_2[0, T]$ такую, что уравнение (3.1) выполнено в $L_2(0, T; V^{-3})$. Решением уравнения (3.1) на полуоси $\mathbb{R}_+$ называем функцию $v \in W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является решением уравнения (3.1) на этом отрезке.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для любой функции $v \in W_2[0, T]$ левая часть уравнения (3.1) принадлежит $L_2(0, T; V^{-3})$.

Аппроксимацией уравнения (2.12) служит уравнение (3.1), соответствующее значению $\lambda = 1$:

$$(I + \varepsilon e_{-\alpha} A^3 + \kappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) = F. \quad (3.2)$$

Семейство (3.1) рассматривается для того, чтобы доказать разрешимость уравнения (3.2).

Для уравнения (3.1) имеет смысл начальное условие

$$v(0) = b, \quad (3.3)$$

где $b \in V^3$, поскольку его решения рассматриваются в классе W_2 , состоящем из функций, непрерывных со значениями в V^3 . Задача (3.2), (3.3) аппроксимирует задачу (2.12), (2.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $b \rightarrow a$.

Начальную задачу для семейства (3.1) можно записать более компактно с помощью операторов

$$\begin{aligned} L_\lambda &: W_2[0, T] \rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3, \\ L_\lambda(v) &= ((I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \kappa A)v', v(0)); \\ K &: W_2[0, T] \rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3, \\ K(v) &= (\nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v), 0). \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство уравнений

$$L_\lambda v + \lambda K(v) = \lambda(F, b), \quad (3.4)$$

зависящих от параметра $\lambda \in [0, 1]$. Уравнения этого семейства эквивалентны уравнениям (3.1), снабженным начальными условиями

$$v(0) = \lambda b;$$

в частности, уравнение (3.4), соответствующее значению параметра $\lambda = 1$, эквивалентно уравнению (3.2), снабженному начальным условием (3.3).

В дальнейшем нам будет нужна известная теорема о компактном вложении. Пусть имеется тройка банаховых пространств $X_0 \subset F \subset X_1$, причем первое из вложений компактно, а пространство X_0 рефлексивно; пусть $T > 0$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$. Рассмотрим пространство

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) = \{u: u \in L_{p_0}(0, T; X_0), u' \in L_{p_1}(0, T; X_1)\}$$

(производная понимается в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в X_1); норма в $W(0, T; p_1, p_2; X_0, X_1)$ задается формулой

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_{p_0}(0, T; X_0)} + \|u'\|_{L_{p_1}(0, T; X_1)}.$$

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема Обена–Симона). *Если $p_0 < \infty$, то имеет место компактное вложение*

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset L_{p_0}(0, T; F);$$

если $p_0 = \infty$, $p_2 > 1$, то имеет место компактное вложение

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset C([0, T]; F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [15].

Разрешимость аппроксимационной задачи и предельный переход к невозмущенной задаче основаны на априорных оценках, содержащихся в двух следующих леммах.

ЛЕММА 3.1. *Пусть v – решение уравнения (3.1) на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при некоторых $\lambda \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$. Тогда при всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} &\kappa \|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} \|v(t)\|_3^2 \\ &\leq e^{-\lambda\alpha t} \left((K_0^2 + \kappa) \|v(0)\|_1^2 + \varepsilon \|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu} \int_0^t e^{\lambda\alpha\xi} \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где K_0 – постоянная из неравенства (2.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим обе части уравнения (3.1) к $v(t)$. Поскольку $\langle B_i(v), v \rangle = 0$ (см. [10]), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\lambda\alpha t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_3^2 + \frac{\varkappa}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_1^2 + \lambda\nu \|v(t)\|_1^2 = \lambda(F(t), v(t))_0. \quad (3.6)$$

Для правой части имеем оценку

$$(F(t), v(t))_0 = \langle F(t), v(t) \rangle_{V^{-1} \times V^1} \leq 2\|F(t)\|_{-1} \|v(t)\|_1 \leq \frac{1}{2\nu} \|F(t)\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2} \|v(t)\|_1^2,$$

с учетом которой из (3.6) следует

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_0^2 + \varkappa \frac{d}{dt} \|v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_3^2 + \lambda\nu \|v(t)\|_1^2 \leq \frac{\lambda}{\nu} \|F\|_{-1}^2 \quad (3.7)$$

при почти всех $t \in (0, T)$.

Рассмотрим на V^1 вспомогательную норму $\|u\|^2 = \|u\|_0^2 + \varkappa\|u\|_1^2$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_1$: в самом деле, из определения и неравенства Пуанкаре (2.14) следует оценка

$$\varkappa\|u\|_1^2 \leq \|u\|^2 \leq (K_0^2 + \varkappa)\|u\|_1^2. \quad (3.8)$$

Тогда имеем

$$\nu\|v(t)\|_1^2 \geq \frac{\nu}{K_0 + \varkappa} \|v(t)\|^2 = \alpha\|v(t)\|^2,$$

и из неравенства (3.7) мы получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha\|v(t)\|^2 \leq \frac{\lambda}{\nu} \|F\|_{-1}^2.$$

В первом и третьем слагаемых левой части выполним подстановку $v(t) = \bar{v}(t) \exp(-\lambda\alpha t/2)$. Имеем

$$-\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t} \|\bar{v}(t)\|^2 + e^{-\lambda\alpha t} \frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t} \|\bar{v}(t)\|^2 \leq \frac{\lambda}{\nu} \|F\|_{-1}^2.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\exp(\lambda\alpha t)$ и интегрируя, получаем

$$\|\bar{v}(t)\|^2 + \varepsilon\|v(t)\|_3^2 \leq \|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu} \int_0^t e^{\lambda\alpha\xi} \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi. \quad (3.9)$$

Умножая обе части (3.9) на $\exp(-\lambda\alpha t)$, имеем

$$\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} \|v(t)\|_3^2 \leq e^{-\lambda\alpha t} \left(\|v(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|_3^2 + \frac{\lambda}{\nu} \int_0^t e^{\lambda\alpha\xi} \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi \right).$$

Отсюда и из (3.8) следует доказываемая оценка (3.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть v – решение уравнения (3.1) на отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при некоторых $\lambda \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$. Тогда при почти всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t} \|v'(t)\|_3 \leq C(\|F(t)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2) \quad (3.10)$$

с постоянной C , не зависящей от $\lambda, \varepsilon, v, t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно, и мы его приводить не будем (см. [9]). Оно основано на том, что из уравнения (3.1) выражаются члены, содержащие производные, а остальные члены оцениваются с помощью свойств операторов A и B_i .

Установим некоторые свойства операторов, требующиеся для доказательства разрешимости задачи (3.2), (3.3).

ЛЕММА 3.3. *Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [\theta, 1]$, где $\theta > 0$, то имеет место оценка*

$$\|(I + \varepsilon_1 A^3 + \varkappa A)^{-1} - (I + \varepsilon_2 A^3 + \varkappa A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^{-3}, V^3)} \leq M(\theta) |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad (3.11)$$

с постоянной $M(\theta)$, не зависящей от ε_1 и ε_2 ; здесь $\mathcal{L}(V^{-3}, V^3)$ – пространство операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общих свойств оператора A следует, что оператор $I + \varepsilon A^3 + \varkappa A: V^3 \rightarrow V^{-3}$ является топологическим изоморфизмом (см. [14]). Отображение

$$\varepsilon \mapsto (I + \varepsilon A^3 + \varkappa A)^{-1} \quad (3.12)$$

промежутка $(0, 1]$ в пространство $\mathcal{L}(V^{-3}, V^3)$ ограниченных линейных операторов непрерывно как суперпозиция отображений

$$\varepsilon \mapsto U = I + \varepsilon A^3 + \varkappa A, \quad \tau: U \mapsto U^{-1}.$$

Первое из отображений непрерывно на $(0, 1]$ и гладко на $(0, 1)$; отображение обращения оператора τ определено и гладко на множестве изоморфизмов, открытом в пространстве операторов. Производная отображения (3.12) имеет вид $\tau'(I + \varepsilon A^3 + \varkappa A)A^3$. Эта функция непрерывна на отрезке $[\theta, 1]$ и, следовательно, ограничена на этом отрезке некоторым числом $M(\theta)$. Теорема о среднем, примененная к функции (3.12) на отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subset [\theta, 1]$, дает (3.11). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Отображение пространств*

$$[0, 1] \times L_2(0, T; V^{-3}) \rightarrow L_2(0, T; V^3), \quad (3.13)$$

действующее по правилу

$$(\lambda, u) \mapsto (I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1} u, \quad (3.14)$$

непрерывно по совокупности переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированных λ и t линейный оператор $(I + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t} A^3 + \varkappa A)^{-1}$ ограничен в пространствах $V^{-3} \rightarrow V^3$, поэтому отображение (3.14) действует в пространствах (3.13).

Покажем, что отображение

$$\lambda \mapsto (I + \varepsilon e_{-\lambda\alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1} \quad (3.15)$$

отрезка $[0, 1]$ в пространство $\mathcal{L}(L_2(0, T; V^{-3}), L_2(0, T; V^3))$ непрерывно. В самом деле, пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ и $g \in L_2(0, T; V^{-3})$. Пользуясь оценкой (3.11) и

теоремой о среднем для экспоненциальной функции, получаем

$$\begin{aligned}
& \|((I + \varepsilon e_{-\lambda_1 \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1} - (I + \varepsilon e_{-\lambda_2 \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1})g\|_{L_2(0,T;V^3)} \\
&= \left(\int_0^T \|((I + \varepsilon e^{-\lambda_1 \alpha t} A^3 + \varkappa A)^{-1} - (I + \varepsilon e^{-\lambda_2 \alpha t} A^3 + \varkappa A)^{-1})g(t)\|_3^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T \|(I + \varepsilon e^{-\lambda_1 \alpha t} A^3 + \varkappa A)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - (I + \varepsilon e^{-\lambda_2 \alpha t} A^3 + \varkappa A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^{-3}, V^3)}^2 \|g(t)\|_{-3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M(\varepsilon e^{-\alpha T}) \varepsilon \left(\int_0^T |e^{-\lambda_1 \alpha t} - e^{-\lambda_2 \alpha t}|^2 \|g(t)\|_{-3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M(\varepsilon e^{-\alpha T}) \varepsilon \left(\int_0^T \alpha^2 t^2 |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \|g(t)\|_{-3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M(\varepsilon e^{-\alpha T}) \varepsilon \alpha T |\lambda_1 - \lambda_2| \|g\|_{L_2(0,T;V^{-3})}.
\end{aligned}$$

В силу произвольности g получаем

$$\begin{aligned}
& \|(I + \varepsilon e_{-\lambda_1 \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1} - (I + \varepsilon e_{-\lambda_2 \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(0,T;V^{-3}), L_2(0,T;V^3))} \\
&\leq M(\varepsilon e^{-\alpha T}) \varepsilon \alpha T |\lambda_1 - \lambda_2|,
\end{aligned}$$

т. е. для отображения (3.15) выполняется условие Липшица. Следовательно, отображение (3.15) непрерывно.

Непрерывность отображения (3.14) теперь следует из того, что оно представимо в виде композиции непрерывных отображений пространств

$$\begin{aligned}
& [0, 1] \times L_2(0, T; V^{-3}) \rightarrow \mathcal{L}(L_2(0, T; V^{-3})), \\
& L_2(0, T; V^3) \times L_2(0, T; V^{-3}) \rightarrow L_2(0, T; V^3),
\end{aligned}$$

действующих по правилам $(\lambda, u) \mapsto (U = (I + \varepsilon e_{-\lambda \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1}, u)$ и $(U, u) \mapsto Uu$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *При любом $\lambda \in [0, 1]$ оператор*

$$L_\lambda: W_2[0, T] \rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3$$

ограничен и обратим, обратный оператор $L_\lambda^{-1}(w, b)$ непрерывен по совокупности переменных $w \in L_2(0, T; V^{-3})$, $b \in V^3$, $\lambda \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств оператора A следует, что при фиксированных t и λ оператор $I + \varepsilon e^{-\lambda \alpha t} A^3 + \varkappa A: V^3 \rightarrow V^{-3}$ ограничен, поэтому оператор $I + \varepsilon e_{-\lambda \alpha} A^3 + \varkappa A: L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-3})$ также ограничен; отсюда следует ограниченность оператора $L_\lambda: W_2[0, T] \rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3$. Непосредственно проверяется, что обратный оператор задается формулой

$$[L_\lambda^{-1}(w, b)](t) = b + \int_0^t (I + \varepsilon e^{-\lambda \alpha s} A^3 + \varkappa A)^{-1} w(s) ds \quad (3.16)$$

и действует в указанных пространствах.

Докажем непрерывность обратного оператора по совокупности переменных. Рассмотрим сходящиеся последовательности $w_m \rightarrow w_0$ в $L_2(0, T; V^{-3})$, $b_m \rightarrow b_0$ в V^3 , $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$. Пусть $v_m = L_{\lambda_m}^{-1}(w_m, b_m)$. Из определения оператора L_λ следует, что

$$v'_m = (I + \varepsilon e_{-\lambda_m \alpha} A^3 + \varkappa A)^{-1} w_m,$$

и по лемме 3.4 получаем, что производные v'_m сходятся к v'_0 в норме $L_2(0, T; V^3)$. Тогда для самих функций имеем

$$\begin{aligned} \|v_m - v_0\|_{C([0, T]; V^3)} &= \max_{t \in [0, T]} \left\| \left(b_m + \int_0^t v'_m(s) ds \right) - \left(b_0 + \int_0^t v'_0(s) ds \right) \right\|_3 \\ &\leq \|b_m - b_0\|_3 + \int_0^T \|v'_m(s) - v'_0(s)\|_3 ds \\ &\leq \|b_m - b_0\|_3 + \sqrt{T} \|v'_m - v'_0\|_{L_2(0, T; V^3)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{v_m\}$ сходится к v_0 в пространстве $W_2[0, T]$, и непрерывность обратного оператора доказана.

ЛЕММА 3.6. *Оператор $K: W_2[0, T] \rightarrow L_\infty(0, T; V^{-3}) \times V^3$ является непрерывным и компактным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из непрерывности и компактности операторов A и B_i , $i = 1, 2, 3$, в соответствующих пространствах (см. [9]).

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $F \in L_2(0, T; V^{-3})$ и $b \in V^3$. Тогда на отрезке $[0, T]$ существует решение уравнения (3.2), удовлетворяющее начальному условию (3.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (3.2), (3.3) эквивалентна уравнению (3.4) при значении параметра $\lambda = 1$.

Воспользовавшись обратимостью оператора L_λ (лемма 3.5), перейдем от (3.4) к эквивалентному уравнению

$$v - \lambda L_\lambda^{-1}((F, b) - K(v)) = 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим отображение $k(\lambda, v) = \lambda L_\lambda^{-1}((F, b) - K(v))$ и покажем, что отображение

$$\Phi(\lambda, v) = v - k(\lambda, v)$$

является гомотопией векторных полей $\Phi_0 v = v$ и $\Phi_1 v = v - \lambda L_\lambda^{-1}((F, b) - K(v))$ на шаре B_R пространства $W_2[0, T]$ при достаточно большом радиусе R . Для этого нужно показать, что отображение $k(\lambda, v)$ вполне непрерывно по совокупности переменных (λ, v) и что $\Phi(\lambda, v)$ не принимает нулевых значений на границе шара B_R ни при каких λ .

Непрерывность отображения $k(\lambda, v)$ по совокупности переменных (λ, v) следует из непрерывности отображений K (лемма 3.6) и $(\lambda, w, b) \mapsto L_\lambda^{-1}(w, b)$ (лемма 3.5).

Пусть последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $W_2[0, T]$, и $\{\lambda_m\}$ – последовательность чисел из отрезка $[0, 1]$. Покажем, что последовательность $\{k(\lambda_m, u_m)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Поскольку отображение K вполне непрерывно, существует сходящаяся подпоследовательность

$\{K(u_{m_k})\}$, предел которой обозначим через w_0 . Без ограничения общности $\{\lambda_{m_k}\}$ также сходится к некоторому λ_0 . В силу непрерывности отображения $(\lambda, w, b) \mapsto L_\lambda^{-1}(w, b)$ имеем $L_{\lambda_{m_k}}^{-1}((F, b) - K(u_{m_k})) \rightarrow L_{\lambda_0}^{-1}((F, b) - w_0)$ и, следовательно, $k(\lambda_{m_k}, u_{m_k}) = \lambda_{m_k} L_{\lambda_{m_k}}^{-1}((F, b) - K(u_{m_k})) \rightarrow \lambda_0 L_{\lambda_0}^{-1}((F, b) - w_0)$. Таким образом, $\{k(\lambda_{m_k}, u_{m_k})\}$ – искомая сходящаяся подпоследовательность. Полная непрерывность отображения k доказана.

Покажем, что R можно выбрать так, что деформация Φ будет невырождена на границе шара B_R . Иначе говоря, R должно быть таким, чтобы уравнение (3.4), а следовательно, и уравнение (3.17) не имели решений на границе этого шара ни при каких $\lambda \in [0, 1]$. Пусть v – решение этого уравнения, соответствующее некоторому $\lambda \in [0, 1]$. Из леммы 3.1 следует, что для функции v при всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\|v(t)\|_3^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{\alpha T} \left((K_0^2 + \kappa) \|b\|_1^2 + \varepsilon \|b\|_3^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi \right) \stackrel{\text{def}}{=} R_1^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|v\|_{C([0, T]; V^3)} \leq R_1.$$

Отметим, что R_1 не зависит от λ .

Из леммы 3.2 следует, что для решения v при почти всех $t \in (0, T)$ выполняется неравенство

$$\|v'(t)\|_3 \leq \frac{C e^{\alpha T}}{\varepsilon} (\|F(t)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2),$$

в котором правая часть квадратично суммируема, поэтому левая также квадратично суммируема и

$$\|v'\|_{L_2(0, T; V^3)} \leq \frac{C e^{\alpha T}}{\varepsilon} \left(\|F\|_{L_2(0, T; V^{-3})} + \sqrt{T} \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^1} + \sqrt{T} \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^1}^2 \right). \quad (3.18)$$

В силу непрерывного вложения $V^3 \subset V^1$ имеем

$$\max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^1} \leq C_1 \|v\|_{C([0, T]; V^3)} \leq C_1 R_1,$$

и, таким образом, из неравенства (3.18) следует неравенство

$$\|v'\|_{L_2(0, T; V^{-3})} \leq R_2, \quad (3.19)$$

где постоянная R_2 также не зависит от λ .

Складывая неравенства (3.18) и (3.19), видим, что всякое решение уравнения (3.4) удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{W_2[0, T]} \leq R_1 + R_2.$$

Отсюда следует, что гомотопия Φ невырождена на границе шара B_R с произвольным радиусом $R > R_1 + R_2$.

Таким образом, $\Phi_0 = I$ и Φ_1 – вполне непрерывные векторные поля в $W_2[0, T]$, гомотопные на шаре B_R . Следовательно, для этих полей определена степень Лерэ–Шаудера, и в силу гомотопической инвариантности степени имеем

$$\deg_{\text{LS}}(\Phi_1, B_R, 0) = \deg_{\text{LS}}(I, B_R, 0) = 1.$$

Поскольку степень поля $\Phi_1 v = v - L_1^{-1}((f, b) - K(v))$ отлична от нуля, то существует по крайней мере одно решение $v \in W_2[0, T]$ уравнения

$$v - L_1^{-1}((f, b) - K(v)) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (3.4) при $\lambda = 1$, а последнее, в свою очередь, эквивалентно задаче (3.2), (2.13). Таким образом, разрешимость аппроксимационной задачи доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $F \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, V^{-3})$. Тогда при любом $b \in V^3$ задача (3.2), (3.3) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v_m – решение задачи (3.2), (3.3) на отрезке $[0, m]$, $m = 1, 2, \dots$, которое существует согласно теореме 3.2. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$:

$$\hat{v}_m(t) = \begin{cases} v(t), & 0 \leq t \leq m, \\ v(m), & t \geq m. \end{cases}$$

Очевидно, функции $\hat{v}_m$ принадлежат пространству $W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Функция $\hat{v}_m$ на отрезке $[0, m]$ удовлетворяет неравенству (3.5) с значением $v_m(0) = b$, а также неравенству (3.10). Отсюда следует, что для любого $T > 0$ последовательность $\{\hat{v}_m\}$ ограничена в $W_2[0, T]$. Пространство $W_2[0, T]$ вложено в $W_1[0, T]$, а пространство $W_1[0, T]$ по теореме 3.1 компактно вложено в $C([0, T]; V^{1-\delta})$, где $\delta \in (0, 1]$, поэтому последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C([0, T]; V^{1-\delta})$. В силу произвольности выбора T последовательность $\{\hat{v}_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ и поэтому имеет подпоследовательность $\{\hat{v}_{m_i}\}$, сходящуюся к предельной функции v_* сильно в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ и слабо в $W_2[0, T]$ и $W_1[0, T]$. Эти виды сходимости позволяют перейти к пределу в уравнении и убедиться в том, что v_* – искомое решение (относительно перехода к пределу в нелинейных членах см. [10]; сильная сходимость в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ гарантирует, что v_* удовлетворяет начальному условию). Следствие доказано.

§ 4. Существование траекторий

Имеет место теорема существования слабых решений.

ТЕОРЕМА 4.1. При любых $F \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$ и $a \in V^1$ задача (2.8)–(2.11) имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству

$$\|v(t)\|_1^2 \leq e^{-\alpha t} \left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 \right) \|a\|_1^2 + \frac{1}{\nu \varkappa} \int_0^t e^{\alpha \xi} \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi \right) \quad (4.1)$$

при почти всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательности $\{b_m\} \subset V^3$ и $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$, такие, что

$$\|b_m - a\|_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m \|b_m\|_3^2 \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Последовательность $\{b_m\}$, удовлетворяющую первому свойству в (4.2), можно выбрать, так как V^3 плотно вложено в V^1 , после чего достаточно положить

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m \max\{\|b_m\|_3^2, 1\}}.$$

По следствию 3.1 существуют функции $v_m \in W_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, являющиеся решением задачи

$$(I + \varepsilon_m e^{-\alpha} A^3 + \kappa A)v'_m + \nu A v_m - B_1(v_m) - \kappa B_2(v_m) - \kappa B_3(v_m) = F, \quad v_m(0) = b_m. \quad (4.3)$$

Из леммы 3.1 следует оценка

$$\|v_m(t)\|_1^2 \leq e^{-\alpha t} \left(\left(\frac{K_0^2}{\kappa} + 1 \right) \|b_m\|_1^2 + \frac{1}{\kappa} \varepsilon_m \|b_m\|_3^2 + \frac{1}{\nu \kappa} \int_0^t e^{\alpha \xi} \|F(\xi)\|_{-1}^2 d\xi \right), \quad (4.4)$$

выполняющаяся для всех $t \geq 0$. Из леммы 3.2 следует оценка производных

$$\|v'_m(t)\|_{-1} \leq C(\|F(t)\|_{-3} + \|v_m(t)\|_1 + \|v_m(t)\|_1^2) \quad (4.5)$$

для почти всех $t > 0$.

Последовательности $\{\|b_m\|_1^2\}$ и $\{\varepsilon_m \|b_m\|_3^2\}$ ограничены, поэтому из неравенств (4.3) и (4.5) следует ограниченность последовательности $\{v_m\}$ в $W_1[0, T]$ при любом $T > 0$. Рассуждая, как при доказательстве следствия 3.1, несложно показать, что, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что функции v_m сходятся к пределу $v_* \in W_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$, где $\delta \in (0, 1]$, и что в задаче (4.3) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$:

$$(I + \kappa A)v'_* + \nu A v_* - B_1(v_*) - \kappa B_2(v_*) - \kappa B_3(v_*) = F, \quad v_*(0) = a.$$

Применив обе части первого уравнения последней задачи к пробной функции $\varphi \in V^3$ и принимая во внимание то, что

$$\begin{aligned} \langle (I + \kappa A)v'_*, \varphi \rangle_{V^{-3} \times V^3} &= \langle v'_*(t), \varphi + \kappa A\varphi \rangle_{V^{-1} \times V^1} \\ &= \frac{d}{dt} (v_*(t), \varphi)_{L_2} + \kappa \frac{d}{dt} (v_*(t), A\varphi)_{L_2} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_*(t) \varphi \, dx + \kappa \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla v_*(t) : \nabla \varphi \, dx, \end{aligned}$$

мы видим, что v_* является решением задачи (2.12), (2.13).

Остается доказать, что для v_* выполняется неравенство (4.1). Фиксируем $t \geq 0$. Из сходимости последовательности $\{v_m\}$ в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ следует сходимость $v_m(t) \rightarrow v_*(t)$ в $V^{1-\delta}$. Из неравенства (4.4) следует, что последовательность $\{v_m(t)\}$ ограничена в V^1 , поэтому также $v_m(t) \rightharpoonup v_*(t)$ слабо в V^1 . Теперь достаточно перейти в (4.4) к пределу при $m \rightarrow \infty$, учитывая (4.2) и то, что в силу слабой сходимости имеем $\|v_*(t)\|_1 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|v_m(t)\|_1$. Теорема доказана.

Следующая лемма дает оценку производной слабого решения задачи $v' \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$.

ЛЕММА 4.1. *Для всякого слабого решения v на $\mathbb{R}_+$ задачи (2.8)–(2.11) с функцией $F \in L_2(0, T; V^0)$ имеем $v' \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$, причем имеет место неравенство*

$$\|v'(t)\|_{-1} \leq C(\|F(t)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2) \quad (4.6)$$

при почти всех $t > 0$ с постоянной C , не зависящей от t , v и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3.2.

Непустота пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$, $\tau \in \mathbb{R}$, следует из теоремы 4.1, примененной к $F = T(\tau)f$. Таким образом, теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Покажем, что для пространств траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ имеет место включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. В самом деле, из неравенства (2.17) и условия (2.16) следует равномерная по t оценка траектории $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ на произвольном отрезке $[0, T]$:

$$\|v(t)\|_1^2 \leq \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 \right) \|v(0)\|_1^2 + \frac{1}{\nu \varkappa} e^{-\alpha \tau} \int_{-\infty}^{T+\tau} e^{\alpha s} \|f(s)\|_{-1}^2 ds < \infty,$$

откуда $v \in L_\infty(0, T; V^1)$. В силу произвольности выбора T получаем $v \in L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1)$. Кроме того, по лемме 4.1 имеем $v' \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$, поэтому по теореме 3.1, примененной в случае тройки пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получаем $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$. Включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$ доказано.

§ 5. Существование аттракторов

Доказательство следующих теорем существования аттракторов можно найти в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, называется *$\mathfrak{D}$ -pullback-поглощающим* для $\mathbf{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и любого $\theta \in \mathbb{R}$ существует число $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leq \theta$ такое, что для всех $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$

$$T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta, \quad (5.1)$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть для $\mathbf{H}^+$ существует $\mathcal{T}$ -относительно компактное $\mathfrak{D}$ -pullback-поглощающее семейство $\mathbf{P}$, и пусть $\overline{\mathbf{P}}$ – замыкание $\mathbf{P}$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Тогда существует минимальный траекторный $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактор $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{P}}$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ – минимальный траекторный $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактор для $\mathbf{H}^+$. Тогда семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}$, где $\mathcal{A}_\theta = \{u(0): u \in \mathcal{U}_\theta\} \subset E$, является минимальным $\mathfrak{D}$ -pullback-аттрактором для $\mathbf{H}^+$.

Теперь можно доказать теорему 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Мы построим семейство множеств $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, которое является $\mathcal{T}$ -относительно компактным и pullback-поглощающим. Тогда утверждение теоремы будет следовать из теорем 5.1, 5.2.

Пусть множество P_θ состоит из функций $v \in \mathcal{T}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|v(t)\|_1^2 \leq e^{-\alpha t} \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu \varkappa} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{-1}^2 ds \right), \quad (5.2)$$

$$\|v'(t)\|_{-1} \leq C(\|f(t + \theta)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2); \quad (5.3)$$

здесь C – постоянная из неравенства (4.6).

Покажем, что построенное семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ является $\mathcal{T}$ -относительно компактным.

Условие (ii) определения 2.2 выполняется с функцией

$$\varphi_\theta(t) = e^{-\alpha \frac{t}{2}} \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu \varkappa} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{-1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Конечность функции φ_θ следует из условия (2.16), так как

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{-1}^2 ds = e^{-\alpha \theta} \int_{-\infty}^{t+\theta} e^{\alpha \xi} \|f(\xi)\|_{-1}^2 d\xi < \infty.$$

Проверим выполнение условия (i) определения 2.2. Пусть $[0, T]$ – произвольный отрезок. Положим $R_T = \max_{t \in [0, T]} \varphi_\theta(t)$. Тогда для всякой траектории $v \in P_\theta$ имеем $\|v\|_{L_\infty(0, T; V^1)} \leq R_T$, а из неравенства (5.3) получаем

$$\|v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 \leq C(\|f\|_{L_2(\theta, T+\theta; V^{-3})} + \sqrt{T}R_T + \sqrt{T}R_T^2).$$

Таким образом, множество P ограничено в норме пространства $L_\infty(0, T; V^1)$, а множество $\{v' \mid v \in P\}$ ограничено в норме пространства $L_2(0, T; V^{-1})$. По теореме 3.1, примененной для случая пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получаем, что множество P относительно компактно в $C([0, T]; V^{1-\delta})$. В силу произвольности выбора T получаем, что P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$, что и требовалось доказать.

Мы доказали, что семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -относительно компактным.

Проверим, что для $\mathbf{P}$ выполнены условия определения 5.1. Пусть $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$. Возьмем число θ и покажем, что существует такое $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leq \theta$, что при $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется включение

$$T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta \quad (5.4)$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает.

По определению класса $\mathfrak{D}$ для семейства $\mathbf{D}$ существует функция $r_{\mathbf{D}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для $w \in D_\tau$ имеет место оценка $\|w\|_1 \leq r_{\mathbf{D}}(\tau)$ и функция $\chi_{\mathbf{D}}(\tau) = e^{\alpha\tau}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2$ возрастает и стремится к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$. В силу монотонности функция χ имеет возрастающую обратную функцию χ^{-1} .

Рассмотрим неравенство

$$\chi(\tau) \leq e^{\alpha\theta}. \quad (5.5)$$

В силу свойств функции χ оно выполняется либо на всей оси, либо на луче $(-\infty, \chi^{-1}(e^{\alpha\theta})]$. В первом случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \theta$, а во втором случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \min\{\chi^{-1}(e^{\alpha\theta}), \theta\}$. Ясно, что в любом случае функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает, удовлетворяет неравенству $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leq \theta$, а при $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется неравенство (5.5), или, что то же самое,

$$e^{-\alpha(\theta-\tau)}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2 \leq 1, \quad \tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta). \quad (5.6)$$

Чтобы доказать включение (5.4) для $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$, возьмем траекторию $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ такую, что $v(0) \in D_\tau$, и покажем, что $T(\theta - \tau)v \in P_\theta$.

Покажем, что для функции $T(\theta - \tau)v$ выполняется оценка (5.2). С помощью оценки (2.17) и неравенства (5.6) получаем

$$\begin{aligned} \|T(\theta - \tau)v(t)\|_1^2 &= \|v(t + \theta - \tau)\|_1^2 \\ &\leq e^{-\alpha(t+\theta-\tau)} \left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 \right) \|v(0)\|_1^2 + \frac{1}{\nu\varkappa} \int_0^{t+\theta-\tau} e^{\alpha\xi} \|f(\xi + \tau)\|_{-1}^2 d\xi \right) \\ &\leq e^{-\alpha t} \left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 \right) e^{-\alpha(\theta-\tau)} (r_D(\tau))^2 + \frac{1}{\nu\varkappa} \int_{-\infty}^{t+\theta-\tau} e^{\alpha(\xi+\tau-\theta)} \|f(\xi + \tau)\|_{-1}^2 d\xi \right) \\ &\leq e^{-\alpha t} \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu\varkappa} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{-1}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Оценка (5.2) для функции $T(\theta - \tau)v$ доказана.

Покажем, что для функции $T(\theta - \tau)v$ выполняется оценка (5.3). Поскольку v является слабым решением задачи (2.8)–(2.11) с функцией $F = T(\tau)f$, по лемме 4.1 при почти всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|v'(t)\|_{-1} \leq C(\|f(t + \tau)\|_{-3} + \|v(t)\|_1 + \|v(t)\|_1^2).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \|T(\theta - \tau)v'(t)\|_{-1} &= \|v'(t + \theta - \tau)\|_{-1} \\ &\leq C(\|f(t + \theta)\|_{-3} + \|v(t + \theta - \tau)\|_1 + \|v(t + \theta - \tau)\|_1^2) \\ &= C(\|f(t + \theta)\|_{-3} + \|T(\theta - \tau)v(t)\|_1 + \|T(\theta - \tau)v(t)\|_1^2). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $T(\theta - \tau)v \in P_\theta$, и включение (5.4) доказано.

Мы установили, что семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -относительно компактным и $\mathfrak{D}$ -pullback-поглощающим, что достаточно для доказательства теоремы.

Список литературы

1. A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Appl. Math. Sci., **182**, Springer, New York, 2013, xxxvi+409 pp.
2. D. Vorotnikov, “Asymptotic behaviour of the non-autonomous 3D Navier–Stokes problem with coercive force”, *J. Differential Equations*, **251**:8 (2011), 2209–2225.
3. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Evolution equations and their trajectory attractors”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **76**:10 (1997), 913–964.
4. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, xii+363 pp.
5. V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov, *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2008, xii+230 pp.
6. В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев, “Аттракторы уравнений неньютонской гидродинамики”, *УМН*, **69**:5(419) (2014), 81–156; англ. пер.: V. G. Zvyagin, S. K. Kondrat’ev, “Attractors of equations of non-Newtonian fluid dynamics”, *Russian Math. Surveys*, **69**:5 (2014), 845–913.
7. В. А. Павловский, “К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров”, *Докл. АН СССР*, **200**:4 (1971), 809–812.

8. В. Б. Амфилохийев, Я. И. Войткунский, Н. П. Мазаева, Я. С. Ходорковский, “Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений”, Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та, **96**, 1975, 3–9.
9. В. Г. Звягин, М. В. Турбин, “Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта”, *Гидродинамика*, СМФН, **31**, РУДН, М., 2009, 3–144; англ. пер.: V. G. Zvyagin, M. V. Turbin, “The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **168**:2 (2010), 157–308.
10. В. Г. Звягин, М. В. Турбин, *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред*, КРАСАНД, М., 2012, 416 с.
11. С. К. Кондратьев, “Об аттракторах модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров”, *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем.*, **1** (2010), 117–138.
12. V. G. Zvyagin, S. K. Kondratyev, “Approximating topological approach to the existence of attractors in fluid mechanics”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **13**:2 (2013), 359–395.
13. В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев, “О pullback-аттракторах модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров”, *Докл. РАН*, **459**:1 (2014), 10–13; англ. пер.: V. G. Zvyagin, S. K. Kondratyev, “Pullback attractors for a model of motion of weak aqueous polymer solutions”, *Dokl. Math.*, **90**:3 (2014), 660–662.
14. А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научн. кн., Новосибирск, 1999, 352 с.; англ. пер.: A. V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, xiv+305 pp.
15. Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981, 408 с.; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1979, x+519 pp.

Виктор Григорьевич Звягин
(Viktor G. Zvyagin)
Воронежский государственный университет
E-mail: zvg@math.vsu.ru

Поступило в редакцию
21.08.2013
08.01.2015

Станислав Константинович Кондратьев
(Stanislav K. Kondratyev)
Воронежский государственный университет
E-mail: kondratjevsk@gmail.com