Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Чирский, Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 193–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:46:57

УДК 511.36

В. Г. Чирский

Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами

Доказано существование бесконечного множества простых чисел p , для которых обобщенный гипергеометрический ряд с иррациональными параметрами из числового поля $\mathbb{K}$ не обращается в нуль в алгебраическом расширении поля p -адических чисел $\mathbb{K}_v$, где v – некоторое продолжение p -адического нормирования на поле $\mathbb{K}$.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: обобщенные гипергеометрические ряды, иррациональные числа, p -адические числа.

DOI: 10.4213/im8169

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое поле конечной степени $\varkappa$ над $\mathbb{Q}$. Для простого числа p обозначаем через $\mathbb{Q}_p$ поле p -адических чисел. Для любого продолжения p -адического нормирования v на поле $\mathbb{K}$ обозначим через $\mathbb{K}_v$ соответствующее пополнение поля $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}_v$ представляет собой алгебраическое расширение $\mathbb{Q}_p$, $[\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_p] = \varkappa_v$, кроме того, $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$, где суммирование в левой части этого равенства производится по всем нормированиям v , продолжающим p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Это же равенство выполняется для продолжений обычной абсолютной величины, поскольку все эти продолжения соответствуют сопряженным с $\mathbb{K}$ полям $\mathbb{K}^{(i)}$ и $\varkappa_v = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)} \subset \mathbb{R}$, $\varkappa_v = 2$, если $\mathbb{K}^{(i)} \not\subset \mathbb{R}$.

Любое нормирование поля $\mathbb{K}$ продолжает некоторое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Множество архимедовых нормирований обозначим V_∞ , множество неархимедовых нормирований обозначим V_0 . Удобно рассматривать нормализованные нормирования: если v продолжает p -адическое нормирование (что обозначается $v \mid p$), то полагаем

$$|p|_v = p^{-\varkappa_v/\varkappa},$$

а если v продолжает архимедово нормирование и соответствует $\mathbb{K}^{(i)}$, то

$$|x|_v = |x^{(i)}|_{\varkappa_v/\varkappa}$$

(индекс i обозначает соответственно алгебраически сопряженное поле и алгебраически сопряженный элемент).

Имеет место формула произведения: для любого $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$,

$$\prod_{v \in V} |x|_v = 1, \quad (1)$$

где произведение взято по всем нормализованным нормированиям поля $\mathbb{K}$.

Для $\alpha \in \mathbb{K}$ через $|\overline{\alpha}|$ обозначен максимум модулей сопряженных с α чисел. Пусть

$$F(\mu_1, \dots, \mu_m, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \cdots (\mu_m)_n}{n!} z^n, \quad (2)$$

где $(\mu)_0 = 1$, $(\mu)_n = \mu(\mu+1) \cdots (\mu+n-1)$, $n \geq 1$.

Положим

$$\begin{aligned} f_0(z) &= F(\alpha_1, \dots, \alpha_m, z), & f_1(z) &= F(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, z), \dots \\ & \dots, f_{m-1}(z) &= F(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_{m-1} + 1, \alpha_m, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где целые числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2} \in \mathbb{K}$ отличны от нуля и отрицательных целых чисел. Пусть $\alpha_{m-1} = \alpha_m = 1$. Для любого нормирования v поля $\mathbb{K}$ и любого целого числа z из поля $\mathbb{K}_v$ все ряды (3) и их суммы – целые числа из поля $\mathbb{K}_v$.

Отметим, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Z}$, представляют собой так называемые полиадические числа [1].

С именем Эйлера связан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!$. Гипотеза Курепы [2], [3] относится к частичным суммам этого ряда и утверждает, что для любого простого числа $p > 2$ число $\sum_{n=0}^{p-1} n!$ не делится на p .

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Q}$, то ряды, полученные из $f_0(z), \dots, f_{m-1}(z)$ при замене $z = t^{m-1}$, являются F -рядами от переменной t (определение F -ряда см. в [4]). При этом из результатов [4] следуют оценки не только линейных форм, но и многочленов от их значений в алгебраических точках. В частности, для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!$, сходящегося во всех полях $\mathbb{Q}_p$, доказано, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $P(\sum_{n=0}^{\infty} n!) \neq 0$.

Однако если среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ существуют алгебраические иррациональные, то при замене $z = t^{m-1}$ мы уже не получим F -рядов. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ является F -рядом, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ является E -функцией (определение E -функции см. в [5]). Следовательно, если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \cdots (\mu_m)_n}{n!} t^{(m-1)n} \quad (4)$$

является F -рядом, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \cdots (\mu_m)_n}{n! ((m-1)n)!^2} t^{(m-1)n} \quad (5)$$

является E -функцией. В работе А. И. Галочкина [6] установлен критерий принадлежности гипергеометрических функций классу E -функций. Для его формулировки нам потребуется ввести понятие E -условия.

Будем говорить, что две системы алгебраических чисел $(a_1, \dots, a_u)$, $(b_1, \dots, b_v)$, $v \geq u + 1$, удовлетворяют E -условию, если либо все эти числа являются рациональными, либо существует такое разбиение всех тех из этих чисел, которые иррациональны, на пары

$$(a_{i_1}, b_{j_1}), \dots, (a_{i_w}, b_{j_w}), \quad i_\nu \neq i_\mu \quad \text{при } \nu \neq \mu, \quad j_\eta \neq j_\lambda \quad \text{при } \eta \neq \lambda,$$

что все разности $a_{is} - b_{is}$, $s = 1, \dots, w$, представляют собой неотрицательные целые рациональные числа. Теорема 1 из [6] утверждает: *для того чтобы функция*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 1)_n \cdots (a_\mu + 1)_n}{(b_1 + 1)_n \cdots (b_v + 1)_n} z^{(v-\mu)n}$$

с комплексными параметрами $(a_1, \dots, a_\mu)$, $(b_1, \dots, b_v)$, отличными от отрицательных целых чисел и такими, что

$$a_i \neq b_j, \quad i = 1, \dots, u, \quad j = 1, \dots, v,$$

была E -функцией, необходимо и достаточно, чтобы ее параметры $(a_1, \dots, a_u)$, $(b_1, \dots, b_v)$ были алгебраическими числами, удовлетворяющими E -условию.

Таким образом, если среди параметров ряда (2) существуют алгебраические иррациональные, то параметры функции (5) не удовлетворяют E -условию и функция (5) не является E -функцией. Согласно изложенному выше это означает, что ряд (4) не является F -рядом.

Исследование арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических рядов, среди параметров которых есть иррациональные числа, велись многими авторами. В. Г. Спринджук [7] установил иррациональность значений некоторых трансцендентных функций. Оценки линейных форм от значений таких функций получены в работах А. И. Галочкина (см., например, [8], [9]) и П. Л. Иванкова [10]–[12]. Важным аппаратом исследования являются эффективные конструкции приближающих форм.

В настоящей работе существенно использованы результаты Ю. В. Нестеренко [13] о приближениях Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций. Цель работы – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Для любых целых чисел $\xi \in \mathbb{K}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}$, $h_0, \dots, h_{m-1}$ из поля $\mathbb{K}$ существует бесконечное множество нормирований v поля $\mathbb{K}$, для которых*

$$|h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_v \neq 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c_i – положительные постоянные, S_i – натуральные числа. Пусть N – натуральное число. Определим числа r, s, t, l условиями

$$N = ms + r = (m-1)t + l, \quad 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq l \leq m-1, \quad (7)$$

при этом

$$s = \left\lfloor \frac{N-1}{m} \right\rfloor, \quad t = \left\lfloor \frac{N-1}{m-1} \right\rfloor. \quad (8)$$

Положим

$$\alpha_N = \alpha_r + s, \quad (9)$$

$$f_N(z) = F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, z), \quad (10)$$

$$u_N(z) = \alpha_1 \cdots \alpha_N z^t f_N(z). \quad (11)$$

ЛЕММА 1. При любом натуральном N существуют многочлены $P_{N,0}(z), \dots, P_{N,m-1}(z)$ такие, что

$$u_N(z) = P_{N,0}(z)u_0(z) + \dots + P_{N,m-1}(z)u_{m-1}(z). \quad (12)$$

При этом степени многочленов $P_{N,0}(z), \dots, P_{N,m-1}(z)$ не превосходят числа $t - s$, ряды (11) линейно независимы над $\mathbb{K}(z)$ и выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$u_{N+m}(z) = u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}u_N(z), \quad (13)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и N не делится на $m - 1$,

$$u_{N+m}(z) = u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}zu_N(z), \quad (14)$$

если $N \geq 1$ и N делится на $m - 1$, и для любого $i = 0, 1, \dots, m - 1$

$$P_{N+m,i}(z) = P_{N+1,i}(z) - \alpha_{N+1}P_{N,i}(z), \quad (15)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и N не делится на $m - 1$,

$$P_{N+m,i}(z) = P_{N+1,i}(z) - \alpha_{N+1}zP_{N,i}(z), \quad (16)$$

если $N \geq 1$ и N делится на $m - 1$. При этом для всех неотрицательных целых значений N имеет место равенство

$$\Delta_N(z) = (-1)^{mN} \alpha_1 \cdots \alpha_N z^t, \quad (17)$$

где

$$\Delta_N(z) = |P_{N+j,i}|_{i,j=0,\dots,m-1}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма по существу представляет собой непосредственное следствие результатов из работы Ю. В. Нестеренко [13]. Точнее, она может быть получена указанным в статье [13] способом из части утверждений, доказанных в [13, лемма 1, следствие 2, теорема 2, лемма 2]. Например, самые важные для дальнейшего соотношения (13), (14) приведены в [13, с. 69]. Для полноты изложения приведем здесь их доказательство.

Рассмотрим величину $u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}u_N(z)$, где $N = 0$ или $N \geq 1$ и N не делится на $m - 1$. Согласно (9)–(11) имеем

$$\begin{aligned} & u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}u_N(z) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t F(\alpha_{N+2}, \dots, \alpha_{N+m+1}) - \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+2})_n \cdots (\alpha_{N+m+1})_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+1})_n \cdots (\alpha_{N+m})_n}{n!} z^n \right) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+2})_n \cdots (\alpha_{N+m})_n}{n!} z^n ((\alpha_{N+m+1})_n - (\alpha_{N+1})_n) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (9) следует, что

$$\alpha_{N+m+1} = \alpha_{N+1} + 1, \quad (20)$$

поэтому

$$(\alpha_{N+m+1})_n - (\alpha_{N+1})_n = (\alpha_{N+1} + 1)_n - (\alpha_{N+1})_n. \quad (21)$$

При $n = 0$ величина (21) равна нулю. При $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{N+1} + 1)_n - (\alpha_{N+1})_n \\ &= (\alpha_{N+1} + 1) \cdots (\alpha_{N+1} + n - 1)(\alpha_{N+1} + n) \\ & \quad - \alpha_{N+1}(\alpha_{N+1} + 1) \cdots (\alpha_{N+1} + n - 1) \\ &= (\alpha_{N+1} + 1) \cdots (\alpha_{N+1} + n - 1)((\alpha_{N+1} + n) - \alpha_{N+1}) \\ &= n(\alpha_{N+1} + 1) \cdots (\alpha_{N+1} + n - 1) = n(\alpha_{N+1} + 1)_{n-1} = n(\alpha_{N+m+1})_{n-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того, при $n \geq 1$ ввиду равенства (20) получаем

$$\begin{aligned} (\alpha_{N+k})_n &= (\alpha_{N+k} + 1) \cdots (\alpha_{N+k} + n - 1) = \alpha_{N+k} \alpha_{N+m+k} \cdots (\alpha_{N+m+k} + n - 2) \\ &= \alpha_{N+k} (\alpha_{N+m+k})_{n-1}, \quad k = 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставим найденные значения (22) величины (10) в правую часть соотношения (19) и используем равенства (23):

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+2})_n \cdots (\alpha_{N+m})_n}{n!} z^n ((\alpha_{N+m+1})_n - (\alpha_{N+1})_n) \right) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+2})_n \cdots (\alpha_{N+m})_n}{n!} z^n n (\alpha_{N+m+1})_{n-1} \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} \alpha_{N+2} \cdots \alpha_{N+m} z^{t+1} \\ & \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{N+2+m})_{n-1} \cdots (\alpha_{N+2m})_{n-1}}{(n-1)!} z^{n-1} (\alpha_{N+m+1})_{n-1} \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_{N+m} z^{t+1} F(\alpha_{N+m+1}, \dots, \alpha_{N+2m}) = u_{N+m}(z). \end{aligned}$$

Равенство (13) доказано.

Если $N \geq 1$ и N делится на $m - 1$, то из (7) следуют равенства

$$\begin{aligned} N &= (m-1)t + (m-1), & N+1 &= (m-1)t + m = (m-1)(t+1) + 1, \\ N+m &= (m-1)(t+2) + 1, \end{aligned}$$

ввиду которых

$$u_{N+1}(z) = \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1} z^{t+1} f_{N+1}(z), \quad (24)$$

$$u_{N+m}(z) = \alpha_1 \cdots \alpha_{N+m} z^{t+2} f_{N+m}(z). \quad (25)$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, с использованием равенств (24), (25) получаем равенство (14).

Из определений (12) следуют равенства

$$\begin{aligned} & P_{0,0} = 1, \quad P_{0,1} = 0, \quad \dots, \quad P_{0,m-1} = 0, \\ & P_{1,0} = 0, \quad P_{1,1} = 1, \quad P_{1,2} = 0, \quad \dots, \quad P_{1,m-1} = 0, \quad \dots \\ & \dots, \quad P_{m-1,0} = 0, \quad \dots, \quad P_{m-1,m-2} = 0, \quad P_{m-1,m-1} = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно (26) имеем

$$\Delta_0(z) = 1. \quad (27)$$

Соотношения (12) сразу следуют из (13)–(16).

Получим рекуррентную формулу, выражающую $\Delta_{N+1}(z)$ через $\Delta_N(z)$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Для этого рассмотрим определитель (18):

$$\Delta_N(z) = \begin{vmatrix} P_{N,0}(z) & \dots & P_{N,m-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,0}(z) & \dots & P_{N+m-1,m-1}(z) \end{vmatrix}.$$

При $N = 0$ или $N \geq 1$, N , не делящемся на $m-1$, ввиду (15) имеем равенство

$$\begin{aligned} \Delta_{N+1}(z) &= \begin{vmatrix} P_{N+1,0}(z) & \dots & P_{N+1,m-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m,0}(z) & \dots & P_{N+m,m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} P_{N+1,0}(z) & \dots & P_{N+1,m-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,0}(z) & \dots & P_{N+m-1,m-1}(z) \\ P_{N+1,0}(z) - \alpha_{N+1}P_{N,0}(z) & \dots & P_{N+1,m-1}(z) - \alpha_{N+1}P_{N,m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} P_{N+1,0}(z) & \dots & P_{N+1,m-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,0}(z) & \dots & P_{N+m-1,m-1}(z) \\ -\alpha_{N+1}P_{N,0}(z) & \dots & -\alpha_{N+1}P_{N,m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &= -\alpha_{N+1} \begin{vmatrix} P_{N+1,0}(z) & \dots & P_{N+1,m-1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,0}(z) & \dots & P_{N+m-1,m-1}(z) \\ P_{N,0}(z) & \dots & P_{N,m-1}(z) \end{vmatrix} \\ &= \alpha_{N+1}(-1)^m \Delta_N(z). \end{aligned} \quad (28)$$

При $N \geq 1$, N , делящемся на $m-1$, из (16) аналогично предыдущему получаем

$$\Delta_{N+1}(z) = \alpha_{N+1}(-1)^m z \Delta_N(z). \quad (29)$$

Равенства (27)–(29) показывают, что (17) выполнено для всех неотрицательных целых значений N .

Для дальнейшего будет полезным понятие *размера многочлена* $P(z)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Эта величина определяется как наибольший из модулей всех чисел, сопряженных с коэффициентами многочлена в поле $\mathbb{K}$, и обозначается $|P(z)|$. Установим простые свойства размера многочлена:

$$|\overline{P_1(z) + P_2(z)}| \leq |\overline{P_1(z)}| + |\overline{P_2(z)}|, \quad (30)$$

и для $\alpha \in \mathbb{K}$

$$|\overline{\alpha P(z)}| \leq |\overline{\alpha}| |\overline{P(z)}|. \quad (31)$$

Неравенства (30) и (31) сразу следуют из того факта, что для чисел γ, δ из поля $\mathbb{K}$ любое число, сопряженное с суммой этих чисел, является суммой сопряженных с ними чисел, а любое число, сопряженное с произведением этих чисел, является произведением сопряженных с ними чисел.

Обозначим

$$c_0 = [\max(|\overline{\alpha_1}|, \dots, |\overline{\alpha_m}|)] + 1. \quad (32)$$

Поскольку $\alpha_{m-1} = 1$, то $c_0 \geq 2$.

ЛЕММА 2. *В условиях теоремы для $N = ms + r$, $1 \leq r \leq m$, и для любого $i = 0, \dots, q$ имеет место неравенство*

$$|\overline{P_{N,i}(z)}| \leq c_0^N (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма очевидна при $s = 0$ и $1 \leq r \leq m - 1$ в силу равенств (26) (при этом произведение $(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s)$ считаем равным 1). При $s = 0$, $r = m$ согласно (15) имеют место равенства

$$N = m, \quad P_{m,i}(z) = P_{1,i}(z) - \alpha_1 P_{0,i}(z).$$

Из равенств (26) и (32), очевидно, следует, что

$$|\overline{P_{m,i}(z)}| \leq c_0 + 1.$$

Таким образом, лемма верна при $s = 0$, $1 \leq r \leq m$, т. е. $N \leq m$.

Предположим, что при некотором s , $s \geq 1$, и при всех r , i , $1 \leq r \leq m$, $i = 0, \dots, m - 1$, выполнены неравенства

$$|\overline{P_{m(s-1)+r,i}(z)}| \leq c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1). \quad (34)$$

При каждом i , $i = 0, \dots, m - 1$, имеет место одно из равенств

$$P_{ms+r,i}(z) = P_{m(s-1)+r+1,i}(z) - \alpha_{m(s-1)+r+1} P_{m(s-1)+r,i}(z), \quad (35)$$

$$P_{ms+r,i}(z) = P_{m(s-1)+r+1,i}(z) - z \alpha_{m(s-1)+r+1} P_{m(s-1)+r,i}(z). \quad (36)$$

Из (7), (9), (32) получаем

$$|\overline{\alpha_{m(s-1)+r+1}}| = |\overline{\alpha_{r+1} + s - 1}| \leq c_0 + s. \quad (37)$$

Если $r \leq m - 1$, то и в случае (35), и в случае (36) из (30) и (31) следует соотношение

$$|\overline{P_{ms+r,i}(z)}| \leq |\overline{P_{m(s-1)+r+1,i}(z)}| + |\overline{\alpha_{m(s-1)+r+1}}| |\overline{P_{m(s-1)+r,i}(z)}|. \quad (38)$$

В силу формул (34), (37), (38) получаем

$$\begin{aligned} |\overline{P_{ms+r,i}(z)}| &\leq c_0^{m(s-1)+r+1} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1) \\ &\quad + c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1) (c_0 + s) \\ &= c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1) (c_0 + s) \\ &\leq 2c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s) \leq c_0^{ms+r} (c_0 + 1) \cdots (c_0 + s), \end{aligned} \quad (39)$$

поскольку $2 \leq c_0 \leq c_0^m$.

Осталось рассмотреть случай $r = m$. Снова при каждом i , $i = 0, \dots, m-1$, имеет место одно из равенств

$$P_{m(s+1),i}(z) = P_{ms+1,i}(z) - \alpha_{ms+1}P_{ms,i}(z), \quad (40)$$

$$P_{m(s+1),i}(z) = P_{ms+1,i}(z) - z\alpha_{ms+1}P_{ms,i}(z). \quad (41)$$

Из равенств (9), (32) следует неравенство

$$|\overline{\alpha_{ms+1}}| = |\overline{\alpha_1 + s}| \leq c_0 + s. \quad (42)$$

Вновь и в случае (40), и в случае (41) ввиду (30) и (31) выполняется неравенство

$$|\overline{P_{m(s+1),i}(z)}| \leq |\overline{P_{ms+1,i}(z)}| + |\overline{\alpha_{ms+1}}| |\overline{P_{ms,i}(z)}|. \quad (43)$$

По уже доказанному имеем

$$|\overline{P_{ms+1,i}(z)}| \leq c_0^{ms+1}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s). \quad (44)$$

Теперь по предположению индукции получаем

$$|\overline{P_{ms,i}(z)}| = |\overline{P_{m(s-1)+m}(z)}| \leq c_0^{ms}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1). \quad (45)$$

Из соотношений (42)–(45) следует

$$\begin{aligned} |\overline{P_{m(s+1),i}(z)}| &= c_0^{ms+1}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s) + (c_0 + s)c_0^{ms}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s - 1) \\ &= c_0^{ms}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s)(c_0 + 1) \leq 2c_0^{ms+1}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s) \\ &\leq c_0^{m(s+1)}(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s). \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, индукция проведена. Неравенства (39), (46) полностью доказывают утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы. В любом поле $\mathbb{K}$ рассмотрим элемент этого поля, имеющий вид

$$L(\xi) = h_1 f_0(\xi) + \cdots + h_m f_{m-1}(\xi).$$

Умножим его на $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ и получим (с учетом равенств (11)) элемент

$$L^* = b_0 u_0(\xi) + \cdots + b_{m-1} u_{m-1}(\xi), \quad (47)$$

представляющий собой линейную форму от $u_0(\xi), \dots, u_{m-1}(\xi)$ с коэффициентами, являющимися целыми числами из поля $\mathbb{K}$. Поскольку $L(\xi) \neq 0$, полученная форма (47) также является ненулевой. Обозначим

$$H = \max_{i=0, \dots, m-1} |\overline{b_i}|. \quad (48)$$

Рассмотрим при некотором натуральном N линейные формы

$$u_N(\xi), \dots, u_{N+m-1}(\xi) \quad (49)$$

от $u_0(\xi), \dots, u_{m-1}(\xi)$, определенные в (12). Определитель матрицы их коэффициентов $\Delta_N(\xi)$ отличен от нуля ввиду равенства (17) и условий теоремы. Поэтому среди форм (49) существует $m-1$ форм, линейно независимых с формой L^* . Следовательно, определитель этой совокупности форм

$$\Delta_N^*(\xi) = \begin{vmatrix} b_0 & \dots & b_{m-1} \\ P_{N_1,0}(\xi) & \dots & P_{N_1,m-1}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N_{m-1},0}(\xi) & \dots & P_{N_{m-1},m-1}(\xi) \end{vmatrix}, \quad (50)$$

где

$$N_i \in \{N, \dots, N+m-1\}, \quad (51)$$

отличен от нуля, т.е. $\Delta_N^*(\xi) \neq 0$. Величину (50) можно рассматривать как значение многочлена $\Delta_N^*(z)$ в точке $z = \xi$ (где многочлен $\Delta_N^*(z)$ определен очевидным образом).

ЛЕММА 3. При $s \geq S_0$ имеет место неравенство

$$\prod_{v \in V_0} |\Delta_N^*(\xi)|_v \geq H^{-1} e^{-(m-1)s \ln s - c_1 s}, \quad (52)$$

где произведение в левой части взято по всем неархимедовым нормированиям поля $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Delta_N^*(\xi) \neq 0$, ввиду формулы (1) достаточно доказать неравенство

$$\prod_{v \in V_\infty} |\Delta_N^*(\xi)|_v \leq H e^{(m-1)s \ln s + c_1 s}, \quad (53)$$

где произведение в левой части взято по всем архимедовым нормированиям поля $\mathbb{K}$.

Из равенства (50) следует, что $\Delta_N^*(z)$ – многочлен с коэффициентами, являющимися целыми числами из поля $\mathbb{K}$. Кроме того, ввиду (51) имеем $N_i \leq N+m-1$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{t}$ определены равенствами $N+m-1 = m\tilde{s} + \tilde{r} = (m-1)\tilde{t} + \tilde{l}$. При этом

$$\tilde{s} = \left\lfloor \frac{N+m-2}{m} \right\rfloor, \quad \tilde{t} = \left\lfloor \frac{N+m-2}{m-1} \right\rfloor. \quad (54)$$

Из соотношений (9) и (54) следует, что $s \leq \tilde{s} \leq s+1$, а $\tilde{t} = t+1$. Поэтому, используя неравенство (33), с заменой s на $s+1$ получаем

$$|\overline{P_{N_i,j}(z)}| \leq c_0^{N+m-1} (c_0+1) \cdots (c_0+s+1), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

откуда с учетом (48) имеем

$$|\overline{\Delta_N^*(z)}| \leq m! H c_0^{(m-1)(N+m-1)} ((c_0+1) \cdots (c_0+s))^{m-1}. \quad (55)$$

Представим произведение $(c_0+1) \cdots (c_0+s+1)$ в виде

$$(c_0+1) \cdots (c_0+s+1) = \frac{\Gamma(c_0+s+2)}{\Gamma(c_0+1)}, \quad (56)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

ЛЕММА 4 [14, с. 159, пример 1]. Для любой постоянной величины a и любого $\delta > 0$ при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно при $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ имеет место равенство

$$\ln \Gamma(s + a) = \left(s + a - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \quad (57)$$

Из (56) и (57) сразу следует, что при $s \rightarrow \infty$

$$(c_0 + 1) \cdots (c_0 + s + 1) = \exp(s \ln s + O(s)). \quad (58)$$

Из неравенства (55) и равенства (58) вытекает, что при $s > S_1$ с некоторой постоянной c_2

$$|\overline{\Delta_N^*(z)}| \leq H \exp((m-1)s \ln s + c_2 s). \quad (59)$$

Далее, степень многочлена $\Delta_N^*(z)$ не превосходит числа

$$\begin{aligned} (m-1)(\tilde{t} - \tilde{s}) &\leq (m-1) \left(\left\lfloor \frac{N+m-2}{m-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N-1}{m} \right\rfloor \right) \\ &\leq (m-1) \left(\frac{N+m-2}{m-1} - \frac{N-1}{m} + 1 \right) \\ &\leq \frac{N}{m} + 2(m-1) \leq s + 2(m-1). \end{aligned} \quad (60)$$

Поэтому из (59) и (60) при $s > S_2$ с некоторой постоянной c_3 получаем неравенство

$$|\overline{\Delta_N^*(\xi)}| \leq H \exp((m-1)s \ln s + c_3 s). \quad (61)$$

Поскольку

$$\prod_{v \in V_\infty} |\Delta_N^*(\xi)|_v \leq \prod_{v \in V_\infty} |\overline{\Delta_N^*(\xi)}|^{\kappa_v / \kappa} = |\overline{\Delta_N^*(\xi)}|,$$

из неравенства (61) следуют неравенства (52), (53) с соответствующими S_0, c_1 . Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $v \in V_0$, $|\xi|_v \leq 1$. Тогда существует число i , $i \in \{0, \dots, m-1\}$, такое, что $|f_i(\xi)|_v = 1$ и $|u_i(\xi)|_v = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В поле $\mathbb{K}_v$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= 1 + \alpha_1 \cdots \alpha_m \xi + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_1 + n - 1) \cdots \alpha_m(\alpha_m + 1) \cdots \alpha_m(\alpha_m + n - 1)}{n!} \xi^n + \cdots \end{aligned} \quad (62)$$

Если $|\xi|_v < 1$, то из (62) сразу следует, что $|f_0(\xi)|_v = 1$. Значит, согласно равенству (11) имеем $|u_0(\xi)|_v = 1$.

Пусть теперь $|\xi|_v = 1$. Предположим сначала, что существует число i , $i \in \{1, \dots, m\}$, такое, что $|\alpha_i|_v < 1$. Из условия $\alpha_{m-1} = \alpha_m = 1$ следует, что

число α_i отлично от α_m и α_{m-1} . Тогда $\frac{\alpha_m(\alpha_m+1)\cdots(\alpha_m+n-1)}{n!} = 1$ – целое число и для любого натурального $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_1+n-1)\cdots\alpha_m(\alpha_m+1)\cdots(\alpha_m+n-1)}{n!} \xi^n \right|_v < 1. \quad (63)$$

Из равенства (62) и неравенства (63) вытекает, что $|f_0(\xi)|_v = 1$. Следовательно, $|u_0(\xi)|_v = 1$.

Пусть теперь для любого i , $i \in \{1, \dots, m\}$, имеет место равенство

$$|\alpha_i|_v = 1.$$

Предположим, что лемма неверна и что

$$|f_0(\xi)|_v < 1, \quad \dots, \quad |f_{m-1}(\xi)|_v < 1. \quad (64)$$

Тогда и

$$|u_0(\xi)|_v < 1, \quad \dots, \quad |u_{m-1}(\xi)|_v < 1. \quad (65)$$

Из рекуррентных равенств (13), (14) и неравенств (65) получаем, что при любом натуральном N имеет место неравенство

$$|u_N(\xi)|_v < 1. \quad (66)$$

Выберем N так, чтобы

$$|\alpha_k|_v = 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad |\alpha_{N+1}|_v < 1. \quad (67)$$

Существование числа N , удовлетворяющего условиям (67), следует из равенства (9) и условия, что $\alpha_{m-1} = \alpha_m = 1$.

Рассмотрим при выбранном значении N величину

$$|u_N(\xi)|_v = |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v |\xi^t|_v |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v = |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v. \quad (68)$$

В поле $\mathbb{K}_v$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi) &= 1 + \alpha_{N+1} \cdots \alpha_{N+m} \xi + \cdots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha_{N+1}(\alpha_{N+1}+1) \cdots (\alpha_{N+1}+n-1) \cdots \alpha_{N+m}(\alpha_{N+m}+1) \cdots (\alpha_{N+m}+n-1)}{n!} \xi^n + \cdots. \end{aligned} \quad (69)$$

Поскольку среди $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ имеется не менее двух натуральных чисел, среди $\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}$ также имеется не менее двух натуральных чисел. Следовательно, хотя бы одно из них имеет номер j , $j \neq N+1$. Тогда, как и выше, $\frac{\alpha_j(\alpha_j+1) \cdots (\alpha_j+n-1)}{n!}$ – целое число и для любого натурального $n \geq 1$

$$\left| \frac{\alpha_{N+1}(\alpha_{N+1}+1) \cdots (\alpha_{N+1}+n-1) \cdots \alpha_{N+m}(\alpha_{N+m}+1) \cdots (\alpha_{N+m}+n-1)}{n!} \xi^n \right|_v < 1. \quad (70)$$

Из равенств (68), (69) и неравенства (70) следует, что

$$\begin{aligned} |u_N(\xi)|_v &= |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v |\xi^t|_v |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v \\ &= |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v = 1. \end{aligned}$$

Получено противоречие с неравенством (66), следующим из предположения (64) о том, что лемма неверна. Значит, неравенства (64), (65) неверны, откуда следует, что при некотором k , $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,

$$|u_k(\xi)|_v = 1.$$

Лемма доказана.

В поле $\mathbb{K}$ произведем следующее преобразование определителя (50): умножим первый его столбец на $u_0(\xi)$, второй – на $u_1(\xi)$ и т. д. Последний столбец будет умножен на $u_{m-1}(\xi)$. Все полученные столбцы прибавим к столбцу определителя с тем номером k , $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, для которого $|u_k(\xi)|_v = 1$. Тогда из равенств (12), (47) и (50) следует, что

$$\Delta_N^*(\xi)u_k(\xi) = \begin{vmatrix} b_0 & \dots & b_{k-1} & L^* & b_{k+1} & \dots & b_{m-1} \\ P_{N_1,0}(\xi) & \dots & P_{N_1,k-1}(\xi) & u_{N_1}(\xi) & P_{N_1,k+1}(\xi) & \dots & P_{N_1,m-1}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{N_{m-1},0}(\xi) & \dots & P_{N_{m-1},k-1}(\xi) & u_{N_{m-1}}(\xi) & P_{N_{m-1},k+1}(\xi) & \dots & P_{N_{m-1},m-1}(\xi) \end{vmatrix}.$$

Обозначим через δ_i , $i = 0, \dots, m-1$, алгебраические дополнения элементов столбца этого определителя с номером k и разложим его по этому столбцу. Получим

$$\Delta_N^*(\xi)u_k(\xi) = L^*\delta_1 + \sum_{i=2}^m u_{N_i}(\xi)\delta_i. \quad (71)$$

Поскольку число k , $0 \leq k \leq m-1$, выбрано по лемме 5 так, что $|u_k(\xi)|_v = 1$, из (71) следует, что во всех полях $\mathbb{K}_v$, $v \in V_0$, при соответствующем k выполнено

$$\begin{aligned} \Delta_N^*(\xi) &= \left(L^*\delta_1 + \sum_{i=2}^m u_{N_i}(\xi)\delta_i \right) (u_k(\xi))^{-1}, \\ |\Delta_N^*(\xi)|_v &= \left| \left(L^*\delta_1 + \sum_{i=2}^m u_{N_i}(\xi)\delta_i \right) \right|_v. \end{aligned} \quad (72)$$

Поскольку согласно (10), (11) выполнено

$$|u_N(\xi)|_v = |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v |\xi^t|_v |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v \quad (73)$$

и из условий теоремы следует, что

$$|\xi^t|_v |F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, \xi)|_v \leq 1, \quad (74)$$

из (73) и (74) получаем

$$|u_{N_i}(\xi)|_v \leq |\alpha_1 \cdots \alpha_{N_i}|_v \leq |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v. \quad (75)$$

Так как по построению числа δ_i , $i = 1, \dots, m$, являются целыми алгебраическими числами, ввиду (75) имеет место неравенство

$$\left| \sum_{i=2}^m \delta_i u_{N_i}(\xi) \right|_v \leq |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v. \quad (76)$$

Из (76) и формулы произведения (1) следует, что

$$\prod_{v \in V_0} \left| \sum_{i=2}^m \delta_i u_{N_i}(\xi) \right|_v \leq \prod_{v \in V_0} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v = \left(\prod_{v \in V_0} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v \right)^{-1}. \quad (77)$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdots \alpha_N &= \alpha_1(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_1 + s) \cdots \alpha_r(\alpha_r + 1) \cdots (\alpha_r + s) \alpha_{r+1}(\alpha_{r+1} + 1) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times (\alpha_{r+1} + s - 1) \cdots \alpha_m(\alpha_m + 1) \cdots (\alpha_m + s - 1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + s + 1) \cdots \Gamma(\alpha_r + s + 1) \Gamma(\alpha_{r+1} + s) \cdots \Gamma(\alpha_m + s)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)}. \end{aligned} \quad (78)$$

Из равенств (57) и (78) получаем

$$|\alpha_1 \cdots \alpha_N| = \exp(rs \ln s + (m-r)(s-1) \ln(s-1) + O(s)) = \exp(ms \ln s + O(s)) \quad (79)$$

при $s \rightarrow \infty$, причем равенство (79) останется верным и при замене всех чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ их сопряженными в поле $\mathbb{K}$. Согласно определениям нормализованных нормирований имеем

$$\prod_{v \in V_\infty} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v = |\text{Norm}(\alpha_1 \cdots \alpha_N)|^{1/\varkappa}, \quad (80)$$

где $\text{Norm}(\alpha)$ обозначает норму элемента $\alpha \in \mathbb{K}$ в поле $\mathbb{Q}$. По определению нормы получаем

$$\text{Norm}(\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \prod_{i=1}^{\varkappa} \alpha_1^{(i)} \cdots \alpha_N^{(i)}, \quad (81)$$

где $\alpha_1^{(i)} \cdots \alpha_N^{(i)}$ являются сопряженными числами для чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ в поле $\mathbb{K}$. Из равенств (80), (81) и (57) получаем

$$\prod_{v \in V_\infty} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v = \exp(ms \ln s + O(s)). \quad (82)$$

По формуле произведения (1) из равенства (82) вытекает

$$\prod_{v \in V_0} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v = \exp(-ms \ln s + O(s)). \quad (83)$$

В бесконечном произведении, стоящем в левой части равенства (83), от 1 отлично лишь конечное число множителей. Они соответствуют тем $v \in V_0$, для которых

$$|\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v < 1.$$

Эти $v \in V_0$ продолжают p -адические нормирования для тех простых чисел p , которые делят целое рациональное число

$$\text{Norm}(\alpha_1 \cdots \alpha_N) = \prod_{i=1}^{\varkappa} \alpha_1^{(i)} \cdots \alpha_N^{(i)}, \quad (84)$$

однако

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\varkappa} \alpha_1^{(i)} \cdots \alpha_N^{(i)} &= \prod_{i=1}^{\varkappa} \alpha_1^{(i)} (\alpha_1^{(i)} + 1) \times \cdots \\ &\cdots \times (\alpha_1^{(i)} + s) \cdots \alpha_r^{(i)} (\alpha_r^{(i)} + 1) \cdots (\alpha_r^{(i)} + s) \alpha_{r+1}^{(i)} (\alpha_{r+1}^{(i)} + 1) \cdots (\alpha_{r+1}^{(i)} + s - 1) \times \cdots \\ &\cdots \times \alpha_m^{(i)} (\alpha_m^{(i)} + 1) \cdots (\alpha_m^{(i)} + s - 1) = \prod_{j=1}^r \prod_{k=0}^s \prod_{i=1}^{\varkappa} (a_j^{(i)} + k) \times \prod_{j=r+1}^m \prod_{k=0}^{s-1} \prod_{i=1}^{\varkappa} (a_j^{(i)} + k) \end{aligned}$$

и при любых фиксированных j, k произведение

$$\prod_{i=1}^{\varkappa} (a_j^{(i)} + k) \quad (85)$$

является целым рациональным числом. Следовательно, упомянутое выше простое число p не превосходит наибольшего из чисел (85). Величина (85) представляет собой значение многочлена

$$\prod_{i=1}^{\varkappa} (a_j^{(i)} + x)$$

в точке $x = k$. Однако многочлен – возрастающая при $x \geq x_0$ функция, где x_0 – некоторая постоянная. Поэтому при $s \geq S_3$ наибольшее из чисел (85) не превосходит величины $(s + c_0)^{\varkappa}$, где постоянная c_0 определена равенством (32).

Следовательно, при $s \geq S_3$ любое простое число p , делящее число (84), удовлетворяет неравенству

$$p \leq (s + c_0)^{\varkappa}. \quad (86)$$

ЛЕММА 6. При $s \geq S_4$ имеет место неравенство

$$\prod_{e^{\frac{4}{\sqrt{\ln s}} \leq p \leq (s+c_0)^{\varkappa}}} \prod_v |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v < e^{-ms \ln s + ms \sqrt{\ln s} + c_4 s}. \quad (87)$$

Для доказательства этой леммы нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\lambda)$, $s \geq S_5$. Тогда

$$\prod_{p \leq e^{\frac{4}{\sqrt{\ln s}}}} \prod_{v|p} |\lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+s-1)|_v \geq e^{-s \sqrt{\ln s} - c_5 s}. \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО имеет много общего с доказательствами утверждений из упомянутых выше работ В. Г. Спринджук [7] и А. И. Галочкина [9].

Обозначим

$$\omega(s) = \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+s-1).$$

Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\mathfrak{p} \mid (\omega(s))$, $\mathfrak{p} \mid (p)$, где p – простое число, удовлетворяющее неравенству $p \leq e^{\frac{4}{\sqrt{\ln s}}}$. Поскольку $\mathfrak{p}$ – простой идеал, то $\mathfrak{p}$ делит идеал $(\lambda + s_1)$ при некотором $s_1 \in \mathbb{N}$, $s_1 \leq s - 1$. Кроме того, если при некоторых $t, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $s_1 \leq s - 1$, $s_2 \leq s - 1$, оказалось, что $\mathfrak{p}^t \mid (\lambda + s_1)$,

$\mathfrak{p}^t \mid (\lambda + s_2)$, то $\mathfrak{p}^t \mid (s_2 - s_1)$, поэтому для норм идеалов в поле $\mathbb{K}$ имеем неравенство

$$N(\mathfrak{p}^t) \leq N(s_2 - s_1). \quad (89)$$

Если идеал $\mathfrak{p}$ имеет степень f , то согласно (89) получаем

$$N(\mathfrak{p}^t) = (N(\mathfrak{p}))^t = p^{ft} \leq N(s_2 - s_1) \leq N(s) = s^{\varkappa}.$$

Следовательно,

$$p^t \leq p^{ft} \leq s^{\varkappa},$$

и, кроме того,

$$t \leq \frac{\varkappa \ln s}{\ln p}, \quad (90)$$

$$p^{\frac{t}{\varkappa}} \leq s. \quad (91)$$

Неравенство (91) означает, что среди идеалов $(\lambda), (\lambda+1), \dots, (\lambda+s-1)$ имеется не более чем

$$\left[\frac{s}{p^{\frac{t}{\varkappa}}} \right] + 1$$

идеалов, делящихся на $\mathfrak{p}^t$. Ввиду (90) и (91) степень, в которой $\mathfrak{p}$ входит в идеал $(\omega(s))$, при $s \geq S_6$ не превосходит числа

$$\sum_{1 \leq t \leq c_6 \frac{\ln s}{\ln p}} \left(\left[\frac{s}{p^{\frac{t}{\varkappa}}} \right] + 1 \right) \leq s \frac{1}{p^{\frac{t}{\varkappa}} - 1} + c_6 \frac{\ln s}{\ln p}. \quad (92)$$

Предположим сначала, что $p \mid \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – дискриминант поля $\mathbb{Q}(\lambda)$.

Если простой идеал $\mathfrak{p}$, соответствующий нормированию v , входит в разложение идеала (p) в степени e_v и если $\mathfrak{p}$ входит в разложение главного идеала (a) , $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, в степени k , то

$$|a|_v = p^{-\frac{k\varkappa v}{\varkappa e_v}}.$$

Поэтому ввиду (92) получаем

$$|\omega(s)|_v \geq p^{-\frac{\varkappa v}{e_v \varkappa} \left(\frac{s}{p^{1/\varkappa} - 1} + c_6 \frac{\ln s}{\ln p} \right)} \geq p^{-\frac{\varkappa v}{\varkappa} \left(\frac{s}{p^{1/\varkappa} - 1} + c_6 \frac{\ln s}{\ln p} \right)}. \quad (93)$$

Поскольку $\sum \varkappa_v = \varkappa$, где суммирование ведется по всем $v \mid p$, из соотношения (93) при $s \geq S_7$ следуют неравенства

$$\prod_{v \mid p} |\omega(s)|_v \geq \prod_{v \mid p} p^{-\frac{\varkappa v}{\varkappa} \left(\frac{s}{p^{1/\varkappa} - 1} + c_4 \frac{\ln s}{\ln p} \right)} \geq p^{-\left(\frac{s}{p^{1/\varkappa} - 1} + c_6 \frac{\ln s}{\ln p} \right)} \geq p^{-c_7 s}. \quad (94)$$

Из условия $p \mid \mathcal{D}$ следует, что таких простых чисел p конечное число, и из (94) вытекает неравенство

$$\prod_{p \leq e^{\frac{4}{\sqrt[4]{\ln s}}}, p \mid \mathcal{D}} \prod_{v \mid p} |\omega(s)|_v \geq e^{-c_6 s}. \quad (95)$$

Пусть теперь простое число p , удовлетворяющее неравенству $p \leq e^{\sqrt[4]{\ln s}}$, не делит дискриминант $\mathcal{D}$ поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\lambda)$. Тогда в кольце $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ справедливо разложение $(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$. Если при этом $\mathfrak{p}^t \mid (\lambda + s_1)$, $\mathfrak{p}^t \mid (\lambda + s_2)$, то $\mathfrak{p}^t \mid (s_2 - s_1)$ и $p^t \mid (s_2 - s_1)$, откуда $p^t \leq s$. Следовательно, идеал $\mathfrak{p}$, делящий (p) , входит в разложение $(\omega(s))$ в степени, не большей

$$\sum_{1 \leq t < c_7 \frac{\ln s}{\ln p}} \left(\left\lfloor \frac{s}{p^t} \right\rfloor + 1 \right) \leq \frac{s}{p-1} + c_9 \frac{\ln s}{\ln p} = \frac{s}{p} + \frac{s}{p(p-1)} + c_9 \frac{\ln s}{\ln p}.$$

Поэтому

$$\prod_{v|p} |\omega(s)|_v \geq \prod_{v|p} p^{-\frac{\chi_v}{\chi} \left(\frac{s}{p} + \frac{s}{p(p-1)} + c_9 \frac{\ln s}{\ln p} \right)} = p^{-\left(\frac{s}{p} + \frac{s}{p(p-1)} + c_9 \frac{\ln s}{\ln p} \right)}. \quad (96)$$

Из (96) при $s \geq S_8$ следует, что

$$\begin{aligned} & \prod_{p \leq e^{\sqrt[4]{\ln s}}, p \nmid \mathcal{D}} \prod_{v|p} |\omega(s)|_v \\ & \geq \prod_{p \leq e^{\sqrt[4]{\ln s}}} p^{-\left(\frac{s}{p} + \frac{s}{p(p-1)} + c_9 \frac{\ln s}{\ln p} \right)} = e^{-\sum_{p \leq e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \left(\frac{s \ln p}{p} + \frac{s \ln p}{p(p-1)} + c_9 \ln s \right)} \\ & \geq e^{-s \left(\int_2^{e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \frac{dp \ln p}{p} + \int_2^{e^{\sqrt[4]{\ln s}}} \frac{d \ln p}{p(p-1)} \right) + c_{10} \frac{(\ln s) e^{\sqrt[4]{\ln s}}}{\sqrt[4]{\ln s}}} \geq e^{-s \sqrt{\ln s} - c_{11} s}. \end{aligned} \quad (97)$$

Из (95) и (97) следует (88), а из соотношений (88), (86) и (83) при $s \geq S_6$ получаем (87).

Пусть V_N^* – множество нормирований $v \in V_0$, продолжающих p -адические нормирования для простых чисел p , удовлетворяющих при $s \geq S_8$ неравенствам

$$e^{\sqrt[4]{\ln s}} \leq p \leq (s + c_0)^{\chi}. \quad (98)$$

Докажем, что существует нормирование $v \in V_N^*$, продолжающее p -адическое нормирование такое, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|\Delta_N^*(\xi)|_v > \left| \sum_{i=2}^m u_{N_i}(\xi) \delta_i \right|_v. \quad (99)$$

Согласно неравенству (52) имеем

$$\prod_{v \in V_0} |\Delta_N^*(\xi)|_v \geq H^{-1} e^{-(m-1)s \ln s - c_1 s}. \quad (100)$$

Из соотношений (77), (83), (88), леммы 6 и неравенства (99) получаем

$$\prod_{v \in V_N^*} \left| \sum_{i=2}^m \delta_i u_{N_i}(\xi) \right|_v \leq \prod_{v \in V_N^*} |\alpha_1 \cdots \alpha_N|_v \leq \exp(-ms \ln s + ms \sqrt{\ln s} + c_4 s).$$

При $s \geq S_4$ выполнено неравенство

$$\ln H < s \ln s - ms\sqrt{\ln s} - (c_1 + c_4)s,$$

откуда имеем

$$\ln H + (m-1)s \ln s + c_1 s < ms \ln s - ms\sqrt{\ln s} - c_4 s. \quad (101)$$

Из неравенства (101) следует

$$H^{-1} \exp(-(m-1)s \ln s - c_1 s) > \exp(-ms \ln s + ms\sqrt{\ln s} + c_4 s). \quad (102)$$

Теперь из неравенств (100)–(102) следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{v \in V_N^*} |\Delta_N^*(\xi)|_v &\geq H^{-1} e^{-(m-1)s \ln s - c_1 s} > \exp(-ms \ln s + ms\sqrt{\ln s} + c_4 s) \\ &> \prod_{v \in V_N^*} \left| \sum_{i=2}^m \delta_i u_{N_i}(\xi) \right|_v. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (99) доказано. Тогда из (67) и (99) получаем

$$0 < |\Delta_N^*(\xi)|_v = |L^* \delta_1|_v \leq |L^*|_v,$$

поскольку δ_1 – целое число из поля $\mathbb{K}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось выбрать последовательность чисел $s_1, s_2, s_3, \dots$, больших S_8 и удовлетворяющих неравенствам

$$(s_k + c_0)^\varkappa < e^{\sqrt[k]{\ln s_{k+1}}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В каждом таком интервале есть соответствующее простое число p и нормирование $v \mid p$, для которых выполняется неравенство (6). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971, 416 с.; англ. пер.: A. G. Postnikov, *Introduction to analytic number theory*, Transl. Math. Monogr., **68**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, vi+320 pp.
2. D. Kurepa, “On the left factorial function $n!$ ”, *Math. Balkanica*, **1** (1971), 147–153.
3. В. С. Владимиров, “Левые факториалы, числа Бернулли и гипотеза Курепы”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **72**:86 (2002), 11–22.
4. D. Bertrand, V. Chirskii, J. Yebbou, “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **13**:2 (2004), 241–260.
5. А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987, 448 с.; англ. пер.: A. B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, De Gruyter Stud. Math., **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989, xx+466 pp.
6. А. И. Галочкин, “О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E -функций”, *Матем. заметки*, **29**:1 (1981), 3–14; англ. пер.: A. I. Galochkin, “Hypergeometric Siegel functions and E -functions”, *Math. Notes*, **29**:1 (1981), 3–8.

7. В. Г. Спринджук, “Иррациональность значений некоторых трансцендентных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 93–107; англ. пер.: V. G. Sprindzhuk, “The irrationality of the values of certain transcendental functions”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 89–104.
8. А. И. Галочкин, “Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций”, *Матем. заметки*, **8**:1 (1970), 19–28; англ. пер.: A. I. Galochkin, “A lower bound for linear forms in values of certain hypergeometric functions”, *Math. Notes*, **8**:1 (1970), 478–484.
9. А. И. Галочкин, “Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:6 (1976), 1220–1235; англ. пер.: A. I. Galochkin, “The arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions”, *Siberian Math. J.*, **17**:6 (1976), 894–906.
10. П. Л. Иванков, “О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:5 (1993), 53–62; англ. пер.: P. L. Ivanov, “On linear independence of the values of entire hypergeometric functions with irrational parameters”, *Siberian Math. J.*, **34**:5 (1993), 839–847.
11. П. Л. Иванков, “Оценки мер линейной независимости некоторых чисел”, *Матем. заметки*, **55**:3 (1994), 59–67; англ. пер.: P. L. Ivanov, “On estimates of degrees of linear independence for some numbers”, *Math. Notes*, **55**:3 (1994), 277–283.
12. П. Л. Иванков, “О линейной независимости значений некоторых функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:1 (1995), 191–206.
13. Ю. В. Нестеренко, “Приближения Эрмита–Падэ обобщенных гипергеометрических функций”, *Матем. сб.*, **185**:10 (1994), 39–72; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “Hermite–Padé approximants of generalized hypergeometric functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **83**:1 (1995), 189–219.
14. Е. Титчмарш, *Теория функций*, 2-е изд., Наука, М., 1980, 464 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1939, x+454 pp.

ВЛАДИМИР ГРИГОРЬЕВИЧ ЧИРСКИЙ
 (VLADIMIR G. CHIRSKII)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: vgchirskii@yandex.ru

Поступило в редакцию
 26.09.2013
 19.03.2014