Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, О численно плюри-
канонических циклических накрытиях, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 143–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:59:30

УДК 512.7

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов

О численно плюриканонических циклических накрытиях

Исследуются некоторые свойства циклических накрытий $f: Y \rightarrow X$ комплексной поверхности X общего типа, разветвленных вдоль гладких кривых $B \subset X$, численно эквивалентных кратному каноническому классу поверхности X . Основные результаты относятся к накрытиям поверхностей с $p_g = 0$ и поверхностей Мияоки–Яу; в частности, эти накрытия дают новые примеры многокомпонентных пространств модулей поверхностей с фиксированными числами Черна и новые примеры поверхностей, не являющихся деформационно эквивалентными поверхностям, полученным из них при замене комплексной структуры на сопряженную.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: численно плюриканонические циклические накрытия поверхностей, неприводимые компоненты пространства модулей поверхностей.

DOI: 10.4213/im8175

Введение

Данная статья посвящена исследованию некоторых свойств циклических накрытий алгебраических поверхностей. Прежде всего напомним, что существует два эквивалентных подхода к определению и исследованию разветвленных накрытий. Один из них основан на теореме Грауэрта–Реммерта–Штейна, которая утверждает, что накрытие однозначно определяется своей неразветвленной частью; в частности, если накрываемое многообразие неособо, то множество ветвления либо пусто, либо является дивизором и каждое конечное неразветвленное накрытие дополнения к дивизору продолжается однозначно до разветвленного накрытия с нормальным накрывающим многообразием. Другой, также традиционный, подход, которому мы отдаем предпочтение в данной статье, основан на канонической эквивалентности между конечными разветвленными накрытиями заданного неособого (или нормального) многообразия X и конечными расширениями его поля рациональных функций $\mathbb{C}(X)$. Разветвленное накрытие называется *накрытием Галуа*, если это расширение полей является расширением Галуа, и накрытие называется *циклическим*, если группа Галуа является циклической группой.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 11-01-00185), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-2998.2014.1) и Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ по гранту Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0023). Работа второго автора выполнена при поддержке гранта ANR-09-BLAN-0039-01 Французского национального агентства научных исследований.

Таким образом, если задано конечное циклическое накрытие $Y \rightarrow X$, то мы можем говорить о действии конечной циклической группы G на многообразии Y и отождествлять X с фактормногообразием $X = Y/G$. Однако отметим, что, когда мы говорим о циклической группе Галуа и циклическом накрытии, мы не фиксируем изоморфизм между группой Галуа и группой перестановок, действующей на конечном множестве; в частности, назовем два накрытия Галуа $f_1: Y_1 \rightarrow X$ и $f_2: Y_2 \rightarrow X$ *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ такой, что $f_2 \circ \varphi = f_1$ и φ преобразует автоморфизмы Галуа в автоморфизмы Галуа.

Циклические накрытия, которые мы рассматриваем в настоящей статье, являются в некотором смысле специальными. А именно, эти накрытия имеют непустой дивизор ветвления $B \subset X$, и мы далее везде предполагаем, что действие группы Галуа не имеет точек из Y , стабилизатор которых является нетривиальной собственной подгруппой группы Галуа. Мы называем такие накрытия *тотально разветвленными*. (Отметим, что, так как мы рассматриваем только накрытия гладких многообразий X , приведенные выше ограничения также не позволяют действию группы Галуа иметь изолированные неподвижные точки.)

Предположение о том, что накрытие является тотально разветвленным будучи примененным к точкам дивизора ветвления $R \subset Y$, влечет равенство $f^*(B) = dR$, где $d = \deg f$. Более того, циклическое накрытие $f: Y \rightarrow X$ степени d является тотально разветвленным (над X) тогда и только тогда, когда $f^*(B) = dR$ и f не разветвлено над $X \setminus B$. Отметим, что если поверхность X_1 бирационально эквивалентна поверхности X , то циклическое накрытие $f_1: Y_1 \rightarrow X_1$, индуцированное тотально разветвленным циклическим накрытием $f: Y \rightarrow X$, не обязательно является тотально разветвленным над X_1 в случае, когда кривая ветвления $B \subset X$ накрытия f имеет особые точки.

Под *численно кратно-каноническим* циклическим накрытием мы понимаем тотально разветвленное циклическое накрытие, кривая ветвления B которого неособа и численно эквивалентна некоторому кратному канонического класса.

Основные результаты статьи могут быть разделены на три группы.

Во-первых, мы рассматриваем пространство модулей поверхностей с фиксированными квадратом канонического класса K_Y^2 и арифметическим родом $p_a(Y)$ и при условии, что оно содержит поверхности, заданные как d -листные тотально разветвленные численно кратно-канонические циклические накрытия $f: Y \rightarrow X$ некоторой поверхности общего типа X , даем оценку снизу числа компонент связности этого пространства модулей, зависящую от числа элементов в группе кручения $\text{Tor } H^2(X, \mathbb{Z})$ (см. теорему 1, предложение 3, замечание 4 и следствия 3, 4).

Во-вторых, мы исследуем степень канонического отображения $\varphi_{KY}: Y \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$ для поверхностей Y , полученных как двулистные тотально разветвленные численно кратно-канонические циклические накрытия $f: Y \rightarrow X$ поверхности X общего типа с $p_g(X) = 0$ (см. теорему 3, следствие 1 и предложения 4-6).

В-третьих, мы показываем, что если поверхность Мияоки–Яу X (т.е. поверхность общего типа с $c_1^2 = 3c_2$) не имеет антиголоморфных автоморфизмов (таковы, например, ложные проективные плоскости [1]) и если поверхность Z деформационно эквивалентна поверхности Y , заданной как тотально разветвленное численно кратно-каноническое циклическое накрытие $f: Y \rightarrow X$, то Z также не имеет антиголоморфных автоморфизмов (см. теорему 7). Отметим, что наряду с известными примерами (см. [1]–[4]) пар комплексных поверхностей (Z, Z') , которые, будучи диффеоморфными (с сохранением ориентации), не являются деформационно эквивалентными, поверхности Y , о которых идет речь в теореме 7, и комплексно сопряженные им поверхности $\bar{Y}$ дают бесконечные серии новых примеров диффеоморфных, но деформационно неэквивалентных поверхностей. Кроме того, мы доказываем, что те связные компоненты M пространства модулей поверхностей, которые содержат поверхности Y , полученные как двулистные тотально разветвленные численно кратно-канонические циклические накрытия $f: Y \rightarrow X$ поверхности Мияоки–Яу X с кривой ветвления B , численно эквивалентной дивизору $2mK_X$, являются неприводимыми многообразиями комплексной размерности $\dim M = m(2m - 1)K_X^2 + p_g(X)$ и размерности Кодaira $\kappa(M) = -\infty$, более того, если иррегулярность $q(X)$ равна нулю, то M является унитарциональным многообразием (см. теорему 6, а также замечание 6).

Насколько нам известно, в литературе упоминается всего лишь несколько примеров комплексных поверхностей общего типа X с таким нетривиальным действием некоторой группы, которое деформируется одновременно с любой деформацией комплексной структуры (ср. [5]). В качестве следствия из доказательства теоремы 6 нами построены бесконечные серии примеров таких поверхностей с действием группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (см. замечание 7).

§ 1. Тотально разветвленные циклические накрытия: фундаментальные группы и классификация

Напомним, что всякое непрерывное отображение $f: V \rightarrow W$ линейно связанных топологических пространств определяет гомоморфизмы фундаментальных групп $f_*: \pi_1(V, q) \rightarrow \pi_1(W, p)$ для любых пар точек $q \in V$ и $p \in W$ при $q \in f^{-1}(p)$ и что для пар базисных точек (q', p') и (q'', p'') , связанных путями h в V и $f(h)$ в W , эти гомоморфизмы сопряжены гомоморфизмами замены базисной точки β_h и $\beta_{f(h)}$ в том смысле, что $f_*'' \circ \beta_h = \beta_{f(h)} \circ f'_*$. Отметим, что все эти гомоморфизмы f_* индуцируют один и тот же гомоморфизм

$$\begin{aligned} H_1(V, \mathbb{Z}) &\simeq \pi_1(V, q)/[\pi_1(V, q), \pi_1(V, q)] \rightarrow H_1(W, \mathbb{Z}) \\ &\simeq \pi_1(W, p)/[\pi_1(W, p), \pi_1(W, p)] \end{aligned}$$

первых групп гомологий. Далее, когда выбор базисных точек $p \in W$ и $q \in f^{-1}(p)$ фундаментальных групп $\pi_1(W, p)$ и $\pi_1(V, q)$ является несущественным для доказательства утверждений, мы не будем указывать эти точки и будем обозначать фундаментальные группы соответственно через $\pi_1(W)$ и $\pi_1(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – неприводимая гладкая проективная поверхность, $B \subset X$ – неприводимая приведенная гладкая кривая, делимая на d как элемент группы $\text{Pic}(X)$, и пусть $f: Y \rightarrow X$ – d -листное тотально разветвленное вдоль B циклическое накрытие. Если $(B^2)_X > 0$, то гомоморфизм $f_*: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ фундаментальных групп, индуцированный накрытием f , является изоморфизмом.

ЛЕММА 1. Пусть B – неприводимая приведенная гладкая кривая, лежащая на неприводимой гладкой проективной поверхности X . Если $(B^2)_X > 0$, то ядро K эпиморфизма $\pi_1(X \setminus B) \rightarrow \pi_1(X)$ является циклической группой и содержится в центре группы $\pi_1(X \setminus B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \subset X$ – замыкание трубчатой окрестности кривой B . В этом случае на N имеется структура локально тривиального C^∞ -расслоения над B со слоем $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Если мы удалим один слой этого расслоения (скажем, над точкой $b \in B$), то получим тривиальное расслоение $N_0 \simeq D \times B_0$ над $B_0 = B \setminus \{b\}$. Рассмотрим сечение $B_1 = B_0 \times \{z = 1\}$ этого расслоения и выберем точку $p \in B_1$.

Пусть $\gamma \in G = \pi_1(X \setminus B, p)$ – элемент, представленный петлей ∂D , где ∂D – граница содержащего точку p слоя расслоения $N \rightarrow B$. Имеем точную последовательность групп

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \pi_1(X, p) \rightarrow 1, \quad (1)$$

где K – нормальное замыкание элемента γ в группе G .

Согласно варианту Нори слабой теоремы Лефшеца (см. [6, предложение 3.27]) группа K является конечно порожденной абелевой группой и ее централизатор $C(K)$ в G является подгруппой конечного индекса.

С другой стороны, имеем $\pi_1(N_0 \setminus B_0, p) = \pi_1(B_1, p) \times \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Применяя еще раз вариант Нори слабой теоремы Лефшеца (см. [6, предложение 3.26]), получаем, что вложение $i: B \hookrightarrow X$ индуцирует эпиморфизм $i_*: \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(X)$. Следовательно, элементы группы $\pi_1(B_1, p)$ порождают группу $\pi_1(X, p)$, и вложение $N_0 \setminus B_0 \hookrightarrow X \setminus B$ индуцирует эпиморфизм

$$\pi_1(N_0 \setminus B_0, p) = \pi_1(B_1, p) \times \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \pi_1(X \setminus B, p).$$

В этом случае нормальное замыкание K элемента γ в группе $\pi_1(X \setminus B, p)$ есть не что иное, как циклическая группа, порожденная элементом γ , и, кроме того, K содержится в центре группы $\pi_1(X \setminus B, p)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Накрытие $f: Y \rightarrow X$ индуцирует вложение фундаментальных групп $f_*: \pi_1(Y \setminus f^{-1}(B)) \hookrightarrow \pi_1(X \setminus B)$ такое, что группа $\overline{G} = f_*(\pi_1(Y \setminus f^{-1}(B)))$ является подгруппой индекса $d = \deg f$ группы $G = \pi_1(X \setminus B)$. Как и в доказательстве леммы 1, пусть γ – порождающий элемент группы K . Поскольку $f^*(B) = dR$, то $\gamma^i \notin \overline{G}$ при $1 \leq i \leq d-1$ и $\gamma^d \in \overline{G}$. Следовательно, $G = \overline{G} \cup \gamma \overline{G} \cup \dots \cup \gamma^{d-1} \overline{G}$. С другой стороны, согласно лемме 1 имеем $\pi_1(Y) \simeq \overline{G} / \langle \gamma^d \rangle$. Точная последовательность (1) влечет точную последовательность

$$1 \rightarrow K / \langle \gamma^d \rangle \rightarrow G / \langle \gamma^d \rangle \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow 1. \quad (2)$$

Группа $\overline{G}/\langle \gamma^d \rangle \simeq \pi_1(Y)$ естественным образом вложена в $G/\langle \gamma^d \rangle$, и поэтому предложение следует из точной последовательности (2) и равенства

$$G/\langle \gamma^d \rangle = \pi_1(Y) \cup \gamma \pi_1(Y) \cup \dots \cup \gamma^{d-1} \pi_1(Y).$$

Предложение доказано.

Пусть C_1 и C_2 – два дивизора на поверхности X . Далее мы будем использовать следующие обозначения: $C_1 \sim C_2$, если C_1 и C_2 линейно эквивалентны, и $C_1 \equiv C_2$, если C_1 и C_2 численно эквивалентны. Обозначим через $\text{Tor}_d \text{Pic}(X)$ подгруппу группы Пикара $\text{Pic}(X)$, состоящую из элементов, порядок которых является делителем числа d , и пусть $N_{X,d} = |\text{Tor}_d \text{Pic}(X)|$ – порядок группы $\text{Tor}_d \text{Pic}(X)$. Для заданного дивизора B , класс дивизоров которого делим на $d \in \mathbb{N}$, обозначим через $(B)_d \subset \text{Pic}(X)$ множество классов дивизоров β таких, что $B \sim d\beta$. Очевидно, $(B)_d$ является главным однородным пространством над группой $\text{Tor}_d \text{Pic}(X)$.

Следующая лемма хорошо известна, однако нам не удалось найти подходящую ссылку, и поэтому мы приводим эту лемму вместе с ее доказательством.

ЛЕММА 2. Пусть $B \subset X$ – приведенная неприводимая кривая. Если B как элемент группы $\text{Pic}(X)$ делима на d (т. е. $B \sim dC$ для некоторого дивизора C), то имеется естественная биекция между множеством $(B)_d$ и множеством классов изоморфных d -листных тотально разветвленных вдоль B циклических накрытий $f_i: Y_i \rightarrow X$. Если $[C_i] \in (B)_d$ – класс дивизоров, соответствующий накрытию f_i при этой биекции, то $[R_i] = f_i^*[C_i]$ и $d[C_i] = [B]$.

Если B – гладкая кривая, то каждая из поверхностей Y_i является гладкой поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению конечный морфизм $f: Y \rightarrow X$ является разветвленным d -листым циклическим накрытием гладкой поверхности X , если Y – нормальная поверхность и $f^*: \mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y)$ – конечное расширение Галуа полей с группой Галуа $\text{Gal}(Y/X) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Пусть h^* – порождающий элемент группы $\text{Gal}(Y/X)$. В соответствии с теоремой Гильберта 90 в поле $\mathbb{C}(Y)$, рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbb{C}(X)$, можно выбрать такой базис $w_0 = 1, w_1, \dots, w_{d-1}$ над $\mathbb{C}(X)$, что $h^*(w_i) = \mu^i w_i$, где μ – примитивный корень степени d из единицы. Поэтому если мы положим $w = w_1$, то получим, что каждое разветвленное d -листное циклическое накрытие может быть рассмотрено как расширение полей $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(X)(w)$ с $h^*(w) = \mu w$, где $w^d = g \in \mathbb{C}(X)$ для некоторой функции g . Очевидно, имеет место и обратное утверждение.

Автоморфизм h^* определяет автоморфизм $h: Y \rightarrow Y$, кроме того, ветвление морфизма f состоит из тех неприводимых кривых D_i , которые входят в главный дивизор $(g) = \sum_{i=0}^n a_i D_i \in \text{Div}(X)$, $a_i \in \mathbb{Z}$, с коэффициентами $a_i \not\equiv 0 \pmod{d}$. Более того, $\text{НОД}(a_i, d)$ равен числу точек прообраза общей точки кривой D_i . Поэтому в нашем случае имеется единственная кривая D_i (скажем, кривая D_0 , и она является кривой ветвления B), для которой $a_0 \not\equiv 0 \pmod{d}$, причем числа a_0 и d взаимно просты. Следовательно, мы можем найти такое

целое число b , взаимно простое с числом d , что дивизор (g^b) – это $B - dC$ с некоторым $C \in \text{Div}(X)$. Поэтому, выбирая функцию $\tilde{g} \in \mathbb{C}(X)$ и заменяя w на $w^b \tilde{g}$, g на $\tilde{g}^d g^b$ и μ на μ^b , получим представление $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(X)(w)$, в котором $h^*(w) = \mu w$, $w^d = g \in \mathbb{C}(X)$ и дивизор (g) – это $B - dC'$, где C' – любой наперед заданный дивизор в том же классе линейной эквивалентности, что и дивизор C . Отсюда следует, что имеется естественная биекция между множеством $(B)_d$ и множеством классов изоморфных d -листных циклических накрытий поверхности X , разветвленных вдоль кривой B .

Если R – ветвление морфизма f наверху, $R = f^{-1}(B)$ и $f^*(B) = dR$, где B – неприводимая кривая, то $(w^d) = (f^*(g)) = dR - df^*(C)$. Поэтому $(w) = R - f^*(C)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Чтобы перенумеровать разветвленные накрытия из леммы 2, часто бывает удобно выбрать, как и в доказательстве леммы 2, в качестве “базисной точки” некоторый дивизор C такой, что $B \sim dC$, и затем использовать биекцию, которая связывает с элементами $\alpha_i \in \text{Tor}_d \text{Pic } X$ d -листные циклические накрытия, заданные уравнениями $w^d = g_i \in \mathbb{C}(X)$, где дивизоры $(g_i) = B - dC_i$ такие, что $C_i \sim C + \alpha_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 2 и замечание 1 также верны и в случае, когда приведенная кривая B не является неприводимой, но $d = 2$.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ является d -листным totally разветвленным циклическим накрытием, разветвленным вдоль гладкой неприводимой кривой $B \subset X$ с $(B^2)_X > 0$. Согласно предложению 1 накрытие f индуцирует изоморфизм между фундаментальными группами $\pi_1(Y)$ и $\pi_1(X)$. Поэтому оно индуцирует также изоморфизм f_* между $H_1(Y, \mathbb{Z})$ и $H_1(X, \mathbb{Z})$ и, в частности, изоморфизм между их подгруппами кручения $\text{Tor } H_1(Y, \mathbb{Z})$ и $\text{Tor } H_1(X, \mathbb{Z})$. Согласно теореме об универсальных коэффициентах (которая гарантирует равенства $\text{Tor } H_1(V, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(H_1(V, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \text{Tor } H^2(V, \mathbb{Z})$ для любого компактного многообразия V) и из функториальности следует, что $f^*: \text{Tor } H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor } H^2(Y, \mathbb{Z})$ также является изоморфизмом.

На самом деле при наших предположениях выполнено даже более сильное утверждение. Действительно, экспоненциальная точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y^* \rightarrow 0$$

влечет короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Tor Pic}^0(Y) \rightarrow \text{Tor Pic}(Y) \xrightarrow{\delta} \text{Tor } H^2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

где $\text{Pic}^0(Y)$ – связная компонента в $\text{Pic}(Y)$, содержащая нуль, и δ – связывающий (первый класс Черна) гомоморфизм. Поэтому, используя функториальный изоморфизм $\text{Pic}^0(V) = H^{0,1}(V)/(H^1(V, \mathbb{Z}))^{0,1}$ и лемму о пяти гомоморфизмах, примененную к диаграмме, образованной упомянутой выше короткой точной последовательностью и ее копией для X , легко доказать, что $f^*: \text{Tor Pic}(X) \rightarrow \text{Tor Pic}(Y)$ также является изоморфизмом.

Далее мы будем использовать только группу $\mathrm{Tor} H^2(V, \mathbb{Z})$ и обозначать ее для краткости через $\mathrm{Tor}(V)$. Кроме того, всюду далее через δ обозначается гомоморфизм Черна, $\delta: \mathrm{Pic}(V) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$.

§ 2. Численно кратно-канонические циклические накрытия

В данном параграфе мы фиксируем целое число $d \geq 2$ и гладкую неприводимую кривую $B \equiv dmK_X$ на неособой поверхности X . Тотально разветвленное d -листное циклическое накрытие $f: Y \rightarrow X$, разветвленное вдоль B и заданное (см. замечание 1) классом дивизоров $C + \alpha$, $\alpha \in \mathrm{Tor}_d \mathrm{Pic}(X)$, называется (d, m) -каноническим, если $C \sim mK_X$ и $d\alpha = 0$, чисто (d, m) -каноническим, если $C \sim mK_X$ и $\alpha = 0$, и численно (d, m) -каноническим, если $C \equiv mK_X$. Отметим, что если f является (d, m) -каноническим накрытием, то $B \in |dmK_X|$.

Далее для заданного дивизора D на поверхности X обозначим через $\varphi_D: X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim |D|}$ рациональное отображение, определенное полной линейной системой $|D|$.

Знаменитая теорема Бомбьери [7] утверждает, что если $m \geq 5$, то для гладкой минимальной (т.е. без (-1) -кривых) проективной поверхности X общего типа m -каноническое отображение

$$\varphi_{mK_X}: X \rightarrow \mathbb{P}^{P_m-1}$$

– это бирациональный морфизм на свой образ, $P_m = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$. Заметим, что в доказательстве этой теоремы, кроме теоремы Рамануджама об обращении в нуль, используются только численные свойства канонического класса K_X . Поэтому теорема Бомбьери верна не только для m -канонических отображений, но также и для отображений

$$\varphi_{D_m}: X \rightarrow \mathbb{P}^{P_m-1},$$

где D_m – дивизор, численно эквивалентный дивизору mK_X . В частности, если $dm \geq 5$ и $D \equiv dmK_X$, то согласно теореме Бертини общая кривая $B \in |D|$ является неособой и неприводимой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное численно (d, m) -каноническое циклическое накрытие поверхности X . Тогда Y имеет следующие инварианты:

$$p_a(Y) = dp_a(X) + \frac{d(d-1)m((2d-1)m+3)}{12} K_X^2, \quad (3)$$

$$K_Y^2 = d(dm - m + 1)^2 K_X^2, \quad (4)$$

и $q(Y) = q(X)$, где $p_a = p_g - q + 1$ – арифметический род поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$dK_Y \sim f^*(dK_X + (d-1)B) \equiv f^*(d(dm - m + 1)K_X).$$

Следовательно, $K_Y^2 = d(dm - m + 1)^2 K_X^2$. Из предложения 1 следует, что $q(Y) = q(X)$. Обозначим через $e(V)$ топологическую эйлерову характеристику многообразия V . Согласно формуле Нётера имеем

$$K_X^2 + e(X) = 12p_a(X),$$

а из формулы присоединения получаем

$$-e(B) = 2g(B) - 2 = (B, B + K_X)_X = (dmK_X, (dm + 1)K_X)_X = dm(dm + 1)K_X^2.$$

Поскольку $f^*(B) = dR$, то

$$\begin{aligned} e(Y) &= d(e(X) - e(B)) + e(B) \\ &= d(12p_a(X) - K_X^2 + dm(dm + 1)K_X^2) - dm(dm + 1)K_X^2 \\ &= 12dp_a(X) + d[(d - 1)(dm + 1)m - 1]K_X^2. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} e(Y) + K_Y^2 &= 12dp_a(X) + d[(d - 1)(dm + 1)m - 1]K_X^2 + d(dm - m + 1)^2 K_X^2 \\ &= 12dp_a(Y) + d[(d - 1)(dm + 1)m - 1 + (dm - m + 1)^2] K_X^2 \\ &= 12dp_a(X) + d(d - 1)m[(2d - 1)m + 3]K_X^2, \end{aligned}$$

и поэтому

$$p_a(Y) = dp_a(X) + \frac{d(d - 1)m[(2d - 1)m + 3]}{12} K_X^2.$$

Предложение доказано.

Согласно предложению 2 при фиксированных d и m все тотально разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия $f: Y \rightarrow X$ имеют одни и те же инварианты K_Y^2 и $p_a(Y)$. Обозначим их соответственно через $k_{X,d,m}$ и $p_{X,d,m}$. Обозначим через $\mathcal{M}_{k,p}$ пространство модулей поверхностей Z с заданными инвариантами $K_Z^2 = k$ и $p_a(Z) = p$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – поверхность общего типа. Если существует элемент $\alpha \in \text{Tor}_d \text{Pic}(X)$ такой, что $\delta(\alpha)$ не делится на d в группе $\text{Tor}(X)$, то для каждого целого числа $n \geq 1$ пространство модулей $\mathcal{M}_{k,p}$ при $k = k_{X,d,dn+1}$ и $p = p_{X,d,dn+1}$ состоит по меньшей мере из двух связных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем дивизор $C \sim (dn + 1)K_X$ и рассмотрим два тотально разветвленных $(d, dn + 1)$ -канонических накрытия $f_i: Y_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, вдоль гладкой неприводимой кривой $B \in |d(dn + 1)K_X|$, где f_1 – тотально разветвленное чисто $(d, dn + 1)$ -каноническое циклическое накрытие, а f_2 – тотально разветвленное $(d, dn + 1)$ -каноническое циклическое накрытие, которое задано элементом $C + \alpha$, $\alpha \in \text{Tor}_d \text{Pic}(X)$, таким, что $\delta(\alpha)$ не делится на d в $\text{Tor}(X)$. Для $n \in \mathbb{N}$ существование кривой B следует из неравенства $d(dn + 1) \geq 6$.

Рассмотрим накрытие f_1 . Оно задается присоединением к полю $\mathbb{C}(X)$ функции w_1 такой, что $w_1^d = g_1 \in \mathbb{C}(X)$ и $(g_1) = B - dC$. Поскольку

$$R_1 \sim f_1^*(C) \sim f^*((dn+1)K_X),$$

то из формулы проекции для канонических дивизоров следует, что

$$K_{Y_1} \sim f_1^*(K_X) + (d-1)R_1 \sim f_1^*(K_X) + (d-1)f^*((dn+1)K_X) \sim d(dn-n+1)f^*(K_X).$$

В частности, K_{Y_1} делим на d в $\text{Pic}(Y_1)$, и поэтому его класс когомологий является делимым на d в $H^2(Y_1, \mathbb{Z})$.

Накрытие f_2 задается присоединением к полю $\mathbb{C}(X)$ функции w_2 такой, что $w_2^d = g_2 \in \mathbb{C}(X)$ и $(g_2) = B - dC_2$, где $C_2 \sim (dn+1)K_X + \alpha$. Согласно лемме 2 имеем $R_2 \sim f_2^*(C_2) \sim f_2^*((dn+1)K_X + \alpha)$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_{Y_2} &\sim f_2^*(K_X) + (d-1)R_2 \sim f_2^*(K_X) + (d-1)f_2^*((dn+1)K_X + \alpha) \\ &\sim d(dn-n+1)f_2^*(K_X) + (d-1)f_2^*(\alpha). \end{aligned}$$

Поскольку $f_2^*: \text{Tor}(X) \rightarrow \text{Tor}(Y_2)$ – изоморфизм и элемент $\delta(\alpha) \in \text{Tor}(X)$ не делим на d , класс когомологий дивизора K_{Y_2} не делим на d в $H^2(Y_2, \mathbb{Z})$.

Ввиду не совпадающих свойств делимости когомологических классов канонических дивизоров поверхностей Y_1 и Y_2 эти поверхности не могут принадлежать одной и той же связной компоненте пространства модулей. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 верна и в случае $n = 0$, если существует неприводимая гладкая кривая $B \in |dK_X|$. Согласно [8, теорема 5.2], [9, предложение 3] и теореме Бертини получаем, что общая кривая $B \in |dK_X|$ является гладкой и неприводимой, когда либо $d \geq 5$, либо $d = 4$ и $K_X^2 \geq 2$, либо $d = 3$ и $K_X^2 \geq 3$, либо $d = 2$ и $K_X^2 \geq 5$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что если X_1 и X_2 – две поверхности общего типа такие, что $K_{X_1}^2 = K_{X_2}^2$ и $p_a(X_1) = p_a(X_2)$, но группы $\pi_1(X_1)$ и $\pi_1(X_2)$ не изоморфны и если $f_1: Y_1 \rightarrow X_1$ и $f_2: Y_2 \rightarrow X_2$ – totally разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия, то из предложения 1 следует, что поверхности Y_1 и Y_2 принадлежат разным компонентам связности пространства модулей $\mathcal{M}_{k,p}$, где $k = k_{X_1,d,m}$ и $p = p_{X_1,d,m}$.

Пусть X – поверхность Кампеделли, т.е. X – поверхность общего типа с $p_g = 0$, $K_X^2 = 2$ и $\pi_1(X) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Totally разветвленное численно $(2, 1)$ -каноническое циклическое накрытие $f: Y \rightarrow X$ является $(2, 1)$ -каноническим накрытием, так как каждый ненулевой элемент группы $\text{Tor}(X) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ не делится на два. Согласно предложению 2 totally разветвленное $(2, 1)$ -каноническое циклическое накрытие Y поверхности X имеет следующие инварианты: $K_Y^2 = 16$ и $p_a = 4$. Отметим также, что согласно лемме 2 для заданной неособой кривой $B \in |2K_X|$ существует ровно восемь различных $(2, 1)$ -канонических циклических накрытий поверхности X , totally разветвленных вдоль кривой B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют ровно две связные компоненты пространства модулей $\mathcal{M}_{16,4}$, которым принадлежат тотально разветвленные $(2,1)$ -канонические циклические накрытия поверхностей Кампеделли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что каждая поверхность Кампеделли X может быть получена следующим образом (см., например, [10]). Пусть $\tilde{L} = L_1 \cup \dots \cup L_7$ – конфигурация прямых в $\mathbb{P}^2$, состоящая из семи прямых. Перенумеруем эти прямые ненулевыми элементами $\alpha_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ и сделаем два предположения: конфигурация $\tilde{L}$ не имеет r -кратных точек при $r \geq 4$; если $\tilde{L}$ имеет тройную точку $p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}} = L_{\alpha_{i_1}} \cap L_{\alpha_{i_2}} \cap L_{\alpha_{i_3}}$, то $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} \neq 0$. Рассмотрим накрытие Галуа $\tilde{g}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, разветвленное в $\tilde{L}$ и заданное эпиморфизмом $\varphi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, определенным формулами $\varphi(\lambda_i) = \alpha_i$, где λ_i – элемент группы $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{L}, \mathbb{Z})$, представленный малым обходом вокруг прямой L_{α_i} .

Особые точки поверхности $\tilde{X}$ – это в точности точки, лежащие над тройными точками $p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}}$, и поверхность Кампеделли X – это поверхность, полученная в результате разрешения особых точек поверхности $\tilde{X}$. Чтобы разрешить особые точки поверхности $\tilde{X}$, достаточно раздуть тройные точки конфигурации $\tilde{L}$. Композиция $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ раздутий с центрами в тройных точках конфигурации $\tilde{L}$ индуцирует накрытие Галуа $g: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$, и мы имеем [10]

$$2K_X \sim g^*(L),$$

где L – прямая в $\mathbb{P}^2$. (Если $\tilde{L}$ не имеет тройных точек, то $g = \tilde{g}$.)

Пусть поверхность Кампеделли X определена конфигурацией прямых $\tilde{L}$, и пусть f разветвлено вдоль $B = g^{-1}(L_8)$ – прообраза прямой $L_8 \not\subset \tilde{L}$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что конфигурация прямых $\mathcal{L} = \tilde{L} \cup L_8$ является общей. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L})$ является абелевой, и потому $h = g \circ f: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ является $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ -накрытием Галуа $\mathbb{P}^2$, которое разветвлено вдоль $\mathcal{L}$ и задано эпиморфизмом $\psi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, определенным формулами $\psi(\lambda_i) = \tilde{\alpha}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4})$ с некоторыми $a_{i,4} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $i = 1, \dots, 7$, и $\psi(\lambda_8) = \tilde{\alpha}_8 = (0, 0, 0, 1)$, где λ_8 – элемент, представленный малым обходом вокруг прямой L_8 . Отметим, что ψ определяется накрытием h однозначно с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ (другими словами, выбором базиса в $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$). Имеем равенство $\sum_{i=1}^8 \lambda_i = 0$ в $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}, \mathbb{Z})$. Следовательно, подмножество $M = \{\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^3 \mid i = 1, \dots, 8\}$ проективного пространства $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^3$ над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ является *тотально четным*, т.е. удовлетворяет следующему условию: для каждой плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ пересечение $M \cap \mathbb{P}^2$ состоит из четного числа точек.

ЛЕММА 3. *С точностью до действия группы $\text{PGL}(4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ существует ровно два различных тотально четных 8-элементных подмножества M проективного пространства $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Эти множества M являются симметрическими разностями двух линейных подпространств, а именно либо $M = \mathbb{P}^3 \triangle P$ (тип I), либо $P \triangle l$ (тип II), где P – плоскость в $\mathbb{P}^3$ и l – прямая, пересекающаяся с P трансверсально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тип I соответствует случаю, когда существует плоскость $P \subset \mathbb{P}^3$ (скажем, P задана уравнением $a_4 = 0$) такая, что $M \cap P = \emptyset$, и в этом случае

$$M = \mathbb{A}^3 = \{\tilde{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{P}^3 \mid a_4 = 1\}.$$

Предположим, что не существует плоскости P такой, что $M \cap P = \emptyset$. Для каждой плоскости $P_i \subset \mathbb{P}^3$ обозначим через $n_i = |M \cap P_i|$ число точек в пересечении $M \cap P_i$. Тогда каждое из n_i является четным числом, $0 < n_i \leq 6$.

Прежде всего покажем, что условие $n_i = 6$ для некоторого i (скажем, $n_1 = 6$) эквивалентно условию существования прямой $l \subset M$ (и в этом случае $|M \cap l| = 3$). Действительно, если $n_1 = 6$, то существует единственная точка $\tilde{\alpha}_0 \in P_1$ такая, что $\tilde{\alpha}_0 \notin M$, так как $|P_1| = 7$. Следовательно, для любой прямой $l \subset P_1$, не проходящей через $\tilde{\alpha}_0$, имеем $l \subset M$. Обратно, для прямой $l \subset M$ рассмотрим пучок плоскостей, содержащих l . Он состоит из трех плоскостей (скажем, P_1, P_2 и P_3). Имеем $n_i \geq 4$ для $i = 1, 2, 3$ и $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + (n_3 - 3) = 8 - 3 = 5$, т. е. $n_1 + n_2 + n_3 = 14$. С точностью до перестановок это уравнение имеет единственное решение в четных целых числах, удовлетворяющее неравенствам $4 \leq n_i \leq 6$, а именно $n_1 = 6$ и $n_2 = n_3 = 4$.

Покажем, что M является множеством типа II, если существует плоскость P такая, что $|M \cap P| = 6$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что плоскость P задана уравнением $a_4 = 0$, а точки $\tilde{\alpha}_7$ и $\tilde{\alpha}_8$, лежащие в $M \setminus P$, имеют координаты $\tilde{\alpha}_7 = (1, 1, 1, 1)$ и $\tilde{\alpha}_8 = (0, 0, 0, 1)$, т. е. они лежат на прямой $l = \{a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = 0\}$. Поскольку $|M \cap P| = 6$ и $|P| = 7$, то, чтобы доказать, что $M = P \Delta l$ (т. е. имеет тип II), достаточно показать, что точка $\tilde{\alpha}_0 = (1, 1, 1, 0)$ не принадлежит M . Предположим, что $\tilde{\alpha}_0 = (1, 1, 1, 0) \in M$. В этом случае найдется другая точка $\tilde{\alpha}_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, 0) \notin M$ с координатой $a_{1,i} = 0$ при некотором $i = 1, 2, 3$. Не ограничивая общности и применив проективное преобразование, переставляющее координаты и оставляющее плоскость P на месте, мы можем предполагать, что этой точкой является $\tilde{\alpha}_1 = (0, a_{1,2}, a_{1,3}, 0)$. Тогда $|M \cap l| = 2$, где прямая $l \subset \mathbb{P}^3$ задана уравнениями $a_1 = a_4 = 0$. Следовательно, имеется только три точки, принадлежащие множеству M , первая координата a_1 которых обращается в нуль, а именно две точки, лежащие в $M \cap l$, и точка $(0, 0, 0, 1)$. Поэтому $|M \cap P_1| = 3$, где $P_1 = \{\tilde{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{P}^3 \mid a_1 = 0\}$. Противоречие.

Покажем, что случай, когда $0 < n_i \leq 4$ для всех плоскостей $P_i \subset \mathbb{P}^3$, невозможен. Прежде всего, предположим, что $n_i = 4$ для всех плоскостей P_i . Тогда, с одной стороны, число плоскостей в $\mathbb{P}^3$ равно 15. С другой стороны, число плоскостей, проходящих через любую точку $\tilde{\alpha} \in \mathbb{P}^3$, равно семи и неравенство $4 \cdot 15 \neq 8 \cdot 7$ влечет, что этот случай невозможен.

Наконец, предположим, что $0 < n_i \leq 4$ для всех плоскостей $P_i \subset \mathbb{P}^3$ и существует плоскость P_1 такая, что $n_1 = |M \cap P_1| = 2$. Тогда найдется прямая $l \subset P_1$ такая, что $M \cap l = \emptyset$. Рассмотрим пучок плоскостей, содержащих прямую l . Он состоит из трех плоскостей P_1, P_2, P_3 . Поскольку $n_1 + n_2 + n_3 = 8$, то $n_2 + n_3 = 6$. Следовательно, мы можем предполагать, что $n_2 = 2$ и $n_3 = 4$.

Имеем $M \cap P_3 = P_3 \setminus l$, и поэтому каждая плоскость P , не содержащая прямую l , имеет две общие с плоскостью P_3 точки, принадлежащие множеству M . Пусть $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2\} = M \cap P_1$ и $\{\tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4\} = M \cap P_2$. В этом случае плоскость P_4 , проходящая через точки $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_3$, не содержит прямую l . Следовательно, $n_4 \geq 5$. Противоречие. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 3. Пусть прямые, входящие в конфигурацию $\mathcal{L}$, состоящую из восьми прямых, перенумерованы точками тотально четного подмножества $M \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_M = \bigcup_{\tilde{\alpha}_i \in M} L_{\tilde{\alpha}_i}$. Конфигурация прямых $\mathcal{L}_M$ определяет эпиморфизм $\psi: H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{L}_M, \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, заданный формулами $\psi(\lambda_{\tilde{\alpha}_i}) = \tilde{\alpha}_i$, а эпиморфизм ψ задает $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ -накрытие Галуа $h: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленное в $\mathcal{L}_M$. Поскольку эпиморфизм ψ определен накрытием h однозначно только с точностью до автоморфизма группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, согласно лемме 3 мы можем предполагать, что либо

$$M = \{\tilde{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{P}^3 \mid a_4 = 1\}$$

(тип I), либо

$$M = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), \\ (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

(тип II). Теперь, чтобы завершить доказательство, согласно замечанию 3 достаточно отметить, что множество конфигураций прямых $\mathcal{L}_M$, где M имеет тип I (соответственно, тип II), является всюду плотным открытым по Зарискому (и, следовательно, связным) подмножеством в $(\mathbb{P}^2)^8$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – поверхность общего типа, и пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$, $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – два тотально разветвленных численно (d, m) -канонических циклических накрытия, заданных соответственно дивизорами $C_1 \sim mK_X + \alpha_1$ и $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$, где α_1 и α_2 – дивизоры, численно эквивалентные нулю и такие, что $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2)$. Если $dm \geq 5$, то Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_i \in |dC_i|$ – кривая ветвления накрытия f_i , $i = 1, 2$. Накрытие f_i получено в результате присоединения к полю $\mathbb{C}(X)$ функции w_i , удовлетворяющей уравнению $w_i^d = g_i \in \mathbb{C}(X)$ и такой, что дивизор (g_i) есть $B_i - dC_i$, где $C_i \sim mK_X + \alpha_i$. Пусть $\Delta = \delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2) \in \text{Tor}(X)$. Обозначим $\text{Pic}_\Delta(X) = \delta^{-1}(\Delta) \subset \text{Pic}(X)$.

Рассмотрим схему $T_{\Delta, dm}$, параметризующую кривые B_t в X , численно эквивалентные дивизору dmK_X и такие, что $\delta(B_t) = dm\delta(K_X) + d\Delta$ (схема $T_{\Delta, dm}$ расслоена над $\text{Pic}_\Delta(X)$, $\gamma_1: T_{\Delta, dm} \rightarrow \text{Pic}_\Delta(X)$, со слоями $\gamma_1^{-1}(\alpha_t) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(dmK_X + d\alpha_t)))$ над $\alpha_t \in \text{Pic}_\Delta(X)$; см. [11]). Очевидно, подсхема U , состоящая из точек $t \in T_{\Delta, dm}$, для которых B_t – гладкие кривые, является непустым открытым по Зарискому подмножеством.

Аналогично, пусть $T_{\Delta, 2}$ – схема, параметризующая кривые D_t в X , численно эквивалентные дивизору $2K_X$ и такие, что $\delta(D_t) = 2\delta(K_X) + \Delta$. Схема $T_{\Delta, 2}$

также расслоена над многообразием $\text{Pic}_\Delta(X)$, $\gamma_2: T_{\Delta,2} \rightarrow \text{Pic}_\Delta(X)$, со слоями $\gamma_2^{-1}(\alpha_t) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X + \alpha_t)))$ над $\alpha_t \in \text{Pic}_\Delta(X)$. Обозначим через $T = U \times_{\text{Pic}_\Delta(X)} T_{\Delta,2}$ расслоенное произведение расслоений γ_1 и γ_2 , и пусть p_i , $i = 1, 2$, – проекции схемы T на множители.

Зафиксируем дивизор $D \sim (m-2)K_X$ и сопоставим каждому $t \in T$ дивизор $C_{p_2(t)} = D_{p_2(t)} + D \sim mK_X + \alpha_{p_2(t)}$. Согласно лемме 2 накрытия f_1 и f_2 определены дивизорами $C_{p_2(t_i)} = D_{p_2(t_i)} + D \sim mK_X + \alpha_{p_2(t_i)}$ для некоторых точек $t_i \in T$, $i = 1, 2$, и разветвлены вдоль кривых $B_{p_1(t_i)}$. Семейство дивизоров $D_t = B_{p_1(t)} - dC_{p_2(t)}$ определяет дивизор $\tilde{D}$ в $X \times T$ такой, что $\tilde{D} \cap (X \times \{t\}) = D_t$ для каждого $t \in T$. Согласно [12, следствие 6] существует обратимый пучок $\mathcal{L}$ на T такой, что $\mathcal{O}_{X \times T}(\tilde{D}) = p^*(\mathcal{L})$, где $p: X \times T \rightarrow T$ – проекция. Очевидно, мы можем выбрать рациональное сечение пучка $\mathcal{L}$, дивизор L которого имеет носитель, не содержащий точек t_1 и t_2 . Рассмотрим рациональную функцию $\tilde{g} = g_t$, $t \in T$, $t \notin \text{Supp } L$, такую, что дивизор $(\tilde{g})$ равен $\tilde{D} - p^*(L)$. Функция $\tilde{g}$ определяет циклическое накрытие $\tilde{f}: \tilde{Y} \rightarrow X \times T$, заданное уравнением $\tilde{w}^d = \tilde{g}$. Это накрытие может быть рассмотрено как связное семейство циклических накрытий $f_t: Y_t \rightarrow X$, $t \in T \setminus \text{Supp } L$, заданное дивизорами $C_{p_2(t)} = D_{p_2(t)} + D \sim mK_X + \alpha_{p_2(t)}$ и разветвленное вдоль кривых $B_{p_1(t)}$, и, следовательно, Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема 2 верна без предположения $dm \geq 5$, если для каждого $\alpha \in \text{Pic}_\Delta$ общая кривая $B \sim d(mK_X + \alpha)$ является гладкой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – поверхность общего типа с $p_g = 0$, и пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное численно $(2, m)$ -каноническое циклическое накрытие поверхности X . Тогда рациональное отображение $\varphi_{K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$ пропускается через накрытие f , т.е. существует рациональное отображение $\psi: X \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$ такое, что $\varphi_{K_Y} = \psi \circ f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \equiv 2mK_X$ – кривая ветвления накрытия f , и пусть f задано дивизором $C \equiv mK_X$. Как и в доказательстве теоремы 1, из формулы проекции для канонического класса получаем равенство

$$K_Y = f^*(K_X + C). \quad (5)$$

Как и произвольная поверхность общего типа с $p_g = 0$, поверхность X является регулярной (т.е. $q(X) = 0$), поэтому теорема Мамфорда об обращении в нуль и теорема Римана–Роха влекут

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + C)) = \frac{(K_X + C, C)_X}{2} + 1 = \frac{m(m+1)}{2} K_X^2 + 1. \quad (6)$$

Согласно предложению 1 поверхность Y тоже является регулярной. Следовательно, применив формулу (3), получим

$$p_g(Y) = 1 + \frac{m(m+1)}{2} K_X^2. \quad (7)$$

Теперь теорема следует из формул (5)–(7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – поверхность общего типа с $p_g = 0$, и пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное численно $(2, m)$ -каноническое циклическое накрытие поверхности X , заданное дивизором $C \equiv mK_X$. Тогда при $m \geq 4$ каноническое отображение $\varphi_{K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$ является морфизмом степени два над своим образом и этот образ $\varphi_{K_Y}(Y) \subset \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$ совпадает с образом поверхности X при бирациональном морфизме $\psi = \varphi_{K_X+C}$.

В настоящее время существует длинный список известных поверхностей общего типа с $p_g = 0$ (см., например, обзор [13]), но до сих пор этот список далек от полноты. В следующих трех предложениях мы исследуем степень канонического отображения чисто $(2, 1)$ -канонического тотально разветвленного циклического накрытия соответственно в случае поверхностей Кампеделли, поверхностей Бурнья и поверхностей Мендес Лопес–Пардини.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное чисто $(2, 1)$ -каноническое циклическое накрытие произвольной поверхности Кампеделли X . Тогда $\varphi_{K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ является морфизмом степени $\deg \varphi_{K_Y} = 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях, использованных в доказательстве предложения 3, имеем $\varphi_{2K_X} = \sigma \circ g$ [10]. Следовательно, $\deg \varphi_{2K_X} = 8$. Теперь теорема 3 влечет равенство $\varphi_{K_Y} = \varphi_{2K_X} \circ f$ и, таким образом, φ_{K_Y} является регулярным морфизмом степени $\deg \varphi_{K_Y} = 16$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное чисто $(2, 1)$ -каноническое циклическое накрытие поверхности Бурнья X с $K_X^2 \geq 3$. Тогда $\varphi_{K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^{K_X^2}$ является морфизмом степени 8 на его образ и этот образ $Z = \varphi_{K_Y}(Y)$ является поверхностью дель Пеццо с $K_Z^2 = K_X^2$, вложенной в $\mathbb{P}^{K_X^2}$ с помощью антиканонического отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично поверхностям Кампеделли, поверхность Бурнья X – это разрешение особенностей накрытия Галуа $\tilde{g}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, разветвленного в конфигурации прямых Бурнья $\tilde{L}$ (см. детали в [14] или [10]). Чтобы разрешить особенности, достаточно раздуть r -кратные точки конфигурации прямых $\tilde{L}$, $r \geq 3$, и рассмотреть индуцированное накрытие Галуа $g: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$, где $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция раздутий в r -кратных точках конфигурации $\tilde{L}$, $r \geq 3$. Число r -кратных точек конфигурации $\tilde{L}$, $r \geq 3$, равно $9 - K_X^2$, и, следовательно, $\tilde{\mathbb{P}}^2$ является поверхностью дель Пеццо с $K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}^2 = K_X^2$. Более того, $2K_X = g^*(-K_{\tilde{\mathbb{P}}^2})$, и $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) = \dim H^0(\tilde{\mathbb{P}}^2, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}^2}(-K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}))$ (см., например, [10]). Поэтому $\varphi_{2K_X} = \varphi_{-K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}} \circ g$ является регулярным отображением степени четыре. Теперь, чтобы завершить доказательство, применим теорему 3 и получим равенство $\varphi_{K_Y} = \varphi_{2K_X} \circ f$, из которого следует, что $\deg \varphi_{K_Y} = 8$. Предложение доказано.

М. Мендес Лопес и Р. Пардини [15] построили шестимерное семейство поверхностей X общего типа с $p_g = 0$ и $K_X^2 = 3$. Для каждой из этих поверхностей, назовем их *поверхностями Мендес Лопес–Пардини*, отображение φ_{2K_X} является регулярным степени 2 над его образом Z , который является особой

поверхностью Энриквеса $Z \subset \mathbb{P}^3$, $\deg Z = 6$. Как и ранее, применяя теорему 3, получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – тотально разветвленное чисто $(2, 1)$ -каноническое циклическое накрытие поверхности Мендес Лопес–Пардини X . Тогда $\varphi_{K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ является регулярным отображением степени четыре на свой образ Z , который является особой поверхностью Энриквеса $Z \subset \mathbb{P}^3$, $\deg Z = 6$.

§ 3. Циклические накрытия жестких поверхностей

Напомним, что каждая поверхность Мияоки–Яу X , будучи голоморфным фактором шара, удовлетворяет теореме Мостова о жесткости. Эта теорема в одной из своих хорошо известных формулировок утверждает, что каждый элемент группы $\text{Out } \pi_1(X)$ реализуется либо голоморфным, либо антиголоморфным диффеоморфизмом $g: X \rightarrow X$ (теорема существования) и, кроме того, такая реализация единственна (теорема единственности) (ср. [16] и [17]).

Для комплексной проективной поверхности X обозначим через $\bar{X}$ поверхность, комплексно-сопряженную поверхности X , и обозначим через $\text{Kl}(X)$ группу голоморфных и антиголоморфных автоморфизмов поверхности X .

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – поверхность Мияоки–Яу, и пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$, $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – два тотально разветвленных численно (d, t) -канонических циклических накрытия, заданных соответственно дивизорами $C_1 \sim tK_X + \alpha_1$ и $C_2 \sim tK_X + \alpha_2$, где оба дивизора α_1, α_2 численно эквивалентны нулю. Предположим дополнительно, что в случае $d \geq 3$ оба элемента $\delta(\alpha_1)$ и $\delta(\alpha_2)$ имеют один и тот же порядок n в группе $\text{Tor}(X)$ и этот порядок взаимно прост с числом $d - 1$. Если Y_1 и Y_2 являются диффеоморфными с сохранением ориентации многообразиями, то существует (голоморфный или антиголоморфный) автоморфизм $\psi \in \text{Kl}(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \pm \delta(\alpha_1)$ (выбираем знак $+$, если ψ – голоморфное отображение, и знак $-$ в противном случае).

Если Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями, то существует автоморфизм $\psi \in \text{Aut}(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Имеем

$$\begin{aligned} K_{Y_1} &= f_1^*(K_X) + (d - 1)R_1 \sim f_1^*(K_X) + (d - 1)f_1^*(mK_X + \alpha_1) \\ &\sim (dm - d + 1)f_1^*(K_X) + (d - 1)f_1^*(\alpha_1) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$K_{Y_2} \sim (dm - d + 1)f_2^*(K_X) + (d - 1)f_2^*(\alpha_2).$$

Поверхности Y_1 и Y_2 , будучи накрытиями поверхностей размерности Кодаиры два, также имеют размерность Кодаиры, равную двум, и поэтому являются поверхностями общего типа. Они также являются минимальными моделями, так

как для любой кривой $E \subset Y_i$ имеем $E \cdot K_{Y_i} = f_*(E) \cdot (dm - d + 1)K_X > 0$. Следовательно, только $\pm\delta(K_{Y_i})$ являются базисными классами Зейберга–Виттена в $H^2(Y_i; \mathbb{Z})$ (см. [18] в случае $p_g > 0$ и, например, [19] в случае $p_g = 0$), и поэтому $\varphi^*(\delta(K_{Y_2})) = \pm\delta(K_{Y_1})$.

По предложению 1 отображение φ индуцирует автоморфизм $\varphi_*: \pi_1(X) = \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(Y_2) = \pi_1(X)$ группы $\pi_1(X)$ (точнее, элемент группы $\text{Out } \pi_1(X)$), и поэтому в соответствии с теоремой Мостова о жесткости он индуцирует либо голоморфный, либо антиголоморфный автоморфизм $\psi: X \rightarrow X$. Согласно теореме Сю о жесткости (см. [20]) отображение $f_2 \circ \varphi: Y_1 \rightarrow X$ гомотопно либо голоморфному, либо антиголоморфному морфизму $\tilde{f}_1: Y_1 \rightarrow X$ и $\tilde{f}_1 = \psi \circ f_1$, так как эти два морфизма определяют один и тот же элемент группы $\text{Out } \pi_1(X)$.

Если ψ – голоморфное отображение, то $\psi^*(K_X) = K_X$. Следовательно, имеем $\varphi^*(f_2^*(\delta(K_X))) = f_1^*(\delta(K_X))$, и поэтому $\varphi^*((d-1)\delta(\alpha_2)) = (d-1)\delta(\alpha_1)$. Покажем, что в этом случае $\varphi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$. Действительно, предположим, что $\varphi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1) + \beta$ для некоторого элемента $\beta \neq 0$ такого, что $(d-1)\beta = 0$. А priori это возможно, только если $d \geq 3$. Однако в этом случае, так как $(n, d-1) = 1$, элемент $\delta(\alpha_1) + \beta$ должен иметь порядок больше, чем n . С другой стороны, элемент $\varphi^*(\delta(\alpha_2))$ имеет тот же самый порядок, что и $\delta(\alpha_2)$. Следовательно, $\beta = 0$, и $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.

Если ψ – антиголоморфное отображение, то $\psi^*(K_X) = -K_X$. Следовательно, $\varphi^*(f_2^*(\delta(K_X))) = -f_1^*(\delta(K_X))$. Поэтому $\varphi^*((d-1)\delta(\alpha_2)) = -(d-1)\delta(\alpha_1)$ и, как и выше, мы получаем, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = -\delta(\alpha_1)$.

Если Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями, то существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ такой, что $\varphi^*(\delta(K_{Y_2})) = \delta(K_{Y_1})$. Применяя еще раз приведенные выше аргументы, получаем существование автоморфизма $\psi \in \text{Aut}(X)$ такого, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$ и $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – тотально разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия такие, как в теореме 4. Предположим, что $dm \geq 5$ и существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$. Тогда поверхность Y_2 деформационно эквивалентна поверхности Y_1 , если $\varphi^*(K_{Y_2}) = K_{Y_1}$, и $\bar{Y}_2$ деформационно эквивалентна поверхности Y_1 , если $\varphi^*(K_{Y_2}) = -K_{Y_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_i \in |dC_i|$ – кривая ветвления накрытия f_i , $i = 1, 2$. Накрытие f_i задано путем присоединения к полю $\mathbb{C}(X)$ такой функции w_i , что $w_i^d = g_i \in \mathbb{C}(X)$, где $(g_i) = B_i - dC_i$ и $C_i \sim mK_X + \alpha_i$.

Из теоремы 4 следует существование автоморфизма $\psi \in \text{Kl}(X)$ такого, что $\psi^*(\alpha_2) = \pm\alpha_1$ (выбираем знак $+$, если ψ – голоморфный автоморфизм, и знак $-$ в противном случае). Если ψ – антиголоморфный автоморфизм, то определим автоморфизм $\psi^!: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(X)$, заданный формулами $\psi^!(D) = \psi^{-1}(D)$ для кривых $D \subset X$.

Пусть ψ – голоморфный автоморфизм. Тогда накрытие $\psi^{-1} \circ f_2: Y_2 \rightarrow X$ задается путем присоединения функции $\tilde{w}_2$ к полю $\mathbb{C}(X)$ такой, что $\tilde{w}_2^d = \psi^*(g_2)$,

$(\psi^*(g_2)) = \psi^*(B_2) - d\psi^*(C_2)$, где $\psi^*(C_2) \sim mK_X + \psi^*(\alpha_2)$. Согласно теореме 2 поверхности Y_1 и Y_2 деформационно эквивалентны, так как $\delta(\psi^*(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.

Пусть ψ – антиголоморфный автоморфизм. Тогда накрытие $\psi^{-1} \circ f_2: \bar{Y}_2 \rightarrow X$ задается путем присоединения функции $\bar{w}_2$ к полю $\mathbb{C}(X)$ такой, что $\bar{w}_2^d = \psi^*(\bar{g}_2)$, $(\psi^1(g_2)) = \psi^1(B) - d\psi^1(C_2)$, где $\psi^1(C_2) \sim mK_X + \psi^1(\alpha_2)$. Согласно теореме 2 поверхности Y_1 и $\bar{Y}_2$ деформационно эквивалентны, так как $\delta(\psi^1(\alpha_2)) = \delta(-\psi^*(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X – поверхность Мияоки–Яу, и пусть целые числа $d \geq 2$ и $m \geq 1$ таковы, что $dm \geq 5$ и число $d - 1$ взаимно просто с порядком группы $\text{Tor}(X)$. Тогда число связных компонент пространства модулей поверхностей, которые содержат численно (d, m) -канонические тотально разветвленные циклические накрытия поверхности X , равно числу орбит действия группы $\text{Aut}(X)$ на $\text{Tor}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$, $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – два тотально разветвленных численно (d, m) -канонических циклических накрытия, заданных соответственно дивизорами $C_1 \sim mK_X + \alpha_1$ и $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$, где оба дивизора α_1 , α_2 численно эквивалентны нулю. Предположим, что существует автоморфизм $\psi \in \text{Aut}(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$. Тогда $\psi^{-1} \circ f_2: Y_2 \rightarrow X$ является численно (d, m) -каноническим тотально разветвленным циклическим накрытием, заданным дивизором $\psi^*(C_2) \sim mK_X + \psi^*(\alpha_2)$ таким, что $\delta(\psi^*(\alpha_2)) = \psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$, и поэтому согласно теореме 2 поверхности Y_1 и Y_2 принадлежат одной и той же связной компоненте пространства модулей поверхностей. Обратное утверждение следует из теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – поверхность Мияоки–Яу, и пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$, $f_2: Y_2 \rightarrow \bar{X}$ – два тотально разветвленных численно (d, m) -канонических циклических накрытия. Если Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями, то $\text{Kl}(X) \neq \text{Aut}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Накрытие f_2 определяет численно (d, m) -каноническое тотально разветвленное циклическое накрытие $f_2: \bar{Y}_2 \rightarrow X$. Как и в доказательстве теоремы 4, имеем

$$K_{Y_1} \equiv (dm - d + 1)f_1^*(K_X), \quad K_{\bar{Y}_2} \equiv (dm - d + 1)f_2^*(K_X).$$

Поскольку Y_1 и Y_2 являются деформационно эквивалентными поверхностями, существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ такой, что $\varphi^*(\delta(K_{\bar{Y}_2})) = -\delta(K_{Y_1})$. Следовательно, имеем равенство

$$\varphi^*(f_2^*(\delta(K_X))) \equiv -f_1^*(\delta(K_X)). \quad (8)$$

Те же аргументы, которые использовались в доказательстве теоремы 4, показывают, что автоморфизм $\varphi_*: \pi_1(X) = \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(Y_2) = \pi_1(X)$ группы $\pi_1(X)$ (более точно, элемент группы $\text{Out } \pi_1(X)$) индуцирует либо голоморфный, либо антиголоморфный автоморфизм $\psi: X \rightarrow X$ такой, что отображение

$f_2 \circ \varphi: Y_1 \rightarrow X$ гомотопно либо голоморфному, либо антиголоморфному морфизму $\psi \circ f_1: Y_1 \rightarrow X$, так как эти два морфизма определяют один и тот же элемент группы $\text{Out } \pi_1(X)$.

Покажем, что ψ является антиголоморфным автоморфизмом. Действительно, если ψ – голоморфное отображение, то $\psi^*(\delta(K_X)) = \delta(K_X)$. Поэтому из равенства (8) следует, что

$$-f_1^*(\delta(K_X)) \equiv \varphi^*(f_2^*(\delta(K_X))) = f_1^*(\psi^*(\delta(K_X))) = f_1^*(\delta(K_X)),$$

но это невозможно, так как элемент $f_1^*(\delta(K_X))$ численно не эквивалентен нулю в $H^2(Y_1, \mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для каждой пары положительных целых чисел d и m , удовлетворяющих неравенству $dm \geq 5$ при $d \not\equiv 1 \pmod{5}$, и для поверхности общего типа X с $(K^2)_X = 333$ и $e(X) = 111$ пространство модулей $\mathcal{M}_{k_X, d, m, p_X, d, m}$ имеет по меньшей мере $3 \cdot 5^6$ различных связных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Две такие поверхности X были построены в [1, примеры 1, 2], обозначим их соответственно через X_1 и X_2 . Эти поверхности получаются в результате разрешения особенностей абелева $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ -накрытия $\tilde{h}_i: \tilde{X}_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, разветвленного вдоль конфигурации прямых $\tilde{L} = \bigcup_{j=1}^9 L_j$, двойственных точкам перегиба гладкой плоской кубики. Чтобы разрешить особенности поверхности $\tilde{X}_i$, мы раздуваем трехкратные точки конфигурации $\tilde{L}$; обозначим композицию этих раздутий через $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. После этого берем нормальное замыкание поверхности $\tilde{\mathbb{P}}^2$ в поле $\mathbb{C}(\tilde{X}_i)$ и получаем индуцированное накрытие $h_i: X_i \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$.

Поверхности $\tilde{X}_i$ могут быть получены так же, как факторпространства $Z/\tilde{G}_i$, где $\tilde{G}_i \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^6$ и Z – абелево $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^8$ -накрытие $g: Z \rightarrow \mathbb{P}^2$, определенное расширением полей $g^*: \mathbb{C}(\mathbb{P}^2) \hookrightarrow \mathbb{C}(Z) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)(w_1, \dots, w_8)$ таким, что $w_j^5 = l_j l_9^{-1}$ и $l_j = 0$ – уравнения прямых L_j , $j = 1, \dots, 9$. Дивизоры $\frac{1}{5}h_i^*((\sigma^*(l_j l_9^{-1})))$ принадлежат группе $\text{Tot}_5(X_i)$ и порождают в ней подгруппу $G_i \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^6$.

Из предложения 2 следует, что пространство модулей $\mathcal{M}_{k_X, d, m, p_X, d, m}$ не пусто, так как согласно теореме Бомбьери на поверхности общего типа X существуют гладкие кривые, численно эквивалентные дивизору dmK_X , если $dm \geq 5$.

Согласно [1, предложение 4.1] имеем $\text{Kl}(X_1) = \text{Aut}(X_1) = \text{Gal}(\tilde{X}_1/\mathbb{P}^2)$ и действие группы $\text{Aut}(X_1)$ на G_1 тривиально, так как $\text{Aut}(X_1)$ оставляет неподвижными кривые ветвления $h_1^{-1}(L_j)$, $L_j \subset \tilde{L}$. Следовательно, согласно теореме 4 поверхности $Y_{1,k}$, полученные в качестве численно (d, m) -канонических накрытий $f_k: Y_{1,k} \rightarrow X_1$, заданных дивизорами $C_k \sim mK_X + \alpha_k$, $\alpha_k \in G_1$, попарно не диффеоморфны с сохранением ориентации, и поэтому они принадлежат разным компонентам пространства модулей $\mathcal{M}_{k_X, d, m, p_X, d, m}$.

Согласно теореме 5 поверхности Y_1 и Y_2 , полученные в виде численно (d, m) -канонических тотально разветвленных циклических накрытий $f_1: Y_1 \rightarrow X_1$ и $f_2: Y_2 \rightarrow \bar{X}_1$, не могут быть деформационно эквивалентными, так как $\text{Kl}(X_1) =$

$\text{Aut}(X_1)$. Поэтому totally разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия $f_{1,k}: Y_k \rightarrow \bar{X}_1$, заданные дивизорами $C_k \sim mK_{\bar{X}_1} + \alpha_k$, $\alpha_k \in G_1$, определяют другие 5^6 различных компонент в пространстве модулей $\mathcal{M}_{kX,d,m,pX,d,m}$.

Снова согласно [1, предложение 4.1] имеем $\text{Aut}(X_2) = \text{Gal}(\tilde{X}_2/\mathbb{P}^2)$ и действие группы $\text{Aut}(X_2)$ на G_2 тривиально, но $\text{Out}(\pi_1(X_2)) = \text{Kl}(X_2) \neq \text{Aut}(X_2)$. Следовательно, totally разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия $f: \tilde{Y} \rightarrow X_2$ дают по меньшей мере еще 5^6 других связных компонент в пространстве $\mathcal{M}_{kX,d,m,pX,d,m}$, так как эти поверхности $\tilde{Y}$ не гомеоморфны поверхностям Y , полученным как totally разветвленные численно (d, m) -канонические циклические накрытия $f: Y \rightarrow X_1$ (фундаментальные группы поверхностей Y и поверхностей $\tilde{Y}$ имеют неизоморфные группы внешних автоморфизмов).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$ – totally разветвленное численно $(2, m)$ -каноническое циклическое накрытие поверхности Мияоки–Яу X , и пусть $\tilde{Y}_2$ – поверхность, деформационно эквивалентная поверхности Y_1 . Тогда каноническая модель Y_2 поверхности $\tilde{Y}_2$ может быть представлена в виде численно $(2, m)$ -канонического циклического накрытия поверхности X , totally разветвленного вдоль кривой $B_2 \subset X$, где B_2 – приведенная (но не обязательно неприводимая) кривая с ADE-особенностями.

Если $2m \geq 5$, то связная компонента M пространства модулей поверхностей, которому принадлежит Y_1 , является неприводимым многообразием размерности $m(2m - 1)K_X^2 + p_g(X)$. Размерность Кодaira $\kappa(M)$ многообразия M равна $-\infty$, и если иррегулярность $q(X)$ равна нулю, то M является унирациональным многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть накрытие $f_1: Y_1 \rightarrow X$ задано дивизором $C \sim mK_X + \alpha_1$ и разветвлено вдоль кривой $B_1 \in |2C|$.

Поскольку поверхности Y_1 и $\tilde{Y}_2$ деформационно эквивалентны, существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi: \tilde{Y}_2 \rightarrow Y_1$ такой, что $\varphi^*(K_{Y_1}) = K_{\tilde{Y}_2}$. Следовательно, согласно теореме Сью о жесткости [20] композиция $f_1 \circ \varphi$ гомотопна голоморфному отображению $h: \tilde{Y}_2 \rightarrow X$.

Имеем $\deg h = \deg(f_1 \circ \varphi) = 2$ и, следовательно, $h^*: \mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(\tilde{Y}_2)$ является расширением Галуа степени два. Пусть $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – нормализация поверхности X в поле $\mathbb{C}(\tilde{Y}_2)$, и пусть $\nu: \tilde{Y}_2 \rightarrow Y_2$ – такой морфизм, что $h = f_2 \circ \nu$ (фактически ν является минимальным разрешением особенностей поверхности Y_2).

Покажем, что Y_2 имеет как максимум только ADE-особенности. Действительно, если $D \subset \tilde{Y}_2$ – такая неприводимая кривая, что $\nu(D)$ является точкой, то

$$(K_{\tilde{Y}_2}, D)_{\tilde{Y}_2} = (\varphi^*(K_{Y_1}), D)_{\tilde{Y}_2} = (\varphi^*(f_1^*(D_1)), D)_{\tilde{Y}_2} = (h^*(D_1), D)_{\tilde{Y}_2} = 0,$$

где $D_1 \equiv mK_X + C \equiv (m + 1)K_X$. Из формулы присоединения отсюда следует, что D является рациональной кривой с $(D^2)_{\tilde{Y}_2} = -2$.

Поскольку $f_2: Y_2 \rightarrow X$ – двойное накрытие, его кривая ветвления, которую мы обозначим через B_2 , как и поверхность Y_2 , имеет как максимум только ADE-особенности. Покажем, что $B_2 \equiv 2mK_X$. Действительно, имеем $2K_{\tilde{Y}_2} = h^*(2K_X + B_2)$. С другой стороны,

$$2K_{\tilde{Y}_2} = 2\varphi^*(K_{Y_1}) \equiv 2(m+1)\varphi^*(f_1^*(K_X)) \equiv 2(m+1)h^*(K_X),$$

и поэтому $B_2 \equiv 2mK_X$.

Согласно замечанию 2 накрытие $f_2: Y_2 \rightarrow X$ задается дивизором $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$. Малая деформация кривой B_2 в гладкую кривую $B_3 \sim B_2$ задает численно $(2, m)$ -каноническое накрытие $f_3: Y_3 \rightarrow X$, тотально разветвленное вдоль B_3 и заданное дивизором $C_2 \sim mK_X + \alpha_2$. В силу существования одновременного разрешения простых особенностей поверхности Y_2 и Y_3 принадлежат одной и той же неприводимой компоненте пространства модулей поверхностей.

Согласно следствию 2 и теореме 4 существует автоморфизм $\psi \in \text{Aut}(X)$ такой, что $\psi^*(\delta(\alpha_2)) = \delta(\alpha_1)$. Следовательно, мы можем предполагать, что $\delta(\alpha_2) = \delta(\alpha_1)$ (заменяя f_2 на $\psi \circ f_2$) и, более того, все поверхности Y_t , деформационно эквивалентные поверхности Y_1 , являются тотально разветвленными численно $(2, m)$ -каноническими циклическими накрытиями поверхности X , заданными дивизорами $C_t \sim mK_X + \alpha_t$, где α_t – такие дивизоры, что $\delta(\alpha_t) = \delta(\alpha_1)$, а кривые ветвления $B_t \sim 2(mK_X + \alpha_t)$ накрытий в качестве своих особых точек могут иметь только ADE-особенности.

Пусть $\Delta = \delta(\alpha_1) \in \text{Tor}(X)$. Обозначим $\text{Pic}_\Delta(X) = \delta^{-1}(\Delta) \subset \text{Pic}(X)$. Как и в доказательстве теоремы 2, рассмотрим схему $T_{\Delta, 2m}$, параметризующую кривые B_t , лежащие на поверхности X , численно эквивалентные дивизору $2mK_X$ и такие, что $\delta(B_t) = 2m\delta(K_X) + 2\Delta$. Схема $T_{\Delta, 2m}$ расслоена над $\text{Pic}_\Delta(X)$, $\gamma_1: T_{\Delta, 2m} \rightarrow \text{Pic}_\Delta(X)$, со слоями $\gamma_1^{-1}(\alpha_t) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(2mK_X + d\alpha_t)))$ над точками $\alpha_t \in \text{Pic}_\Delta(X)$. Очевидно, подсхема U , состоящая из точек $t \in T_{\Delta, 2m}$, для которых кривые B_t приведены и имеют как максимум только ADE-особенности, является непустым открытым по Зарискому подмножеством.

Аналогично, пусть $T_{\Delta, 2}$ – схема, параметризующая кривые D_t на X , численно эквивалентные дивизору $2K_X$ и такие, что $\delta(D_t) = 2\delta(K_X) + \Delta$. Схема $T_{\Delta, 2}$ также расслоена над $\text{Pic}_\Delta(X)$, $\gamma_2: T_{\Delta, 2} \rightarrow \text{Pic}_\Delta(X)$, со слоями

$$\gamma_2^{-1}(\alpha_t) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X + \alpha_t)))$$

над $\tilde{\alpha}_t \in \text{Pic}_\Delta(X)$. Обозначим через $T = U \times_{\text{Pic}_\Delta(X)} T_{\Delta, 2}$ расслоенное произведение расслоений γ_1 и γ_2 , и пусть p_i , $i = 1, 2$, – это проекции схемы T на множители.

Отметим, что T является неприводимым многообразием и из приведенных выше рассмотрений и доказательства теоремы 2 следует, что точки многообразия T параметризуют все поверхности, деформационно эквивалентные поверхности Y_1 . Поэтому приведенные выше аргументы показывают, что связанная компонента M пространства модулей поверхностей, которой принадлежит поверхность Y_1 , является неприводимым многообразием.

Чтобы завершить доказательство теоремы, рассмотрим сюръективный морфизм $\mu: T \rightarrow M$. Легко видеть, что слои проекции p_1 являются подмногообразиями слоев морфизма μ . Покажем, что каждый слой морфизма μ является объединением конечного числа слоев проекции p_1 . Действительно, накрытие $f: Y \rightarrow X$ степени два, totally разветвленное вдоль кривой $B \equiv 2mK_X$, определяет расширение полей $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y)$ степени два. Это расширение определяет автоморфизм $f^* \in \text{Aut}(Y)$ второго порядка, множество неподвижных точек которого – это кривая ветвления R накрытия f (в случае, когда Y не имеет (-2) -кривых). Обратно, каждый автоморфизм $h \in \text{Aut}(Y)$ определяет однозначно множество своих неподвижных точек. Однако группы $\text{Aut}(X)$ и $\text{Aut}(Y)$ конечны, так как X и Y – поверхности общего типа. Следовательно, каждый слой морфизма μ является объединением конечного числа слоев проекции p_1 , и согласно теореме Штейна о факторизации морфизм μ пропускается через конечный морфизм $\mu_1: U \rightarrow M_1$.

Имеем

$$\dim M = \dim U = \dim |2mK_X + d\alpha_t| + q(X).$$

Из теоремы Мамфорда об обращении в нуль и теоремы Римана–Роха следует, что

$$\dim |2(mK_X + \alpha_1)| = \frac{(2(mK_X + \alpha_t), 2(mK_X + \alpha_t) - K_X)_X}{2} + p_g(X) - q(X).$$

Поэтому $\dim M = m(2m-1)K_X^2 + p_g(X)$, и, более того, так как U имеет размерность Кодaira $\kappa(U) = -\infty$, то M имеет ту же самую размерность Кодaira. Если $q = 0$, то U является рациональным многообразием, и поэтому M является унирациональным многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Те же самые аргументы, что и в доказательстве теоремы 6, показывают, что для любого $d \geq 2$ и произвольной поверхности Y_2 , деформационно эквивалентной поверхности Y_1 , полученной в виде totally разветвленного численно (d, m) -канонического циклического накрытия поверхности Мияоки–Яу X , существует морфизм $f_2: Y_2 \rightarrow X$ степени d ; однако если $d \geq 3$, то f_2 не обязательно является циклическим накрытием. Кроме того, эти аргументы позволяют получить оценку снизу размерности неприводимой компоненты M пространства модулей поверхностей, которой принадлежит поверхность Y_1 :

$$\dim M \geq \frac{dm(dm-1)}{2} K_X^2 + p_g(X).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из доказательства теоремы 6 следует, что для произвольной поверхности Y , являющейся totally разветвленным численно $(2, m)$ -каноническим циклическим накрытием поверхности Мияоки–Яу X , действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на Y (как группы накрывающих преобразований) деформируется вместе с любой деформацией комплексной структуры на Y .

§ 4. Новые примеры поверхностей, не имеющих антиголоморфных автоморфизмов

В данном параграфе под *сильной жесткостью Мостова* компактного комплексного многообразия X мы понимаем следующее свойство: *всякая гомотопическая эквивалентность $p: X \rightarrow X$ гомотопна либо голоморфному, либо антиголоморфному отображению $X \rightarrow X$* . Согласно теореме Мостова о жесткости ложные проективные плоскости и поверхности из [1, примеры 1, 2] обладают свойством сильной жесткости Мостова. Кроме того, как топологические пространства эти поверхности являются $K(\pi, 1)$ -пространствами.

Отметим, что здесь мы не включаем условие единственности в определение свойства сильной жесткости Мостова; причина этого состоит в том, что условие единственности не используется в доказательствах приведенных ниже результатов. (Отметим, однако, что если в определение включить это условие, то в утверждении замечания 9 слово “если” можно заменить на “если и только если”).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть поверхность общего типа X обладает свойством сильной жесткости Мостова. Если X является $K(\pi, 1)$ -пространством и группа $\text{Out}(\pi)$ не содержит элементов четного порядка, то тотально разветвленное численно (d, t) -каноническое циклическое накрытие Y поверхности X не может быть деформировано в поверхность, изоморфную поверхности $\bar{Y}$. В частности, любая поверхность Y' , полученная в результате деформации такой поверхности Y , не имеет антиголоморфных автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. предположим, что Y можно деформировать в поверхность Y' , изоморфную поверхности $\bar{Y}$. отождествим Y' как гладкое многообразие с поверхностью Y (с помощью диффеоморфизма, определенного деформацией) и обозначим через $c: Y \rightarrow Y'$ антиголоморфный диффеоморфизм между поверхностями Y и Y' . Сохраним то же самое обозначение c для диффеоморфизма многообразия Y , индуцированного отображением c в результате отождествления гладких многообразий Y и Y' .

Рассмотрим элемент $c_* \in \text{Out}(\pi_Y)$, индуцированный диффеоморфизмом c (и деформационной эквивалентностью между Y и Y'). Согласно предложению 1 имеем $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$. Поскольку поверхность общего типа X обладает свойством сильной жесткости Мостова и является $K(\pi, 1)$ -пространством, элемент c_* как элемент группы $\text{Out}(\pi_X) = \text{Out}(\pi_Y)$ имеет конечный порядок. Обозначим его через n , $n > 0$. Поскольку X является $K(\pi, 1)$ -пространством, из предложения 1 следует, что отображения $f: Y' = Y \rightarrow X$ и $f \circ c^n$ являются гомотопными, а так как, кроме того, $c^*(\delta(K_Y)) = -\delta(K_{Y'}) = -\delta(K_Y)$ (класс Черна $\delta(K)$, будучи целочисленным, не меняется при деформациях) в то время как f^* преобразует $(dm - m + 1)\delta(K_X)$ в $\delta(K_Y)$ по модулю кручения, то отсюда в свою очередь следует, что n является четным числом. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Дословно то же самое доказательство показывает, что поверхности Y (и Y'), удовлетворяющие условиям теоремы 7, не имеют диффеоморфизмов $f: Y \rightarrow Y$ таких, что $f^*[K] = -[K]$, $[K] \in H^2(Y; \mathbb{Q})$. Поэтому из инвариантности канонического класса при деформациях в классе почти комплексных структур следует, что мнимая часть ω кэллеровой структуры на Y , рассматриваемая как симплектическая структура на подлежащем гладком многообразии, и $-\omega$ не являются симплектически деформационно эквивалентными. Таким образом, теорема 7 и, в частности, ее приведенное ниже следствие 5 дают новые примеры не эквивалентных друг другу противоположных симплектических структур (ср. [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если поверхность общего типа X обладает свойством сильной жесткости Мостова и является $K(\pi, 1)$ -пространством, то фундаментальная группа $\pi_1(X)$ не имеет автоморфизмов четного порядка > 0 , если X не имеет ни антиголоморфных автоморфизмов, ни голоморфных автоморфизмов четного порядка.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если X является либо ложной проективной плоскостью, либо жесткой поверхностью, построенной в [1, пример 1], то каждая из поверхностей Y' , полученных в результате деформации тотально разветвленного численно (d, m) -канонического циклического накрытия Y поверхности X , не может быть деформирована в свой комплексно-сопряженный двойник и, в частности, не имеет антиголоморфных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано в [1], каждая из этих поверхностей X не имеет ни антиголоморфных автоморфизмов, ни голоморфных автоморфизмов четного порядка больше нуля. Таким образом, результат следует из теоремы 7 и замечания 9.

Список литературы

1. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “О вещественных структурах на жестких поверхностях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 133–152; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, V. M. Kharlamov, “On real structures on rigid surfaces”, *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 133–150.
2. M. Manetti, “On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces”, *Invent. Math.*, **143**:1 (2001), 29–76.
3. V. Kharlamov, Vik. S. Kulikov, “Deformation inequivalent complex conjugated complex structures and applications”, *Turkish J. Math.*, **26**:1 (2002), 1–25.
4. F. Catanese, “Moduli spaces of surfaces and real structures”, *Ann. of Math. (2)*, **158**:2 (2003), 577–592.
5. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “Поверхности с $\text{DIF} \neq \text{DEF}$ вещественными структурами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 135–174; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, V. M. Kharlamov, “Surfaces with $\text{DIF} \neq \text{DEF}$ real structures”, *Izv. Math.*, **70**:4 (2006), 769–807.
6. M. V. Nori, “Zariski’s conjecture and related problems”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **16**:2 (1983), 305–344.

7. E. Bombieri, “Canonical models of surfaces of general type”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **42**:1 (1973), 171–219.
8. W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+436 pp.
9. I. Reider, “Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:2 (1988), 309–316.
10. Вик. С. Куликов, “Старые и новый примеры поверхностей общего типа с $p_g = 0$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 123–170; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Old and new examples of surfaces of general type with $p_g = 0$ ”, *Izv. Math.*, **68**:5 (2004), 965–1008.
11. Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968, 236 с.; пер. с англ.: D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, *Ann. of Math. Stud.*, **59**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1966, xi+200 pp.
12. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971, 299 с.; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*, **5**, Oxford Univ. Press, London, 1970, viii+242 pp.
13. I. Bauer, F. Catanese, R. Pignatelli, “Surfaces of general type with geometric genus zero: a survey”, *Complex and differential geometry*, *Springer Proc. Math.*, **8**, Springer, Heidelberg, 2011, 1–48.
14. P. Burniat, “Sur les surfaces de genre $P_{12} > 1$ ”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **71**:1 (1966), 1–24.
15. M. Mendes Lopes, R. Pardini, “A new family of surfaces with $p_g = 0$ and $K^2 = 3$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **37**:4 (2004), 507–531.
16. G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, *Ann. of Math. Stud.*, **78**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1973, v+195 pp.
17. M. Gromov, P. Pansu, “Rigidity of lattices: an introduction”, *Geometric topology: recent developments* (Montecatini Terme, 1990), *Lect. Notes in Math.*, **1504**, Springer, Berlin, 1991, 39–137.
18. E. Witten, “Monopoles and four-manifolds”, *Math. Res. Lett.*, **1**:6 (1994), 769–796.
19. R. Brussee, “The canonical class and the C^∞ -properties of Kähler surfaces”, *New York J. Math.*, **2** (1996), 103–146 (electronic).
20. Yum-Tong Siu, “The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **112**:1 (1980), 73–111.

ВИКТОР СТЕПАНОВИЧ КУЛИКОВ

(VIKTOR S. KULIKOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

15.10.2013

ВЯЧЕСЛАВ МИХАЙЛОВИЧ ХАРЛАМОВ

(VIATCHESLAV M. KHARLAMOV)

University Louis Pasteur, Strasbourg, France

E-mail: kharlam@math.unistra.fr