Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, Об одном новом типе ℓ -адического регулятора для полей алгебраических чисел (ℓ -адический регулятор без логарифмов), *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 115–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:17:57

УДК 511.236.3

Л. В. Кузьмин

**Об одном новом типе ℓ -адического регулятора
для полей алгебраических чисел
(ℓ -адический регулятор без логарифмов)**

Для поля алгебраических чисел K , в котором вполне распадается простое ℓ , определяется регулятор $\Re_\ell(K) \in \mathbb{Z}_\ell$, характеризующий подгруппу универсальных норм из кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения поля K в пополненной группе S -единиц поля K , где S состоит из всех простых делителей ℓ . Доказано, что условие $\Re_\ell(K) \neq 0$ следует из ℓ -адической гипотезы Шенуэла и справедливо для некоторых абелевых расширений мнимых квадратичных полей. Изучается связь регулятора $\Re_\ell(K)$ со слабой гипотезой об ℓ -адическом регуляторе. Определяются аналоги регулятора Гросса.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: ℓ -адический регулятор, S -единицы, глобальная универсальная норма, гипотеза Шенуэла, теория Ивасава.

DOI: 10.4213/im8177

§ 1. Введение

Пусть K – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. В этом случае определен ℓ -адический регулятор $R_\ell(K) \in \mathbb{Q}_\ell$ поля K в смысле работы [1], который характеризует ℓ -адическое поведение группы единиц $U(K)$ поля K (мы воспроизводим его определение в § 2; см. гипотезу 2.3). Однако этот регулятор не совсем подходит для использования в теории Ивасава.

Например, предположим, что ℓ вполне распадается в K , и пусть K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . В этом случае для любого промежуточного подполя K_n расширения K_∞/K , где $[K_n: K] = \ell^n$ и $K = K_0$, определен регулятор $R_\ell(K_n)$, характеризующий группу единиц $U(K_n)$ поля K_n . Как было показано в [2], поведение ℓ -адических показателей $\nu_\ell(R_\ell(K_n))$ при росте n обнаруживает некоторые интересные закономерности. Существование этих закономерностей связано с тем, что с последовательностью групп единиц $\{U(K_n)\}_{n \geq 0}$ можно связать единый объект – модуль Галуа (относительно действия группы Галуа $\Gamma := G(K_\infty/K)$)

$$\overline{U}(K_\infty) := \varprojlim (U(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n)),$$

где $U(K_n)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы $U(K_n)$, $\mu_\ell(K_n)$ – группа всех корней из единицы ℓ -примарной степени в поле K_n и проективный предел берется относительно норменных отображений. В этом случае для любого n существует естественная проекция $\pi_n: \overline{U}(K_\infty) \rightarrow U(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n)$. В частности, имеется

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00588-а).

проекция $\pi: \overline{U}(K_\infty) \rightarrow U(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$. Однако в случае, когда ℓ вполне распадается в K и для поля K и простого ℓ справедлива гипотеза Леопольдта, мы имеем $\pi = 0$ (это объясняется подробнее в § 2). Поэтому целесообразно рассмотреть вместо группы $U(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$ некоторый другой объект, который ведет себя лучше с точки зрения теории Ивасава.

Именно, обозначим через S множество всех точек, лежащих над ℓ в любом из рассматриваемых полей, и пусть $U_S(K_n)$ – группа S -единиц поля K_n . Тогда с последовательностью групп $\{U_S(K_n)\}_{n \geq 0}$ можно связать Γ -модуль $\overline{U}_S(K_\infty) := \varprojlim (U_S(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n))$, где предел берется относительно норменных отображений. Для любого $n \geq 0$ имеется естественная проекция

$$\pi'_n: \overline{U}_S(K_\infty) \rightarrow U_S(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n).$$

Из компактности групп $U_S(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n)$ следует, что образ проекции π'_n , который мы будем обозначать через $U_{S,1}(K_n)$, совпадает с подгруппой универсальных норм в $U_S(K_n)[\ell]/\mu_\ell(K_n)$, т. е.

$$U_{S,1}(K_n) = \bigcap_{m > n} N_{K_m/K_n}(U_S(K_m)[\ell]/\mu_\ell(K_m)). \quad (1.1)$$

Новый ℓ -адический регулятор, который мы хотим определить, должен характеризовать ℓ -адическое поведение элементов группы $U_{S,1}(K_n)$, но в настоящей работе мы рассмотрим только случай $n = 0$, т. е. мы определим новый регулятор $\Re_\ell(K) \in \mathbb{Z}_\ell$, который характеризует группу $U_{S,1}(K)$ в предположении, что простое ℓ вполне распадается в K (случай произвольного поля K будет рассмотрен в следующей работе). Это ограничение позволит избежать многих технических осложнений и представить наш новый подход особенно наглядно.

Пусть $D = D(K)$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль, записываемый аддитивно, порожденный элементами из S . Тогда любому $a \in U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$ можно поставить в соответствие его “главный дивизор” $\text{div}(a) \in D$. Это сопоставление определяет гомоморфизм $\text{div}: U_{S,1}(K) \rightarrow D$, который в предположении, что для K и ℓ справедлива гипотеза Леопольдта, индуцирует вложение $\text{div}: U_{S,1}(K) \hookrightarrow D$.

На $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле D определено стандартное $\mathbb{Z}_\ell$ -линейное скалярное произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: D \times D \rightarrow \mathbb{Z}_\ell. \quad (1.2)$$

Именно, если $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ и $\alpha, \beta \in D$, $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i v_i$, $\beta = \sum_{i=1}^m b_i v_i$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_\ell$, то мы полагаем $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$. Предполагая справедливой гипотезу Леопольдта для поля K и простого ℓ , мы доказываем, что $U_{S,1}(K)$ – свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль ранга $t = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 – число соответственно вещественных и комплексных точек поля K , и определяем новый регулятор $\Re_\ell(K) \in \mathbb{Z}_\ell$ формулой

$$\Re_\ell(K) = \det(\langle \text{div}(e_i), \text{div}(e_j) \rangle), \quad 1 \leq i, j \leq t,$$

где $e_1, \dots, e_t$ – некоторый $\mathbb{Z}_\ell$ -базис модуля $U_{S,1}(K)$.

Заметим, что элемент $\Re_\ell(K)$, вообще говоря, определен с точностью до умножения на квадрат произвольного элемента из $\mathbb{Z}_\ell^\times$. Вопрос о том, как определить этот регулятор более однозначно, мы обсудим в следующей работе.

В настоящей работе рассматривается следующая

ОСНОВНАЯ ГИПОТЕЗА. Пусть K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ . Тогда $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$.

Очевидно, основная гипотеза равносильна утверждению, что произведение (1.2) индуцирует невырожденное скалярное произведение на $U_{S,1}(K)$, определенное формулой

$$\{\alpha, \beta\} = \langle \operatorname{div}(\alpha), \operatorname{div}(\beta) \rangle \quad (1.3)$$

для любых $\alpha, \beta \in U_{S,1}(K)$.

Мы доказываем, что основная гипотеза является следствием ℓ -адической гипотезы Шенуэла (см. гипотезу 2.1), даем не опирающееся ни на какие гипотезы доказательство основной гипотезы для некоторых типов абелевых расширений мнимых квадратичных полей и обнаруживаем нетривиальную взаимосвязь между основной гипотезой и слабой гипотезой об ℓ -адическом регуляторе (см. гипотезу 2.4). Мы определяем в группе $U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$ подгруппу $U_{\overline{S}}(K)$ и вводим два ℓ -адических регулятора Гросса, характеризующих эту группу. Первый определяется в терминах ℓ -адических логарифмов, а второй – в терминах дивизоров. Доказывается, что из ℓ -адической гипотезы Шенуэла следует невырожденность этих регуляторов.

Теперь мы изложим план работы и опишем наши основные результаты более подробно.

В § 2 мы даем необходимые определения и для удобства читателя формулируем те гипотезы, на которые мы будем ссылаться. Некоторые из них (гипотезы 2.1, 2.2) общеизвестны, в то время как гипотезы 2.3, 2.4 впервые были высказаны автором в [1]. Основным результатом § 2 – это теорема 2.1, которая вычисляет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг группы $U_{S,1}(K)$ и утверждает, что для расширения Галуа $K/\mathbb{Q}$ с группой Галуа G такого, что для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта, модули $(U(K)[\ell] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell$ и $U_{S,1}(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ изоморфны над кольцом $\mathbb{Q}_\ell[G]$ (здесь и во многих других случаях мы используем аддитивную запись для операции умножения).

Если $K/\mathbb{Q}$ не является расширением Галуа, то теорема 2.1 утверждает только равенство размерностей этих $\mathbb{Q}_\ell$ -пространств. Доказательство этой теоремы существенно использует теорию полей классов и теорию Ивасава. Для дальнейшего очень важно следствие 2.1, утверждающее, что в группе $U_{S,1}(K)$ существует элемент, аналогичный по своим свойствам единице Артина в группе единиц $U(K)$. Отметим, что в теореме 2.1 мы не предполагаем, что ℓ вполне распадается в K .

В § 3 следствие 2.1 используется для условного доказательства основной гипотезы. Именно, предполагая справедливость гипотезы 2.1, мы доказываем, что $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$ для любого поля алгебраических чисел K , в котором вполне распадается ℓ . В этом доказательстве можно предположить, что $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с группой Галуа G и K содержит мнимое квадратичное поле k . Для этого мы вводим еще одну гипотезу (гипотеза 3.1), которая аналогична гипотезе Леопольдта, но относится не к группе единиц, а к мультипликативному модулю Галуа, порожденному таким элементом $\alpha \in K$, что его главный дивизор (α) равен $\mathfrak{l}^h$, где $\mathfrak{l}$ – простой делитель ℓ в поле K и h – некоторое натуральное число, например число классов поля K . Гипотеза 3.1 следует из гипотезы 2.1, но мы формулируем ее отдельно, так как надеемся, что в каких-то случаях ее можно будет доказать, не используя гипотезу 2.1.

Гипотеза 3.1 позволяет явно определить некоторую группу $U_{S,2}(K)$, содержащую группу $U_{S,1}(K)$. Группа $U_{S,2}(K)$ – это группа локальных универсальных норм в $U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$, и при использовании гипотезы 2.1 удается доказать, что индекс $(U_{S,2}(K) : U_{S,1}(K))$ конечен (предложение 3.5). Отметим, что этот результат дает условное доказательство гипотезы 2 из [3] в случае, когда ℓ вполне распадается в K .

В процессе вычисления группы $U_{S,2}(K)$ возникает некоторый набор коэффициентов $\{c_h\}_{h \in H}$, где $H = G(K/k)$ (см. (3.11)), которые входят в соотношения между ℓ -адическими логарифмами некоторой единицы Артина ε в группе единиц $U(K)$ и сопряженных с ней единиц и ℓ -адическими логарифмами элементов $\sigma(\alpha)$, $\sigma \in G$. Предполагая справедливой гипотезу 2.1, мы доказываем (лемма 3.1), что после удаления из набора $\{c_h\}$ одного элемента c_{h_0} остальные образуют алгебраически независимое множество. Затем мы определяем аналог регулятора $\mathfrak{R}_\ell(K)$, который характеризует не группу $U_{S,1}(K)$, а группу $U_{S,2}(K)$, и доказываем, что этот аналог является ненулевым многочленом от элементов $\{c_h\}_{h \in H, h \neq h_0}$. Это доказывает теорему 3.1, утверждающую, что $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$, если верна гипотеза 2.1.

В § 4 дается безусловное доказательство основной гипотезы для одного частного случая (теорема 4.1). Мы предполагаем, что поле K нормально над $\mathbb{Q}$ и является абелевым расширением некоторого мнимого квадратичного поля k . Предполагаем также, что единственный нетривиальный автоморфизм τ расширения $k/\mathbb{Q}$ действует на группу Галуа $H = G(K/k)$ обращением, т.е. $\tau h \tau^{-1} = h^{-1}$ для любого $h \in H$. Кроме того, предполагается, что любой неприводимый характер χ группы H со значениями в $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ сопряжен с χ^{-1} над $\mathbb{Q}_\ell$.

Доказательство использует ту же идею, что и доказательство теоремы 3.1 из [1]. Именно, вместо произведения (1.3) мы рассматриваем более сложное произведение (4.1), которое обладает некоторой симметрией (предложение 4.1). Из невырожденности этого спаривания сразу вытекало бы, что $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$, однако эту невырожденность удается доказать только в предположении, что χ сопряжен с χ^{-1} для любого $\chi \in \hat{H}$.

Последнее условие зависит только от пары чисел (ℓ, m) , где m – период группы H , и предложение 4.3 дает полное описание всех таких пар. Можно поставить вопрос по-другому. Предположим, что поле K фиксировано. Как охарактеризовать множество простых ℓ таких, что пара (K, ℓ) удовлетворяет условиям теоремы 4.1, т.е. что $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$? Полный ответ на этот вопрос дан в предложении 4.4.

В § 5 изучается взаимосвязь между необращением в нуль регулятора $\mathfrak{R}_\ell(K)$ и слабой гипотезой об ℓ -адическом регуляторе (гипотеза 2.4). Эта гипотеза предполагает одновременное рассмотрение семейства билинейных форм $\tilde{S}_n$ (см. (5.1)) для всех промежуточных полей K_n кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K , поэтому желательно иметь конструкцию, объединяющую формы $\tilde{S}_n$ для всех n . Такая конструкция в грубой форме впервые появилась в [1], а затем в более совершенной форме в [4]. Она приводит к произведению (5.2), которое было использовано в [2], [4], [5] и других работах, и показало свою эффективность.

Важное наблюдение, которое и привело автора к концепции определения регулятора $\mathfrak{R}_\ell(K)$, состояло в том, что произведение (5.2) индуцирует произведение (5.14), а также (5.15) и (5.16). Последнее произведение с точностью до множителя $\mu \neq 0$ совпадает с произведением (1.3). Это позволяет доказать, что

для поля K такого, что для пары (K, ℓ) верна гипотеза Леопольдта, ℓ вполне распадается в K и $\Re_\ell(K) \neq 0$, верна и гипотеза 2.4 (теорема 5.1). Тем самым, те поля, о которых говорится в теореме 4.1, дают новые примеры справедливости гипотезы 2.4. Обратное к теореме 5.1 утверждение верно, если выполняется одно дополнительное условие, состоящее в том, что некоторый периодический Γ -модуль не имеет фактормодулей, изоморфных $\mathbb{Z}_\ell$, с тривиальным действием Γ (теорема 5.2).

В §6 мы определяем группу $U_S^-(K) \subset U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$, которая в случае поля CM -типа совпадает с подгруппой всех элементов, на которые автоморфизм комплексного сопряжения действует обращением. С этой группой связаны два регулятора Гросса $RG_\ell(K)$ и $\Re\mathfrak{G}_\ell(K)$. Первый определяется в терминах ℓ -адических логарифмов, а второй – в терминах дивизоров. Мы формулируем и доказываем некоторые условия, достаточные для невырожденности этих регуляторов (теорема 6.1). В качестве следствия мы получаем, что эти регуляторы отличны от нуля, если верна гипотеза 2.1.

Часть данной работы была написана, когда автор был гостем Математического института им. Хаусдорфа в Бонне (научно-исследовательский триместр “Арифметика и геометрия”). Автор благодарен персоналу института за гостеприимство и другим участникам триместра за стимулирующую атмосферу.

§ 2. Предварительные результаты

Пусть $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ – алгебраическое замыкание поля рациональных ℓ -адических чисел $\mathbb{Q}_\ell$ и $\log: \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ – ℓ -адический логарифм в смысле Ивасава.

Заметим, что в настоящей работе не используется ни вещественный, ни комплексный логарифм, так что обозначение $\log$ для ℓ -адического логарифма не может повести к двусмысленности. Таким образом, $\log$ – это гомоморфизм мультипликативной группы $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ в аддитивную группу $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, который однозначно характеризуется тем, что $\log(\ell) = 0$, $\log(\xi) = 0$ для любого корня из единицы ξ , и на группе главных единиц $U^{(1)}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ отображение $\log$ задается обычным степенным рядом.

Хорошо известная ℓ -адическая гипотеза Шенуэла утверждает, что для любых $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ таких, что числа $\ell, x_1, \dots, x_n$ мультипликативно независимы, т.е. равенство $\ell^c \prod_{i=1}^n x_i^{c_i} = 1$ не выполняется ни для какого ненулевого вектора $(c, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n, \log x_1, \dots, \log x_n)$ над $\mathbb{Q}$ не меньше n . В этой работе мы будем использовать только следующий частный случай этой гипотезы.

ГИПОТЕЗА 2.1. Пусть $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ – числа, алгебраические над $\mathbb{Q}$, и числа $\ell, x_1, \dots, x_n$ мультипликативно независимы. Тогда $\log x_1, \dots, \log x_n$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть K – поле алгебраических чисел и ℓ – фиксированное простое число. Тогда существует естественное вложение $i: K \hookrightarrow K \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong \prod_{i=1}^m K_{v_i}$, где K_{v_i} – пополнение K относительно точки v_i и $v_1, \dots, v_m$ – все точки поля K , лежащие над ℓ (в настоящий момент мы не требуем, чтобы ℓ вполне распадалось в K).

Рассматривая поля K_{v_i} как подполя поля $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, мы видим, что существуют вложения $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ поля K в $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ такие, что $\sigma_i(K) \subset K_{v_i}$ и $i(a) =$

$\{\sigma_1(a), \dots, \sigma_m(a)\} \in \prod_{i=1}^m K_{v_i}$ для любого $a \in K$. В частности, любому $x \in K^\times$ можно поставить в соответствие вектор

$$\log_\ell(x) = \{\log \sigma_1(x), \dots, \log \sigma_m(x)\}. \quad (2.1)$$

Таким образом, мы получаем гомоморфизм

$$\log_\ell: K^\times \rightarrow \prod_{i=1}^m K_{v_i}.$$

Если K – расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G , то последний гомоморфизм является G -гомоморфизмом. Отметим, что в случае, когда ℓ вполне распадается в K , мы имеем $m = [K: \mathbb{Q}]$ и $\prod_{i=1}^m K_{v_i} \cong \mathbb{Q}_\ell^m$.

ГИПОТЕЗА 2.2 (гипотеза Леопольдта). Пусть $u_1, \dots, u_r \in U(K)$ – мультипликативно независимые единицы поля K . Тогда $i(u_1), \dots, i(u_r)$ мультипликативно независимы над $\mathbb{Z}_\ell$ в $\prod_{i=1}^m K_{v_i}^\times$. Другими словами, векторы $\log_\ell u_1, \dots, \log_\ell u_r$ линейно независимы над $\mathbb{Q}_\ell$.

Вложение $i: U(K) \hookrightarrow \prod_{i=1}^m U(K_{v_i})$, где $U(K_{v_i})$ – группа единиц поля K_{v_i} , индуцирует гомоморфизм $i': U(K)[\ell] \rightarrow \prod_{i=1}^m U(K_{v_i})$, где $U(K)[\ell]$ – про- ℓ -полное замыкание группы $U(K)$. Гипотеза 2.2 равносильна утверждению, что i' – мономорфизм. В общем случае группа $E_\ell(K) := \ker i'$ называется *ядром Леопольдта*, и гипотеза Леопольдта утверждает, что $E_\ell(K) = 1$ для любой пары (K, ℓ) . Хорошо известно, что гипотеза Леопольдта следует из гипотезы 2.1. Гипотеза Леопольдта доказана для абелевых полей и абелевых расширений мнимых квадратичных полей.

Для поля алгебраических чисел K и простого ℓ пусть K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K , $G(K_\infty/K) := \Gamma \cong \mathbb{Z}_\ell$ – группа Галуа расширения K_∞/K и γ – фиксированная топологическая образующая группы Γ . Через K_n обозначим единственное промежуточное подполе расширения K_∞/K такое, что $[K_n: K] = \ell^n$. Таким образом, $K = K_0$. Далее будут нужны некоторые факты о группе $E_\ell(K)$ и последовательности групп $E_\ell(K_n)$. Следующее утверждение, имеющее статус теоремы, называется слабой гипотезой Леопольдта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см., например, [3]). *Группы $E(K_n)$ стабилизируются, начиная с некоторого n , т. е. существует индекс n , зависящий только от K и ℓ , такой, что естественное вложение $E_\ell(K_n) \hookrightarrow E_\ell(K_{n_1})$ является изоморфизмом для любого $n_1 > n$.*

Пусть M – максимальное абелево ℓ -расширение поля K_∞ , не разветвленное вне ℓ , и $X = G(M/K_\infty)$. Тогда Γ действует сопряжениями на X и, таким образом, X становится конечно порожденным Λ -модулем, где $\Lambda := \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ – пополненное групповое кольцо группы Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [3, предложение 5.4]. *Имеет место естественный изоморфизм $X^\Gamma \cong E_\ell(K)$.*

Следующая гипотеза является усилением гипотезы Леопольдта и следствием гипотезы 2.1 (см. [1, дополнение]). Мы приводим ее, так как она послужила мотивировкой для наших дальнейших рассуждений, кроме того, она непосредственно используется в § 6.

ГИПОТЕЗА 2.3 (гипотеза об ℓ -адическом регуляторе [1]). Для поля алгебраических чисел K и простого ℓ пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ – система основных единиц поля K и $\varepsilon_0 = 1 + \ell$ ($\varepsilon_0 = 5$ при $\ell = 2$). Пусть $R_\ell(K) := \det(\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log_\ell \varepsilon_i \log_\ell \varepsilon_j))$, $0 \leq i, j \leq r$, где через $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}$ обозначено отображение $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, индуцированное отображением следа $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}: K \rightarrow \mathbb{Q}$. Тогда $R_\ell(K) \neq 0$ для любых K и ℓ .

Следующая гипотеза соотносится с гипотезой 2.3 так же, как слабая гипотеза Леопольдта соотносится с гипотезой Леопольдта, но, в отличие от слабой гипотезы Леопольдта, формулируемая ниже гипотеза доказана только для некоторых частных случаев. Для ее формулировки необходимо понятие относительного регулятора. Если K/k – расширение полей алгебраических чисел и $U(K/k)$ – группа относительных единиц поля K над k , т.е.

$$U(K/k) = \{x \in U(K) \mid N_{K/k}(x) \in \mu(k)\},$$

где $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в поле k , и $u_1, \dots, u_t$ – некоторая система основных единиц группы $U(K/k)$, т.е. $u_1, \dots, u_t$ независимы и вместе с группой $\mu(K)$ порождают группу $U(K/k)$, то относительный регулятор $R_\ell(K/k)$ определяется формулой

$$R_\ell(K/k) = \det(\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log_\ell u_i \log_\ell u_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t.$$

ГИПОТЕЗА 2.4 (слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе [1]). Для поля алгебраических чисел K и его кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞ существует индекс n_0 , зависящий только от K и ℓ , такой, что $R_\ell(K_m/K_n) \neq 0$ для любых $m > n \geq n_0$.

Регулятор $\mathfrak{R}_\ell(K)$, который мы определяем и изучаем в настоящей работе, характеризует группу универсальных глобальных норм $U_{S,1}(K)$, определенную в (1.1). Поэтому нам будет нужна характеристика этой группы как модуля Галуа. В следующей теореме мы не налагаем никаких ограничений на тип разложения простого ℓ в поле K .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть K – конечное расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G и $R = \mathbb{Q}_\ell[G]$. Пусть для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта. Тогда существует изоморфизм R -модулей

$$\varphi: U_{S,1}(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong (U(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell$$

(мы записываем групповую операцию в $U_{S,1}(K)$ и $U(K)$ аддитивно). Без предположения, что K нормально над $\mathbb{Q}$, модуль $U_{S,1}(K)$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг $r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 – число соответственно вещественных и комплексных точек поля K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только первую часть теоремы. Для доказательства последнего утверждения теоремы необходимо повторить все нижеследующие утверждения, заменяя везде изоморфизм R -модулей на изоморфизм соответствующих $\mathbb{Q}_\ell$ -пространств.

Из теории представлений конечных групп известно, что любой конечно порожденный R -модуль однозначно разлагается в прямую сумму неприводимых

R -модулей. В частности, для R -модулей A , B , C из условия $A \oplus B \cong A \oplus C$ следует $B \cong C$.

Пусть M – максимальное абелево ℓ -расширение поля K_∞ , не разветвленное вне ℓ , и $X = G(M/K_\infty)$. Пусть M_n – максимальное абелево ℓ -расширение поля K_n , не разветвленное вне ℓ . Тогда для любого n мы имеем включения $K \subseteq K_n \subset K_\infty \subset M_n \subseteq M$ и группа Галуа $G(M_n/K_n)$ содержится в точной последовательности

$$1 \longrightarrow X_n \longrightarrow G(M_n/K_n) \longrightarrow \Gamma_n \longrightarrow 1,$$

где $X_n = G(M_n/K_\infty) = X/(\gamma_n - 1)X$, $\gamma_n = \gamma^{\ell^n}$ и $\Gamma_n = G(K_\infty/K_n) = \langle \gamma_n \rangle$. В частности, при $n = 0$ мы получаем точную последовательность $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модулей

$$1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow G(M_0/K) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1. \quad (2.2)$$

Для доказательства теоремы определим R -модуль $Y(K) := G(M_0/K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ двумя различными способами.

Пусть $V(K)$ – подгруппа группы $G(M_0/K)$, порожденная подгруппами инерции всех точек v , лежащих над ℓ . Тогда G -модуль $V(K)$ имеет конечный индекс в $G(M_0/K)$ и согласно глобальной теории полей классов группа $V(K)$ содержится в точной последовательности G -модулей

$$1 \longrightarrow U(K)[\ell] \xrightarrow{\alpha} \prod_{v|\ell} U(K_v)_\ell \longrightarrow V(K) \longrightarrow 1, \quad (2.3)$$

где $U(K_v)$ – группа единиц локального поля K_v , $U(K_v)_\ell$ – ℓ -компонента группы $U(K_v)$, которая совпадает с группой главных единиц $U^{(1)}(K_v)$, и произведение берется по всем точкам v поля K , лежащим над ℓ . Заметим, что α является вложением, поскольку мы предполагаем, что для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта.

Поскольку ℓ -адический логарифм отображает $U^{(1)}(K_v)$ на некоторую полную решетку в K_v и имеет конечное ядро, он индуцирует изоморфизм R -модулей

$$\prod_{v|\ell} (U(K_v)_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \cong \prod_{v|\ell} K_v \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong R, \quad (2.4)$$

где последний изоморфизм следует из теоремы о нормальном базисе. Таким образом, из (2.3) следует, что

$$(U(K)[\ell] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus Y(K) \cong R, \quad (2.5)$$

где $Y(K) := V(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Теперь мы охарактеризуем G -модуль $Y(K)$ другим способом. Для этого мы вычислим G -модуль $X_0 = G(M_0/K_\infty)$ в терминах теории Ивасава. Заметим, что группа $G(M_n/K_n)$ содержится в точной последовательности Γ/Γ_n -модулей

$$1 \longrightarrow W(K_n) \longrightarrow G(M_n/K_n) \longrightarrow C(K_n) \longrightarrow 1, \quad (2.6)$$

где $W(K_n)$ – подгруппа группы $G(M_n/K_n)$, порожденная подгруппами разложения всех точек v , лежащих над ℓ , а $C(K_n)$ – группа Галуа максимального

абелева неразветвленного ℓ -расширения поля K_n , в котором вполне распадаются все точки $v|\ell$. Заметим, что согласно глобальной теории полей классов группа $C(K_n)$ канонически изоморфна группе $\text{Cl}'_\ell(K_n)$ – факторгруппе ℓ -компоненты $\text{Cl}_\ell(K_n)$ группы классов $\text{Cl}(K_n)$ поля K_n по подгруппе, порожденной всеми простыми делителями ℓ .

Для любой пары индексов $m > n$ последовательности (2.6) для K_n и K_m включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & W(K_m) & \longrightarrow & G(M_m/K_m) & \longrightarrow & C(K_m) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow f_{m,n} & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & W(K_n) & \longrightarrow & G(M_n/K_n) & \longrightarrow & C(K_n) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (2.7)$$

в которой вертикальные стрелки индуцированы ограничениями автоморфизмов.

Переходя в (2.6) к проективному пределу относительно вертикальных отображений диаграммы (2.7), мы получаем точную последовательность Γ -модулей

$$1 \longrightarrow W(K_\infty) \longrightarrow X \longrightarrow T_\ell(K_\infty) \longrightarrow 1, \quad (2.8)$$

где $W(K_\infty)$ – подгруппа группы X , порожденная подгруппами разложения всех точек v , лежащих над ℓ , и $T_\ell(K_\infty)$ – группа Галуа максимального абелева неразветвленного ℓ -расширения поля K_∞ , в котором вполне распадаются все точки поля K_∞ , лежащие над ℓ .

В силу предложения 2.2 имеем $X^\Gamma = 1$, поэтому (2.8) дает точную гомологическую последовательность

$$1 = X^\Gamma \longrightarrow T_\ell(K_\infty)^\Gamma \longrightarrow W(K_\infty)_0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow T_\ell(K_\infty)_0 \longrightarrow 1, \quad (2.9)$$

где для Γ -модуля A через A_0 обозначена группа $A/(\gamma - 1)A$.

Согласно теории Ивасава $T_\ell(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ является конечномерным $\mathbb{Q}_\ell$ -пространством.

ЛЕММА 2.1. Пусть K – произвольное конечное расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G и $R = \mathbb{Q}_\ell[G]$. Пусть A – конечномерное $\mathbb{Q}_\ell$ -пространство, на которое непрерывно действует группа Галуа $G(K_\infty/\mathbb{Q})$. Тогда R -модули A^Γ и $A_0 = A/(\gamma - 1)A$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по размерности A . Если $\dim A = 1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\dim A = d$, и предположим, что лемма уже доказана для всех размерностей, меньших d . Если $A^\Gamma = 0$, то умножение на $\gamma - 1$ является мономорфизмом и, следовательно, изоморфизмом. Поэтому $A_0 = 0$ и утверждение леммы выполняется. Пусть $A^\Gamma \neq 0$. Положим $B = A^\Gamma \cap (\gamma - 1)A$. Если $B = 0$, то, учитывая, что $\dim A^\Gamma = \dim A_0$, мы получаем, что естественный эпиморфизм $A \rightarrow A_0$ индуцирует изоморфизм R -модулей $A^\Gamma \rightarrow A_0$. Если $B \neq 0$, то положим $B_1 = \{x \in A/B \mid (\gamma - 1)\bar{x} \in B\} = (A/B)^\Gamma$, где $\bar{x}$ – некоторый прообраз x в A . Тогда умножение на $\gamma - 1$ определяет R -эпиморфизм $B_1 \rightarrow B$, ядро которого совпадает с A^Γ/B . Следовательно, $B_1 \cong A^\Gamma$ как R -модули, т.е. R -модули A^Γ и $(A/B)^\Gamma$ изоморфны. Поскольку $\dim B \neq 0$, мы имеем $(A/B)^\Gamma \cong (A/B)_0$ по предположению индукции, но $(A/B)_0 \cong A_0$. Лемма доказана.

Умножая (2.9) тензорно на $\mathbb{Q}_\ell$ и применяя лемму 2.1 к R -модулю $T_\ell(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, мы получаем

$$W(K_\infty)_0 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong X_0 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell. \quad (2.10)$$

Согласно глобальной теории полей классов при любом $n \geq 0$ группа $W(K_n)$ содержится в точной последовательности $G(K_n/\mathbb{Q})$ -модулей

$$1 \longrightarrow E(K_n) \longrightarrow U_S(K_n)[\ell] \longrightarrow \prod_{v|\ell} (K_{n,v}^\times[\ell]) \longrightarrow W(K_n) \longrightarrow 1, \quad (2.11)$$

где через $[\ell]$ обозначено про- ℓ -пополнение. Последовательности (2.11) для K_m и K_n при $m > n$ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & E_\ell(K_m) & \longrightarrow & U_S(K_m)[\ell] & \longrightarrow & \prod_{v|\ell} (K_{m,v}^\times[\ell]) & \longrightarrow & W(K_m) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow N_{m,n} & & \downarrow N_{m,n} & & \downarrow N_{m,n} & & \downarrow f_{m,n} & & \\ 1 & \longrightarrow & E_\ell(K_n) & \longrightarrow & U_S(K_n)[\ell] & \longrightarrow & \prod_{v|\ell} (K_{n,v}^\times[\ell]) & \longrightarrow & W(K_n) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

где отображения $N_{m,n}$ индуцированы норменными отображениями из K_m в K_n , а $f_{m,n}$ – отображение из диаграммы (2.7).

Переходя в (2.11) к проективному пределу относительно вертикальных отображений предыдущей диаграммы и учитывая, что $\varprojlim E_\ell(K_n) = 1$ в силу предложения 2.1, мы получаем точную последовательность Γ -модулей

$$1 \longrightarrow U_S(K_\infty) \longrightarrow \varprojlim_{v|\ell} \prod (K_{n,v}^\times[\ell]) \longrightarrow W(K_\infty) \longrightarrow 1, \quad (2.12)$$

где $U_S(K_\infty) = \varprojlim U_S(K_n)[\ell]$ и предел берется относительно норменных отображений.

Обозначим группу $\varprojlim_{v|\ell} \prod (K_{n,v}^\times[\ell])$ через $\tilde{H}(K_\infty)$. Поскольку $W(K_\infty) \subseteq X$, из предложения 2.2 следует, что $W(K_\infty)^\Gamma = 0$, поэтому (2.12) индуцирует точную гомологическую последовательность

$$1 \longrightarrow U_S(K_\infty)_0 \longrightarrow \tilde{H}(K_\infty)_0 \longrightarrow W(K_\infty)_0 \longrightarrow 1. \quad (2.13)$$

Предположим, что с каждым полем K_n , где $n \geq 0$, связан $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль Галуа $A(K_n)$, причем для любой пары индексов $m > n$ задано вложение $i(n, m): A(K_n) \rightarrow A(K_m)$ такое, что $i(n, m)(A(K_n)) = A(K_m)^{\Gamma_n}$ и $i(k, m) = i(n, m) \circ i(k, n)$ для любых $m > n > k$. Тогда для любых $m > n$ норменное отображение $N_{\Gamma_n/\Gamma_m}: A(K_m) \rightarrow A(K_m)^{\Gamma_n}$ относительно группы Γ_n/Γ_m индуцирует отображение $N_{m,n}: A(K_m) \rightarrow A(K_n)$, $N_{m,n} = i(n, m)^{-1} \circ N_{\Gamma_n/\Gamma_m}$. Положим $A(K_\infty) = \varprojlim A(K_n)$, где предел берется относительно отображений $N_{m,n}$. Тогда набор отображений $N_{m,0}: A(K_m) \rightarrow A(K)$ определяет отображение $N: A(K_\infty) \rightarrow A(K)$. С другой стороны, любое отображение $N_{m,n}$ пропускается через естественную проекцию $\pi_m: A(K_m) \rightarrow A(K_m)/(\gamma - 1)A(K_m)$.

Следовательно, отображение N пропускается через естественную проекцию $\pi: A(K_\infty) \rightarrow A(K_\infty)_0 = A(K_\infty)/(\gamma - 1)A(K_\infty)$, т. е. существует отображение $j: A(K_\infty)_0 \rightarrow A(K)$ такое, что $N = j \circ \pi$. Мы будем иметь дело с двумя такими наборами модулей Галуа: $A_1(K_n) = U_S(K_n)[\ell]$ и $A_2(K_n) = \prod_{v|\ell} (K_{n,v}^\times[\ell])$. Обозначая отображения N , π и j для этих наборов через N_1 , π_1 , j_1 и N_2 , π_2 , j_2 соответственно, мы видим, что точные последовательности (2.12), (2.13) можно включить в коммутативную диаграмму с точными строками (в которой $j_1 \circ \pi_1 = N_1$ и $j_2 \circ \pi_2 = N_2$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & U_S(K_\infty) & \longrightarrow & \tilde{H}(K_\infty) & \longrightarrow & W(K_\infty) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\
 1 & \longrightarrow & U_S(K_\infty)_0 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{H}(K_\infty)_0 & \longrightarrow & W(K_\infty)_0 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow j_1 & & \downarrow j_2 & & \\
 & & U_S(K)[\ell] & \xrightarrow{\beta} & \prod_{v|\ell} (K_v^\times[\ell]) & &
 \end{array} \quad (2.14)$$

ЛЕММА 2.2. *Гомоморфизмы j_1 и j_2 являются мономорфизмами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что j_2 – мономорфизм. Для этого достаточно проверить, что $\hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_n, \prod_{v|\ell} (K_{n,v}^\times[\ell])) = 0$ для любого n , где $\hat{H}^{-1}$ – группа когомологий Тэйта. Поскольку K нормально над $\mathbb{Q}$, существует индекс $r \geq 0$ такой, что все простые точки поля K , лежащие над ℓ , вполне распадаются в K_r/K и любая точка $v|\ell$ поля K_r имеет единственное продолжение в поле K_∞ . Если $n \leq r$, то Γ/Γ_n -модуль $D_n := \prod_{v|\ell} (K_{n,v}^\times[\ell])$ является индуцированным и, следовательно, когомологически тривиальным. Если $n > r$, то модуль D_n является относительно индуцированным и по лемме Шапиро

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_n, D_n) = \hat{H}^{-1}\left(\Gamma_r/\Gamma_n, \prod_{v \in S_0} (K_{n,v}^\times[\ell])\right) = \prod_{v \in S_0} \hat{H}^{-1}(\Gamma_r/\Gamma_n, K_{n,v}^\times[\ell]), \quad (2.15)$$

где S_0 – множество точек поля K_n , которое для каждой точки $v_0|\ell$ поля K содержит ровно одно ее продолжение в поле K_n . Последняя группа в соотношении (2.15) тривиальна в силу теоремы Гильберта 90, т. е. $\hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_n, D_n) = 0$. Это означает, что π_2 и N_2 имеют одно и то же ядро и, следовательно, j_2 – мономорфизм. Таким образом, j_2 устанавливает изоморфизм между $\tilde{H}(K_\infty)_0$ и подгруппой (локальных) универсальных норм в $\prod_{v|\ell} (K_v^\times[\ell])$.

Поскольку $j_2 \circ \alpha = \beta \circ j_1$ и α , β , j_2 – мономорфизмы, мы получаем, что и j_1 – мономорфизм. Лемма доказана.

Таким образом, j_1 устанавливает изоморфизм между $U_S(K_\infty)_0$ и группой глобальных универсальных норм $\text{Im} N_1 = U_{S,1}(K)$.

Для конечного расширения L поля $\mathbb{Q}_\ell$ обозначим через $F(L)$ подгруппу универсальных норм в $L^\times[\ell]$ из поля L_∞ , т. е.

$$F(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{L_n/L}(L_n^\times[\ell]).$$

Тогда, отождествляя во второй строке диаграммы (2.14) модули $U_S(K_\infty)_0$ и $\tilde{H}(K_\infty)_0$ с модулями $U_{S,1}(K)$ и $\prod_{v|\ell} F(K_v)$ (отождествление осуществляется с помощью отображений j_1 и j_2 соответственно), мы получаем точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_{S,1}(K) \longrightarrow \prod_{v|\ell} F(K_v) \longrightarrow W(K_\infty)_0 \longrightarrow 1. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть K – расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G и $R = \mathbb{Q}_\ell[G]$. Тогда имеет место изоморфизм R -модулей

$$\left(\prod_{v|\ell} F(K_v) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – конечное расширение Галуа поля $\mathbb{Q}_\ell$ с группой Галуа H и $\theta_L: L^\times[\ell] \hookrightarrow G_{\ell,L}^{\text{ab}}$ – отображение взаимности, где $G_{\ell,L}^{\text{ab}}$ – группа Галуа максимального абелева ℓ -расширения поля L . Пусть $\pi: G_{\ell,L}^{\text{ab}} \rightarrow \Gamma$ – естественная проекция, где Γ – группа Галуа кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения поля L . Тогда $F(L)$ совпадает с ядром отображения $\pi \circ \theta_L$. Если $L = \mathbb{Q}_\ell$, то непосредственная проверка показывает, что $F(\mathbb{Q}_\ell)$ совпадает с ядром логарифмического отображения $\log: \mathbb{Q}_\ell^\times[\ell] \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ (заметим, что отображение $\log$, изначально определенное на $\mathbb{Q}_\ell^\times$, однозначно продолжается по линейности на $\mathbb{Q}_\ell^\times[\ell]$).

Если L – конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, то коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} L^\times[\ell] & \xrightarrow{\theta_L} & G_{\ell,L}^{\text{ab}} \\ \downarrow N_{L/\mathbb{Q}_\ell} & & \downarrow \text{res} \\ \mathbb{Q}_\ell^\times[\ell] & \xrightarrow{\theta_{\mathbb{Q}_\ell}} & G_{\ell,\mathbb{Q}_\ell}^{\text{ab}} \end{array}$$

где $N_{L/\mathbb{Q}_\ell}$ – норменное отображение и res – отображение ограничения автоморфизмов. Таким образом, $F(L)$ совпадает с прообразом $F(\mathbb{Q}_\ell)$ относительно отображения $N_{L/\mathbb{Q}_\ell}$. Другими словами,

$$F(L) = \{x \in L^\times[\ell] \mid \text{Sp}_{L/\mathbb{Q}_\ell}(\log x) = 0\}. \quad (2.17)$$

Пусть $P(L) = F(L) \cap U^{(1)}(L)$, где $U^{(1)}(L)$ – группа главных единиц поля L . Тогда для любого $x \in P(L)$ мы имеем $N_{L/\mathbb{Q}_\ell}(x) = 1$ при $\ell \neq 2$ и $N_{L/\mathbb{Q}_\ell}(x) = \pm 1$ при $\ell = 2$. Следовательно, группа $U^{(1)}(L)$ содержится в точной последовательности H -модулей

$$1 \longrightarrow P(L) \longrightarrow U^{(1)}(L) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0,$$

где $\alpha = \log \circ N_{L/\mathbb{Q}_\ell}$. Таким образом, записывая аддитивно групповую операцию в $P(L)$ и $U^{(1)}(L)$, мы получаем

$$(P(L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell \cong U^{(1)}(L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong L \cong \mathbb{Q}_\ell[H]. \quad (2.18)$$

С другой стороны, существует точная последовательность H -модулей

$$1 \longrightarrow P(L) \longrightarrow F(L) \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 1, \quad (2.19)$$

где для $x \in F(L)$ через $\nu(x) \in \mathbb{Z}_\ell$ обозначается ℓ -адический показатель x . Отображение ν ненулевое, так как $\ell \in F(L)$ и $\nu(\ell) \neq 0$, поэтому A – подгруппа конечного индекса в $\mathbb{Z}_\ell$ и, следовательно, $A \cong \mathbb{Z}_\ell$. Сравнивая (2.18) и (2.19), мы получаем, что $F(L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong U^{(1)}(L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell[H]$.

Рассмотрим поле K . Для любого его пополнения K_v , где $v|\ell$, в силу уже доказанного имеем $F(K_v) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell[G_v]$, где G_v – подгруппа разложения v в G . Поскольку

$$\left(\prod_{v|\ell} F(K_v) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \prod_{v|\ell} (F(K_v) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell), \quad \prod_{v|\ell} F(K_v) \cong \text{Ind}_G^{G_v} F(K_v),$$

мы получаем

$$\left(\prod_{v|\ell} F(K_v) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong \text{Ind}_G^{G_v} (F(K_v) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \cong \text{Ind}_G^{G_v} \mathbb{Q}_\ell[G_v] \cong R.$$

Лемма доказана.

Теперь можно легко завершить доказательство теоремы. Из (2.2) и (2.5) следует, что

$$(U(K)[\ell] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus (X_0 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell \cong R.$$

С другой стороны, из (2.10), (2.16) и леммы 2.3 мы получаем

$$(U_{S,1}(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \oplus (X_0 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \cong R.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ – мнимое квадратичное поле и K – расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G , содержащее поле k . Пусть $H = G(K/k)$ и τ – один из автоморфизмов комплексного сопряжения в G ; в частности, это означает, что $\tau^2 = 1$ и $\tau(\sqrt{-d}) \neq \sqrt{-d}$. Тогда в группе $U_{S,1}(K)$ существует элемент ω такой, что $\tau(\omega) = \omega$ и элементы $\{h(\omega)\}_{h \in H}$ порождают подмодуль конечного индекса в $U_{S,1}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В группе единиц $U(K)$ существует единица ε , называемая единицей Артина, такая, что $\tau(\varepsilon) = \varepsilon$ и единицы $\{h(\varepsilon)\}_{h \in H}$ порождают в $U(K)$ подгруппу конечного индекса. Тогда элемент $\varepsilon_1 = \varepsilon \oplus 1$ порождает R -модуль $(U(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell) \oplus \mathbb{Q}_\ell$ и элемент $\omega_1 = \varphi^{-1}(\varepsilon_1)$, где φ – изоморфизм, существование которого устанавливает теорема 2.1, обладает тем свойством, что $\tau(\omega_1) = \omega_1$ и набор элементов $\{h(\omega_1)\}_{h \in H}$ образует базис $\mathbb{Q}_\ell$ -пространства $U_{S,1}(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Для достаточно большого s мы имеем $\ell^s \omega_1 \in U_{S,1}(K)$, поэтому можно положить $\omega = \ell^s \omega_1$.

§ 3. Условное доказательство основной гипотезы

Мы начнем доказательство основной гипотезы с того, что дадим более подробное определение регулятора $\Re_\ell(K)$ для поля алгебраических чисел K и простого ℓ , вполне распадающегося в K .

Пусть $l_1, \dots, l_m$ – все простые дивизоры, лежащие над ℓ в поле K . Тогда любой S -единице $u \in U_S(K)$, где $S = \{l_1, \dots, l_m\}$, соответствует ее главный дивизор (u) , который мы будем записывать в аддитивной форме:

$$(u) = \sum_{i=1}^m a_i l_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Мы определим группу $D(K)$ как свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль с образующими $l_1, \dots, l_m$ и будем рассматривать дивизор (u) как элемент группы $D(K)$. Тогда любому элементу u из про- ℓ -пополнения $U_S(K)[\ell]$ группы $U_S(K)$ соответствует его дивизор $\text{div}(u) \in D(K)$. Если $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, где $u_n \in U_S(K)$, то $\text{div}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{div}(u_n)$. Очевидно, что $\text{div}(u)$ зависит только от образа u в группе $\bar{U}_S(K)[\ell] := U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$, где $\mu_\ell(K)$ – группа всех корней из единицы ℓ -примарной степени в поле K .

На $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле $D(K)$ мы рассматриваем симметричную невырожденную билинейную форму

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i \in \mathbb{Z}_\ell \quad (3.1)$$

для $x, y \in D(K)$, $x = \sum_{i=1}^m a_i l_i$, $y = \sum_{i=1}^m b_i l_i$. Для того чтобы отметить зависимость произведения (3.1) от поля K , будем записывать $\langle x, y \rangle_K$.

Если σ – автоморфизм поля K , то σ действует на множестве S , следовательно, и на группе $D(K)$. Очевидно, что при этом

$$\langle x, y \rangle = \langle \sigma x, \sigma y \rangle. \quad (3.2)$$

Пусть K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K и $U_{S,1}(K)$ – группа глобальных универсальных норм, определенная во введении. Пусть $e_1, \dots, e_t$ – $\mathbb{Z}_\ell$ -базис группы $U_{S,1}(K)$. Тогда мы полагаем

$$\mathfrak{R}_\ell(K) = \det(\langle \text{div}(e_i), \text{div}(e_j) \rangle), \quad 1 \leq i, j \leq t.$$

Если $e'_1, \dots, e'_t$ – некоторый другой базис $U_{S,1}(K)$ и C – матрица перехода от одного базиса к другому, то определенные с помощью этих двух базисов регуляторы отличаются множителем $(\det C)^2 \in \mathbb{Z}_\ell^\times$. В частности, ℓ -адический показатель $\nu_\ell(\mathfrak{R}_\ell(K))$ не зависит от выбора базиса в $U_{S,1}(K)$.

Отметим некоторые простые свойства спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и регулятора $\mathfrak{R}_\ell(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть ℓ вполне распадается в K и для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта. Тогда отображение $\text{div}: U_{S,1}(K) \rightarrow D(K)$ является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро отображения $\text{div}: \bar{U}_S(K)[\ell] \rightarrow D(K)$ совпадает с про- ℓ -пополнением группы $\bar{U}(K)[\ell]$, где $\bar{U}_S(K) = U_S(K)/\mu(K)$, $\bar{U}(K) = U(K)/\mu(K)$ и $\mu(K)$ – группа всех корней из единицы в поле K . Таким образом, достаточно проверить, что $U_{S,1}(K) \cap (\bar{U}(K)[\ell]) = 1$. Если ξ – элемент этого пересечения, то, как было показано в доказательстве теоремы 2.1, для любого вложения $\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ должно выполняться условие $\log \sigma(\xi) = 0$. Это означает, что ξ^d , где d – порядок группы $\mu(K)$, принадлежит ядру Леопольдта $E_\ell(K)$, которое по предположению тривиально. Предложение доказано.

Пусть L/K – расширение полей алгебраических чисел и простое ℓ вполне распадается в L , а следовательно, и в K . Тогда существуют естественные отображения $i_{L/K}: D(K) \rightarrow D(L)$ и $N_{L/K}: D(L) \rightarrow D(K)$, первое из которых индуцировано вложением $K \hookrightarrow L$, а второе – норменным отображением $L^\times$ в $K^\times$. Тогда для любых $x, y \in D(K)$ и $z \in D(L)$ выполняются равенства

$$\langle x, y \rangle_K = [L:K] \langle i_{L/K}(x), i_{L/K}(y) \rangle_L, \quad \langle x, N_{L/K}(z) \rangle_K = \langle i_{L/K}(x), z \rangle_L. \quad (3.3)$$

Действительно, равенства (3.3) достаточно проверить в случае, когда x, y, z – простые дивизоры, но в этом случае равенства очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть L – расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G , простое ℓ вполне распадается в L и $K \subseteq L$. Тогда из условия $\mathfrak{R}_\ell(L) \neq 0$ следует $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = G(L/K)$. Вложение $K \hookrightarrow L$ индуцирует вложение $i: U_{S,1}(K) \hookrightarrow U_{S,1}(L)$, а норменное отображение $N: L^\times \rightarrow K^\times$ индуцирует отображение $N: U_{S,1}(L) \rightarrow U_{S,1}(K)$, ядро которого мы будем обозначать через B . Поскольку группа $F := i(U_{S,1}(K)) \oplus B$ имеет конечный индекс в $U_{S,1}(L)$ и $\mathfrak{R}_\ell(L) \neq 0$ по условию, мы получаем, что спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ не вырождено на группе F . В силу (3.3) группы $i(U_{S,1}(K))$ и B ортогональны относительно этого спаривания, поэтому спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ не вырождено на группе $i(U_{S,1}(K))$. Тогда в силу равенств (3.3) спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ не вырождено на группе $U_{S,1}(K)$, т. е. $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$. Предложение доказано.

Хотя само определение регулятора $\mathfrak{R}_\ell(K)$ не использует ℓ -адических логарифмов, они потребуются для условного доказательства основной гипотезы (теорема 3.1), поэтому мы начнем со следующих рассуждений.

ГИПОТЕЗА 3.1. Пусть K – расширение Галуа степени n поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G , в котором вполне распадается простое ℓ . Пусть $\mathfrak{l}$ – простой дивизор поля K , лежащий над ℓ , и α – такой элемент $K^\times$, что $(\alpha) = \mathfrak{l}^{\mathbf{h}}$ для некоторого натурального $\mathbf{h}$ (например, можно считать, что $\mathbf{h}$ – число классов поля K). Тогда любые $n-1$ элементов из элементов $\log_\ell \sigma_1(\alpha), \dots, \log_\ell \sigma_n(\alpha)$, где σ_i пробегают G , линейно независимы над $\mathbb{Q}_\ell$ в пространстве $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поскольку $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \mathfrak{l}^{\mathbf{h}}$, выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \log_\ell \sigma_i(\alpha) = \log_\ell(N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)) = 0. \quad (3.4)$$

Следующий результат показывает, что гипотеза 3.1 является в какой-то мере аналогом гипотезы Леопольдта. Этот результат не будет использован в настоящей работе, но мы приводим его ради полноты изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть K – абелево поле алгебраических чисел степени n , в котором вполне распадается простое ℓ . Тогда для K справедлива гипотеза 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = G(K/\mathbb{Q})$ и $\alpha \in K^\times$ – число из формулировки гипотезы 3.1. Пусть $\varepsilon_0 = 1 + \ell$ при $\ell \neq 2$ и $\varepsilon_0 = 5$ при $\ell = 2$. Положим $\beta = \alpha \varepsilon_0$. Тогда для доказательства предложения достаточно проверить,

что $(n \times n)$ -матрица A , строками которой являются векторы $\log_\ell \sigma_j \sigma_1^{-1}(\beta), \dots, \log_\ell \sigma_j \sigma_n^{-1}(\beta)$, не вырождена. Общий элемент этой матрицы имеет вид $a_{ij} = \log \sigma_j \sigma_i^{-1}(\beta)$. Таким образом, определитель $\det A$ этой матрицы является определителем Дедекинда, и согласно [7, гл. 3, § 6, теорема 6.1]

$$\det A = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma) \log \sigma(\beta), \quad (3.5)$$

где $\widehat{G}$ – группа характеров группы G .

Очевидно, что числа $\sigma_1^{-1}(\beta), \dots, \sigma_n^{-1}(\beta), \ell$ мультипликативно независимы. Поэтому согласно ℓ -адическому аналогу теоремы Бейкера (см. работу [8]) числа $\log \sigma_1^{-1}(\beta), \dots, \log \sigma_n^{-1}(\beta) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ линейно независимы над полем всех алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$. Следовательно, все сомножители в правой части (3.5) отличны от нуля, и $\det A \neq 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Гипотеза 3.1 следует из гипотезы 2.1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа степени n с группой Галуа G и ℓ – простое число, вполне распадающееся в K . Пусть ε_0 и β имеют тот же смысл, что и в доказательстве предложения 3.3. Рассуждая, как и в доказательстве предложения 3.3, мы видим, что достаточно проверить невырожденность $(n \times n)$ -матрицы с общим элементом $a_{ij} = \log \sigma_j \sigma_i^{-1}(\beta)$, $1 \leq i, j \leq n$. Определитель $\det A$ этой матрицы является многочленом степени n от n переменных $X_1 = \log \sigma_1(\beta), X_2 = \log \sigma_2(\beta), \dots, X_n = \log \sigma_n(\beta)$, $\sigma_i \in G$, где без ограничения общности можно считать, что $\sigma_1 = 1$. Тогда на главной диагонали матрицы A стоят элементы X_1 , а вне главной диагонали стоят элементы $X_2, \dots, X_n$. Таким образом, $\det A = P(X_1, \dots, X_n) = X_1^n + \dots$, где P – многочлен степени n от $X_1, \dots, X_n$ и многоточие обозначает сумму одночленов, содержащих X_1 в степени, меньшей n . Следовательно, P – ненулевой многочлен. Согласно гипотезе 2.1 числа $\log \sigma_1(\beta), \dots, \log \sigma_n(\beta)$ алгебраически независимы, поэтому $\det A \neq 0$. Предложение доказано.

Наряду с группой глобальных универсальных норм $U_{S,1}(K)$ мы будем рассматривать также группу всюду локальных универсальных норм $U_{S,2}(K)$, определенную формулой

$$U_{S,2}(K) := \{x \in \overline{U}_S(K)[\ell] \mid x \in N_{n,v}(K_{n,v}^\times) \ \forall v\}, \quad (3.6)$$

где $N_{n,v}$ – норма из пополнения $K_{n,v}$ поля K_n в K_v и v пробегает все точки поля K . Заметим, что $N_{n,v}$ – норма относительно подгруппы разложения точки v . Непосредственно из определения следует, что $U_{S,2}(K) \supseteq U_{S,1}(K)$.

Отметим, что расширение K_n/K не разветвлено в любой точке $v \nmid \ell$, а любой элемент $u \in U_S(K)$ является единицей вне S . Следовательно, условие (3.6) автоматически выполняется для всех точек $v \nmid \ell$. Для $v \mid \ell$ согласно (2.17) условие (3.6) означает, что $\log(N_{K_v/\mathbb{Q}_\ell}(x)) = 0$. Если ℓ вполне распадается в K , то $K_v = \mathbb{Q}_\ell$ для любой точки $v \mid \ell$ и условие (3.6) сводится к условию $\log \sigma(x) = 0$ для любого вложения K в $\mathbb{Q}_\ell$, которое эквивалентно условию

$$\log_\ell x = 0. \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа степени n с группой Галуа G и простое ℓ вполне распадается в K . Пусть для пары (K, ℓ) справедливы гипотеза 2.2 (гипотеза Леопольдта) и гипотеза 3.1. Тогда группа $U_{S,1}(K)$ имеет конечный индекс в группе $U_{S,2}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $U_{S,1}(K)$ равен $r+1$, где r – ранг группы единиц $U(K)$, поэтому достаточно проверить, что такой же $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг имеет $U_{S,2}(K)$.

Рассмотрим $\mathbb{Q}_\ell$ -пространство $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell^n$ размерности n . Пусть V – подпространство в $\mathbb{Q}_\ell^n$, порожденное элементами $\log_\ell \sigma_i(\alpha)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ – все вложения K в $\mathbb{Q}_\ell$ и α – число из гипотезы 3.1. Тогда любой элемент $x \in V$ может быть записан в виде линейной комбинации:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \log_\ell \sigma_i(\alpha), \quad (3.8)$$

причем ввиду (3.4) и гипотезы 3.1 коэффициенты $a_i \in \mathbb{Q}_\ell$ определены однозначно с точностью до постоянного слагаемого. В частности, мы можем считать в (3.8), что $a_n = 0$, а $a_1, \dots, a_{n-1}$ однозначно определены элементом x .

Рассмотрим в качестве x логарифмы $\log_\ell \varepsilon_1, \dots, \log_\ell \varepsilon_r$ некоторой системы основных единиц поля K . Таким образом, мы получаем систему равенств

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_{ij} \log_\ell \sigma_i(\alpha) = \log_\ell \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq r,$$

где коэффициенты $c_{ij} \in \mathbb{Q}_\ell$ определены однозначно.

Пусть ℓ^s – такая степень ℓ , что $d_{ij} := \ell^s c_{ij} \in \mathbb{Z}_\ell$ для всех i, j . Положим

$$\eta_j = \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i(\alpha)^{d_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (3.9)$$

Тогда элементы $\eta_j \in U_S(K)[\ell]$ удовлетворяют условию $\log_\ell \eta_j = 0$ и, следовательно, образы элементов η_j в группе $U_S(K)[\ell]/\mu_\ell(K)$ лежат в группе $U_{S,2}(K)$. Пусть теперь $y \in U_S(K)[\ell]$ и $y \bmod \mu_\ell(K) \in U_{S,2}(K)$. Тогда, полагая $y_1 = y^{\ell^s}$ для достаточно большого s , мы имеем представление

$$y_1 = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)^{a_i} \times \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{b_j} \quad (3.10)$$

для некоторых $a_i, b_j \in \mathbb{Z}_\ell$. Поскольку $\ell \in U_{S,2}(K)$, умножая y_1 на ℓ^{-a_n} и вспоминая, что $(\ell) = l_1 \cdots l_n$, мы можем считать, что $a_n = 0$ в (3.10).

Рассмотрим элемент $z := y_1 \prod_{j=1}^r \eta_j^{b_j}$. Поскольку $y_1 \in U_{S,2}(K)$, мы имеем $\log_\ell y_1 = 0$ и, следовательно, $\log_\ell z = 0$. Однако из (3.9) и (3.10) следует, что $z = \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i(\alpha)^{h_i}$, где $h_i = a_i + \sum_{j=1}^r b_j d_{ij}$. Согласно гипотезе 3.1 векторы $\log_\ell \sigma_i(\alpha)$, $1 \leq i < n$, линейно независимы над $\mathbb{Q}_\ell$. Следовательно, $h_i = 0$ для $i = 1, \dots, n-1$, т.е. любой $y \in U_{S,2}(K)$ представим в виде $y = \ell^{b_0} \prod_{j=1}^r \eta_j^{b_j} \bmod \mu_\ell(K)$ для некоторых $b_0, b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}_\ell$. Этим доказано, что $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $U_{S,2}(K)$ не превышает $r+1$. Тогда из теоремы 2.1 и включения $U_{S,1}(K) \subseteq U_{S,2}(K)$ следует, что индекс $(U_{S,2}(K) : U_{S,1}(K))$ конечен. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть K – некоторое (не обязательно нормальное над $\mathbb{Q}$) поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ . Пусть L – нормальное замыкание K . В силу предложения 3.5 имеем $(U_{S,2}(L): U_{S,1}(L)) < \infty$, если справедливы гипотезы 2.2, 3.1, но тогда в предположении справедливости этих гипотез и $(U_{S,2}(K): U_{S,1}(K)) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть $T_\ell(K_\infty)$ – Γ -модуль, фигурирующий в доказательстве теоремы 2.1. В работе [3] была высказана гипотеза (гипотеза 2), что группа $T_\ell(K_\infty)^\Gamma$ конечна для любого поля алгебраических чисел K и любого простого ℓ , и было доказано (предложение 7.5), что (в обозначениях настоящей работы) $T_\ell(K_\infty)^\Gamma \cong U_{S,2}(K)/U_{S,1}(K)$. Таким образом, предложение 3.5 показывает, что в случае, когда ℓ вполне распадается в K , последняя гипотеза следует из гипотезы 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть простое ℓ вполне распадается в K и для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта. Группа $U_{S,1}(K)$ имеет конечный индекс в $U_{S,2}(K)$ тогда и только тогда, когда образ отображения $\log_\ell: U_S(K)[\ell] \rightarrow \prod_{v|\ell} K_v$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг $n - 1$, где $n = [K: \mathbb{Q}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l = l_1, l_2, \dots, l_n$ – все простые делители ℓ в поле K и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in U_S(K)$ – такие элементы, что $(\alpha_i) = I_i^{s_i}$ для некоторых натуральных s_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $N \subseteq \mathbb{Z}_\ell^n$ – подмодуль всех тех векторов $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, при которых $\sum_{i=1}^n x_i \log_\ell \alpha_i = \log_\ell u$ для некоторого $u \in U(K)[\ell]$. Тогда для любого $x \in N$ элемент $u^{-1} \prod_{i=1}^n \alpha_i^{x_i}$ принадлежит $U_{S,2}(K)$ и, следовательно, ранг N равен рангу $U_{S,2}(K)$. Если $U_{S,1}(K)$ имеет конечный индекс в $U_{S,2}(K)$, то в силу теоремы 2.1 этот ранг равен $r_1 + r_2$. Отсюда следует, что модуль $\mathbb{Z}_\ell^n/N$ имеет ранг r_2 . Следовательно, $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $\log_\ell(U_S(K)[\ell])/\log_\ell(U(K)[\ell])$ имеет ранг r_2 . Поскольку $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $\log_\ell(U(K)[\ell])$ имеет ранг $r_1 + r_2 - 1$, мы доказали наше утверждение в одну сторону.

Предположим теперь, что $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг модуля $\log_\ell(U_S(K)[\ell])$ равен $n - 1$. Это означает, что $\log_\ell(U_S(K)[\ell])/\log_\ell(U(K)[\ell])$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг r_2 . Тогда ранг N равен $r_1 + r_2$, т.е. ранг $U_{S,2}(K)$ совпадает с рангом $U_{S,1}(K)$ и, следовательно, индекс $(U_{S,2}(K): U_{S,1}(K))$ конечен. Предложение доказано.

Теперь мы сформулируем и докажем основной результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ . Тогда из гипотезы 2.1 следует, что $\Re_\ell(K) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ℓ вполне распадается в K , то ℓ вполне распадается в нормальном замыкании L поля K . Если ℓ распадается в мнимом квадратичном поле $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, то ℓ вполне распадается и в поле $F = L \cdot k$. Согласно предположению 3.2 из справедливости теоремы для F следует ее справедливость для поля K .

Итак, мы можем предполагать, что K является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа G и $K \supset k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Пусть $H = G(K/k)$, $[K: k] = n$ и $\tau \in G$ – некоторый автоморфизм комплексного сопряжения, в частности, это означает, что $\tau^2 = 1$ и $\tau \notin H$. Пусть $\alpha \in U_S(K)$ имеет тот же смысл, что и в гипотезе 3.1. Согласно предположению 3.4 эта гипотеза выполняется для K и, следовательно, любые $2n - 1$ элементов из набора $2n$ элементов $\{\log_\ell \sigma(\alpha)\}_{\sigma \in G}$

линейно независимы над $\mathbb{Q}_\ell$ и образуют базис $\mathbb{Q}_\ell$ -пространства

$$V := \{x \in K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell^{2n} \mid \mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(x) = 0\}.$$

Пусть $\varepsilon \in U(K)$ – единица Артина, т.е. $\tau(\varepsilon) = \varepsilon$ и набор из n элементов $\{\sigma(\varepsilon)\}_{\sigma \in H}$ порождает подгруппу конечного индекса в $U(K)$. Поскольку $\log_\ell(\varepsilon) \in V$, существуют коэффициенты $a_\sigma \in \mathbb{Q}_\ell$, $\sigma \in G$, такие, что

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \log_\ell \sigma(\alpha) = \log_\ell \varepsilon,$$

причем коэффициенты a_σ определены однозначно с точностью до произвольного постоянного слагаемого, т.е. вместо a_σ мы можем выбрать набор коэффициентов $a'_\sigma = a_\sigma + c$, где $c \in \mathbb{Q}_\ell$ не зависит от σ .

Положим (в аддитивной записи)

$$z = (1 + \tau) \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma(\alpha) \in U_S(K)[\ell].$$

Учитывая, что $(1 + \tau)\tau\sigma(\alpha) = (1 + \tau)\sigma(\alpha)$, мы получаем

$$z = (1 + \tau) \sum_{h \in H} c_h h(\alpha), \quad c_h = a_h + a_{\tau h}, \quad (3.11)$$

при этом коэффициенты c_h определены с точностью до постоянного слагаемого и

$$2 \log_\ell \varepsilon = \log_\ell z = (1 + \tau) \sum_{h \in H} c_h \log_\ell h(\alpha). \quad (3.12)$$

Зафиксируем элемент $h_0 \in H$, $h_0 \neq 1$. Вычитая из всех c_h коэффициент c_{h_0} , мы можем считать, не ограничивая общности, что коэффициент c_{h_0} в соотношении (3.12) равен нулю.

ЛЕММА 3.1. Пусть $c_{h_0} = 0$ в (3.12) для некоторого $h_0 \neq 1$. Тогда в предположении справедливости гипотезы 2.1 остальные $n - 1$ коэффициентов c_h , $h \in H$, $h \neq h_0$, алгебраически независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему из $3n - 2$ элементов $T = T_1 \cup T_2$, где $T_1 = \{\sigma(\alpha)\}_{\sigma \in G, \sigma \neq 1}$, $T_2 = \{h(\varepsilon)\}_{h \in H, h \neq 1}$. Заметим, что мы рассматриваем K как подполе поля $\mathbb{Q}_\ell$ и этому же полю принадлежат все рассматриваемые ниже логарифмы. Система $T \cup \{\ell\}$ мультипликативно независима, поэтому логарифмы элементов из T , т.е. $3n - 2$ элементов $\log \sigma(\alpha)$, где $\sigma \in G$ и $\sigma \neq 1$, и $\log h(\varepsilon)$, где $h \in H$ и $h \neq 1$, алгебраически независимы, т.е. поле, порожденное этими логарифмами, которое мы будем обозначать через $\mathbb{Q}(\log T)$, имеет степень трансцендентности $3n - 2$ над $\mathbb{Q}$.

Умножая обе части равенства (3.12) на любой элемент $\sigma \in H$ и учитывая, что отображение $\log_\ell$ является G -гомоморфизмом, мы получаем, используя аддитивную запись для умножения, следующее:

$$2 \log_\ell \sigma(\varepsilon) = \sum_{h \in H} c_h \log_\ell \sigma(1 + \tau)h(\alpha), \quad c_{h_0} = 0.$$

Приравнивая в этом равенстве векторов первые координаты, мы получаем

$$2 \log \sigma(\varepsilon) = \sum_{h \in H} c_h \log \sigma(1 + \tau) h(\alpha)$$

для всех $\sigma \in H$. Таким образом, полагая $T_3 = \{c_\sigma\}_{\sigma \in H, \sigma \neq h_0}$ (напомним, что $c_{h_0} = 0$), мы получаем, что все элементы из $\log T_2$ содержатся в поле $\mathbb{Q}(\log T_1, T_3)$. Поскольку степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\log(T_1 \cup T_2))$ равна $3n - 2$, мы получаем, что степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\log T_1, T_3)$ не меньше $3n - 2$, но множество $T_1 \cup T_3$ содержит $3n - 2$ элементов. Следовательно, все элементы из T_3 алгебраически независимы. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $z' = z\varepsilon^{-2}$. Тогда $\log_\ell z' = 0$, т. е. для z' выполнено условие (3.7), а следовательно, и условие (3.6), т. е. $z' \in U_{S,2}(K)$. Поскольку мы предполагаем справедливой гипотезу 2.1, можно считать, что для поля K справедлива гипотеза Леопольдта и гипотеза 3.1. Тогда согласно предположению 3.5 мы имеем $z_1 := (z')^{\ell^s} \in U_{S,1}(K)$ для некоторого натурального s . Докажем, что матрица $C = (\{h_i(z_1), h_j(z_1)\})$, $1 \leq i, j \leq n$, невырождена, где $h_1, \dots, h_n$ – все элементы группы H , перенумерованные в некотором порядке, и $\{, \}$ – произведение (1.3). Если мы докажем это, то получим, что элементы $h_1(z_1), \dots, h_n(z_1)$ мультипликативно независимы над $\mathbb{Z}_\ell$ (поскольку их дивизоры линейно независимы над $\mathbb{Q}_\ell$). Таким образом, в силу теоремы 2.1 элементы $h_1(z_1), \dots, h_n(z_1)$ порождают подгруппу Y конечного индекса в $U_{S,1}(K)$. Далее, условие $\det C \neq 0$ означает, что спаривание $\{, \}$ не вырождено на Y , но тогда оно не вырождено и на $U_{S,1}(K)$, что доказывает теорему.

Чтобы не усложнять обозначений, мы будем в качестве C рассматривать матрицу $C' := \ell^{-2s} \mathbf{h}^{-2} C$, где $\mathbf{h}$ определяется из условия $(\alpha) = \mathbf{l}^{\mathbf{h}}$. Общий элемент этой матрицы равен $\mathbf{h}^{-2} \{h_i(z'), h_j(z')\}$. Учитывая, что $\operatorname{div}(z') = \operatorname{div}(z) = \mathbf{h}(1 + \tau) \sum_{\sigma \in H} c_\sigma \sigma(\mathbf{l})$, мы получаем

$$\mathbf{h}^{-2} \{h_i(z'), h_j(z')\} = \left\langle h_i(1 + \tau) \sum_{\sigma \in H} c_\sigma \sigma(\mathbf{l}), h_j(1 + \tau) \sum_{\sigma \in H} c_\sigma \sigma(\mathbf{l}) \right\rangle. \quad (3.13)$$

Вычисляя правую часть в (3.13) и учитывая, что

$$\langle \sigma_1(\mathbf{l}), \sigma_2(\mathbf{l}) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma_1 = \sigma_2, \\ 0 & \text{при } \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, мы получаем $\mathbf{h}^{-2} \{h_i(z'), h_j(z')\} = f_{ij}(c_1, \dots, c_{n-1})$, где $f_{ij}(c_1, \dots, c_{n-1})$ – некоторая квадратичная форма от $c_1, \dots, c_{n-1}$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Таким образом, $\det C$ – это некоторый многочлен F от $c_1, \dots, c_{n-1}$ степени $2n$, и мы хотим показать, что $F \neq 0$ как многочлен. Для этого рассмотрим, с каким коэффициентом входит c_1^{2n} в F .

Используя билинейность произведения $\langle, \rangle$, из (3.13) мы получаем

$$\mathbf{h}^{-2} \{h_i(z'), h_j(z')\} = A_{ij} + B_{ij},$$

где

$$A_{ij} = \sum_{\beta, \gamma \in H} \langle h_i c_\beta \beta(l), h_j c_\gamma \gamma(l) \rangle + \sum_{\beta, \gamma \in H} \langle h_i \tau c_\beta \beta(l), h_j \tau c_\gamma \gamma(l) \rangle,$$

$$B_{ij} = \sum_{\beta, \gamma \in H} \langle h_i \tau c_\beta \beta(l), h_j c_\gamma \gamma(l) \rangle + \sum_{\beta, \gamma \in H} \langle h_i c_\beta \beta(l), h_j \tau c_\gamma \gamma(l) \rangle.$$

Элементы $h_i \tau \beta$ и $h_j \gamma$ лежат в разных классах смежности по H . Это же верно и для элементов $h_i \beta$ и $h_j \tau \gamma$. Следовательно, $B_{ij} = 0$. Таким образом, $f_{ij}(c_1, \dots, c_{n-1}) = A_{ij}$.

Для вычисления A_{ij} заметим, что

$$\langle h_i c_\beta \beta(l), h_j c_\gamma \gamma(l) \rangle = \begin{cases} c_\beta c_\gamma & \text{при } h_i \beta = h_j \gamma, \\ 0 & \text{при } h_i \beta \neq h_j \gamma, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\langle h_i \tau c_\beta \beta(l), h_j \tau c_\gamma \gamma(l) \rangle = \begin{cases} c_\beta c_\gamma & \text{при } h_i \tau \beta = h_j \tau \gamma, \\ 0 & \text{при } h_i \tau \beta \neq h_j \tau \gamma. \end{cases} \quad (3.15)$$

На главной диагонали матрицы C' мы имеем $i = j$, т. е. $h_i = h_j$, поэтому из соотношений (3.14) и (3.15) следует $A_{ii} = \sum_{k=1}^{n-1} 2c_k^2$. Таким образом, произведение элементов матрицы C' , стоящих на главной диагонали, дает в определитель $\det C'$ вклад $\prod_{i=1}^n A_{ii} = (\sum_{k=1}^{n-1} 2c_k^2)^n = 2^n c_1^{2n} + \dots$, где многоточие означает сумму одночленов, содержащих c_1 в степенях, меньших $2n$.

Рассмотрим теперь A_{ij} для $i \neq j$, т. е. в случае, когда $h_i \neq h_j$. В этом случае равенства $h_i \beta = h_j \gamma$ или $h_i \tau \beta = h_j \tau \gamma$ возможны только при $\beta \neq \gamma$. Тогда из (3.14) и (3.15) следует, что при $i \neq j$ квадратичная форма $f_{ij}(c_1, \dots, c_{n-1}) = A_{ij}$ не содержит c_1^2 . Следовательно, любое слагаемое в $\det C'$, кроме произведения элементов, стоящих на главной диагонали, содержит c_1 в степени не выше $2n - 1$. Таким образом, $\det C' = F(c_1, \dots, c_{n-1})$ – ненулевой многочлен от $c_1, \dots, c_{n-1}$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. В силу леммы 3.1 элементы $c_1, \dots, c_{n-1}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Следовательно, $\det C \neq 0$, а это означает, что $\Re_\ell(K) \neq 0$. Теорема доказана.

§ 4. Частные случаи невырожденности регулятора $\Re_\ell(K)$

Пусть K – конечное абелево расширение мнимого квадратичного поля $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ и K нормально над $\mathbb{Q}$. Пусть $G = G(K/\mathbb{Q})$, $H = G(K/k)$ и τ – некоторый автоморфизм комплексного сопряжения. В частности, это означает, что $\tau \in G \setminus H$ и $\tau^2 = 1$. Пусть простое ℓ вполне распадается в K и S – множество всех простых делителей ℓ в поле K . Тогда ℓ распадается в k в произведение двух простых дивизоров: $(\ell) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, и S можно представить в виде непересекающегося объединения: $S = S_1 \cup S_2$, где S_i состоит из всех простых дивизоров поля K , лежащих над $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, 2$. Соответственно, мы получаем $D(K) = \mathbb{Z}_\ell[S] = D_1(K) \oplus D_2(K)$, где $D_i(K) = \mathbb{Z}_\ell[S_i]$ для $i = 1, 2$. Группа H действует на S_1 и S_2 , и относительно этого действия модули $D_i(K)$ изоморфны $\mathbb{Z}_\ell[H]$ для $i = 1, 2$. Автоморфизм τ действует на $D(K)$, меняя местами модули $D_1(K)$ и $D_2(K)$.

Если $x, y \in D(K)$, $x = \sum_{i=1}^{2n} a_i l_i$, $y = \sum_{i=1}^{2n} b_i l_i$, где $n = [K:k]$, $l_1, \dots, l_n \in S_1$, $l_{n+1}, \dots, l_{2n} \in S_2$, то мы, кроме спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, рассматривавшегося в § 3,

определим еще два спаривания:

$$\langle x, y \rangle_{K,1} = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad \langle x, y \rangle_{K,2} = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i b_i.$$

Мы определим также относительное спаривание

$$\langle x, y \rangle_{K/k} = \langle x, y \rangle_{K,1} \mathbf{p}_1 + \langle x, y \rangle_{K,2} \mathbf{p}_2 \in D(k). \quad (4.1)$$

Непосредственная проверка показывает, что для любого $\sigma \in G$ и любых $x, y \in D(K)$

$$\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle_{K/k} = \sigma(\langle x, y \rangle_{K/k}), \quad (4.2)$$

где G действует на $D(k)$ через ограничение автоморфизмов, т. е. H действует на $D(k)$ тривиально, а τ переставляет $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Очевидно, что для любых $x, y \in D(K)$

$$\langle x, y \rangle_K = \langle x, y \rangle_{K,1} + \langle x, y \rangle_{K,2}. \quad (4.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $K, k, G, H, \tau, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ определены так же, как и выше, и $x \in D(K)$ – такой элемент, что $\tau(x) = x$. Пусть τ действует на H по правилу $\tau(h) = \tau h \tau^{-1} = \tau h \tau = h^{-1}$ для любого $h \in H$. Тогда для любых $h_i, h_j \in H$ справедливо равенство

$$\tau(\langle h_i(x), h_j(x) \rangle_{K/k}) = \langle h_i(x), h_j(x) \rangle_{K/k}. \quad (4.4)$$

Другими словами,

$$\langle h_i(x), h_j(x) \rangle_1 = \langle h_i(x), h_j(x) \rangle_2. \quad (4.5)$$

Если A – $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -модуль, порожденный x , то для любых $x, y \in A$ справедливо равенство $\tau(\langle x, y \rangle_{K/k}) = \langle x, y \rangle_{K/k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} \tau(\langle h_i(x), h_j(x) \rangle_{K/k}) &= \langle \tau h_i(x), \tau h_j(x) \rangle_{K/k} \\ &= \langle \tau h_i \tau \tau(x), \tau h_j \tau \tau(x) \rangle_{K/k} = \langle h_i^{-1}(x), h_j^{-1}(x) \rangle_{K/k}. \end{aligned}$$

Применяя автоморфизм $h_i h_j$ и снова используя (4.2), мы получаем

$$\begin{aligned} \langle h_i^{-1}(x), h_j^{-1}(x) \rangle_{K/k} &= h_i h_j \langle h_i^{-1}(x), h_j^{-1}(x) \rangle_{K/k} \\ &= \langle h_j(x), h_i(x) \rangle_{K/k} = \langle h_i(x), h_j(x) \rangle_{K/k}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Пусть H – конечная абелева группа и $\hat{H}$ – группа одномерных характеров H со значениями в $\mathbb{Q}_\ell$. Пусть Φ – множество всех неприводимых характеров H , определенных над $\mathbb{Q}_\ell$. Любой характер $\varphi \in \Phi$ – это сумма всех $\chi \in \hat{H}$, сопряженных друг с другом относительно действия группы Галуа $G(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$. Если χ входит в такую сумму, мы говорим, что χ входит в φ или χ делит φ , и записываем это в виде формулы $\varphi = \sum_{\chi|\varphi} \chi$. Если $e_\chi = |H|^{-1} \sum_{h \in H} \bar{\chi}(h) h$ – идемпотент, соответствующий χ , то $e_\varphi = \sum_{\chi|\varphi} e_\chi \in \mathbb{Q}_\ell[H]$ – идемпотент, соответствующий φ .

Пусть $A \cong \mathbb{Q}_\ell[H]$ – свободный $\mathbb{Q}_\ell[H]$ -модуль ранга 1. Тогда $A \cong \bigoplus_{\varphi \in \Phi} A_\varphi$, где $A_\varphi = e_\varphi A$. Для любого $\varphi \in \Phi$ имеем $A_\varphi \neq 0$ и A_φ является неприводимым $\mathbb{Q}_\ell[H]$ -модулем, причем при $\varphi \neq \varphi_1$ мы имеем $A_\varphi \not\cong A_{\varphi_1}$. Для характера $\varphi \in \Phi$, где $\varphi = \sum_{\chi|\varphi} \chi$, через $\bar{\varphi}$ обозначим характер $\sum_{\chi|\varphi} \chi^{-1}$. Очевидно, что из неприводимости φ следует неприводимость $\bar{\varphi}$, и наоборот.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть A – свободный $\mathbb{Q}_\ell$ -модуль ранга 1, на котором определено невырожденное симметричное билинейное спаривание $(,): A \times A \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, удовлетворяющее условию $(ha, hb) = (a, b)$ для любых $a, b \in A$, $h \in H$. Тогда спаривание $(,): A_\varphi \times A_{\bar{\varphi}} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ не вырождено, а спаривание $(,): A_\varphi \times A_\psi \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ нулевое для любого $\varphi \in \Phi$ и $\psi \neq \bar{\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – период группы H и $L = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_m)$, где ζ_m – первообразный корень из единицы степени m . Тогда любой характер $\chi \in \hat{H}$ определен над L и $L[H]$ -модуль $B = A \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L$ разлагается на одномерные над L компоненты: $B = \bigoplus_\chi B_\chi$, где $B_\chi = e_\chi B$. При этом $A_\varphi \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} L = \bigoplus_{\chi|\varphi} B_\chi$ для любого $\varphi \in \Phi$. Спаривание $(,)$ индуцирует L -билинейное спаривание $(,)_1: B \times B \rightarrow L$, которое также удовлетворяет условию $(a, b)_1 = (ha, hb)_1$ для любых $a, b \in B$, $h \in H$. Если $a, b \in A$, то $(a, b) = (a, b)_1$. Рассмотрим спаривание $(,)_1: B_\chi \times B_\theta \rightarrow L$ для некоторой пары характеров $\chi, \theta \in \hat{H}$. Поскольку $he_\chi = \chi(h)e_\chi$ для любых $h \in H$, $\chi \in \hat{H}$, мы получаем

$$(e_\chi a, e_\theta b)_1 = (he_\chi a, he_\theta b)_1 = (\chi(h)e_\chi a, \theta(h)e_\theta b)_1 = \chi\theta(h)(e_\chi a, e_\theta b)_1$$

для любых $a, b \in B$, $h \in H$.

Таким образом, если $\chi\theta \neq 1$, то $(B_\chi, B_\theta)_1 = 0$. Если $\psi \neq \bar{\varphi}$, то для любых $\chi|\varphi, \theta|\psi$ мы имеем $\chi\theta \neq 1$, т.е. компоненты B_φ и B_ψ ортогональны. Следовательно, ортогональны и A_φ, A_ψ относительно спаривания $(,)$. Спаривание $A_\varphi \times A_{\bar{\varphi}}$ должно быть невырожденным, поскольку в противном случае ввиду неприводимости A_φ оно было бы нулевым, но тогда нулевым было бы и спаривание $A_\varphi \times A$, что противоречит условиям предложения. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть K – конечное абелево расширение мнимого квадратичного поля $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ с группой Галуа $H = G(K/k)$, причем K нормально над $\mathbb{Q}$ и простое ℓ вполне распадается в K . Пусть автоморфизм комплексного сопряжения $\tau \in G = G(K/\mathbb{Q})$ действует на H по правилу $\tau(h) = \tau h \tau^{-1} = h^{-1}$ для любого $h \in H$. Пусть период m группы H таков, что первообразный корень из единицы $\zeta_m \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ степени m сопряжен с ζ_m^{-1} относительно действия группы Галуа $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$. Тогда $\Re_\ell(K) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.1 существует элемент $\omega \in U_{S,1}(K)$ такой, что $\tau(\omega) = \omega$ и элементы $\{h(\omega)\}_{h \in H}$ порождают в $U_{S,1}(K)$ $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль конечного индекса, который мы обозначим через P . В силу теоремы 2.1 модуль P имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг $r + 1 = |H| = n$, где r – ранг группы единиц $U(K)$ поля K . Следовательно, $P \cong \mathbb{Z}_\ell[H]$ как $\mathbb{Z}_\ell[H]$ -модуль. Отметим, что любой элемент $g \in G \setminus H$ представим в виде $g = h\tau$ для некоторого $h \in H$, поэтому $g(\omega) = h(\omega)$, т.е. P является также и G -модулем.

Для поля K справедлива гипотеза Леопольдта, поэтому согласно предложению 3.1 естественное отображение $\text{div}: P \rightarrow D(K)$ является вложением. Это отображение индуцирует два гомоморфизма: $\text{div}_1: P \rightarrow D_1(K)$ и $\text{div}_2: P \rightarrow D_2(K)$, так что $\text{div} = \text{div}_1 \oplus \text{div}_2$.

Ради технического удобства мы перейдем от $\mathbb{Z}_\ell$ -модулей к $\mathbb{Q}_\ell$ -пространствам. Положим $\hat{P} = P \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Аналогичным образом определим $\hat{D}(K)$, $\hat{D}_1(K)$ и $\hat{D}_2(K)$. Тогда указанные выше отображения div , div_1 и div_2 индуцируют отображения, которые мы будем обозначать теми же символами, $\text{div}: \hat{P} \rightarrow \hat{D}(K)$, $\text{div}_1: \hat{P} \rightarrow \hat{D}_1(K)$, $\text{div}_2: \hat{P} \rightarrow \hat{D}_2(K)$. Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ однозначно продолжается до спаривания $\hat{D}(K) \times \hat{D}(K) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, которое мы также будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$. Аналогичным образом мы имеем спаривания

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{K/k}: \hat{D}(K) \times \hat{D}(K) &\rightarrow \hat{D}(k), \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{K,1}: \hat{D}_1(K) \times \hat{D}_1(K) &\rightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{K,2}: \hat{D}_2(K) \times \hat{D}_2(K) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы мы должны проверить, что спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ при ограничении на $\text{div}(\hat{P})$ индуцирует невырожденное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_K: \text{div}(\hat{P}) \times \text{div}(\hat{P}) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell. \quad (4.6)$$

Пусть Φ – множество всех $\mathbb{Q}_\ell$ -неприводимых характеров группы H . Если спаривание (4.6) имеет, например, ядро слева, то это ядро должно содержать компоненту $\text{div}(\hat{P}_\varphi)$ для некоторого $\varphi \in \Phi$, т.е. должно выполняться условие $\text{div}(\hat{P}_\varphi) \times \text{div}(\hat{P}) = 0$. С другой стороны, поскольку div – вложение, должно выполняться хотя бы одно из двух условий $\text{div}_1(\hat{P}_\varphi) \neq 0$ или $\text{div}_2(\hat{P}_\varphi) \neq 0$. Предположим, что $\text{div}_1(\hat{P}_\varphi) \neq 0$. Поскольку $\hat{D}_1(K)$ и $\hat{P}$ изоморфны $\mathbb{Q}_\ell[H]$, мы получаем, что $\text{div}_1(\hat{P}_\varphi) = \hat{D}_1(K)_\varphi$. По условию теоремы $\varphi = \bar{\varphi}$, поэтому согласно предложению 4.2 невырожденное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_{K,1}$ индуцирует невырожденное спаривание $\hat{D}_1(K)_\varphi \times \hat{D}_1(K)_\varphi \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$. Следовательно, спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{K,1}: \text{div}(\hat{P}_\varphi) \times \text{div}(\hat{P}_\varphi) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell \quad (4.7)$$

также не вырождено.

Согласно следствию 2.1 модуль P удовлетворяет условию предложения 4.1, т.е. для любых $a, b \in P$ мы имеем $\langle a, b \rangle_{K,1} = \langle a, b \rangle_{K,2}$. Следовательно, для любых $a, b \in \hat{P}_\varphi$ имеется равенство $\langle \text{div}(a), \text{div}(b) \rangle_K = 2\langle \text{div}(a), \text{div}(b) \rangle_{K,1}$, поэтому из невырожденности спаривания (4.7) следует невырожденность спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_K: \text{div}(\hat{P}_\varphi) \times \text{div}(\hat{P}_\varphi) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$, что противоречит предположению о том, что $\text{div}(\hat{P}_\varphi)$ содержится в ядре спаривания (4.6). Случай, когда $\text{div}_2(\hat{P}_\varphi) \neq 0$, разбирается аналогично. Теорема доказана.

В теореме 4.1 требуется, чтобы первообразный корень из единицы ζ_m степени m был сопряжен с ζ_m^{-1} в поле $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, где m – период группы H . Очевидно, что выполнение этого условия зависит только от ℓ и m . Следующее предложение характеризует все пары (ℓ, m) , обладающие этим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть ℓ – простое число и m – произвольное натуральное число. При $\ell \neq 2$ мы запишем m в виде $m = 2^a \ell^b c$, а при $\ell = 2$ – в виде

$m = 2^a c$, где c взаимно просто с 2ℓ . Пусть c_1 – произведение всех различных простых p , делящих c . Корень $\zeta_m \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ сопряжен с ζ_m^{-1} над $\mathbb{Q}_\ell$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (i) $\ell \neq 2$, $a = 0, 1$ и существует натуральное r такое, что $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$;
- (ii) $\ell \equiv 3 \pmod{4}$, $a \geq 2$ и существует нечетное натуральное r такое, что $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{2^a c_1}$;
- (iii) $\ell = 2$ и существует натуральное r такое, что $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует автоморфизм $\sigma \in G(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ такой, что $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{-1}$ для данного m . При $m = 1, 2$ мы можем считать, что σ – тождественный автоморфизм. При $m > 2$ условие $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{-1}$ означает, что σ – автоморфизм второго порядка поля $F = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_m)$.

Предположим сначала, что $\ell \neq 2$. Поле F является свободным композитом над $\mathbb{Q}_\ell$ полей $F_1 = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_{\ell^b})$ и $F_2 = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_{2^a c})$. Распирение $F_1/\mathbb{Q}_\ell$ чисто разветвлено, и его группа Галуа изоморфна $(\mathbb{Z}_\ell/\ell^b \mathbb{Z}_\ell)^\times$. Автоморфизм σ_1 , который при этом последнем изоморфизме соответствует элементу -1 , переводит ζ_{ℓ^b} в $\zeta_{\ell^b}^{-1}$ и оставляет на месте любой корень из единицы степени, взаимно простой с ℓ . Распирение $F_2/\mathbb{Q}_\ell$ не разветвлено и, следовательно, имеет циклическую группу Галуа. Если в $G(F_2/\mathbb{Q}_\ell)$ существует автоморфизм σ_2 такой, что $\sigma_2(\zeta_{2^a c}) = \zeta_{2^a c}^{-1}$, то автоморфизм $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ удовлетворяет условию $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{-1}$. Таким образом, при $\ell \neq 2$ корни ζ_m и ζ_m^{-1} сопряжены тогда и только тогда, когда корни $\zeta_{2^a c}$ и $\zeta_{2^a c}^{-1}$ сопряжены в поле F_2 .

1. Если $a = 0, 1$, то корни $\zeta_{2^a c}$ и $\zeta_{2^a c}^{-1}$ сопряжены тогда и только тогда, когда ζ_c и ζ_c^{-1} сопряжены при помощи некоторого σ_2 . Пусть p – простой делитель c . Пусть $E = F_2^{\sigma_2}$ и $\bar{E}, \bar{F}_2$ – поля вычетов полей E и F_2 соответственно. Если $|\bar{E}| = \ell^r$, то $|\bar{E}^\times| = \ell^r - 1$ и $|\bar{F}_2^\times| = \ell^{2r} - 1 = (\ell^r - 1)(\ell^r + 1)$. Если $\zeta_p \in F_2$, то $|\bar{F}_2^\times| \equiv 0 \pmod{p}$, но $\sigma_2(\zeta_p) = \zeta_p^{-1}$. Это означает, что $\zeta_p \notin E$, т.е. $\ell^r - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку p здесь – любой простой делитель c , мы получаем, что $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$.

Наоборот, предположим, что $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$ и $a = 0, 1$. Возьмем в качестве E неразветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$ степени r , и пусть E_2 – единственное квадратичное неразветвленное расширение поля E . Из условия $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$ следует, что $\ell^r - 1$ взаимно просто с c_1 , т.е. $\zeta_{c_1} \in E_2$ и $\zeta_p \notin E$ для любого $p|c$. Поскольку $\zeta_p \in E_2$, можно получить поле $F_2 = E_2(\zeta_c)$ следующим образом. Мы уже имеем $\zeta_{c_1} \in E_2$. Если $c_1 = c$, то можно положить $F_2 = E_2$. Если $c_1 \neq c$, то существует $p|c$ такое, что $c_2 = pc_1|c$. Положим $E'_2 = E_2(\sqrt[r]{\zeta_{c_1}})$. Тогда либо $E'_2 = E_2$, либо E'_2/E_2 – куммерово расширение и, следовательно, имеет степень p . Если $c_2 \neq c$, то c обладает делителем $c_3 = qc_2$, где q – некоторый простой делитель c (возможно, что $q = p$). Тогда поле $E'_2 := E'_2(\sqrt[q]{\zeta_{c_2}})$ либо совпадает с E'_2 , либо имеет над ним степень q .

Продолжая этот процесс, мы получим некоторое расширение L поля E_2 такое, что L содержит ζ_c и степень L над E_2 нечетна. Следовательно, $[L : E] = 2^f$ для некоторого нечетного f , и существует поле $L' \subset L$ такое, что L – квадратичное расширение L' и, в частности, L имеет над E_2 нечетную степень f . Пусть σ_2 – единственный нетривиальный автоморфизм расширения L/L' . Поскольку L' имеет нечетную степень над E и для любого $p|c$ первообразный корень

из единицы ζ_p принадлежит квадратичному расширению E_2 поля E , мы получаем, что поле L' не содержит ни одного корня ζ_p для $p|c$. Это означает, что $N_{L/L'}(\zeta_c) = 1$, или, другими словами, $\sigma_2(\zeta_c) = \zeta_c^{-1}$. Тогда, полагая $F_2 = L$ и $E = L'$, мы получаем требуемое.

2. Предположим теперь, что $\ell \neq 2$ и $a \geq 2$. Если $\ell \equiv 1 \pmod{4}$, то поле $\mathbb{Q}_\ell$ содержит первообразный корень из единицы ζ_4 степени 4. Если бы корень ζ_m был сопряжен с ζ_m^{-1} , то корень ζ_4 был бы сопряжен с ζ_4^{-1} , что невозможно ввиду условия $\zeta_4 \in \mathbb{Q}_\ell$. Таким образом, при $a \geq 2$ корни ζ_m и ζ_m^{-1} могут быть сопряжены только в случае $\ell \equiv 3 \pmod{4}$. Более того, если σ_2 – автоморфизм второго порядка поля $F_2 = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_{2^a c})$, то $\sigma_2(\zeta_4) = \zeta_4^{-1}$, т.е. $\zeta_4 \notin E = F_2^{\sigma_2}$, но это означает, что $\ell^r - 1 \equiv 2 \pmod{4}$, где $r = [E: \mathbb{Q}_\ell]$, т.е. E является расширением поля $\mathbb{Q}_\ell$ нечетной степени. Так же, как и в п. 1, мы получаем, что должно выполняться сравнение $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$.

Пусть 2^s – максимальная степень 2-примарного корня из единицы, содержащегося в F_2 . Заметим, что s – это 2-адический показатель числа $\ell^{2^r} - 1$. Как было показано выше, 2-компонента группы корней из единицы в поле E состоит из ± 1 . С другой стороны, поскольку расширение F_2/E не разветвлено, норменное отображение $N: F_2^\times \rightarrow E^\times$ индуцирует эпиморфизм на мультипликативных группах полей вычетов. Это означает, что $N(\zeta_{2^s}) = -1$, т.е. $\sigma_2(\zeta_{2^s}) = -\zeta_{2^s}^{-1}$. Таким образом, для выполнения условия $\sigma_2(\zeta_{2^a}) = \zeta_{2^a}^{-1}$ должно выполняться неравенство $s > a$, которое равносильно условию $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{2^a}$. Этим доказана необходимость условия, сформулированного в п. (ii). Его достаточность можно доказать теми же рассуждениями, что и в п. 1.

3. Пусть $\ell = 2$. В этом случае $m = 2^a c$, где $(2, c) = 1$. Необходимо построить неразветвленное расширение $F_2 = \mathbb{Q}_2(\zeta_c)/\mathbb{Q}_2$ и автоморфизм второго порядка σ_2 поля F_2 такой, что $\sigma_2(\zeta_c) = \zeta_c^{-1}$. Те же рассуждения, которые были использованы в п. 1, показывают, что такой σ_2 существует тогда и только тогда, когда $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{c_1}$ для некоторого r . Предложение доказано.

ПРИМЕР 4.1. Если $\ell = 5$, то $\ell^3 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, поэтому любое m вида $m = 2^a 3^{s_1} 5^{s_2} 7^{s_3}$, где $a = 0, 1$, удовлетворяет условию (i) предложения 4.3, и, следовательно, для $\ell = 5$ и любого K такого, что группа $H = G(K/k)$ имеет период m указанного вида, имеем $\mathfrak{R}_5(K) \neq 0$, если только простое число 5 вполне распадается в K .

ПРИМЕР 4.2. Пусть $\ell = 11$. Тогда $\zeta_5 \in \mathbb{Q}_{11}$ и, следовательно, теорема 4.1 не может иметь места ни при каком m , делящемся на 5.

Теперь мы предположим, что поле K из теоремы 4.1 фиксировано, и попробуем охарактеризовать все простые ℓ такие, что для пары (K, ℓ) справедлива теорема 4.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть поле K нормально над $\mathbb{Q}$ и является абелевым расширением мнимого квадратичного поля k , как в теореме 4.1, и m – период группы $H = G(K/k)$. Пусть T – множество всех простых чисел, взаимно простых с m . Пусть $F = \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Если поле $E := K \cap F$ вполне вещественно (в частности, $E = \mathbb{Q}$), то существует бесконечно много простых $\ell \in T$, для которых выполняются все предпосылки теоремы 4.1. В частности, для этих ℓ мы имеем $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$. В противном случае предпосылки теоремы 4.1 не выполняются ни для какого $\ell \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L = K \cdot F$. Пусть δ – автоморфизм комплексного сопряжения в поле F . Если поле E вполне вещественно, то δ действует тождественно на E . Поскольку L является свободным композитом полей K и F над E , существует автоморфизм $\sigma \in G(L/E)$ такой, что $\sigma|_K = \text{id}$ и $\sigma|_F = \delta$. Согласно теореме Чеботарева о плотности существует бесконечно много простых дивизоров $\mathfrak{l}$ поля L таких, что $\mathfrak{l}$ не разветвлен в L , и автоморфизм Фробениуса $\varphi(\mathfrak{l})$ равен σ . Пусть ℓ – простое число, лежащее под $\mathfrak{l}$. Так как σ индуцирует тождественный автоморфизм поля K , мы получаем, что ℓ вполне распадается в K , а условие, что σ совпадает с δ на круговом поле $F = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, означает, что $\ell \equiv -1 \pmod{m}$. Согласно предложению 4.3 любое такое ℓ удовлетворяет условию теоремы 4.1 (с $r = 1$), т. е. для него $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$.

Наоборот, предположим, что E – мнимое поле. Если для некоторого простого $\ell \in T$ корни ζ_m и ζ_m^{-1} сопряжены над $\mathbb{Q}_\ell$, то согласно предложению 4.3 должно выполняться сравнение $\ell^r + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ при некотором r . Если $\varphi(\mathfrak{l})$ – автоморфизм Фробениуса, соответствующий ℓ , то последнее сравнение означает, что $\varphi(\mathfrak{l})^r$ совпадает с δ на поле F . Поскольку E – мнимое поле, δ действует нетривиально на E , но тогда $\varphi(\mathfrak{l})$ действует нетривиально на K , т. е. ℓ не может вполне распадаться в K . Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $p \equiv 3 \pmod{4}$ – простое число, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ и K – абелево расширение k , как в теореме 4.1, такое, что группа $H = G(K/k)$ имеет период p . В этом случае $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ и $F \cap K \supset k$, т. е. согласно предложению 4.4 предпосылки теоремы 4.1 не выполняются ни для одного простого ℓ , отличного от p .

Тем не менее в случае $\ell = p$ теорема 4.1 применима и дает $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$.

§ 5. Регулятор $\mathfrak{R}_\ell(K)$ и слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе

Для фиксированного простого ℓ пусть $k = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_0)$, где ζ_0 – первообразный корень из единицы степени ℓ (степени 4 при $\ell = 2$). Пусть k_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля k , $\Gamma = G(k_\infty/k) \cong \mathbb{Z}_\ell$. Пусть $k_n = k(\zeta_n)$, где ζ_n – первообразный корень из единицы степени $q_n = \ell^{n+1}$ при $\ell \neq 2$ (степени $q_n = 2^{n+2}$ при $\ell = 2$) и $\Gamma_n = G(k_\infty/k_n)$. Пусть F_n – неразветвленное расширение поля k_n степени q_n . Тогда согласно теории Куммера существует единица $u_n \in U(k_n)$ такая, что $F_n = k_n(\sqrt[q_n]{u_n})$ при всех $n \geq 1$.

Мы определим мультипликативную группу $V(k_n)$ как подгруппу в группе $U^{(1)}(k_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, порожденную группой $U^{(1)}(k_n)/\mu_\ell(k_n)$ и элементом $\sqrt[q_n]{u_n}$. Напомним, что группы $V(k_n)$ уже рассматривались в [4]. Отображение ℓ -адического логарифма $\log: U^{(1)}(k_n) \rightarrow k_n$ по линейности продолжается до вложения $V(k_n) \rightarrow k_n$, которое мы также будем обозначать через $\log$. Таким образом, для $n = 1, 2, \dots$ мы имеем набор $\mathbb{Z}_\ell$ -билинейных форм

$$\bar{S}_n: V(k_n) \times V(k_n) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad \bar{S}_n(x, y) = \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \log y). \quad (5.1)$$

Пусть $V(k_\infty) = \varprojlim V(k_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Набор форм (5.1) позволяет построить внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_0^k: V(k_\infty) \times V(k_\infty) \longrightarrow \Lambda, \quad (5.2)$$

где $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_\ell[\Gamma/\Gamma_n]$ – пополненная групповая алгебра группы Γ . Полуторалинейность означает, что для любых $x, y \in V(k_\infty)$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, выполняется равенство $T_0^k(\lambda(x), \mu(y)) = \lambda T_0^k(x, y) \mu^*$, где $*$ обозначает автоморфизм кольца Λ , индуцированный отображением $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ для всех $\sigma \in \Gamma$. Это произведение впервые было построено в [4], но более прозрачная его конструкция, использующая основную теорему работы [9], была дана в [5, теорема 3.1].

Далее нам будет необходимо не только существование произведения T_0^k , но и некоторые его свойства, которые не были явно отмечены в [5], поэтому мы напомним его определение. Для поля k_n положим

$$V(k_n)^\perp = \{x \in k_n \mid \mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}_\ell}(xy) \in \mathbb{Z}_\ell \ \forall y \in \log V(k_n)\}.$$

Пусть

$$\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \mathrm{Sp}_{\Gamma_{n-i}/\Gamma_n} - \mathrm{Sp}_{\Gamma_{n-i-1}/\Gamma_n} \in \mathbb{Q}_\ell[\Gamma/\Gamma_n], \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где для конечной группы G мы полагаем $\mathrm{Sp}_G = \sum_{\sigma \in G} \sigma \in \mathbb{Z}[G]$. Пусть $\Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_n^{(i)}$. Основная теорема работы [9, теорема A] утверждает, что для любого $n \geq 1$

$$\mathrm{Ker} \mathrm{Sp}_{k_n/k_0}(V(k_n)^\perp) = (\gamma - 1)\Phi_n(\log V(k_n)),$$

где γ – некоторая топологическая образующая группы Γ .

Таким образом, поле k является полем 0-типа A в терминологии, введенной в работе [5], и для него справедлива теорема 3.1 из [5] (для случая $p = q = 0$). В этом случае произведение (5.2) строится следующим образом. Пусть $V^{(0)}(k_n)$ – ядро норменного отображения $N_{k_n/\mathbb{Q}_\ell}: V(k_n) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^*$. Это ядро совпадает также с подгруппой универсальных норм в $V(k_n)$ из всех групп $V(k_m)$ для $m > n$. Вместо набора форм (5.1) рассматривается набор форм S_n , $n = 1, 2, \dots$, где

$$S_n(x, y) = \mathrm{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}_\ell}(\log x(\Phi_n \log y)), \quad x, y \in V(k_n).$$

Доказывается, что при любом n форма S_n определяет внутреннее произведение

$$S_n: V^{(0)}(k_n)/(V^{(0)}(k_n)^{\Gamma/\Gamma_n}) \times (\gamma - 1)V^{(0)}(k_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell,$$

с помощью которого можно определить произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_n: V^{(0)}(k_n)/(V^{(0)}(k_n)^{\Gamma/\Gamma_n}) \times (\gamma - 1)V^{(0)}(k_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[\Gamma/\Gamma_n],$$

полагая

$$\langle x, y \rangle_n = \sum_{\sigma \in \Gamma/\Gamma_n} S_n(\sigma^{-1}(x), y) \sigma. \quad (5.3)$$

Произведения (5.3) при $m > n$ согласованы относительно норменных отображений N_{Γ_n/Γ_m} и естественных эпиморфизмов $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma/\Gamma_m] \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[\Gamma/\Gamma_n]$ и после перехода к проективному пределу дают произведение

$$V(k_\infty) \times (\gamma - 1)V(k_\infty) \longrightarrow (\gamma - 1)\Lambda,$$

которое после деления на $\gamma - 1$ приводит к произведению (5.2).

Далее нам будет нужен аналог произведения (5.2) в случае, когда вместо расширения k_∞/k мы рассматриваем расширение $\mathbb{Q}_{\ell,\infty}/\mathbb{Q}_\ell$, где $\mathbb{Q}_{\ell,\infty}$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$. Пусть $\mathbb{Q}_{\ell,n}$ – промежуточное подполе этого расширения степени ℓ^n над $\mathbb{Q}_\ell$. Положим $V_\infty = V(\mathbb{Q}_{\ell,\infty}) = \varprojlim V_n$, где $V_n = U^{(1)}(\mathbb{Q}_{\ell,n})$ и предел берется относительно норменных отображений. Пусть $\Delta = G(k_\infty/\mathbb{Q}_{\ell,\infty}) = G(k/\mathbb{Q}_\ell)$. Тогда Δ – циклическая группа порядка $\ell - 1$ при $\ell \neq 2$ и $\Delta = \{1, \delta\}$ при $\ell = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует однозначно определенное внутреннее полуторалинейное произведение*

$$T_0: V_\infty \times V_\infty \longrightarrow \Lambda \quad (5.4)$$

такое, что для любых $x \in V_\infty$, $y \in V(k_\infty)$ выполняется соотношение

$$T_0(x, N_\Delta(y)) = T_0^k(i(x), y), \quad (5.5)$$

где $N_\Delta: V(k_\infty) \rightarrow V_\infty$ – норма относительно Δ , а $i: V_\infty \hookrightarrow V(k_\infty)$ индуцировано вложениями $\mathbb{Q}_{\ell,n} \hookrightarrow k_n$ для всех $n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор билинейных форм

$$\bar{S}_n^0: V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad \bar{S}_n^0(x, y) = \text{Sp}_{\mathbb{Q}_{\ell,n}/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \log y),$$

и повторим полностью всю конструкцию произведения (5.2), используя тот же элемент Φ_n , поскольку мы можем отождествить группы Галуа $G(k_n/k)$ и $G(\mathbb{Q}_{\ell,n}/\mathbb{Q}_\ell)$. В результате мы получим произведение

$$T_0: V_\infty \times V_\infty \longrightarrow \tilde{\Lambda}, \quad \tilde{\Lambda} = \varprojlim \mathbb{Q}_\ell[\Gamma/\Gamma_n], \quad (5.6)$$

которое связано соотношением (5.5) с произведением T_0^k (поскольку аналогичным соотношением связаны формы $\bar{S}_n$ и $\bar{S}_n^0$).

Предположим, что $\ell \neq 2$. Тогда $V(k_\infty) = V(k_\infty)^\Delta \oplus \text{Ker } N_\Delta(V(k_\infty))$, причем группы $V(k_\infty)^\Delta$ и $\text{Ker } N_\Delta(V(k_\infty))$ ортогональны друг другу относительно спаривания T_0^k , т. е. T_0^k определяет внутреннее произведение $V(k_\infty)^\Delta \times V(k_\infty)^\Delta \rightarrow \Lambda$. Учитывая, что вложение $V_\infty \hookrightarrow V(k_\infty)$ индуцирует изоморфизм $V_\infty \cong V(k_\infty)^\Delta$, и используя соотношение (5.5), мы получаем, что (в аддитивной записи) $T_0(x, (\ell - 1)y) = T_0^k(i(x), i(y))$ для любых $x, y \in V_\infty$. Поэтому значения произведения (5.6) принадлежат Λ , и это произведение внутреннее и полуторалинейное.

Случай $\ell = 2$ более сложен. В этом случае, учитывая, что $k_n/\mathbb{Q}_{\ell,n}$ – разветвленное квадратичное расширение с группой Галуа Δ и что $U^{(1)}(\mathbb{Q}_{\ell,n}) = U(\mathbb{Q}_{\ell,n})$ при любом n , мы получаем из локальной теории полей классов, что $\hat{H}^0(\Delta, U(\mathbb{Q}_{\ell,n})) \cong \Delta$ при любом n и отображение нормы $N_{m,n}: U(k_m) \rightarrow U(k_n)$ при любых $m > n$ индуцирует изоморфизм $\hat{H}^0(\Delta, U(k_m)) \cong \hat{H}^0(\Delta, U(k_n))$. Положим $U(k_\infty) = \varprojlim U(k_n)$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда $\hat{H}^0(\Delta, U(k_\infty)) \cong \Delta$. Пусть $D = V(k_\infty)/\bar{U}(k_\infty)$, где $\bar{U}(k_\infty) = \varprojlim (U(k_n)/\mu(k_n))$. Тогда $D \cong \mathbb{Z}_\ell$ как $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль и δ действует на D умножением на -1 . Из точной последовательности Δ -модулей

$$1 \longrightarrow \bar{U}(k_\infty) \longrightarrow V(k_\infty) \longrightarrow D \longrightarrow 1$$

вытекает, что $\overline{U}(k_\infty)^\Delta = V(k_\infty)^\Delta$, но $\overline{U}(k_\infty)^\Delta = V_\infty$, следовательно, $(V_\infty : N_\Delta(V(k_\infty))) \leq 2$.

Поскольку $V_\infty = V(k_\infty)^\Delta$, мы получаем, что V_∞ – свободный Λ -модуль (ранга 1). В силу (5.5) произведение T_0 на множестве $V_\infty \times N_\Delta(V(k_\infty))$ принимает значения в Λ , но любой гомоморфизм $N_\Delta(V(k_\infty)) \rightarrow \Lambda$ продолжается на минимальный свободный Λ -модуль, содержащий $N_\Delta(V(k_\infty))$, т. е. на V_∞ . Следовательно, и в случае $\ell = 2$ произведение (5.6) фактически принимает значения в Λ .

Остается только показать, что произведение (5.6) является внутренним, т. е. любой гомоморфизм $\varphi: V_\infty \rightarrow \Lambda$ имеет вид $\varphi(x) = T_0(x, y_\varphi)$ для некоторого $y_\varphi \in V_\infty$ и любого $x \in V_\infty$. Ограничение φ на $N_\Delta(V(k_\infty))$ в композиции с N_Δ определяет гомоморфизм $\varphi_*: V(k_\infty) \rightarrow \Lambda$. Поскольку произведение (5.2) является внутренним, существует $z \in V(k_\infty)$ такой, что $\varphi_*(x) = T_0^k(x, z)$ для любого $x \in V(k_\infty)$. Поскольку $\varphi_*(\delta(x)) = \varphi_*(x)$ и $T_0^k(x, z) = T_0^k(\delta(x), \delta(z))$, мы получаем, что $z \in V(k_\infty)^\Delta = V_\infty$. Соотношение (5.5) показывает, что $\varphi(x) = T_0(x, z)$ для любого $x \in N_\Delta(V(k_\infty))$, но тогда $\varphi(x) = T_0(x, z)$ для всех $x \in V_\infty$. Предложение доказано.

Для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения $\mathbb{Q}_{\ell, \infty}/\mathbb{Q}_\ell$ положим $H_\infty = \varprojlim \mathbb{Q}_{\ell, n}^\times[\ell]$, где предел берется относительно норменных отображений. Для любого n существует точная последовательность

$$1 \longrightarrow U^{(1)}(\mathbb{Q}_{\ell, n}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell, n}^\times[\ell] \xrightarrow{\alpha_n} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 1, \quad (5.7)$$

где α_n переводит униформизирующий элемент π_n поля $\mathbb{Q}_{\ell, n}$ в $1 \in \mathbb{Z}_\ell$. Переходя в (5.7) к проективному пределу относительно норменных отображений и учитывая, что эти отображения индуцируют тождественные отображения на $\mathbb{Z}_\ell$, мы получаем точную последовательность Λ -модулей

$$1 \longrightarrow V_\infty \longrightarrow H_\infty \xrightarrow{\alpha_\infty} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 1. \quad (5.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если $\ell \neq 2$, то H_∞ – свободный Λ -модуль ранга 1, а при $\ell = 2$ модуль H_∞ изоморфен единственному подмодулю индекса 2 свободного Λ -модуля ранга 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\ell \neq 2$ предложение – это лемма 7.1 из [3]. При $\ell = 2$ утверждение леммы 7.1, как и приведенное ее доказательство, верны только в случае локального поля $k \supseteq \mathbb{Q}_\ell$ такого, что $\sqrt{-1} \in k_\infty$. Для такого k группа $H(k_\infty)$ определяется как $\varprojlim (k_n^\times[\ell]/\mu_\ell(k_n))$, и лемма 7.1 утверждает, что $H(k_\infty)$ – свободный Λ -модуль ранга $[k : \mathbb{Q}_2]$, где $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[G(k_\infty/k)]]$. Применяя лемму 7.1 к полю $k = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, мы получаем, что $H(k_\infty)$ является свободным Λ -модулем ранга 2. Поскольку вложение $\mathbb{Q}_2 \hookrightarrow k$ индуцирует вложение $H_\infty \hookrightarrow H(k_\infty)$, мы получаем, что H_∞ – Λ -модуль без кручения. Согласно [3, предложение 1.1] существует точная последовательность Λ -модулей

$$1 \longrightarrow H_\infty \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 1, \quad (5.9)$$

где $F \cong \Lambda$ и $|C| < \infty$. Эта последовательность при любом n дает точную гомологическую последовательность

$$1 \longrightarrow C^{\Gamma_n} \longrightarrow H_{\infty, n} \longrightarrow F_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 1, \quad (5.10)$$

где для Λ -модуля A через A_n обозначается группа $A/(\gamma^{\ell^n} - 1)A$. Используя те же аргументы, которые применялись в лемме 2.2 для доказательства мономорфности отображения j_2 , мы получаем, что при любом n естественное отображение $\psi_n: H_{\infty, n} \rightarrow \mathbb{Q}_{2, n}^{\times}[\ell]$ является мономорфизмом. Тогда из (5.10) следует, что $|C^{\Gamma_n}| \leq 2$ при любом n , т. е. $|C| \leq 2$. Поскольку -1 является универсальной нормой из $\mathbb{Q}_{2, \infty}$ в любом поле $\mathbb{Q}_{2, n}$, мы получаем, что $-1 \in \text{Im} \psi_n$, следовательно, $|C| = 2$. Предложение доказано.

Пусть $\ell \neq 2$. Из точной последовательности (5.8) и предложения 5.2 следует, что $V_{\infty} = (\gamma - 1)H_{\infty}$. Используя полуторалинейность произведения (5.4), мы можем продолжить его до внутреннего произведения

$$\hat{T}_0: H_{\infty} \times H_{\infty} \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda. \quad (5.11)$$

Именно, если $x, y \in H_{\infty}$, то $(\gamma - 1)x, (\gamma - 1)y \in V_{\infty}$ и определен элемент $T_0((\gamma - 1)x, (\gamma - 1)y) \in \Lambda$. Положим

$$\hat{T}_0(x, y) = (\gamma - 1)^{-1}T_0((\gamma - 1)x, (\gamma - 1)y)(\gamma^{-1} - 1)^{-1}.$$

Поскольку $(\gamma^{-1} - 1) = -\gamma^{-1}(\gamma - 1)$, мы получаем, что $\hat{T}_0(x, y) \in (\gamma - 1)^{-2}\Lambda$. Последнее множество можно рассматривать, например, как Λ -подмодуль в поле частных кольца Λ . Очевидно, что для любых $x \in H_{\infty}$, $y \in V_{\infty}$ мы имеем $\hat{T}_0(x, y), \hat{T}_0(y, x) \in (\gamma - 1)^{-1}\Lambda$. Таким образом, произведение (5.11) индуцирует внутреннее произведение

$$\tilde{T}_0: H_{\infty}/V_{\infty} \times H_{\infty}/V_{\infty} \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda/(\gamma - 1)^{-1}\Lambda \cong \mathbb{Z}_{\ell}. \quad (5.12)$$

Отметим, что последний изоморфизм зависит от выбора γ .

Мы выберем в качестве образующей в H_{∞}/V_{∞} такой элемент η_{∞} , что $\alpha_{\infty}(\eta_{\infty}) = 1$. Это означает, что $\eta_{\infty} = \varprojlim \eta_n$, где $\eta_n \in \mathbb{Q}_{\ell, n}^{\times}[\ell]$ и $\alpha_n(\eta_n) = 1$ при любом n . Последнее условие равносильно тому, что для $\eta_0 \in \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}[\ell]$ ℓ -адический показатель $\tilde{\nu}_{\ell}(\eta_0)$ равен 1. Заметим, что показатель $\tilde{\nu}_{\ell}(\cdot): \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}[\ell] \rightarrow \mathbb{Z}_{\ell}$ получается из обычного ℓ -адического показателя $\nu_{\ell}: \mathbb{Q}_{\ell}^{\times} \rightarrow \mathbb{Z}$ продолжением по непрерывности. Таким образом, если $x \in H_{\infty}/V_{\infty}$ и x_0 – проекция x в $\mathbb{Q}_{\ell}^{\times}[\ell]$, то выполняется соотношение

$$\alpha_{\infty}(x) = \tilde{\nu}_{\ell}(x_0). \quad (5.13)$$

Обозначим $\tilde{T}_0(\eta_{\infty}, \eta_{\infty})$ через μ . Тогда $\mu \in \mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$ и элемент μ определен однозначно, если фиксирована образующая γ группы Γ .

В случае $\ell = 2$ мы можем вместо (5.11) и (5.12) построить внутренние произведения

$$\begin{aligned} \hat{T}_0: F \times F &\longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda, \\ \tilde{T}_0: F/V_{\infty} \times F/V_{\infty} &\longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda/(\gamma - 1)^{-1}\Lambda \cong \mathbb{Z}_{\ell}, \end{aligned}$$

где F – свободный Λ -модуль из (5.9). Если определить элемент η_{∞} , как и выше, то мы получим, что $\eta_{\infty} \in 2(F/V_{\infty}) \setminus 4(F/V_{\infty})$. Таким образом, $\tilde{T}_0(\eta_{\infty}, \eta_{\infty}) = \mu$, где $\mu \in 4\mathbb{Z}_2^{\times}$, и элемент μ определен однозначно, если фиксирована образующая γ .

Пусть теперь K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ . Тогда для любой точки $v|\ell$ пополнение K_v поля K относительно v изоморфно $\mathbb{Q}_\ell$. Если K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение K , то любая точка $v|\ell$ поля K имеет единственное продолжение в K_∞ , которое мы также будем обозначать через v . Таким образом, для любой точки $v|\ell$ определено круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение $K_{\infty,v}/K_v$, группу Галуа которого можно отождествить с группой Галуа $\Gamma = G(K_\infty/K)$. С этим локальным расширением связаны Λ -модули V_∞ и H_∞ , которые мы будем обозначать через $V_{\infty,v}$ и $H_{\infty,v}$ соответственно, чтобы отметить их зависимость от точки v . Согласно предложению 5.1 для каждой точки $v|\ell$ поля K имеется произведение (5.4)

$$T_{0,v}: V_{\infty,v} \times V_{\infty,v} \longrightarrow \Lambda.$$

Положим $V(K_\infty) = \prod_{v|\ell} V_{\infty,v}$. Тогда набор произведений $T_{0,v}$ для всех $v|\ell$ позволяет определить единое внутреннее полуторалинейное произведение

$$T_0^K: V(K_\infty) \times V(K_\infty) \longrightarrow \Lambda. \quad (5.14)$$

Именно, если $x, y \in V(K_\infty)$, $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $y = \prod_{v|\ell} y_v$, где $x_v, y_v \in V_{\infty,v}$, то мы полагаем $T_0^K(x, y) = \sum_{v|\ell} T_{0,v}(x_v, y_v)$. Аналогичным образом, исходя из произведений (5.11) и (5.12), мы можем построить внутренние произведения

$$\hat{T}_0^K: H(K_\infty) \times H(K_\infty) \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2} \Lambda, \quad (5.15)$$

$$\tilde{T}_0^K: H(K_\infty)/V(K_\infty) \times H(K_\infty)/V(K_\infty) \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}/(\gamma - 1)^{-1} \Lambda \cong \mathbb{Z}_\ell. \quad (5.16)$$

Снова при $\ell = 2$, если мы хотим получить внутренние произведения, то должны заменить в (5.15) и (5.16) модуль $H(K_\infty)$ на $F(K_\infty) = \prod_{v|\ell} F_v$, где F_v – модуль из (5.9) для локального расширения $K_{v,\infty}/K_v$. Таким образом, $F(K_\infty)$ – это минимальный свободный Λ -модуль, содержащий $H(K_\infty)$.

Пусть $U(K_\infty) = \varprojlim U(K_n)[\ell]$, где предел берется относительно норменных отображений. Тогда существует естественное вложение $U(K_\infty) \hookrightarrow V(K_\infty)$. Как и в [4], определим $V^+(K_\infty)$ как минимальный Λ -подмодуль в $V(K_\infty)$ такой, что $U(K_\infty) \subseteq V^+(K_\infty)$ и $V(K_\infty)/V^+(K_\infty)$ является Λ -модулем без кручения. Мы определим $V^-(K_\infty)$ как ортогональное дополнение к $V^+(K_\infty)$ относительно спаривания (5.14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 [4, теорема 5.1]. Пусть K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ , и $C(K_\infty) = V^+(K_\infty) \cap V^-(K_\infty)$. Для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе (гипотеза 2.4) тогда и только тогда, когда $C(K_\infty) = 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое ℓ и такое, что для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта. Если $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$, то для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе (гипотеза 2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $H^+(K_\infty)$ минимальный Λ -подмодуль в $H(K_\infty)$, содержащий $V^+(K_\infty)$ и такой, что $H(K_\infty)/H^+(K_\infty)$ является Λ -модулем без кручения. Пусть $H^-(K_\infty)$ – ортогональное дополнение к $H^+(K_\infty)$ относительно спаривания (5.15).

Если $\ell \neq 2$, то

$$(\gamma - 1)H^+(K_\infty) = V^+(K_\infty), \quad (\gamma - 1)H^-(K_\infty) = V^-(K_\infty) \quad (5.17)$$

и условие $V^+(K_\infty) \cap V^-(K_\infty) = 0$ из предложения 5.3 равносильно условию $C_1(K_\infty) := H^+(K_\infty) \cap H^-(K_\infty) = 0$, которое мы и будем проверять.

Если $\ell = 2$, то вместо изоморфизмов в (5.17) мы имеем гомоморфизмы с конечным ядром и коядром. Тем не менее легко видеть, что и в этом случае все сводится к проверке условия $C_1(K_\infty) = 0$.

Поскольку $H(K_\infty)/H^+(K_\infty)$ и $H(K_\infty)/H^-(K_\infty)$ являются Λ -модулями без кручения, мы получаем, что $H(K_\infty)/C_1(K_\infty)$ – также Λ -модуль без кручения. Поэтому вложения $C_1(K_\infty) \hookrightarrow H(K_\infty)$ и $H^+(K_\infty) \hookrightarrow H(K_\infty)$ индуцируют вложения $C_1(K_\infty)_0 \hookrightarrow H(K_\infty)_0$ и $H^+(K_\infty)_0 \hookrightarrow H(K_\infty)_0$. Поскольку $C_1(K_\infty) \subseteq H^-(K_\infty)$, мы получаем, что произведение $\hat{T}_0^K$ в (5.15) является нулевым на множестве $C_1(K_\infty) \times H^+(K_\infty)$, но тогда нулевым будет и произведение $\hat{T}_0^K$ в (5.16) на множестве $C_1(K_\infty)_0 \times H^+(K_\infty)_0$.

Иначе говоря, условие $C_1(K_\infty) = 0$ равносильно условию $C_1(K_\infty)_0 = 0$, что, в свою очередь, равносильно невырожденности произведения

$$\hat{T}_0^K : H^+(K_\infty)_0 \times H^+(K_\infty)_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell. \quad (5.18)$$

Если ℓ вполне распадается в K , то $H(K_\infty)$ совпадает с группой $\tilde{H}(K_\infty)$ из диаграммы (2.14). Мономорфизм j_1 в этой диаграмме индуцирует изоморфизм $U_S(K_\infty)_0 \cong U_{S,1}(K)$. В силу теоремы 2.1 ранг $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля $U_{S,1}(K)$ равен $r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 – число вещественных и комплексных точек поля K соответственно. Следовательно, $U_S(K_\infty)$ имеет Λ -ранг $r_1 + r_2$, но $H^+(K_\infty)/U_S(K_\infty)$ – периодический Λ -модуль, т. е. и $H^+(K_\infty)$ имеет Λ -ранг $r_1 + r_2$. Тогда и $H^+(K_\infty)_0$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг $r_1 + r_2$. Следовательно, отображение α в (2.14) индуцирует изоморфизм между $U_S(K_\infty)_0$ и некоторой подгруппой конечного индекса в $H^+(K_\infty)_0$.

Таким образом, имеются два произведения вида $U_S(K_\infty)_0 \times U_S(K_\infty)_0 \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$. Первое – это произведение

$$\hat{T}_0^K : U_S(K_\infty)_0 \times U_S(K_\infty)_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (5.19)$$

индуцированное произведением (5.18) и вложением α из (2.14). Второе – это произведение

$$T : U_S(K_\infty)_0 \times U_S(K_\infty)_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad T(x, y) = \{j_1(x), j_1(y)\}, \quad (5.20)$$

где j_1 – отображение из (2.14), устанавливающее изоморфизм между $U_S(K_\infty)_0$ и $U_{S,1}(K)$, а $\{, \}$ – произведение (1.3). Условие $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$ равносильно тому, что произведение $\{, \}$ не вырождено на $U_{S,1}(K)$, что равносильно невырожденности произведения (5.20).

Для точки v , лежащей над ℓ , и Λ -модулей $H_{\infty,v}$ и $V_{\infty,v}$ мы будем обозначать отображения α_∞ и α_0 , определенные выше в этом параграфе, через $\alpha_{\infty,v}$ и $\alpha_{0,v}$. Соответственно, через $\eta_{\infty,v}$ мы обозначим образующую $\mathbb{Z}_\ell$ -модуля $H_{\infty,v}/V_{\infty,v}$, удовлетворяющую условию $\alpha_{\infty,v}(\eta_{\infty,v}) = 1$. Тогда любые элементы $x, y \in H(K_\infty)/V(K_\infty)$ однозначно записываются в виде

$$x = \prod_{v|\ell} \eta_{\infty,v}^{a_v}, \quad y = \prod_{v|\ell} \eta_{\infty,v}^{b_v}, \quad (5.21)$$

где v пробегает все точки поля K , лежащие над ℓ , и $a_v, b_v \in \mathbb{Z}_\ell$.

Если обозначить произведение (5.12) для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения $K_{\infty, v}/K_v$ через $\tilde{T}_{0, v}$, то для произведения $\tilde{T}_0^K$ в (5.16) мы получим формулу

$$\tilde{T}_0^K(x, y) = \sum_{v|\ell} \tilde{T}_{0, v}(\eta_{\infty, v}^{a_v}, \eta_{\infty, v}^{b_v}) = \mu \sum_{v|\ell} a_v b_v. \quad (5.22)$$

Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in U_S(K_\infty)$ и x, y – образы $\bar{x}, \bar{y}$ в $U_S(K_\infty)_0$, т. е. $x = \pi_1(\bar{x})$, $y = \pi_1(\bar{y})$, где π_1 – отображение из (2.14). Тогда $\tilde{T}_0^K(x, y)$ задается формулой (5.22).

С другой стороны, мы имеем $H(K_\infty) = \tilde{H}(K_\infty)$, где $\tilde{H}(K_\infty)$ – группа из диаграммы (2.14). Отображение j_2 из этой диаграммы определяет мономорфизм $j_2: H(K_\infty)_0 \rightarrow \prod_{v|\ell} (K_v^\times[\ell])$, причем $K_v \cong \mathbb{Q}_\ell$ для всех $v|\ell$ и $\text{Im } j_2 = \prod_{v|\ell} F(K_v)$, где $F(K_v)$ – группа из (2.16).

Пусть $D(K)$ – группа дивизоров, лежащих над ℓ , определенная во введении. Тогда существует естественный гомоморфизм $\text{div}: \prod_{v|\ell} (K_v^\times[\ell]) \rightarrow D(K)$, который элементу $x = \prod_{v|\ell} x_v$, $x_v \in K_v^\times[\ell]$, ставит в соответствие дивизор $\sum_{v|\ell} a_v \mathfrak{l}_v$, где $\mathfrak{l}_v$ – простой делитель ℓ , соответствующий точке v , и a_v – ℓ -адический показатель компоненты x_v , как в формуле (5.13). Пусть $x_0 = j_1(x) = j_1 \circ \pi_1(\bar{x})$, $y_0 = j_1(y) = j_1 \circ \pi_1(\bar{y}) \in U_{S,1}(K)$. Тогда согласно (5.13) имеем $\text{div}(x_0) = \sum_{v|\ell} a_v \mathfrak{l}_v$, $\text{div}(y_0) = \sum_{v|\ell} b_v \mathfrak{l}_v$. Следовательно, $T(x, y) = \sum_{v|\ell} a_v b_v$, т. е.

$$\tilde{T}_0^K(x, y) = \mu T(x, y) \quad \forall x, y \in U_S(K_\infty)_0. \quad (5.23)$$

Таким образом, из условия $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$ следует, что произведение (5.20) не вырождено, но в силу (5.23) тогда не вырождено и произведение (5.19). Следовательно, не вырождено и произведение (5.18), но это означает, что пересечение $H^+(K_\infty)_0 \cap H^-(K_\infty)_0$ не более чем конечно. Поскольку группа $C_1(K_\infty)_0$ вкладывается в $H^+(K_\infty)_0 \cap H^-(K_\infty)_0$, мы получаем, что группа $C_1(K_\infty)_0$ не более чем конечна, но $C_1(K_\infty)$ является Λ -модулем без кручения, поэтому $C_1(K_\infty) = 0$. Тогда $C(K_\infty) = 0$, и в силу предложения 5.3 для поля K справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе. Теорема доказана.

Следующая теорема является до некоторой степени обращением теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть K – поле алгебраических чисел, в котором вполне распадается простое число ℓ и такое, что для пары (K, ℓ) справедливы гипотеза Леопольдта и слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе. При этих условиях $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$ тогда и только тогда, когда Λ -модуль $D(K_\infty) := H(K_\infty)/(H^+(K_\infty) + H^-(K_\infty))$ не допускает Λ -эпиморфизма $D(K_\infty) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$, где Λ действует на $\mathbb{Z}_\ell$ тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для K_∞/K справедлива слабая гипотеза об ℓ -адическом регуляторе, то $V^+(K_\infty) \cap V^-(K_\infty) = 1$ (предложение 5.3) и, следовательно, $H^+(K_\infty) \cap H^-(K_\infty) = 1$, т. е. $H^+(K_\infty) + H^-(K_\infty) = H^+(K_\infty) \oplus H^-(K_\infty)$. Таким образом, $D(K_\infty)$ – периодический Λ -модуль, и условие теоремы означает, что $D(K_\infty)_0$ – конечная группа. Тогда из точной последовательности Λ -модулей

$$1 \longrightarrow H^+(K_\infty) \oplus H^-(K_\infty) \longrightarrow H(K_\infty) \longrightarrow D(K_\infty) \longrightarrow 1$$

мы получаем точную последовательность гомологий

$$1 \longrightarrow D(K_\infty)^\Gamma \longrightarrow H^+(K_\infty)_0 \oplus H^-(K_\infty)_0 \longrightarrow H(K_\infty)_0 \longrightarrow D(K_\infty)_0 \longrightarrow 1 \quad (5.24)$$

с конечной группой $D(K_\infty)^\Gamma$ [3, лемма 1.7]. Это означает, что $H^+(K_\infty)_0$ и $H^-(K_\infty)_0$ пересекаются в $H(K_\infty)_0$ по конечной подгруппе. Из определения группы $H^-(K_\infty)$ следует, что произведение (5.15) индуцирует нулевое произведение $\hat{T}_0^K: H^+(K_\infty) \times H^-(K_\infty) \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda$. Следовательно, (5.16) индуцирует нулевое произведение

$$\tilde{T}_0^K: H^+(K_\infty)_0 \times H^-(K_\infty)_0 \longrightarrow (\gamma - 1)^{-2}\Lambda/(\gamma - 1)^{-1}\Lambda \cong \mathbb{Z}_\ell.$$

Сравнивая $\mathbb{Z}_\ell$ -ранги групп $H^+(K_\infty)_0$ и $H^-(K_\infty)_0$, мы видим, что группа $H^-(K_\infty)_0$ соизмерима в $H(K_\infty)_0$ с ортогональным дополнением к $H^+(K_\infty)_0$ относительно произведения (5.16). Тогда из (5.24) следует, что произведение

$$\tilde{T}_0^K: H^+(K_\infty)_0 \times H^+(K_\infty)_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \quad (5.25)$$

не вырождено. В доказательстве теоремы 5.1 было показано, что отображение $\alpha: U_S(K_\infty)_0 \rightarrow H^+(K_\infty)_0$ из (2.14) является вложением с конечным коядром, поэтому из невырожденности (5.25) следует невырожденность произведения (5.19). В доказательстве теоремы 5.1 (см. (5.23)) было показано также, что произведения (5.19) и (5.20) совпадают с точностью до умножения на $\mu \neq 0$. Следовательно, произведение (5.20) также не вырождено. Однако, как опять же было показано в доказательстве теоремы 5.1, невырожденность произведения (5.20) равносильна условию $\Re_\ell(K) \neq 0$. Теорема доказана.

§ 6. Обобщенные ℓ -адические регуляторы Гросса

Везде в данном параграфе мы предполагаем, что простое ℓ вполне распадается в поле алгебраических чисел K и что для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза Леопольдта. Б. Гросс в работе [6] определил новый регулятор, который характеризует группу U^- . Здесь U – группа S -единиц поля K , где S состоит из всех архимедовых точек и всех точек, лежащих над ℓ , и U^- – максимальная подгруппа в U , на которую все комплексные сопряжения действуют обращением, т. е. $\sigma(x) = x^{-1}$ для любого комплексного сопряжения σ и любого $x \in U^-$.

Таким образом определенная группа U^- – это очень хороший объект в случае, когда K – поле CM -типа. Однако в общем случае группа U^- может быть слишком мала. Например, пусть K – расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3 , и пусть K содержит мнимое квадратичное поле k . Тогда комплексные сопряжения – это все элементы второго порядка в S_3 . Если все они действуют на некоторый $x \in U^-$ обращением, то подгруппа $G(K/k) = A_3 \subset S_3$ действует на x тождественно, т. е. $x \in k^\times$.

Поэтому мы определим аналог группы U^- иначе. Итак, пусть S – множество всех точек над ℓ в поле K , $U_S(K)$ – группа S -единиц в поле K и $\bar{U}_S(K)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы $\bar{U}_S(K) = U_S(K)/\mu(K)$. Тогда группа $\bar{U}_S(K)[\ell]$ – это свободный $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль ранга $n + t - 1$, где $n = [K: \mathbb{Q}]$, $t = r_1 + r_2$, r_1 и r_2 – число вещественных и комплексных точек поля K соответственно. Мы имеем

два гомоморфизма

$$\operatorname{div}: \overline{U}_S(K)[\ell] \longrightarrow D(K), \quad \log_\ell: \overline{U}_S(K)[\ell] \longrightarrow \prod_{v|\ell} K_v, \quad (6.1)$$

которые были определены в § 1 и § 2 соответственно. С этими гомоморфизмами связаны два скалярных произведения

$$\tilde{S}: \overline{U}_S(K) \times \overline{U}_S(K) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad \{, \}: \overline{U}_S(K) \times \overline{U}_S(K) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell, \quad (6.2)$$

где для $x, y \in \overline{U}_S(K)$ мы полагаем $\tilde{S}(x, y) = \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log_\ell x \log_\ell y)$, а $\{x, y\}$ определено в (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Группа $U_S^-(K)$ – это подгруппа всех $x \in \overline{U}_S(K)[\ell]$ таких, что $\tilde{S}(x, y) = 0$ для всех $y \in U(K)[\ell]$ и $\{x, z\} = 0$ для всех $z \in U_{S,1}(K)$.*

Положим $\mathcal{A}(K) := \prod_{v|\ell} (U(K_v)/\mu(K_v))$. Через $D^+(K)$ обозначим максимальную подгруппу в $D(K)$, которая содержит $\operatorname{div}(U_{S,1}(K))$ в качестве подгруппы конечного индекса. Мы определим $D^-(K)$ как ортогональное дополнение в $D(K)$ к группе $D^+(K)$ относительно произведения (1.2).

Пусть $\mathcal{A}^+(K)$ – максимальная подгруппа в $\mathcal{A}(K)$, которая содержит группу $(U(K)[\ell] \oplus \mathbb{Z}_\ell \varepsilon_0)$ в качестве подгруппы конечного индекса, и $\mathcal{A}^-(K)$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{A}^+(K)$ относительно произведения $\tilde{S}$. Тогда $U_S^-(K)$ – максимальный $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль в $\overline{U}_S(K)$ такой, что $\operatorname{div}(U_S^-(K)) \subseteq D^-(K)$ и $\log_\ell(U_S^-(K)) \subseteq \mathcal{A}^-(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Пусть для пары (K, ℓ) справедлива гипотеза 2.3, т. е. $R_\ell(K) \neq 0$. Тогда $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $U_S^-(K)$ имеет ранг r_2 , где r_2 – число комплексных точек в поле K , и гомоморфизм div в (6.1) индуцирует вложение $\operatorname{div}: U_S^-(K) \hookrightarrow D^-(K)$ с конечным ядром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $R_\ell(K) \neq 0$ означает, что $\tilde{S}$ индуцирует невырожденное спаривание

$$\mathcal{A}^+(K) \times \mathcal{A}^-(K) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell. \quad (6.3)$$

Пусть $x_1, x_2 \in U_S^-(K)$ и $\operatorname{div}(x_1) = \operatorname{div}(x_2)$. Это означает, что $x_1 x_2^{-1} \in U(K)[\ell]$, но из невырожденности произведения (6.3) и определения группы $U_S^-(K)$ следует, что $\log_\ell(x_1 x_2^{-1}) = 0$, т. е. $x_1 = x_2$. Этим доказано, что отображение $\operatorname{div}: U_S^-(K) \rightarrow D^-(K)$ является вложением.

Теперь мы покажем, что образ этого вложения имеет конечный индекс в $D^-(K)$. Пусть $z \in D^-(K)$. Тогда существует элемент $x \in \overline{U}_S(K)[\ell]$ такой, что $\operatorname{div}(x) = z^c$ для некоторого $c = \ell^d$. Мы покажем, что для достаточно большого $c_1 = \ell^{d_1}$ можно подправить элемент x^{c_1} на некоторую единицу так, чтобы он попал в $U_S^-(K)$.

Рассмотрим на группе $U(K)[\ell]$ функцию $f(y) = \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log_\ell x \log_\ell y)$. В силу невырожденности произведения (6.3) существует элемент $u \in U(K)[\ell]$ такой, что $c_1 f(y) = \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log_\ell u \log_\ell y)$ для некоторого $c_1 = \ell^{d_1}$. Тогда элемент $x' = x^{c_1} u^{-1}$ обладает тем свойством, что $\tilde{S}(x', y) = 0$ для любого $y \in U(K)[\ell]$. Следовательно, $x' \in U_S^-(K)$ и $\operatorname{div}(x') = z^{cc_1}$.

Если мы теперь выберем дивизоры $z_1, z_2, \dots, z_{r_2} \in D^-(K)$, которые образуют $\mathbb{Z}_\ell$ -базис группы $D^-(K)$, и для каждого из них построим элементы

$x'_1, x'_2, \dots, x'_{r_2} \in U_S^-(K)$ указанным выше способом, то получим, что $\operatorname{div}(x'_i) = z_i^{s_i}$, где s_i – некоторая степень ℓ . Это доказывает, что $\operatorname{div}(U_S^-(K))$ является подгруппой конечного индекса в $D^-(K)$. Согласно теореме 2.1 группа $U_{S,1}(K)$ имеет ранг $t = r_1 + r_2$, поэтому $U_S^-(K)$ имеет ранг r_2 . Предложение доказано.

Пусть $\mathcal{B}(K) = \log_\ell \mathcal{A}(K) \subset \prod_{v|\ell} K_v$ и $\mathcal{B}^+(K) = \log_\ell \mathcal{A}^+(K)$, $\mathcal{B}^-(K) = \log_\ell \mathcal{A}^-(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть для пары (K, ℓ) справедлива “основная гипотеза”, т. е. $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$, и справедливо утверждение предложения 3.5, т. е. группа $U_{S,1}(K)$ имеет конечный индекс в $U_{S,2}(K)$. Тогда группа $U_S^-(K)$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг r_2 и отображение $\log_\ell: U_S^-(K) \rightarrow \mathcal{B}^-(K)$ является вложением с конечным коядром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что отображение $\log_\ell: U_S^-(K) \rightarrow \mathcal{B}^-(K)$ является вложением. Пусть $x_1, x_2 \in U_S^-(K)$, и предположим, что $\log_\ell x_1 = \log_\ell x_2$. Тогда $\log_\ell x_1 x_2^{-1} = 0$ и, следовательно, $x_1 x_2^{-1} \in U_{S,2}(K)$. Поскольку $U_{S,1}(K)$ имеет конечный индекс в $U_{S,2}(K)$, это означает, что $\operatorname{div}(x_1 x_2^{-1}) \in D^+(K)$, но условие $\mathfrak{R}_\ell(K) \neq 0$ означает, что $D^-(K) \cap D^+(K) = 1$. Следовательно, $\operatorname{div}(x_1 x_2^{-1}) = 1$, но тогда и $x_1 x_2^{-1} = 1$.

Теперь мы должны проверить, что $\log_\ell U_S^-(K)$ имеет конечный индекс в $\mathcal{B}^-(K)$. Выберем некоторый элемент $x \in \mathcal{A}^-(K)$. В силу предложения 3.6 существует элемент $y \in U_S(K)[\ell]$ такой, что $\log_\ell y = \ell^r \log_\ell x$ для некоторого r . Поскольку в нашем случае $D^-(K) \cap D^+(K) = 1$ и спаривание (1.2) индуцирует невырожденное спаривание на $D^+(K) \times D^+(K)$, мы можем, как и в доказательстве предложения 6.1, подправить $y' = y^{\ell^t}$ для некоторого достаточно большого t на некоторый элемент $z \in U_{S,2}(K)$ так, чтобы выполнялось условие $\operatorname{div}(y'z) \in D^-(K)$. После этого доказательство можно завершить так же, как и в предложении 6.1. Предложение доказано.

Пусть теперь K – поле алгебраических чисел, для которого выполнены предпосылки либо предложения 6.1, либо предложения 6.2. Тогда $U_S^-(K)$ имеет $\mathbb{Z}_\ell$ -ранг r_2 , и пусть $u_1, \dots, u_{r_2}$ – некоторый базис этого модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Для поля алгебраических чисел K , удовлетворяющего предпосылкам либо предложения 6.1, либо предложения 6.2, мы определяем ℓ -адические регуляторы Гросса $RG_\ell(K)$ и $\mathfrak{R}\mathfrak{G}_\ell(K)$ формулами

$$RG_\ell(K) = \det(\tilde{S}(u_i, u_j)) \in \mathbb{Q}_\ell, \quad \mathfrak{R}\mathfrak{G}_\ell(K) = \det(\{u_i, u_j\}) \in \mathbb{Z}_\ell, \quad (6.4)$$

где $1 \leq i, j \leq r_2$ и $\tilde{S}(x, y)$, $\{x, y\}$ – произведения (6.2).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть K – поле алгебраических чисел, для которого выполнены предпосылки как предложения 6.1, так и предложения 6.2. Тогда $RG_\ell(K) \neq 0$ и $\mathfrak{R}\mathfrak{G}_\ell(K) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 6.2 гомоморфизм $\log_\ell$ отображает $U_S^-(K)$ на подгруппу конечного индекса в $\mathcal{B}^-(K)$. Условие $R_\ell(K) \neq 0$ означает, что произведение $(x, y) = \operatorname{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(xy)$ не вырождено на $\mathcal{B}^+(K) \times \mathcal{B}^+(K)$. Следовательно, оно не вырождено и на $\mathcal{B}^-(K) \times \mathcal{B}^-(K)$, но это означает, что $RG_\ell(K) \neq 0$.

Далее, в силу предложения 6.1 гомоморфизм div отображает $U_S^-(K)$ на подгруппу конечного индекса в $D^-(K)$. Условие $\Re_\ell(K) \neq 0$ означает, что произведение (1.2) не вырождено на $D^+(K) \times D^+(K)$, но тогда оно не вырождено и на $D^-(K) \times D^-(K)$, т. е. $\Re\mathfrak{G}_\ell(K) \neq 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если справедлива гипотеза 2.1, то для любого поля алгебраических чисел K , в котором вполне распадается простое ℓ , регуляторы Гросса $RG_\ell(K)$ и $\Re\mathfrak{G}_\ell(K)$ корректно определены и отличны от нуля.

Список литературы

1. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адической теореме Дирихле и l -адическом регуляторе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:6 (1981), 1203–1240; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic Dirichlet theorem and the l -adic regulator”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:3 (1982), 445–478.
2. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. V. Рост ℓ -адического регулятора в круговом $\mathbb{Z}_\ell$ -расширении поля алгебраических чисел”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 105–170; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. V. Growth of the ℓ -adic regulator in the cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$ -extension of an algebraic number field”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 959–1021.
3. Л. В. Кузьмин, “Модуль Тэйта полей алгебраических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:2 (1972), 267–327; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “The Tate module for algebraic number fields”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:2 (1972), 263–321.
4. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о l -адическом регуляторе. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 782–813; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the l -adic regulator. II”, *Math. USSR-Izv.*, **35**:1 (1990), 113–144.
5. Л. В. Кузьмин, “Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. IV”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), 43–88; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “Some remarks on the ℓ -adic regulator. IV”, *Izv. Math.*, **64**:2 (2000), 265–310.
6. В. Н. Gross, “ p -adic L -series at $s = 0$ ”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28**:3 (1981), 979–994.
7. S. Lang, *Cyclotomic fields*. I, II, Combined 2nd ed., Grad. Texts in Math., **121**, Springer-Verlag, New York, 1990, xviii+433 pp.
8. A. Brumer, “On the units of algebraic number fields”, *Mathematika*, **14**:2 (1967), 121–124.
9. Л. В. Кузьмин, “Новое доказательство одной теоремы двойственности о ℓ -адических логарифмах локальных единиц”, *Алгебраическая геометрия – 8*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил., **45**, ВИНТИ, М., 1997, 72–81; англ. пер.: L. V. Kuz'min, “A new proof of some duality theorem on the ℓ -adic logarithms of local units”, *J. Math. Sci. (New York)*, **95**:1 (1999), 1996–2005.

ЛЕОНИД ВИКТОРОВИЧ КУЗЬМИН
(LEONID V. KUZ'MIN)
Национальный исследовательский центр
“Курчатовский институт”, г. Москва
E-mail: helltiapa@mail.ru

Поступило в редакцию
16.10.2013