Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Геворкян, Общая система Франклина как базис
в пространстве $B^1[0, 1]$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014,
том 78, выпуск 6, 65–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 08:50:43

УДК 517.51

Г. Г. Геворкян

Общая система Франклина как базис в пространстве $B^1[0, 1]$

Для общей системы Франклина $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, порожденной допустимой последовательностью T , получены необходимые и достаточные условия, налагаемые на T , для того, чтобы соответствующая система была базисом или безусловным базисом в $B^1[0, 1]$.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: общая система Франклина, базис, безусловный базис, пространства B^1 , H^1 .

DOI: 10.4213/im8174

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается общая система Франклина в пространстве $B^1[0, 1]$. Пространство B^1 на единичной окружности введено в работах [1], [2]. Будем рассматривать пространство B^1 на отрезке $[0, 1]$ и обозначать через $B^1[0, 1]$.

Единичную окружность или периодический отрезок $[-\pi, \pi]$ обозначим через T , и интервалами в T будут как отрезки $[a, b]$ с условием $-\pi \leq a < b \leq \pi$, так и $[a, b]$ с условиями $a > b$, $a, b \in T$. Во втором случае под $[a, b]$ понимаем множество $[-\pi, b] \cup [a, \pi]$. Следуя работе [1], введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действительнозначную функцию b , определенную на T , назовем *специальным атомом*, если или $b(t) \equiv \frac{1}{2\pi}$, или $b(t) = \frac{1}{|I|}\chi_L(t) - \frac{1}{|I|}\chi_R(t)$, где I – интервал на T , $|I|$ – длина интервала I , L – левая половина интервала I , R – правая, а χ_E – характеристическая функция множества E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство B^1 определяется следующим образом:

$$B^1 = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n(t), \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\},$$

где b_n – специальные атомы. Полагается $\|f\|_{B^1} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f .

Напомним атомическое определение пространства $H^1(T)$, впервые приведенное в [3]. Функция $a: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *атомом*, если $a(t) \equiv \frac{1}{2\pi}$ или существует интервал $I \subset T$ такой, что $\text{supp } a \subset I$, $\sup |a| \leq |I|^{-1}$ и $\int_T a(t) dt = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1A006.

Далее,

$$H^1 = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(t), \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\},$$

где a_n – атомы и $\|f\|_{H^1} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$.

Ясно, что всякий специальный атом является также атомом. Поэтому $B^1 \subset H^1$. В работе [1] доказано, что $B^1 \neq H^1$.

Если рассматривается пространство $H^1[0, 1]$, то функции определены на обычном отрезке $[0, 1]$ и носители атомов – обычные интервалы.

В работе [4] доказано, что функции из пространства B^1 совпадают с действительной частью граничных значений аналитических в единичном круге $D = \{re^{it}: r < 1\}$ функций g с условием

$$\|g\| = |g(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})| d\theta dr < \infty.$$

Определение общей системы Франклина дано в [5], а периодической общей системы Франклина – в [6]. Эти определения аналогичны друг другу. Поскольку результаты мы будем формулировать и доказывать для общей (непериодической) системы Франклина, приведем здесь только определение системы Франклина и понятия регулярности для этого случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n: n \geq 0\}$ называется *допустимой*, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0, 1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0, 1]$ и каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n: n \geq 0\}$ – допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i: 0 \leq i \leq n\}$. Допустим, что π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой:

$$\pi_n = \{\tau_i^n: 0 = \tau_0^n \leq \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n \leq \tau_n^n = 1, 0 \leq i \leq n-1\}, \quad \pi_n = \mathcal{T}_n.$$

Тогда через S_n обозначим пространство функций, определенных на $[0, 1]$, которые непрерывны слева (и непрерывны справа в точке $\tau_0^n = 0$), линейны на (τ_i^n, τ_{i+1}^n) и непрерывны в τ_i^n , если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} , и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию называют *n -й функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$* . Известно, что $f_n(t_n) \neq 0$. Поэтому полагается $f_n(t_n) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Общая система Франклина $\{f_n(x): n \geq 1\}$, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$, определяется по правилу $f_0(x) \equiv 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n -я функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Отметим, что если последовательность $\mathcal{T}$ диадическая, т.е. $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то соответствующая система Франклина является классической системой Франклина [7].

Для каждого n введем также обозначения $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Следующие определения заимствованы из работы [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется *сильно регулярной с параметром γ* , если

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma, \quad n = 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется *сильно регулярной по парам с параметром γ* , если

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{i-1}^n + \lambda_i^n}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n} \leq \gamma, \quad n = 2, 3, \dots, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

В работе [6] доказано, что периодическая общая система Франклина будет базисом в H^1 тогда и только тогда, когда порождающая ее последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам. В той же работе доказано, что периодическая общая система Франклина будет безусловным базисом в H^1 тогда и только тогда, когда порождающая ее последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная.

Ранее, в работе [8], было доказано, что общая система Франклина будет базисом в $H^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда порождающая ее последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам. В [8] также доказано, что общая система Франклина будет безусловным базисом в $H^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда порождающая ее последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная. В работе [9] доказано, что общая система Франклина является безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, при любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$. Аналогичная теорема в периодическом случае доказана в работе [10]. Безусловная базисность классической системы Франклина была доказана С. В. Бочкаревым [11].

В настоящей работе рассмотрим пространство B^1 на обычном интервале $[0, 1]$, т. е. носителями специальных атомов будут обычные интервалы $I = [a, b]$, $a < b$. Соответствующее пространство обозначим через $B^1[0, 1]$. Основной целью настоящей работы является доказательство следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность и $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда система $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ будет базисом в пространстве $B^1[0, 1]$, если и только если последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с некоторым параметром γ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность и $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда система $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ будет безусловным базисом в пространстве $B^1[0, 1]$, если и только если последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с некоторым параметром γ .

При доказательстве теорем 1, 2 мы пользуемся многими свойствами, полученными в работах [8], [9].

Условимся в некоторых обозначениях.

Для $f \in L_1$ через $a_n(f)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обозначим коэффициенты Фурье–Франклина функции f , т. е. $a_n(f) = \int_0^1 f(t) f_n(t) dt$.

Через c , C , C_1 , C_γ , ... обозначаются постоянные, зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть различными.

Длину отрезка I обозначим через $|I|$. Через $\rho(t, I)$ обозначим расстояние между точкой t и интервалом I , т. е. $\rho(t, I) = \inf_{x \in I} |x - t|$.

Через $d_n(t, x)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точками t и x . В случае $x = t_n$ вместо $d_n(t, t_n)$ будем записывать $d_n(t)$, т. е. $d_n(t)$ – количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точками t_n и t . Для множества A обозначим $d_n(A) = \min_{t \in A} d_n(t)$.

Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C такие, что $ca \leq b \leq Ca$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные могут зависеть от γ .

Через $\chi_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A , а через $\mu(A)$ – лебегову меру множества A и через A^c – дополнение множества A , т. е. $A^c = [0, 1] \setminus A$. Далее, $V(f)$ – вариация функции f на отрезке $[0, 1]$, а BV – множество функций ограниченной вариации на $[0, 1]$.

§ 2. Некоторые свойства общей системы Франклина

Семейство интервалов линейности первых $n + 1$ функций $\{f_k(x)\}_{k=0}^n$ обозначим через $\mathcal{I}_n$. Ясно, что интервалы семейства $\mathcal{I}_n$ получаются разбиением отрезка $[0, 1]$ точками из $\mathcal{T}_n$. Обозначим также $\mathcal{I} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{I}_n$.

В исследованиях общей системы Франклина (как в периодическом, так и в непериодическом случаях) важную роль играют интервалы J_n и Δ_n , связанные с функцией f_n . Определим эти интервалы. Предположим, что для фиксированного $n \geq 5$ число $\tau_i^n \in \pi_n$ такое, что $\tau_i^n = t_n$. Из интервалов $[\tau_{i-2}^n, \tau_i^n]$, $[\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n]$, $[\tau_i^n, \tau_{i+2}^n]$ тот, который имеет наименьшую длину, обозначим $I^* = [\tau_{i^*}^n, \tau_{i^*+2}^n]$. Интервал J_n – один из интервалов $[\tau_{i^*}^n, \tau_{i^*+1}^n]$ и $[\tau_{i^*+1}^n, \tau_{i^*+2}^n]$ такой, что $|J_n| = \max(|[\tau_{i^*}^n, \tau_{i^*+1}^n]|, |[\tau_{i^*+1}^n, \tau_{i^*+2}^n]|)$. Положим $\Delta_n = [\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n]$. Известно, что функция $|f_n(x)|$ достигает наибольшего значения на Δ_n . Поэтому Δ_n называют *интервалом пика* функции f_n .

Очевидно, что если последовательность сильно регулярная или сильно регулярная по парам, то $|J_n| \sim_\gamma |\Delta_n|$. Поэтому (ради удобства) в оценках, полученных в работах [12], [9], [8], для функций f_n мы можем J_n заменить на Δ_n .

Приведем некоторые оценки для функций общей системы Франклина, доказанные в работах [9] и [8].

Существует такая постоянная C_γ , что для всех n и x выполняется

$$|f_n(x)| \leq C_\gamma q^{d_n(\delta)} \frac{|\Delta_n|^{1/2}}{|\Delta_n| + \rho(\delta, \Delta_n) + |\delta|}, \quad x \in \delta; \quad (1)$$

здесь и далее q равно $\frac{2}{3}$, а δ – любой интервал линейности функции f_n , т. е. $\delta \in \mathcal{I}_n$.

Далее, для любого $p \in [1, \infty)$ и некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеют место соотношения

$$\int_{\tau_{i-2}^n}^{\tau_{i-1}^n} |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |f_n(x)|^p dx, \quad \tau_i^n < t_n, \quad (2)$$

$$\int_{\tau_{i+1}^n}^{\tau_{i+2}^n} |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |f_n(x)|^p dx, \quad \tau_i^n > t_n, \quad (3)$$

$$\|f_n\|_{L_p(\Delta_n)} \sim_\gamma \|f_n\|_p \sim_\gamma |\Delta_n|^{1/p-1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (4)$$

Для $I \in \mathcal{I}$ обозначим

$$D_I = \{n: f_n \text{ линейна на } I\}, \quad D_{I,k} = \{n \in D_I: d_n(I) = k\}.$$

Из работы [5] известно, что для любого $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет место

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k(f) f_k \right\|_p \leq 3 \|f\|_p \quad \forall n. \quad (5)$$

Оценки ядра Дирихле $K_n(x, t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) f_k(x)$, полученные в работах [5], [13], в случае, когда последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с параметром γ , можно представить в следующем виде:

$$|K_n(x, t)| \leq C_\gamma \frac{q^{d_n(x, t)}}{|I_x| \vee |I_t|}, \quad (6)$$

где $a \vee b = \max\{a, b\}$, и если $x \in [\tau_\nu^n, \tau_{\nu+1}^n]$, то $I_x = [\tau_\nu^n, \tau_{\nu+2}^n]$.

ЛЕММА 3 [8, лемма 3.4]. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любого интервала $I \in \mathcal{I}$ и любого числа k имеет место

$$\sum_{n: n \in D_{I,k}} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I, \Delta_n) + |I|} \leq C_\gamma(k+1).$$

ЛЕММА 4. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с параметром γ и интервалы $U_n \in \mathcal{I}$ такие, что $U_{n+1} \subset U_n$ и $U_{n+1} \neq U_n$. Тогда для любого k имеем

$$\sum_{n \geq k} |U_n| \sim_\gamma |U_k|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U_{n+3} \in \mathcal{I}_m$ для некоторого m , то в U_n , кроме U_{n+3} , находятся еще как минимум три различных интервала из $\mathcal{I}_m$. Нетрудно заметить, что из сильной регулярности по парам следует, что длина каждого из этих интервалов (включая U_{n+3}) не превосходит $\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} |U_n|$. Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательные леммы

Договоримся для любого интервала $J = [\alpha, \beta]$ через $\chi_{jm}^J(t)$ обозначать систему Хаара в нормировке $L^1(J)$, т.е. если для $j = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots, 2^j$

$$\begin{aligned} J_{jm} &= \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^j} (m-1), \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^j} m \right), \\ J_{jm}^+ &= \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{j+1}} (2m-2), \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{j+1}} (2m-1) \right), \\ J_{jm}^- &= \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{j+1}} (2m-1), \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{j+1}} 2m \right), \end{aligned}$$

то

$$\chi_{00}^J(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad t \in J,$$

и для $j = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots, 2^j$

$$\chi_{jm}^J(t) = \begin{cases} |J_{jm}|^{-1} & \text{при } t \in J_{jm}^+, \\ -|J_{jm}|^{-1} & \text{при } t \in J_{jm}^-. \end{cases}$$

Система $\{\chi_{jm}^J\}$ ортогональная и полная в $L^1(J)$, и ее биортогональная система $\{\tilde{\chi}_{jm}^J\}$ определяется формулой

$$\tilde{\chi}_{jm}^J = \frac{\chi_{jm}^J}{\|\chi_{jm}^J\|_\infty}.$$

Очевидно, что $\|\tilde{\chi}_{jm}^J\|_\infty = 1$ и все функции χ_{jm}^J , за исключением χ_{00}^J , являются специальными атомами.

ЛЕММА 5. Пусть отрезок $I = [a, b]$ разделен точками a_i , $a = a_1 < a_2 < \dots < a_d = b$, на интервалы $I^i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, \dots, d-1$. Тогда если функция φ на каждом интервале I^i линейная, $\int_I \varphi(t) dt = 0$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \notin I$, то $\|\varphi\|_{B^1[0,1]} \leq (d-1)\|\varphi\|_\infty |I|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\chi_{jm}^I(t)\}$ – система Хаара на I в нормировке L^1 , $\{\tilde{\chi}_{jm}^I\}$ – ее биортогональная система. Тогда, учитывая, что $\int_I \varphi(t) dt = 0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^j} a_{jm}(\varphi) \chi_{jm}^I(x), \quad a_{jm}(\varphi) = \int_{I_{jm}} \varphi(t) \tilde{\chi}_{jm}^I(t) dt.$$

Поскольку функции χ_{jm}^I являются специальными атомами, достаточно доказать, что $\sum_{j,m} |a_{jm}(\varphi)| \leq (d-1)\|\varphi\|_\infty |I|$. Через τ_{jm} обозначим среднюю точку интервала I_{jm} . Допустим, что $I_{jm} \subset I^i$ для некоторого i . Тогда из линейности функции φ на I^i получим

$$\begin{aligned} |a_{jm}(\varphi)| &= \left| \int_{I_{jm}} (\varphi(t) - \varphi(\tau_{jm})) \tilde{\chi}_{jm}^I(t) dt \right| \leq |\varphi'(\tau_{jm})| \int_{I_{jm}} |t - \tau_{jm}| dt \\ &\leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{|I^i|} \frac{|I_{jm}|^2}{2} \leq 2^{-2j-1} \frac{\|\varphi\|_\infty}{|I^i|} |I|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что при фиксированном j количество индексов m , для которых $I_{jm} \subset I^i$, не превосходит $2^j |I^i|/|I|$, из (7) получим

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_{m: I_{jm} \subset I^i} |a_{jm}(\varphi)| &\leq \sum_i \sum_{j: 2^{-j}|I| \leq |I^i|} 2^{-j-1} \|\varphi\|_\infty |I| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sum_i |I^i| \leq \|\varphi\|_\infty |I|. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае, когда I_{jm} содержит некоторое a_i , имеем простую оценку

$$|a_{jm}| \leq \|\varphi\|_\infty |I_{jm}| = 2^{-j} \|\varphi\|_\infty |I|. \quad (9)$$

Учитывая, что при фиксированном j количество тех m , для которых I_{jm} содержит некоторое a_i , не превосходит $d-2$, из (8), (9) получим

$$\sum_{j,m} |a_{jm}(\varphi)| \leq (d-1)\|\varphi\|_\infty |I|.$$

Лемма доказана.

Для доказательства следующей леммы согласно работе [8] определим функции $\{N_{n,i}\}_{i=0}^n$, которые образуют базис в S_n . Если τ_i^n – простой узел в $\mathcal{T}_n$, т. е. $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$, то $N_{n,i}$ – единственным образом определяемая кусочно линейная непрерывная функция с условиями $N_{n,i}(\tau_k^n) = \delta_{i,k}$. Если $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, то $N_{n,i-1}, N_{n,i}$ – единственные кусочно линейные функции, которые непрерывны и равны нулю во всех точках τ_j^n , $j \neq i-1, i$, непрерывны слева в точке $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$ и удовлетворяют условиям $N_{n,i-1}(\tau_{i-1}^n) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \tau_{i-1}^n+} N_{n,i-1}(t) = 0$, $N_{n,i}(\tau_i^n) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \tau_i^n+} N_{n,i}(t) = 1$. Условие $f_n \perp S_{n+1}$ равносильно

$$\int_0^1 f_n(t) N_{n-1,i}(t) dt = (f_n, N_{n-1,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

ЛЕММА 6. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любого n

$$\|f_n\|_1 \sim_\gamma \|f_n\|_{B^1[0,1]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\|f_0\|_1 = 1 = \|f_0\|_{B^1[0,1]}$. Поэтому рассмотрим $n \geq 1$. При фиксированном n для $i = 0, 1, \dots, n$ обозначим $N_i = N_{n,i}$, $N_i^- = N_i \chi_{(\tau_{i-1}^n, \tau_i^n]}$, $N_i^+ = N_i \chi_{(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]}$, полагая $N_0^- \equiv 0$ и $N_n^+ \equiv 0$. Заметим, что если $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, то $N_{i-1}^- = N_{i-1}$, $N_{i-1}^+ \equiv 0$ и $N_i^- \equiv 0$, $N_i^+ = N_i$.

Очевидно, что $f_n(t) = \sum_{i=0}^n a_i N_{n,i}(t)$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{2}{3} a_0 N_0 + \frac{1}{3} a_1 N_1^-, & \psi_n &= \frac{1}{3} a_{n-1} N_{n-1}^+ + \frac{2}{3} N_n, \\ \psi_i &= \frac{1}{3} a_{i-1} N_{i-1}^+ + \frac{2}{3} a_i N_i + \frac{1}{3} a_{i+1} N_{i+1}^-, & 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что $N_i = N_i^- + N_i^+$, из (10) получим

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t).$$

Обозначим $L_i = \text{supp } N_i$. Напомним, что $\text{supp } N_i = [\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n]$ для $1 \leq i \leq n-1$, $\text{supp } N_0 = [\tau_0^n, \tau_1^n]$ и $\text{supp } N_n = [\tau_{n-1}^n, \tau_n^n]$.

Допустим, что $t_n = \tau_{i_0}^n$. Тогда если $i \leq i_0 - 2$, то $N_i = N_{n-1,i}$ и $N_{i_0-1}^- = N_{n-1,i_0-1} \chi_{(\tau_{i_0-2}^n, \tau_{i_0-1}^n]}$. Нетрудно получить, что

$$\int_0^1 \psi_i(t) dt = \int_0^1 f_n(t) N_{n-1,i}(t) dt = 0, \quad i \leq i_0 - 2. \quad (11)$$

Применяя лемму 5 к функции ψ_i , из (11) получим

$$\|\psi_i\|_{B^1[0,1]} \leq 2 \|\psi_i\|_\infty |L_i|, \quad i \leq i_0 - 2. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что для $i \geq i_0 + 2$ имеем $N_i = N_{n-1,i-1}$. Аналогично соотношению (12) получим

$$\|\psi_i\|_{B^1[0,1]} \leq 2 \|\psi_i\|_\infty |L_i|, \quad i \geq i_0 + 2. \quad (13)$$

Заметим, что из сильной регулярности по парам следует

$$\sum_{|i-i_0| \geq 2} \|\psi_i\|_\infty |L_i| \leq C \left(\int_0^{\tau_{i_0-1}^n} |f_n(t)| dt + \int_{\tau_{i_0+1}^n}^1 |f_n(t)| dt \right) \leq C \|f_n\|_1. \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует

$$\sum_{|i-i_0| \geq 2} \|\psi_i\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma \|f_n\|_1.$$

Для завершения доказательства достаточно проверить, что

$$\left\| \sum_{|i-i_0| \leq 1} \psi_i \right\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma \|f_n\|_1. \quad (15)$$

Обозначим $\psi = \sum_{|i-i_0| \leq 1} \psi_i$. Тогда $\text{supp } \psi = [\tau_{i_0-2}^n, \tau_{i_0+2}^n]$. Учитывая, что последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам, получим $|\text{supp } \psi| \sim \Delta_n$. Отсюда и из (4) с применением леммы 5 получим

$$\|\psi\|_{B^1[0,1]} \leq 4\|\psi\|_\infty |\text{supp } \psi| \leq C_\gamma \|f_n\|_\infty |\Delta_n| \leq C_\gamma |\Delta_n|^{1/2} \leq C_\gamma \|f_n\|_1.$$

Неравенство (15) доказано. Этим завершается доказательство леммы.

ЛЕММА 7. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любого специального атома ϕ и любого n выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k(\phi) f_k \right\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы в основном следуем схеме доказательства леммы 5.2 из работы [8]. Многие обозначения повторяют обозначения из доказательства леммы 6.

Для фиксированного n обозначим

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^n a_k(\phi) f_k(t). \quad (16)$$

Если $\phi(t) \equiv 1$, то и $\zeta(t) \equiv 1$. Рассмотрим случай, когда

$$\phi(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (\chi_{I^+}(t) - \chi_{I^-}(t)), \quad (17)$$

где $I = (\alpha, \beta)$, $I^+ = (\alpha, \eta)$, $I^- = (\eta, \beta)$ и $\eta = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Тогда $\zeta(t) = \sum_{i=0}^n a_i N_{n,i}(t)$. Аналогично, формулами (10) введем функции ψ_i с носителями в L_i . Пусть $\Delta := (\tau_k^n, \tau_l^n)$ – минимальный интервал с концами из $\mathcal{T}_n$, который содержит (α, β) , т. е. $(\alpha, \beta) \subset \Delta$ и интервалы $(\tau_k^n, \alpha]$, $[\beta, \tau_l^n)$ не содержат точек из $\mathcal{T}_n$.

Аналогично (12)–(14) с применением (5) получим

$$\sum_{i: L_i \cap \Delta = \emptyset} \|\psi_i\|_{B^1[0,1]} \leq 2 \sum_{i: L_i \cap \Delta = \emptyset} \|\psi_i\|_\infty |L_i| \leq 4\|\zeta\|_1 \leq 12\|\phi\|_1 = 12. \quad (18)$$

Необходимо оценить $\|\psi\|_{B^1[0,1]}$, где $\psi = \sum_{i: L_i \cap \Delta \neq \emptyset} \psi_i$. Для этого рассмотрим случаи:

- 1) $l - k \leq 3$;
- 2) $l - k > 3$.

В случаях 1), 2) имеем $\text{supp } \psi = [\tau_{k-1}^n, \tau_{l+1}^n]$ и

$$\int_0^1 \psi(t) dt = \int_{\tau_{k-1}^n}^{\tau_{l+1}^n} \psi(t) dt = 0, \quad (19)$$

поскольку $\psi(t) = \zeta(t) - \sum_{i: L_i \cap \Delta = \emptyset} \psi_i(t)$, $\int \zeta(t) dt = \int \phi(t) dt = 0$ и $\int \psi_i(t) dt = 0$, если $L_i \cap \Delta = \emptyset$.

Случай 1). Носитель $\text{supp } \psi$ является объединением не более четырех интервалов $[\tau_i^n, \tau_{i+2}^n]$, $i = k-1, \dots, l-1$. Поскольку последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с параметром γ , то

$$\max_{i,j \in \{k, \dots, l\}} \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_j^n + \lambda_{j+1}^n} \leq \gamma^3$$

и выполнено

$$|\text{supp } \psi| \sim_\gamma \lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n, \quad i = k, \dots, l. \quad (20)$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=k-1}^{l+1} |a_i|(\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) \leq \sum_{i=0}^n |a_i|(\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n) \sim \|\zeta\|_1 \leq 3\|\phi\|_1 = 3. \quad (21)$$

Из (20), (21) и (10) следует, что

$$\|\psi\|_\infty \sim_\gamma |\text{supp } \psi|^{-1}. \quad (22)$$

Применяя лемму 5, из (22) получим

$$\|\psi\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma.$$

Случай 2). В интервале Δ находятся не менее трех точек из $\mathcal{T}_n$. Поэтому с учетом сильной регулярности по парам последовательности $\mathcal{T}$ получим

$$|\Delta| \sim_\gamma |\text{supp } \psi| \sim_\gamma |I| = (\beta - \alpha) = \|\phi\|_\infty^{-1}. \quad (23)$$

Для получения оценки $\|\psi\|_{B^1[0,1]}$ оценим $\|\bar{\psi} - \phi\|_{B^1[0,1]}$, где $\bar{\psi}(t) = \psi(t) + \psi_{k-1}(t) + \psi_{l+1}(t)$. Для функции $\bar{\psi} - \phi$ имеем

$$\bar{\psi} - \phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin \bar{\Delta} := [\tau_{k-2}^n, \tau_{l+2}^n], \\ \zeta(t) - \phi(t), & \text{если } t \in \Delta. \end{cases} \quad (24)$$

Очевидно,

$$\|\bar{\psi} - \phi\|_\infty \leq 4|I|^{-1}, \quad |\bar{\Delta}| \sim_\gamma |I|. \quad (25)$$

Точки τ_i^n , $i = k-2, k-1, \dots, l+2$, α, η, β занумеруем в возрастающем порядке и обозначим через θ_i . Тогда $\bar{\psi}(t) - \phi(t)$ — линейная функция на (θ_i, θ_{i+1}) .

Пусть $\{\chi_{jm}^{\bar{\Delta}}\}$ — система Хаара на $\bar{\Delta}$ и $\{\tilde{\chi}_{jm}^{\bar{\Delta}}\}$ — биортогональная к ней система. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) - \phi(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^j} c_{jm} \chi_{jm}^{\bar{\Delta}}(t), \quad c_{jm} = \int_{\Delta} (\bar{\psi}(t) - \phi(t)) \tilde{\chi}_{jm}^{\bar{\Delta}}(t) dt, \\ \|\bar{\psi} - \phi\|_{B^1[0,1]} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^j} |c_{jm}|. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим $\mathcal{N}_j = \{m: \bar{\Delta}_{jm} \subset (\theta_i, \theta_{i+1}) \text{ для некоторого } i\}$. Тогда аналогично соотношению (8) получим (см. также (25), (23))

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_{m \in \mathcal{N}_j} |c_{jm}| &\leq \sum_i \sum_{j: 2^{-j}|\bar{\Delta}| \leq (\theta_{i+1} - \theta_i)} \sum_{m: \bar{\Delta}_{jm} \subset (\theta_i, \theta_{i+1})} \frac{\|\bar{\psi} - \phi\|_\infty}{\theta_{i+1} - \theta_i} \frac{|\bar{\Delta}_{jm}|^2}{2} \\ &\leq C_\gamma \sum_i \sum_{j: 2^{-j}|\bar{\Delta}| \leq (\theta_{i+1} - \theta_i)} 2^{-j} \leq C_\gamma \sum_i \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{|\bar{\Delta}|} \leq C_\gamma. \end{aligned} \quad (27)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &= \{1, 2, \dots, 2^j\} \setminus \mathcal{N}_j, \\ \mathcal{M}_j^1 &= \{m \in \mathcal{M}_j: \bar{\Delta}_{jm} \ni \tau_{k-1}^n\}, \quad \mathcal{M}_j^2 = \{m \in \mathcal{M}_j: \bar{\Delta}_{jm} \subset [\tau_{k-1}^n, \eta]\}, \\ \mathcal{M}_j^3 &= \{m \in \mathcal{M}_j: \bar{\Delta}_{jm} \ni \eta\}, \quad \mathcal{M}_j^4 = \{m \in \mathcal{M}_j: \bar{\Delta}_{jm} \subset [\eta, \tau_{l+1}^n]\}, \\ \mathcal{M}_j^5 &= \{m \in \mathcal{M}_j: \bar{\Delta}_{jm} \ni \tau_{l+1}^n\}. \end{aligned}$$

Для $m \in \mathcal{M}_j^2$ с применением соотношений (6), (16), (24) получим

$$\begin{aligned} |c_{jm}| &\leq \int_{\bar{\Delta}_{jm}} |\bar{\psi}(t) - \phi(t)| dt \leq \frac{|\bar{\Delta}|}{2^j} \max_{t \in \bar{\Delta}_{jm}} |\bar{\psi}(t) - \phi(t)| \\ &\leq \frac{|\bar{\Delta}|}{2^j} \max_{t \in \bar{\Delta}_{jm}} \int_0^1 |\phi(t) - \phi(x)| |K_n(x, t)| dx \\ &\leq C_\gamma \frac{|\bar{\Delta}|}{2^j |I|} \max_{t \in \bar{\Delta}_{jm}} \int_{[\alpha, \eta]^c} |K_n(x, t)| dx \leq \frac{C_\gamma}{2^j} q^{d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \alpha) \wedge d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \eta)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Заметим, что при фиксированном j для $m \in \mathcal{M}_j^2$ числа $d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \alpha)$ не могут повторяться. Также не могут повторяться числа $d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \eta)$. Следовательно, выражение $d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \alpha) \wedge d_n(\bar{\Delta}_{jm}, \eta)$ может принимать не более двух раз каждое натуральное значение. Поэтому из (28) следует

$$\sum_j \sum_{m \in \mathcal{M}_j^2} |c_{jm}| \leq C_\gamma \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \sum_{\nu \geq 1} q^\nu \leq C_\gamma. \quad (29)$$

Аналогично получим

$$\sum_j \sum_{m \in \mathcal{M}_j^4} |c_{jm}| \leq C_\gamma. \quad (30)$$

Для $m \in \mathcal{M}_j^1$ из (25) имеем

$$|c_{jm}| \leq |\bar{\Delta}_{jm}| \|\bar{\psi} - \phi\|_\infty \leq 2^{-j} C_\gamma. \quad (31)$$

Ясно, что при фиксированном j множество $\mathcal{M}_j^1$ или пусто, или содержит один элемент. Поэтому из (31) получим

$$\sum_j \sum_{m \in \mathcal{M}_j^1} |c_{jm}| \leq C_\gamma. \quad (32)$$

Аналогично имеем

$$\sum_j \sum_{m \in \mathcal{M}_j^3} |c_{jm}| \leq C_\gamma, \quad \sum_j \sum_{m \in \mathcal{M}_j^5} |c_{jm}| \leq C_\gamma. \quad (33)$$

Из (29), (30), (27), (32), (33) и (26) следует $\|\psi\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда существует постоянная C_γ такая, что для любого специального атома ϕ выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\phi(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (\chi_{I^+}(t) - \chi_{I^-}(t)),$$

где $I = (\alpha, \beta)$, $I^+ = (\alpha, \eta)$, $I^- = (\eta, \beta)$ и $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Для доказательства леммы сумму в (34) разобьем на части.

1. Рассмотрим такие n , для которых $\mathcal{T}_n \cap I = \emptyset$. Обозначим $n_1 = \min\{n : \mathcal{T}_n \cap I \neq \emptyset\}$, $I_1 = [0, 1]$. Интервалы $I_j \in \mathcal{I}$, $j = 1, \dots, m$, выбираются следующим образом: I_{j+1} – наибольший интервал из $\mathcal{I}$, который содержит I , содержится в I_j и не равен I_j . Интервал I_m является наименьшим интервалом из $\mathcal{I}$, который содержит I . Напомним, что $D_{I_j} = \{n : f_n \text{ линейна на } I_j\}$. Тогда для $n \in D_{I_j}$ с учетом (1) имеем

$$\begin{aligned} |a_n(\phi)| &= \left| \int_I f_n(t) \phi(t) dt \right| = \left| \int_I (f_n(t) - f_n(\eta)) \phi(t) dt \right| \leq |I|^{-1} \int_I |f'(\eta)| |t - \eta| dt \\ &\leq C |I|^{-1} |I|^2 \frac{|f_n(\eta)|}{|I_j|} \leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|} q^{d_n(\eta)} \frac{|\Delta_n|^{1/2}}{|I_j| + \rho(I_j, \Delta_n) + |\Delta_n|}. \end{aligned}$$

Поэтому из (4) получаем

$$|a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|} q^{d_n(\eta)} \frac{|\Delta_n|}{|I_j| + \rho(I_j, \Delta_n) + |\Delta_n|}.$$

Следовательно, применяя лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in D_{I_j}} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 &\leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|} \sum_{n \in D_{I_j}} q^{d_n(\eta)} \frac{|\Delta_n|}{|I_j| + \rho(I_j, \Delta_n) + |\Delta_n|} \\ &\leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|} \sum_k q^k \sum_{n \in D_{I_j}, d_n(\eta)=k} \frac{|\Delta_n|}{|I_j| + \rho(I_j, \Delta_n) + |\Delta_n|} \\ &\leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|} \sum_k q^k (k+1) \leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_j|}. \end{aligned}$$

С учетом сильной регулярности разбиения $\mathcal{T}$ и выбора интервалов I_j получим

$$\sum_{n < n_1} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 = \sum_j \sum_{n \in D_{I_j}} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma |I| \sum_{n \in D_{I_j}} \frac{1}{|I_j|} \leq C_\gamma.$$

2. Рассмотрим такие n , для которых $\overline{\overline{\mathcal{T}_n \cap I}} = 1$. Обозначим $n_2 = \min\{n : \overline{\overline{\mathcal{T}_n \cap I}} = 2\}$. Пусть $\tau \in \mathcal{T}_n \cap I$. Для рассматриваемых n через $I_{n,\tau}^-$ и $I_{n,\tau}^+$ обозначим соответственно те интервалы из $\mathcal{T}_n$, для которых τ служит правым или

левым концом. Поскольку последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и интервалы $I_{n,\tau}^+$, $I_{n,\tau}^-$ не содержатся в I , то

$$|I_{n,\tau}^-| \sim_\gamma |I_{n,\tau}^+|, \quad |I_{n,\tau}^-| + |I_{n,\tau}^+| \geq |I|,$$

$$|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,\tau}^+) + |I_{n,\tau}^+| \sim_\gamma |\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,\tau}^-) + |I_{n,\tau}^-|.$$

Следовательно, учитывая, что $\int_I \phi(t) dt = 0$, получим

$$\begin{aligned} |a_n(\phi)| &= \left| \int_I \phi(t)(f_n(t) - f_n(\tau)) dt \right| \\ &\leq |I|^{-1} \left(\int_{I \cap I_{n,\tau}^-} |f_n(t) - f_n(\tau)| dt + \int_{I \cap I_{n,\tau}^+} |f_n(t) - f_n(\tau)| dt \right) \\ &= |I|^{-1} \left(\frac{|f_n(\tau)|}{|I_{n,\tau}^-|} \int_{I \cap I_{n,\tau}^-} |t - \tau| dt + \frac{|f_n(\tau)|}{|I_{n,\tau}^+|} \int_{I \cap I_{n,\tau}^+} |t - \tau| dt \right) \leq C_\gamma |I| \frac{|f_n(\tau)|}{|I_{n,\tau}^+|}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1) имеем

$$|a_n(\phi)| \leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_{n,\tau}^+|} \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{d_n(\tau)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,\tau}^+) + |I_{n,\tau}^+|}. \quad (35)$$

Учитывая (4), из (35) получим

$$|a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \frac{|I|}{|I_{n,\tau}^+|} \frac{|\Delta_n| q^{d_n(\tau)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,\tau}^+) + |I_{n,\tau}^+|}. \quad (36)$$

Через $I_{n,\tau}^+$ обозначим те из интервалов $I_{n,\tau}^+$, которые не повторяются, т.е. $I_{n,\tau}^+ = I_{n^i,\tau}^+$ для любого из рассматриваемых n при некотором i , $I_{n^{i+1},\tau}^+ \subset I_{n^i,\tau}^+$ и $I_{n^{i+1},\tau}^+ \neq I_{n^i,\tau}^+$. Тогда из (36) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \leq n < n_2} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \\ \leq C_\gamma |I| \sum_i \frac{1}{|I_{n^i,\tau}^+|} \sum_k q^k \sum_{n: d_n(\tau)=k} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n^i,\tau}^+) + |I_{n^i,\tau}^+|}. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая, что последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная, $I_{n^{i+1},\tau}^+ \subset I_{n^i,\tau}^+$ и $I_{n^{i+1},\tau}^+ \neq I_{n^i,\tau}^+$, из неравенства (37) с применением леммы 3 имеем

$$\sum_{n_1 \leq n < n_2} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma |I| \sum_i \frac{1}{|I_{n^i,\tau}^+|} \sum_k q^k (k+1) \leq C_\gamma |I| \sum_i \frac{1}{|I_{n^i,\tau}^+|} \leq C_\gamma. \quad (38)$$

3. Если для n выполняется $\overline{\overline{\mathcal{T}_n \cap I}} \geq 2$, то возможны следующие случаи:

1) Δ_n левее α ;	4) $\beta \in \Delta_n$;
2) Δ_n правее β ;	5) $\eta \in \Delta_n$;
3) $\alpha \in \Delta_n$;	6) $\Delta_n \subset (\alpha, \eta)$;
	7) $\Delta_n \subset (\eta, \beta)$.

В случае 1) через U_n обозначим интервал линейности функции f_n , который содержит точку α . Тогда из (3) и (1) следует

$$|a_n(\phi)| \leq C|I|^{-1} \int_{U_n} |f_n(t)| dt \leq C|I|^{-1} |U_n| \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{d_n(U_n)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, U_n) + |U_n|}. \quad (39)$$

Из соотношений (39) и (4) получаем

$$|a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C \frac{|U_n|}{|I|} q^{d_n(U_n)} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, U_n) + |U_n|}. \quad (40)$$

Интервалы U_n вложены. Через U_{n_m} обозначим неповторяющиеся из них, т. е. $U_{n_{m+1}} \subset U_{n_m}$, $U_{n_{m+1}} \neq U_{n_m}$ и для любого U_n существует такое U_{n_m} , что $U_n = U_{n_m}$. Тогда из (40) с применением лемм 3, 4 получим

$$\begin{aligned} \sum_n |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 &\leq \frac{C}{|I|} \sum_m |U_{n_m}| \sum_k q^k \sum_{n: d_n(U_{n_m})=k} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, U_{n_m}) + |U_n|} \\ &\leq \frac{C_\gamma}{|I|} \sum_m |U_{n_m}| \sum_k q^k (k+1) \leq \frac{C_\gamma}{|I|} \sum_m |U_{n_m}| \leq C_\gamma. \end{aligned}$$

Случай 2) доказывается аналогично случаю 1).

В случае 3) из неравенства (3) имеем

$$|a_n(\phi)| \leq C_\gamma |I|^{-1} |\Delta_n|^{1/2}, \quad |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma |I|^{-1} |\Delta_n|.$$

Отсюда с применением леммы 4 получим

$$\sum_{n: \alpha \in \Delta_n} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \sum_{n: \alpha \in \Delta_n} |I|^{-1} |\Delta_n| \leq C_\gamma.$$

Случаи 4) и 5) доказываются аналогично случаю 3).

В случае 6) имеем

$$\begin{aligned} |a_n(\phi)| &= |I|^{-1} \left(\int_\alpha^\eta f_n(t) dt - \int_\eta^\beta f_n(t) dt \right) \\ &= |I|^{-1} \left(- \int_{[0,1] \setminus [\alpha, \eta]} f_n(t) dt - \int_\eta^\beta f_n(t) dt \right) \\ &= |I|^{-1} \left(- \int_0^\alpha f_n(t) dt - \int_\eta^1 f_n(t) dt - \int_\eta^\beta f_n(t) dt \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Через (α_n, η_n) обозначим объединение интервалов линейности функции f_n , находящихся в (α, η) . Пусть U_n^+ – первый слева от α_n интервал линейности функции f_n , а U_n^- – первый справа от η_n . Тогда из равенства (41) с применением (2) и (3) получим

$$|a_n(\phi)| \leq C_\gamma |I|^{-1} \left(\int_{U_n^+} |f_n(t)| dt + \int_{U_n^-} |f_n(t)| dt \right) =: a_n^+ + a_n^-.$$

Оценим $\sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha, \eta)} a_n^+ \|f_n\|_1$. Интервалы U_n^+ вложены. Через $U_{n_m}^+$ обозначим неповторяющиеся из них, т. е. $U_{n_{m+1}}^+ \subset U_{n_m}^+$, $U_{n_{m+1}}^+ \neq U_{n_m}^+$ и для любого U_n^+

существует такое $U_{n_m}^+$, что $U_n^+ = U_{n_m}^+$. Тогда с применением (1) и лемм 3, 4 получим

$$\begin{aligned} \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha, \eta)} a_n^+ \|f_n\|_1 &\leq C_\gamma |I|^{-1} \sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha, \eta)} |U_n^+| q^{d_n(U_n^+)} \frac{|\Delta_n|}{|U_n^+| + \rho(\Delta_n, U_n^+) + |\Delta_n|} \\ &\leq C_\gamma |I|^{-1} \sum_m |U_{n_m}^+| \sum_k q^k \sum_{\substack{n: d_n(U_n^+) = k \\ U_n^+ = U_{n_m}^+}} \frac{|\Delta_n|}{|U_n^+| + \rho(\Delta_n, U_n^+) + |\Delta_n|} \\ &\leq C_\gamma |I|^{-1} \sum_m |U_{n_m}^+| \sum_k q^k (k+1) \leq C_\gamma. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha, \eta)} a_n^- \|f_n\|_1 \leq C_\gamma.$$

Следовательно,

$$\sum_{n: \Delta_n \subset (\alpha, \eta)} |a_n(\phi)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma.$$

Случай 7) доказывается аналогично случаю 6).

Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Для допустимой последовательности $\mathcal{T}$ и $n \geq 4$ обозначим

$$\sigma_n = \max_{1 \leq i \leq n-2} \max \left\{ \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}, \frac{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n} \right\}.$$

В работе [8] (см. [8, доказательство леммы 5.1] или [12, доказательство леммы 5.2]) доказано существование специального атома ϕ такого, что

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k(\phi) f_k \right\|_{H^1[0,1]} \geq C \ln \sigma_n. \quad (42)$$

Учитывая неравенство $\|f\|_{B^1[0,1]} \geq \|f\|_{H^1[0,1]}$, из (42) получаем, что если последовательность $\mathcal{T}$ не является сильно регулярной по парам, то соответствующая общая система Франклина не является базисом в $B^1[0, 1]$.

Достаточность. Сначала убедимся в том, что при любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$ общая система Франклина $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$ полна в $B^1[0, 1]$. Действительно, пусть специальный атом ϕ определен формулой (17) и ε – любое положительное число. Пусть числа $\alpha_i, \eta_i, \beta_i \in \mathcal{T}$ выбраны так, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq \alpha < \alpha_2 < \alpha_3, & \alpha_2 - \alpha_1 &< \varepsilon, & \frac{\varepsilon}{2} &< \alpha_3 - \alpha_2 < \varepsilon, \\ \eta_1 &\leq \eta < \eta_2 < \eta_3, & \eta_2 - \eta_1 &< \varepsilon, & \frac{\varepsilon}{2} &< \eta_3 - \eta_2 < \varepsilon, \\ \beta_1 &< \beta_2 < \beta < \beta_3, & \beta_3 - \beta_2 &< \varepsilon, & \frac{\varepsilon}{2} &< \beta_2 - \beta_1 < \varepsilon. \end{aligned} \quad (43)$$

Определим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \alpha_1], \\ |I|^{-1}, & \text{если } t \in [\alpha_2, \eta_1], \\ -|I|^{-1}, & \text{если } t \in [\eta_2, \beta_2], \\ 0, & \text{если } t \in [\beta_3, 1], \end{cases} \quad (44)$$

которая линейна на отрезках $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\eta_1, \eta_2]$, $[\beta_2, \beta_3]$. Тогда функция $\psi(t) - \phi(t)$ кусочно линейная и

$$\psi(t) - \phi(t) = 0, \quad t \in [0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, \eta_1] \cup [\eta_2, \beta_2] \cup [\beta_3, 1]. \quad (45)$$

Пусть $\alpha_4 \in (\alpha_2, \alpha_3) \cap \mathcal{T}$. Теперь введем функцию

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \alpha_2] \cup [\alpha_3, 1], \\ 1, & \text{если } t = \alpha_4, \end{cases}$$

которая линейна на отрезках $[\alpha_2, \alpha_4]$, $[\alpha_4, \alpha_3]$. Из (43), (44) следует существование такого числа ω_1 , что

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} (\psi(t) - \phi(t) + \omega_1 \psi_\alpha(t)) dt = 0, \quad |\omega_1| \leq 2|I|^{-1}. \quad (46)$$

Из соотношений (46) и (44) с применением леммы 5 получим

$$\|\psi + \omega_1 \psi_\alpha - \phi\|_{B^1[\alpha_1, \alpha_3]} < C\varepsilon|I|^{-1}. \quad (47)$$

Аналогично выберем функции ψ_η , ψ_β и числа ω_2 , ω_3 так, чтобы

$$\|\psi + \omega_2 \psi_\eta - \phi\|_{B^1[\eta_1, \eta_3]} < C\varepsilon|I|^{-1}, \quad (48)$$

$$\|\psi + \omega_3 \psi_\beta - \phi\|_{B^1[\beta_1, \beta_3]} < C\varepsilon|I|^{-1}. \quad (49)$$

Очевидно, $\bar{\psi} = \psi + \omega_1 \psi_\alpha + \omega_2 \psi_\eta + \omega_3 \psi_\beta \in S_n$ при некотором n . Из (45)–(49) следует, что $\|\bar{\psi} - \phi\|_{B^1[0, 1]} < C\varepsilon|I|^{-1}$. Таким образом, система $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$ полна в $B^1[0, 1]$.

Теперь пусть $\mathcal{T}$ – сильно регулярная по парам с параметром γ последовательность и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Докажем, что если $f \in B^1[0, 1]$, $\|f\|_{B^1[0, 1]} = 1$, и $\sum_{k=0}^\infty a_k(f) f_k(t)$ – ряд Фурье функции f , то для любого n выполняется

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k(f) f_k(t) \right\|_{B^1[0, 1]} \leq C_\gamma. \quad (50)$$

Допустим, что специальные атомы ϕ_m выбраны так, чтобы

$$f = \sum_{m=1}^\infty c_m \phi_m, \quad \sum_{m=1}^\infty |c_m| \leq 2. \quad (51)$$

Для фиксированного n выберем такое M , чтобы выполнялось

$$\sum_{m=M+1}^\infty |c_m| < \left(n \max_{1 \leq k \leq n} \|f_k\|_\infty \right)^{-1}. \quad (52)$$

Положим $\tilde{\phi} = \sum_{m=1}^M c_m \phi_m$. Из (52) следует, что

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{\phi}\|_1 &\leq \left(n \max_{1 \leq k \leq n} \|f_k\|_\infty \right)^{-1}, \\ |a_k(f) - a_k(\tilde{\phi})| &\leq \|f - \tilde{\phi}\|_1 \|f_k\|_\infty < \frac{1}{n}, \quad k \leq n. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя леммы 7, 6 и соотношения (51), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^n a_k(f) f_k(t) \right\|_{B^1[0,1]} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n (a_k(f) - a_k(\tilde{\phi})) f_k(t) \right\|_{B^1[0,1]} + \left\| \sum_{k=0}^n a_k(\tilde{\phi}) f_k(t) \right\|_{B^1[0,1]} \\ &\leq \frac{C_\gamma}{n} \sum_{k=0}^n \|f_k\|_1 + C_\gamma \sum_{m=1}^M |c_m| \leq C_\gamma. \end{aligned}$$

Соотношение (50) доказано. Этим завершается доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость. Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – безусловный базис в пространстве $B^1[0, 1]$. Тогда по теореме 1 последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная по парам с некоторым параметром γ . Тогда при любом специальном атоме ϕ его ряд Фурье–Франклина должен безусловно сходиться в $B^1[0, 1]$, а следовательно, и в $L^1[0, 1]$. Поэтому должна существовать такая постоянная C_γ , что для любого специального атома ϕ выполняется

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^\infty a_n^2(\phi) f_n^2(t) \right)^{1/2} dt \leq C_\gamma. \quad (53)$$

В работе [8] (см. [8, свойство 4.3]) доказано, что из (53) следует

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_n(\phi) f_n(t) \right| dt \leq C_\gamma \quad (54)$$

для любого специального атома ϕ . В той же работе доказано (см. [8, свойство 4.6]), что если последовательность $\mathcal{T}$ является сильно регулярной по парам и не является сильно регулярной, то

$$\sup_\phi \left\| \sup_{n \geq 0} |a_n(\phi) f_n| \right\|_1 = \infty, \quad (55)$$

где супремум берется по специальным атомам. Соотношение (55) противоречит неравенству (54). Следовательно, последовательность $\mathcal{T}$ должна быть сильно регулярной.

Достаточность. Пусть $\mathcal{T}$ – сильно регулярная последовательность с параметром γ , $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – соответствующая ей общая система Франклина и $f \in B^1[0, 1]$. Допустим, что специальные атомы ϕ_m и числа c_m выбраны так, чтобы

$$f = \sum_{m=1}^\infty c_m \phi_m, \quad \sum_{m=1}^\infty |c_m| \leq 2 \|f\|_{B^1[0,1]}.$$

Тогда из очевидного неравенства $|a_n(f)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| |a_n(\phi_m)|$ и леммы 8 имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| |a_n(\phi_m)| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| \leq C_\gamma \|f\|_{B^1[0,1]}. \quad (56)$$

Из (56) и леммы 6 получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)| \|f_n\|_{B^1[0,1]} \leq C_\gamma \|f\|_{B^1[0,1]}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) f_n$ безусловно сходится в $B^1[0, 1]$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 9. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ , $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая ей общая система Франклина. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ безусловно сходится в $B^1[0, 1]$, если и только если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \times \|f_n\|_1 < \infty$.

В случае, когда $\mathcal{T}$ – диадическая последовательность, т. е. когда $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Франклина, теорема 9 доказана П. Войташчиком [14].

В [15] доказано (см. [15, формула (15)]), что если $f \in BV$ и $\{\chi_{jm}\}$ – система Хаара на $[0, 1]$ в нормировке L^1 , то $\sum_{m=1}^{2^j} |a_{jm}(f)| \leq 3 \cdot 2^{-j-1} V(f)$. Следовательно, $BV \subset B^1[0, 1]$, и из теоремы 9 следует

ТЕОРЕМА 10. Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ , $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая ей общая система Франклина и $f \in BV$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \leq C_\gamma V(f).$$

Теорема 10 другим методом доказана в работе [16].

Нетрудно заметить, что сумма ряда $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \chi_{j3}(x)$ принадлежит $B^1[0, 1]$ и не имеет ограниченную вариацию. Следовательно, $B^1[0, 1] \not\subset BV$. Поэтому теорема 9 не следует из теоремы 10.

Список литературы

1. G. S. De Souza, “Spaces formed by special atoms. I”, *Rocky Mountain J. Math.*, **14**:2 (1984), 423–432.
2. G. S. De Souza, *Spaces formed by special atoms*, Ph. D. Dissertation, SUNY at Albany, New York, 1980.
3. R. R. Coifman, “A real variable characterization of H^p ”, *Studia Math.*, **51** (1974), 269–274.
4. G. S. De Souza, G. Sampson, “A real characterization of the pre-dual of Bloch functions”, *J. London Math. Soc.* (2), **27**:2 (1983), 267–276.
5. Z. Ciesielski, A. Kamont, “Projections onto piecewise linear functions”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **25** (1997), 129–143.

6. К. А. Керян, М. П. Погосян, “Общая периодическая система Франклина как базис $H^1[0, 1]$ ”, *Изв. НАН Армении: Математика*, **40**:1 (2005), 61–84; англ. пер.: М. Р. Pogosyan, К. А. Keryan, “General Franklin periodic system as a basis in $H^1[0, 1]$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**:1 (2005), 56–79.
7. Ph. Franklin, “A set of continuous orthogonal functions”, *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 522–529.
8. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “General Franklin systems as bases in $H^1[0, 1]$ ”, *Studia Math.*, **167**:3 (2005), 259–292.
9. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **164**:2 (2004), 161–204.
10. К. А. Керян, “Безусловная базисность общей периодической системы Франклина в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Изв. НАН Армении: Математика*, **40**:1 (2005), 18–60; англ. пер.: К. А. Keryan, “The unconditional basis property of Franklin general periodic system in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **40**:1 (2005), 15–55.
11. S. V. Bochkarev, “Some inequalities for Franklin series”, *Anal. Math.*, **1**:4 (1975), 249–257.
12. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “On general Franklin systems”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **374**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1998, 59 pp.
13. Z. Ciesielski, “Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots”, *Function spaces* (Poznań, 1998), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **213**, Dekker, New York, 2000, 133–140.
14. P. Wojtaszczyk, “Two remarks on the Franklin system”, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **29**:3 (1986), 329–333.
15. П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
16. Г. Г. Геворкян, “Об абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина”, *Изв. НАН Армении: Математика*, **49**:2 (2014), 3–22.

ГЕГАМ ГРИГОРЬЕВИЧ ГЕВОРКЯН
 (GEGHAM G. GEVORKYAN)
 Ереванский государственный университет
 E-mail: ggg@ysu.am

Поступило в редакцию
 09.10.2013
 04.04.2014