Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Петроградский, И. А. Субботин, Об инвариантах свободных ограниченных алгебр Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 141–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 09:12:43

УДК 512.55

В. М. Петроградский, И. А. Субботин

Об инвариантах свободных ограниченных алгебр Ли

Доказано, что подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена, где $L = L(X)$ – свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга k со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ над произвольным полем положительной характеристики и G – нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$. Доказано, что последовательность $|Y_n|$, $n \geq 1$, растет экспоненциально с показателем экспоненты k , где $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ – однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G , элементы Y_n имеют степень n относительно X , $n \geq 1$. Показано, что производящая функция $\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ имеет радиус сходимости $1/k$, и найдена асимптотика ее роста при $t \rightarrow 1/k - 0$.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: свободные алгебры Ли, ограниченные алгебры Ли, производящие функции, инварианты, действия групп.

DOI: 10.4213/im8166

§ 1. Введение: инварианты свободных алгебр Ли

Пусть конечная группа $G \subset \mathrm{GL}_m(K)$ естественно действует автоморфизмами на кольце многочленов $W = K[X]$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, где поле имеет характеристику нуль. Тогда имеет место классическая формула Т. Молина для производящей функции кольца инвариантов [1], [2]:

$$\mathcal{H}(K[X]^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gt)}.$$

Имеет место также критерий Шепарда–Тодда свободы подалгебры инвариантов [3].

Напомним ситуацию в ассоциативном случае. Пусть $A = K\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра и G – конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_m(K)$; поле произвольно. Действие группы естественно продолжается на всю алгебру A . В отличие от произвольной подалгебры, подалгебра инвариантов $K\langle x_1, \dots, x_m \rangle^G$ всегда свободна [4], причем подалгебра инвариантов конечно порождена тогда и только тогда, когда G действует скалярами (см. [5]–[7]).

Перейдем к изучению инвариантов свободных алгебр Ли. Мы существенно используем технику производящих функций, а также оцениваем их рост; данный подход оказался полезным для изучения разрешимых алгебр Ли и их многообразий [8] (см. также более общий обзор [9]).

Пусть $L = L(x_1, \dots, x_m)$ – свободная алгебра Ли конечного ранга над полем K . Предположим, что G – конечная группа автоморфизмов алгебры Ли L .

Первый автор частично поддержан грантами CNPq, FEMAT.

Рассмотрим подалгебру инвариантов $H = L^G = \{x \in L \mid g \cdot x = x, g \in G\}$. По теореме Ширшова–Витта любая подалгебра в свободной алгебре Ли свободна [10], [11], причем для свободного порождающего множества имеет место аналог формулы Шрайера [12]. Подалгебра инвариантов бесконечно порождена в случае нетривиальной конечной группы однородных автоморфизмов [13]. В. Дренски доказал аналогичный результат для конечной группы (не обязательно однородных) автоморфизмов, если порядок группы обратим в K , при этом он также рассматривал более общий случай относительно свободных алгебр [14]. Бесконечная порожденность в случае произвольной конечной группы над любым полем доказана в [15]. Подобный результат также установлен для инвариантов свободной цветной супералгебры Ли и однородной конечной группы автоморфизмов [16].

Рассмотрим естественную градуировку на $L = L(x_1, \dots, x_m)$, заданную степенью относительно порождающего множества $L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n$. Рассмотрим векторное пространство $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K \subset L$. Пусть G – конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_k(K)$. Мы всегда будем предполагать, что $|G| > 1$. Тогда действие G естественно продолжается на L . Однородная подалгебра имеет однородное свободное порождающее множество (см. [17]–[19]). Без ограничения общности предполагаем, что L^G свободно порождается однородным множеством $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$. Рассмотрим соответствующую производящую функцию

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n.$$

В случае характеристики нуль найдена точная формула для производящей функции $\mathcal{H}(Y, t)$ [20]. Эта формула была обобщена для свободных супералгебр Ли [21], [22]. Кроме того, найдена имеющая экспоненциальный рост асимптотика для последовательности $|Y_n|$. Этот результат также дает примеры бесконечных произведений радикалов, являющихся целочисленными формальными степенными рядами.

В случае поля положительной характеристики ситуация более сложная и получить точную формулу для производящей функции вряд ли возможно. Однако оценки роста производящей функции $\mathcal{H}(Y, t)$ позволяют получить следующую асимптотику для последовательности $|Y_n|$, $n \geq 1$ [23].

ТЕОРЕМА 1 [23]. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, поле K произвольно, и естественное действие G на свободной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$. Пусть $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, – однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G и $\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ – соответствующая производящая функция. Тогда последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k.$$

Более подробное описание асимптотик см. в [23]. Целью настоящей статьи является доказательство аналогичного результата для свободных ограниченных алгебр Ли (см. теорему 5); в частности, мы доказываем, что подалгебра инвариантов бесконечно порождена.

Пусть G_0 – подгруппа в $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, состоящая из всех элементов группы G , действующих на V скалярно, и рассмотрим ее порядок $m = |G_0|$. Подалгебра

инвариантов L^G однородна; несложно проверить, что она лежит в m -кратных однородных компонентах [13, с. 220] (см. § 3):

$$L^G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{im}^G.$$

Доказательство теоремы 1, а также доказательство основного результата настоящей статьи основаны на следующем результате.

ТЕОРЕМА 2 [13, теорема 3.2]. *В условиях теоремы 1 и обозначениях, введенных выше, существует предел*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\dim L_{im}^G}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

§ 2. Производящие функции для свободных ограниченных алгебр Ли

В этом параграфе мы приводим основные определения и необходимые нам результаты о свободных ограниченных алгебрах Ли.

Пусть L – алгебра Ли над полем K характеристики $p > 0$. Используем стандартное обозначение $\text{ad } x: L \rightarrow L$, $\text{ad } x(y) = [x, y]$, $x, y \in L$. Алгебра Ли L называется *ограниченной алгеброй Ли* (или *p -алгеброй Ли*), если она дополнительно наделена унарной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$, удовлетворяющей следующим аксиомам [24], [17]:

- 1) $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, где $\lambda \in K$, $x \in L$;
- 2) $\text{ad}(x^{[p]}) = (\text{ad } x)^p$, $x \in L$;
- 3) $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, $x, y \in L$, где $s_i(x, y)$ – коэффициент при t^{i-1} в полиноме $\text{ad}(tx + y)^{p-1}(x) \in L[t]$.

Это понятие определяется следующей конструкцией. Пусть A – ассоциативная алгебра над полем K , $\text{char } K = p > 0$. Алгебра A превращается в алгебру Ли посредством введения новой операции $[x, y] = xy - yx$, где $x, y \in A$. Тогда отображение $x \mapsto x^p$, $x \in A$, удовлетворяет свойствам 1)–3).

Предположим, что L – ограниченная алгебра Ли. Пусть J – идеал универсальной обертывающей алгебры $U(L)$, порожденной всеми элементами $x^{[p]} - x^p$, $x \in L$. Тогда $u(L) = U(L)/J$ называется *ограниченной обертывающей алгеброй*. В этой алгебре формальная операция $x^{[p]}$ совпадает с p -й степенью x^p для любого $x \in L$. Пусть $\{a_i \mid i \in I\}$ – линейно упорядоченный базис для L . По аналогии с теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта ограниченная обертывающая алгебра имеет следующий канонический базис [24, с. 213]:

$$u(L) = \langle a_{q_1}^{n_1} \cdots a_{q_s}^{n_s} \mid q_1 < \cdots < q_s, 0 \leq n_i < p; s \geq 0 \rangle_K. \quad (1)$$

Напомним, что функция натурального аргумента $\alpha(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *мультипликативной*, если $\alpha(nm) = \alpha(n)\alpha(m)$ для любых взаимно простых $n, m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим две мультипликативные функции, предложенные в [21]:

$$1_p(n) = \begin{cases} 1, & (p, n) = 1, \\ 1 - p, & (p, n) = p, \end{cases}$$

$$\mu_p(n) = \begin{cases} \mu(n), & (p, n) = 1, \\ \mu(m)(p^s - p^{s-1}), & n = mp^s, \quad (p, m) = 1, \quad s \geq 1, \end{cases}$$

где $\mu(n)$ – обычная функция Мёбиуса. Функцию $\mu_p(n)$ также можно рассматривать как деформацию функции Мёбиуса. Заметим, что имеют место следующие оценки:

$$|1_p(n)| \leq n, \quad |\mu_p(n)| \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Пусть $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ – градуированная алгебра произвольной сигнатуры; тогда естественно определяется ее производящая функция

$$\mathcal{H}(A, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n t^n.$$

Для алгебры, порожденной конечным множеством X , часто можно определить градуировку, заданную степенью относительно порождающего множества. В частности, это можно сделать для свободных алгебр многообразий.

Свободная ограниченная алгебра Ли L_p , порожденная множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, определяется при помощи стандартных конструкций [17, п. 2.7.1], [18, п. 2.4].

ТЕОРЕМА 3 [25]. Пусть $L = L_p(X)$ – свободная p -алгебра Ли, порожденная множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда имеют место следующие аналоги формулы Витта для размерностей однородных компонент и производящих функций:

$$\mathcal{H}(L, t) = - \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln(1 - kt^a), \quad \dim L_n = \frac{1}{n} \sum_{a|n} \mu_p(a) k^{n/a}.$$

Имеют место также аналогичные формулы для полиоднородных компонент и соответствующих производящих функций [25]. Эти формулы являются аналогами соответствующих формул для свободных супералгебр Ли [21], [22].

Пусть $\mathbb{Q}[[t]]$ – кольцо формальных степенных рядов от одной переменной и $\mathbb{Q}[[t]]_0$ – его подмножество, состоящее из рядов с нулевым свободным членом. Введем операторы $\mathcal{E}_p, \mathcal{L}_p$ на формальных степенных рядах следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(\varphi)(t) &= \exp\left(\sum_{b=1}^{\infty} \frac{1_p(b)}{b} \varphi(t^b)\right), \quad \varphi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]_0, \\ \mathcal{L}_p(\varphi)(t) &= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln(\varphi(t^a)), \quad \varphi(t) \in 1 + \mathbb{Q}[[t]]_0. \end{aligned}$$

Введение этих операторов оправдано следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 4 [25]. Пусть $L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n$ – градуированная ограниченная алгебра Ли. Тогда производящие функции для L и ее ограниченной обертывающей алгебры $u(L)$ связаны следующим образом:

- 1) $\mathcal{H}(u(L), t) = \mathcal{E}_p(\mathcal{H}(L, t))$;
- 2) $\mathcal{H}(L, t) = \mathcal{L}_p(\mathcal{H}(u(L), t))$.

Таким образом, операторы $\mathcal{E}_p, \mathcal{L}_p$ являются аналогами операторов $\mathcal{E}, \mathcal{L}$, которые связывают производящие функции для супералгебры Ли и ее универсальной обертывающей алгебры [21], [22], [8].

§ 3. Основной результат: порождающее множество для подалгебры инвариантов свободной ограниченной алгебры Ли

Рассмотрим конечную нетривиальную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, действующую на конечномерном пространстве $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K$, где K – произвольное поле положительной характеристики p . Пусть $L = L(x_1, \dots, x_k)$ – свободная ограниченная алгебра Ли, порожденная множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда естественно возникает продолжение действия этой группы G однородными автоморфизмами на всей ограниченной алгебре Ли $L(X)$. А именно, пусть $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, рассмотрим элемент $v \in L$; тогда $v = f(x_1, \dots, x_k)$ и мы определяем действие следующим образом:

$$\varphi(v) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)).$$

Наша цель – изучение инвариантов этого действия.

Сделаем предварительные замечания. Пусть G_0 – подгруппа в $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, состоящая из всех элементов группы G , действующих на V скалярно. Поскольку G_0 вкладывается в мультипликативную группу поля K^* , эта подгруппа является циклической и ее порядок $|G_0| = m$ не делится на p . Пусть ξ – примитивный корень из единицы степени m . Тогда $G_0 \cong \{1, \xi, \dots, \xi^{m-1}\} \subset K^*$. Очевидно, что подалгебра L^G однородна, более того, она лежит в m -кратных однородных компонентах согласно рассуждениям из [13, с. 220]:

$$L^G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{im}^G.$$

По теореме Витта [11] любая подалгебра свободной ограниченной алгебры Ли свободна. Кроме того, всякая однородная подалгебра имеет однородное порождающее множество [17, п. 2.7.4]. Мы предполагаем, что L^G свободно порождается однородным множеством $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, $n \geq 1$. Рассмотрим соответствующую производящую функцию

$$\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n = \sum_{i=1}^{\infty} |Y_{im}| t^{im}.$$

Наша цель – изучение действия конечной однородной группы автоморфизмов $G \subset \mathrm{GL}(V)$ над полем положительной характеристики. Мы исследуем производящую функцию $\mathcal{H}(Y, t)$ и доказываем, что аналогично теореме 1 последовательность $|Y_{im}|$, $i \geq 1$, также растет экспоненциально. Мы не получаем точную формулу для $\mathcal{H}(L^G, t)$, как в случае характеристики нуль [20], [22]; наш результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 5. *Рассмотрим конечную подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_k(K)$, $|G| > 1$, где K – произвольное поле характеристики p . Рассмотрим естественное действие G на свободной ограниченной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$, порожденной*

множеством $\{x_1, \dots, x_k\}$. Пусть $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $Y_n \subset L_n$, $n \geq 1$, – однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G и $\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ – соответствующая производящая функция. Тогда:

1) $\mathcal{H}(Y, t)$ не зависит от выбора однородного свободного порождающего множества Y ;

2) производящая функция имеет следующую асимптотику:

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - (1 - kt)^{1/|G|+o(1)}, \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0;$$

3) радиус сходимости для $\mathcal{H}(Y, t)$ равен $1/k$;

4) последовательность $|Y_n|$ растет экспоненциально: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|Y_n|} = k$;

5) подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена.

Здесь $t \rightarrow 1/k - 0$ обозначает, что вещественная переменная стремится слева к $1/k$. В доказательстве основной теоремы 5 мы используем следующий аналог теоремы 2.

ЛЕММА 1. *Элементы группы G , действующие скалярно на $V = \langle x_1, \dots, x_k \rangle_K$, образуют подгруппу G_0 , $m = |G_0|$. Тогда в условиях теоремы 5 и обозначениях, введенных выше, существует предел*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\dim L_{im}^G}{\dim L_{im}} = \frac{m}{|G|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = H(x_1, \dots, x_k) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ – свободная алгебра Ли, порожденная множеством $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, и $A = U(H)$ – ее универсальная обертывающая алгебра. Выберем однородные базисы $\{v_{ni_n} | 1 \leq i_n \leq \dim H_n\}$ для компонент H_n , $n \in \mathbb{N}$. Тогда p -оболочка для H относительно возведения в обычную степень p внутри $U(H)$ изоморфна свободной ограниченной алгебре Ли $L = L(x_1, \dots, x_k)$ [17, п. 2.7.1], а именно

$$L \cong H \oplus \langle v_{ni_n}^{p^m} | n \geq 1, 1 \leq i_n \leq \dim H_n, m \geq 1 \rangle_K.$$

Кроме того, имеет место естественный изоморфизм $U(H) \cong u(L)$ [17, п. 2.5.2].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n = p^q n_0$, $(p, n_0) = 1$. Тогда имеем прямую сумму векторных пространств:

$$L_n = H_n \oplus H_{n/p}^p \oplus H_{n/p^2}^{p^2} \oplus \dots \oplus H_{n/p^q}^{p^q},$$

где под $H_j^{p^s}$ подразумеваем линейную оболочку p^s -степеней зафиксированного базиса пространства H_j . Поскольку подпространства $H_n \subseteq L_n$ вкладываются в однородную компоненту свободной ассоциативной алгебры A_n , имеем $\dim H_n \leq \dim L_n \leq k^n$, $n \geq 1$. Получаем

$$0 \leq \dim L_n - \dim H_n \leq k^{n/p} + k^{n/p^2} + \dots + k^{n/p^q} < \frac{k^{n/p}}{1 - 1/k} \leq 2k^{n/2}, \quad n \geq 1.$$

Из формулы Витта вытекает асимптотика $\dim H_n \approx \frac{k^n}{n}$, $n \rightarrow \infty$. Получаем

$$\dim L_n = \dim H_n(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Группа G также естественно действует на алгебре Ли H . Применим теорему 2 для инвариантов этого действия:

$$\dim H_{im}^G = \frac{m}{|G|} \dim H_{im}(1 + o(1)), \quad i \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Поскольку подпространство $H_n \subset L_n$ является G -инвариантным, используя соотношение (3), получаем

$$0 \leq \dim L_n^G - \dim H_n^G \leq \dim L_n/H_n = \dim H_n o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Используя (5), (4), (3), получаем искомую асимптотику

$$\begin{aligned} \dim L_{im}^G &= \dim H_{im}^G + \dim H_{im} o(1) = \frac{m}{|G|} \dim H_{im}(1 + o(1)) \\ &= \frac{m}{|G|} \dim L_{im}(1 + o(1)), \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Подалгебра Веронезе

Докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть ξ – примитивный корень из единицы порядка m . Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \begin{cases} m, & \text{если } m \mid n, \\ 0, & \text{если } m \nmid n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $m \mid n$ утверждение тривиально. Пусть $(m, n) = d$, $m = m_0 d$, $n = n_0 d$, где $m_0 > 1$. Пусть $j = m_0 a + b$, где $0 \leq a < d$, $0 \leq b < m_0$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi^{jn} = \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{b=0}^{m_0-1} \xi^{(m_0 a + b) d n_0} = d \sum_{b=0}^{m_0-1} \xi^{b d n_0} = d \frac{\xi^{d m_0 n_0} - 1}{\xi^{d n_0} - 1} = 0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть L – свободная ограниченная алгебра Ли ранга k . Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подалгебру $L_{(m)}$, состоящую из m -кратных компонент (подалгебру Веронезе)

$$L_{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_{mi} \subset L.$$

Тогда для ее производящей функции имеет место асимптотика

$$\mathcal{H}(L_{(m)}, t) \approx -\frac{1}{m} \ln(1 - kt), \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $L_{(m)}$ – ограниченная подалгебра.

По теореме 3 запишем производящую функцию для свободной ограниченной алгебры Ли ранга k :

$$\mathcal{H}(L, t) = -\sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln(1 - kt^a). \quad (7)$$

Напомним разложение $-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n/n$, которое имеет место для всех комплексных чисел в единичном круге: $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$, где также имеет место оценка

$$|-\ln(1-t)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n} = -\ln(1-|t|), \quad |t| < 1.$$

Используя оценку (2), мы можем оценить (7) следующим образом:

$$|\mathcal{H}(L, t)| \leq \sum_{a=1}^{\infty} (-\ln(1 - k|t|^a)), \quad r = |t| < 1. \quad (8)$$

В круге $|t| < 1/k$ все слагаемые ряда (7) определены и являются аналитическими функциями. Для любого фиксированного $0 < r < 1/k$ имеем $-\ln(1 - kr^a) \approx kr^a$ при $a \rightarrow \infty$. Таким образом, сходимость ряда (8) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{a=1}^{\infty} r^a$. Заключаем, что ряд (7) сходится абсолютно к аналитической функции в круге $|t| < 1/k$.

Аналогично, сумма всех слагаемых (7), кроме первого, сходится к аналитической функции в большем круге $|t| < 1/\sqrt{k}$.

Вычислим производящую функцию подалгебры Веронезе, используя лемму 2 и соотношение (7):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(L_{(m)}, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{H}(L, \xi^j t) \\ &= -\frac{1}{m} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\mu_p(a)}{a} \ln \prod_{j=0}^{m-1} (1 - k(\xi^j t)^a). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим через $g(t)$ сумму слагаемых в (9), начиная с $a \geq 2$. Мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(L_{(m)}, t) &= -\frac{1}{m} \ln \left(\prod_{j=0}^{m-1} (1 - \xi^j kt) \right) + g(t) = -\frac{1}{m} \ln(1 - k^m t^m) + g(t) \\ &= -\frac{1}{m} \ln(1 - kt) - \frac{1}{m} \ln(1 + kt + \dots + (kt)^{m-1}) + g(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Как было отмечено, функция $g(t)$ является аналитической в большем круге $|t| < \sqrt{1/k}$, следовательно, существует предел $\lim_{t \rightarrow 1/k} g(t) = g(1/k)$. На окружности $|z| = 1/k$ каждое слагаемое $\ln(1 - \xi^j kt)$, $j \neq 0$, имеет одну существенную особенность $z = \xi^{-j}/k$. Точка $1/k$ является регулярной, т.е. в ней есть аналитическое продолжение, поэтому существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \ln(1 - \xi^j kt)$, равный значению этого аналитического продолжения. Особенность заключена в слагаемом $\lim_{t \rightarrow 1/k-0} -\ln(1 - kt) = +\infty$. Таким образом, получаем искомую асимптотику:

$$\mathcal{H}(L_{(m)}, t) \approx -\frac{1}{m} \ln(1 - kt), \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0.$$

Лемма доказана.

§ 5. Доказательство основного результата

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Производящая функция для подалгебры Веренезе (10) вещественная, и согласно асимптотике (6) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \mathcal{H}(L_{(m)}, t) = +\infty.$$

Тогда для любого фиксированного $N \in \mathbb{N}$ также имеем

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi} = +\infty. \quad (11)$$

По лемме 1 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left(\frac{m}{|G|} - \varepsilon \right) \dim L_{mi} \leq \dim L_{mi}^G \leq \left(\frac{m}{|G|} + \varepsilon \right) \dim L_{mi}, \quad i \geq N.$$

Получаем, что для любых $N_1 \geq N$ и $t > 0$

$$\left(\frac{m}{|G|} - \varepsilon \right) \sum_{i=N}^{N_1} \dim L_{mi} t^{im} \leq \sum_{i=N}^{N_1} \dim L_{mi}^G t^{im} \leq \left(\frac{m}{|G|} + \varepsilon \right) \sum_{i=N}^{N_1} \dim L_{mi} t^{im}.$$

Как мы отмечали выше, все производящие функции сходятся в круге $|z| < 1/k$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{|G|} - \varepsilon \right) \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{im} &\leq \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi}^G t^{im} \\ &\leq \left(\frac{m}{|G|} + \varepsilon \right) \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{im}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из оценки снизу (12) и соотношения (11) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi}^G t^{mi} = +\infty. \quad (13)$$

Теперь из (11), (13), (12) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 1/k-0} \frac{\mathcal{H}(L^G, t)}{\mathcal{H}(L_{(m)}, t)} = \lim_{t \rightarrow 1/k-0} \frac{\sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi}^G t^{mi}}{\sum_{i=N}^{\infty} \dim L_{mi} t^{mi}} = \frac{m}{|G|}. \quad (14)$$

Из (6) и (14) мы получаем

$$\mathcal{H}(L^G, t) \approx -\frac{1}{|G|} \ln(1 - kt), \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0. \quad (15)$$

Теперь мы рассмотрим производящую функцию для $R = u(L^G)$ – ограниченной обертывающей подалгебры инвариантов. Используя теорему 4, имеем

$$\mathcal{H}(R, t) = \mathcal{E}_p(\mathcal{H}(L^G, t)) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{p(n)}}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n) \right). \quad (16)$$

Хорошо известно, что R изоморфна свободной ассоциативной алгебре $A(Y)$, порожденной множеством Y , и в этом случае [9]

$$\mathcal{H}(R, t) = \mathcal{H}(A(Y), t) = \frac{1}{1 - \mathcal{H}(Y, t)}. \quad (17)$$

Из (17) и (16) мы получаем

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - \frac{1}{\mathcal{H}(R, t)} = 1 - \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n)\right), \quad (18)$$

из чего следует утверждение 1).

Поскольку $\dim L_n^G \leq \dim L_n$ для всех $n \geq 1$, мы видим, что первое слагаемое $\mathcal{H}(L^G, t)$ в сумме из (18) определено для любого комплексного $|t| < 1/k$. Значит, другие члены $\mathcal{H}(L^G, t^n)$, $n \geq 2$, определены для всех $|t| < \sqrt{1/k}$. Покажем, что они не меняют асимптотику при $t \rightarrow 1/k - 0$, которую дает первое слагаемое.

Действительно, согласно (15) для первого слагаемого имеем $\mathcal{H}(L^G, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 1/k - 0$. Поскольку наш ряд не имеет свободного члена, можем записать $\mathcal{H}(L^G, t) = tf(t)$, где $f(t)$ – ряд с неотрицательными коэффициентами. Как отмечено выше, $f(1/k^2) = k^2 \mathcal{H}(L^G, 1/k^2) = C$ – конечное число. Рассмотрим $t \in \mathbb{C}$, причем $|t| < 1/k$. Тогда

$$|f(t^n)| \leq f(|t|^n) < f\left(\frac{1}{k^2}\right) = C, \quad n \geq 2. \quad (19)$$

Согласно (2) и (19) сумма слагаемых начиная с $n = 2$ в (18) оценивается константой:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1_p(n)}{n} \mathcal{H}(L^G, t^n) \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |\mathcal{H}(L^G, t^n)| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |t|^n |f(t^n)| \leq \frac{C}{k^2(1 - 1/k)} < \infty, \quad |t| < \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, используя (18), (15) и (20), получаем

$$\mathcal{H}(Y, t) = 1 - \exp\left(\frac{1 + o(1)}{|G|} \ln(1 - kt)\right) = 1 - (1 - kt)^{1/|G| + o(1)}, \quad t \rightarrow \frac{1}{k} - 0, \quad (21)$$

что доказывает утверждение 2) теоремы.

Заметим, что $\mathcal{H}(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$, где $|Y_n| \leq \dim L_n$. Обозначим через W диск $|t| < 1/k$. Поскольку ряд (7) сходится в W , мы делаем вывод, что $\mathcal{H}(Y, t)$ сходится по крайней мере в W . Предположим, что $t_0 = 1/k$ является *регулярной* точкой для $\mathcal{H}(Y, t)$, т. е. существует аналитическое продолжение $h(t)$ в окрестности $W_0 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t - 1/k| < \varepsilon\}$ такое, что $\mathcal{H}(Y, t) = h(t)|_{t \in W \cap W_0}$ [26, п. 3.6.3]. Тогда мы имеем разложение в ряд Тейлора

$$h(t) = c_0 + c_1 \left(t - \frac{1}{k}\right) + c_2 \left(t - \frac{1}{k}\right)^2 + \dots, \quad t \in W_0. \quad (22)$$

Сопоставляя пределы (21) и (22) при $t \rightarrow 1/k - 0$, получаем $c_0 = 1$. Сравниваем следующие коэффициенты:

$$c_1 = \lim_{t \rightarrow 1/k} \frac{h(t) - 1}{t - 1/k} = \lim_{t \rightarrow 1/k - 0} \frac{\mathcal{H}(Y, t) - 1}{t - 1/k} = \lim_{t \rightarrow 1/k - 0} k(1 - kt)^{1/|G| - 1 + o(1)} = +\infty.$$

Здесь мы, используя $|G| > 1$, получаем противоречие. Это противоречие доказывает, что точка $t_0 = 1/k$ является *особой* для ряда $\mathcal{H}(Y, t)$ и радиус его сходимости в нуле равен расстоянию $1/k$ до этой точки (см. [26, п. 3.6.3, следствие на с. 322]). Утверждение 3) доказано. Утверждение 4) следует из формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости ряда [26, п. 3.5.1]. Утверждение 5) очевидно.

Авторы благодарны Р. Брайанту за обсуждение.

Список литературы

1. T. Molien, “Ueber die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen”, *Berl. Ber.*, 1897, 1152–1156.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972, 334 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Ch. IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Ch. V: Groupes engendrés par des réflexions. Ch. VI: Systèmes de racines*, Actualites Sci. Indust., **1337**, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.
3. R. P. Stanley, “Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections”, *J. Algebra*, **49**:1 (1977), 134–148.
4. В. К. Харченко, “Об алгебрах инвариантов свободных алгебр”, *Алгебра и логика*, **17**:4 (1978), 478–487; англ. пер.: V. K. Kharchenko, “Algebras of invariants of free algebras”, *Algebra and Logic*, **17**:4 (1979), 316–321.
5. W. Dicks, E. Formanek, “Poincaré series and a problem of S. Montgomery”, *Linear and Multilinear Algebra*, **12**:1 (1982), 21–30.
6. V. K. Kharchenko, “Noncommutative invariants of finite groups and Noetherian varieties”, *J. Pure Appl. Algebra*, **31**:1-3 (1984), 83–90.
7. В. К. Харченко, *Некоммутативная теория Галуа*, Науч. книга, Новосибирск, 1996, viii+370 с.
8. V. M. Petrogradsky, “Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **9**:2 (1999), 179–212.
9. V. M. Petrogradsky, “Asymptotic problems in algebraic structures”, *Limit of graphs in group theory and computer science*, eds. G. Arzhantseva, A. Valette, EPFL Press, Lausanne, 2009, 77–108.
10. А. И. Ширшов, “Подалгебры свободных лиевых алгебр”, *Матем. сб.*, **33(75)**:2 (1953), 441–452.
11. E. Witt, “Die Unterringe der freien Lieschen Ringe”, *Math. Z.*, **64**:1 (1956), 195–216.
12. V. M. Petrogradsky, “Schreier’s formula for free Lie algebras”, *Arch. Math.*, **75**:1 (2000), 16–28.
13. R. M. Bryant, “On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra”, *J. London Math. Soc.* (2), **43**:2 (1991), 215–224.
14. V. Drensky, “Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**:4 (1994), 1021–1028.
15. R. M. Bryant, A. I. Papistas, “On the fixed points of a finite group acting on a relatively free Lie algebra”, *Glasg. Math. J.*, **42**:2 (2000), 167–181.
16. А. А. Михалев, “О неподвижных точках свободной цветной супералгебры Ли относительно действия конечной группы линейных автоморфизмов”, *УМН*, **47**:4 (1992), 205–206; англ. пер.: A. A. Mikhalev, “On fixed points of a free chromatic Lie superalgebra under the action of a finite group of linear automorphisms”, *Russian Math. Surveys*, **47**:4 (1992), 220–221.

17. Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985, 448 с.; англ. пер.: Yu. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht, 1987, x+309 pp.
18. Yu. A. Bahturin, A. A. Mikhalev, V. M. Petrogradsky, M. V. Zaicev, *Infinite dimensional Lie superalgebras*, de Gruyter Exp. Math., **7**, de Gruyter, Berlin, 1992, x+250 pp.
19. C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **7**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1993, xviii+269 pp.
20. В. М. Петроградский, “Об инвариантах действия конечной группы на свободной алгебре Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:4 (2000), 917–925; англ. пер.: V. M. Petrogradsky, “On invariants of the action of a finite group on a free Lie algebra”, *Siberian Math. J.*, **41**:4 (2000), 763–770.
21. V. M. Petrogradsky, “On Witt’s formula and invariants for free Lie superalgebras”, *Formal power series and algebraic combinatorics* (Moscow, 2000), Springer, Berlin, 2000, 543–551.
22. В. М. Петроградский, “Характеры и инварианты свободных супералгебр Ли”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 158–181; англ. пер.: V. M. Petrogradsky, “Characters and invariants for free Lie superalgebras”, *St. Petersburg Math. J.*, **13**:1 (2002), 107–122.
23. В. М. Петроградский, А. А. Смирнов, “Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:1 (2009), 117–124; англ. пер.: V. M. Petrogradsky, A. A. Smirnov, “On invariants of modular free Lie algebras”, *J. Math. Sci.*, **166**:6 (2010), 767–772.
24. Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964, 355 с.; пер. с англ.: N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., **10**, Interscience Publ., New York–London, 1962, ix+331 pp.
25. V. M. Petrogradsky, “Witt’s formula for restricted Lie algebras”, *Adv. in Appl. Math.*, **30**:1-2 (2003), 219–227.
26. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 1, Наука, М., 1967, 486 с.

Виктор Михайлович Петроградский
(VICTOR M. PETROGRADSKY)
Ульяновский государственный университет,
факультет математики и информационных
технологий;
Department of Mathematics, University of Brasilia
E-mail: petrogradsky@rambler.ru

Поступило в редакцию
27.08.2013

Иван Андреевич Субботин
(IVAN A. SUBBOTIN)
Ульяновский государственный университет,
факультет математики и информационных
технологий
E-mail: shelby888@yandex.ru