Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Наумкин, Диссипативное свойство кубического нелинейного уравнения Шрёдингера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 137–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:23:17

УДК 517.956.8+517.953

П. И. Наумкин

Диссипативное свойство кубического нелинейного уравнения Шрёдингера

Изучено поведение при больших значениях времени решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера. Рассмотрено взаимодействие резонансного члена с другими типами нелинейности. Доказано глобальное по времени существование решений и найдено их асимптотическое представление при больших значениях времени. Показано, что в дальней зоне убывание решений имеет тот же порядок, что и в линейном случае, в ближней зоне решения приобретают дополнительное логарифмическое убывание, которое оказывается более медленным по сравнению со случаем, когда в уравнении Шрёдингера отсутствует резонансный член.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, кубическая нелинейность, асимптотика при больших значениях времени.

DOI: 10.4213/im8179

*Посвящается светлой памяти моего учителя
Ильи Андреевича Шимарева*

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена рассмотрению вопросов глобального существования и асимптотического поведения при больших значениях времени решений задачи Коши для кубического нелинейного уравнения Шрёдингера в одномерном по пространственной переменной случае:

$$\begin{aligned} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} &= \mathcal{N}(u, \bar{u}), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ u(1, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

где нелинейность задана следующим образом:

$$\mathcal{N}(u, \bar{u}) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j u^j \bar{u}^{3-j} = \lambda_1 u \bar{u}^2 + \lambda_2 |u|^2 u + \lambda_3 u^3$$

с коэффициентами $\lambda_1 = b \in [0, 1)$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = i\sqrt{3}\mu$, $0 < \mu < 1-b$. Более общий случай $\lambda_2 > 0$ может быть сведен к рассматриваемому случаю $\lambda_2 = 1$ масштабным преобразованием. При замене $u \rightarrow e^{i\theta} u$ приходим к случаю $\lambda_1 = be^{-2i\theta}$ и $\lambda_3 = i\sqrt{3}\mu e^{2i\theta}$. Нас интересует взаимодействие резонансного члена $|u|^2 u$ с другими типами нелинейности в уравнении Шрёдингера. При этом ограничение

$|\lambda_1| + |\lambda_3| < |\lambda_2|$ означает в некотором смысле, что резонансная нелинейность $\lambda_2|u|^2u$ доминирует над другими нерезонансными типами нелинейности $\lambda_1u\bar{u}^2$ и λ_3u^3 в уравнении (1).

В случае $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ нелинейное уравнение Шрёдингера (1) было проинтегрировано с помощью метода обратной задачи рассеяния и было изучено асимптотическое поведение его решений при $t \rightarrow \infty$ (см. [1], [2]). Однако интегрировать явно нелинейное уравнение в частных производных удастся лишь в редчайших случаях. Вычисления при больших значениях времени являются весьма трудоемкой задачей даже для самых современных ЭВМ. Поэтому важную роль приобретают различные приближенные представления решений, в частности асимптотические методы. Кроме того, асимптотические свойства решений указывают на тот или иной характер нелинейности и мотивируют выбор модели при описании физического процесса.

Трудность в изучении асимптотики решений кубического нелинейного уравнения Шрёдингера (1) можно прояснить, если сравнить порядки убывания по времени различных членов уравнения. Отправляясь от известной асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решений линейного уравнения Шрёдингера (т. е. (1) при $\mathcal{N}(u, \bar{u}) \equiv 0$)

$$u(t, x) = \frac{M}{\sqrt{it}} \widehat{u_0} \left(\frac{x}{t} \right) + O(t^{-\frac{3}{2}}),$$

где $M \equiv \exp\left(\frac{ix^2}{2t}\right)$, предполагаем подобное поведение решений нелинейного уравнения Шрёдингера (1):

$$u(t, x) \approx \frac{M}{\sqrt{it}} w \left(t, \frac{x}{t} \right)$$

с некоторой новой неизвестной функцией w . Тогда получим, что линейная часть уравнения имеет вид $iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} \approx \frac{M}{\sqrt{it}} iw_t$, а нелинейность ведет себя как $\mathcal{N}(u, \bar{u}) \approx \lambda_1 i^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \overline{M} |w|^2 \bar{w} + \lambda_2 i^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} M |w|^2 w + \lambda_3 i^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} M^3 w^3$. Таким образом, мы приходим к следующему уравнению для w :

$$iw_t = i\lambda_1 t^{-1} \overline{M}^2 |w|^2 \bar{w} + \lambda_2 t^{-1} |w|^2 w - i\lambda_3 t^{-1} M^2 w^3 + o(t^{-1}).$$

Отметим, что кубические члены в последнем уравнении имеют критическое убывание, так что их нельзя отбросить в первом приближении. С математической точки зрения также интересно было бы изучить влияние различных кубических нелинейностей на асимптотику при больших значениях времени. В этом направлении к настоящему моменту известны следующие результаты.

В работе [3] было доказано несуществование обычных состояний рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера (1) при $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, т. е. решение нелинейного уравнения Шрёдингера невозможно приблизить каким-нибудь решением линейного уравнения Шрёдингера (1) при $\mathcal{N}(u, \bar{u}) \equiv 0$. Асимптотика решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера (1) при $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ была получена в работах [4]–[6] (см. также [7] и цитированную в этой работе литературу). В частности, получено асимптотическое

представление решения

$$u(t, x) = \frac{M}{\sqrt{it}} W_+ \left(\frac{x}{t} \right) \exp \left(i \lambda_2 \left| W_+ \left(\frac{x}{t} \right) \right|^2 \log t \right) + o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \quad (2)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где $W_+ \in \mathbf{L}^\infty$. Таким образом, присутствие резонансного члена $\lambda_2 |u|^2 u$ в уравнении Шрёдингера (1) приводит к модифицированной асимптотике решений, выражающейся в дополнительной логарифмической осцилляции главного члена по сравнению со случаем линейного уравнения. Отметим, что резонансное возмущение $\lambda_2 |u|^2 u$ имеет консервативный характер в том смысле, что $i u_t + \frac{1}{2} u_{xx} = \lambda_2 |u|^2 u$ для нелинейного уравнения Шрёдингера и норма решения $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ сохраняется по времени.

Асимптотика решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера с различными кубическими нелинейностями, включающими производную u_x решения, а также резонансные члены вида $|u|^2 u$, $|u_x|^2 u$, $|u|^2 u_x$ и другие, удовлетворяющие калибровочному свойству $\mathcal{N}(e^{i\theta} u) = e^{i\theta} \mathcal{N}(u)$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, рассматривалась в работах [8]–[14] (см. цитированную в этих работах литературу). Было доказано, что если нерезонансные нелинейности содержат по крайней мере одну производную u_x решения, то асимптотика имеет модифицированный характер (подобно (2)), а при отсутствии резонансных членов асимптотика решения имеет квазилинейный вид

$$u(t, x) = \frac{M}{\sqrt{it}} W_+ \left(\frac{x}{t} \right) + o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right). \quad (3)$$

Различные нерезонансные кубические нелинейности в уравнении Шрёдингера, не содержащие производную u_x решения, были рассмотрены в работах [15]–[18], где было показано, что при отсутствии резонансных нелинейностей они приводят к диссипативному эффекту. В частности, для уравнения (1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ асимптотика решения имеет вид

$$u(t, x) = \frac{M}{\sqrt{it}} \widehat{u_0} \left(\frac{x}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \widehat{u_0} \left(\frac{x}{t} \right) \right|^2 \log \frac{t^2}{t + x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + O \left(t^{-\frac{1}{2}} \left(\log \frac{t^2}{t + x^2} \right)^{-\frac{1}{2} - \gamma} \right) \quad (4)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где $\gamma > 0$ мало. Из асимптотики (4) следует оценка убывания

$$\sup_{|x| \leq \sqrt{t}} |u(t, x)| \leq C \varepsilon t^{-\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2 \log t)^{-\frac{1}{2}},$$

так что решения приобретают более быстрое убывание в короткой зоне $|x| \leq \sqrt{t}$ по сравнению с линейным случаем. Отметим, что резонансный член $\lambda_2 |u|^2 u$ был исключен из рассмотрения в этих работах. Таким образом, возникает вопрос о том, каково взаимодействие резонансных и нерезонансных нелинейностей в одномерном уравнении Шрёдингера (1). В работе [19] была рассмотрена

задача Коши (1) в случае нечетных начальных возмущений u_0 и получена модифицированная асимптотика (2). Заметим, что коэффициенты λ_1 и λ_3 не входят в главный член асимптотики (2), т. е. в случае нечетных решений (либо когда нерезонансные нелинейности содержат по крайней мере одну производную) характер главного члена асимптотики определяется резонансной нелинейностью $\lambda_2|u|^2u$.

В настоящей работе мы освободимся от условия нечетности начальных данных и выясним влияние нерезонансных нелинейностей $\lambda_1 u \bar{u}^2$ и $\lambda_3 u^3$ на асимптотику решений. Мы покажем, что решения приобретают дополнительное логарифмическое убывание в области $|x| \leq \sqrt{t}$, которое, однако, медленнее, чем в (4), когда нет резонансных взаимодействий. Таким образом, именно нерезонансные нелинейности в уравнении Шрёдингера имеют диссипативный характер.

Перейдем к формулировке основного результата. Обозначим, как обычно, пространство Лебега через $\mathbf{L}^p = \{s \in \mathbf{S}' : \|s\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}$ с нормой

$$\|s\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |s(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|s\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |s(x)|, \quad p = \infty.$$

Введем весовое пространство Соболева

$$\mathbf{H}^{m,k} = \{s \in \mathbf{S}' : \|s\|_{\mathbf{H}^{m,k}} \equiv \|\langle x \rangle^k \langle i\partial \rangle^m s\|_{\mathbf{L}^2} < \infty\},$$

где $m, k \in \mathbb{R}$, $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$. Прямое преобразование Фурье зададим следующим образом:

$$\mathcal{F}s = \widehat{s}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} s(x) dx.$$

Тогда $\mathcal{F}^{-1}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} s(\xi) d\xi$ – обратное преобразование Фурье, $\mathbf{H}^m = \mathbf{H}^{m,0}$ – стандартное пространство Соболева, т. е. индекс 0 выписывать не будем. Различные положительные постоянные будем обозначать одной и той же буквой C .

Далее мы будем использовать технику факторизации линейной группы Шрёдингера (см. [20])

$$\mathcal{U}(t) = e^{\frac{it}{2}\partial_x^2} = M(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{V}(t)\mathcal{F},$$

где $M(t, x) = e^{\frac{i}{2t}x^2}$, $(\mathcal{D}(t)s)(x) = \frac{1}{\sqrt{it}}s\left(\frac{x}{t}\right)$ – оператор растяжения и

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{F}M(t)\mathcal{F}^{-1} = \frac{\sqrt{it}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{it}{2}(\xi-y)^2} dy.$$

Обозначим

$$\psi(t, \xi) = \varphi_\xi(t, \xi) + 2i \sum_{j=1,3} \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \frac{1}{\xi} (e^{\frac{it}{2}a_j \xi^2} - 1),$$

где $a_j = \frac{2j-4}{2j-3}$, $\chi_1 = b$, $\chi_3 = \mu$, $\rho(t) = \varphi(t, 0)$, $\varphi(t) = \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq b < 1$, $0 < \mu < 1 - b$. Предположим, что начальные возмущения u_0 таковы, что $\|\varphi(1)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1$ и $\|\psi(1)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon_1^4$, где $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Также предположим, что

$$|\rho(1)| \geq \delta, \quad (5)$$

где $\delta = \varepsilon_1^{1+\nu}$ с малым $\nu > 0$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([1, \infty); \mathbf{L}^2)$ задачи Коши (1). Более того, имеют место оценки убывания

$$C_1 \delta t^{-\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_1^4 \log t)^{-\frac{1}{4}} \leq \sup_{|x| \leq \sqrt{t}} |u(t, x)| \leq C_2 \varepsilon_1 t^{-\frac{1}{2}} (1 + \delta^4 \log t)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\sup_{|x| > \sqrt{t}} |u(t, x)| \leq C \varepsilon_1 t^{-\frac{1}{2}}$$

при $t \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы можем выбрать начальные возмущения, например, следующим образом: $u_0 = \mathcal{U}(1)\mathcal{F}^{-1}\varphi(1)$ и

$$\varphi(1, \xi) = \frac{\delta}{1 + \varepsilon_1^{12} \xi^2} - i \delta^3 \sum_{j \neq 2} \chi_j \int_{\delta}^1 e^{\frac{i\tau}{2} a_j \xi^2} \frac{d\tau}{\tau}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В области $|x| > \sqrt{t}$ решение убывает с той же скоростью, что и в линейном случае, в то время как в короткой зоне $|x| \leq \sqrt{t}$ решение приобретает дополнительное логарифмическое убывание, более медленное, чем в отсутствии резонансного члена (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие (5) теоремы 1 исключает случай нечетных начальных возмущений, рассмотренный в работе [19]. Предположение $0 \leq b < 1$, $0 < \mu < 1 - b$ существенно, поскольку в противном случае мы не можем гарантировать существование в целом по времени решений задачи Коши (1) при произвольных, пусть даже малых, начальных данных.

Теорема 1 описывает очень интересное свойство уравнения (1). Введя новую неизвестную функцию $\varphi(t) = \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t)$, мы получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для $\rho(t) = \varphi(t, 0)$:

$$i\rho' = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} + R_1(t),$$

где $\chi_1 = b$, $\chi_2 = 1$, $\chi_3 = \mu$, а $R_1(t)$ обозначает остаток. В случае $R_1(t) \equiv 0$, переходя к полярным координатам $\rho = re^{-i\theta}$, получаем систему

$$r' = -t^{-1}r^3(\mu - b)\sin(2\theta), \quad \theta' = t^{-1}r^2(1 + (\mu + b)\cos(2\theta)). \quad (6)$$

Система (6) имеет первый интеграл $r^2(1 + (\mu + b)\cos(2\theta))^{-\frac{\mu-b}{\mu+b}} = C$, означающий, что решения системы (6) при $|\mu + b| < 1$ осциллируют, в случае $|\mu + b| \geq 1$ решения могут убывать или расти по времени. Таким образом, члены более высокого порядка в остатке $R_1(t)$ существенно влияют на устойчивость решения.

Далее мы выделим из остатка $R_1(t)$ члены пятого порядка и покажем в лемме 3, что $\rho(t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$i\rho' = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} - t^{-1} \sum_{l=1}^5 \omega_l \rho^l \bar{\rho}^{5-l} + R_2(t), \quad (7)$$

где $\omega_1 = -\frac{2\pi}{3}b^2$, $\omega_2 = -\mu(\frac{\pi}{3} + i \ln 3)$, $\omega_3 = -4b\mu(\frac{\pi}{3} - i \ln 3)$, $\omega_4 = -\frac{2\pi}{3}b$, $\omega_5 = -6i\mu^2 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}$, $a_j = \frac{2j-4}{2j-3}$, а $R_2(t)$ обозначает остаток. Затем в лемме 4 мы покажем, что решения $\rho(t)$ уравнения (7) убывают логарифмически по времени при условии $0 \leq b < 1$, $0 < \mu < 1 - b$. Отметим, что в случае нерезонансного уравнения (1) при $\lambda_2 = 0$ получаем уравнение

$$i\rho' = t^{-1} \sum_{j=1,3} \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} + R_1(t),$$

которое имеет убывающие решения. Этим объясняется, почему нам не нужно было исследовать члены более высокого порядка в остатке R_1 в работах [15]–[18]. Отметим также, что в случае $\varphi(t, 0) = 0$ наш метод неприменим. Так что в случае, когда $\widehat{u}_0(0) = 0$, существование глобального по времени решения и нахождение его асимптотики остаются открытыми вопросами.

В работе [19] мы использовали замену функции $u(t, x) = t^{-\frac{1}{2}} E v(t, \xi)$, где $E = e^{\frac{it}{2}\xi^2}$ и $\xi = \frac{x}{t}$. Для новой функции $v = \mathcal{F}M\mathcal{U}(-t)u$ имеет место уравнение

$$i\partial_t v + \frac{1}{2t^2} \partial_\xi^2 v = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^3 E^{2j-4} \lambda_j v^j \bar{v}^{3-j}.$$

При оценке производной v_ξ в силу быстроосциллирующего множителя E^{2j+2} возникают вековые члены $i(2j-4)\xi E^{2j-4} \lambda_j v^j \bar{v}^{3-j}$ при $j \neq 2$. Чтобы исключить эти слагаемые, мы применяли преобразование, подобное преобразованию нормальных форм Шатаха [21], вводя оператор

$$\mathcal{I}(v) = v_\xi - 2t\xi \sum_{j=1,3} A_j E^{2j-4} \lambda_j v^j \bar{v}^{3-j},$$

где $A_j = (1 + (2j-3)it\xi^2)^{-1}$. В силу нечетности решения $\mathbf{L}^2$ -норму оператора $\mathcal{I}(v)$ удавалось оценить через $\|v_\xi\|_{\mathbf{L}^2}$. В отличие от этого в настоящей работе мы применяем преобразование $\varphi(t) = \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t)$ и выписываем уравнение для $\rho(t) = \varphi(t, 0)$ с нелинейными членами до пятого порядка включительно. Затем в лемме 4 мы докажем, что $\rho(t)$ логарифмически убывает по времени. В § 2 мы получим оценку производной новой функции $\partial_\xi \varphi(t, \xi)$. Затем в § 3 мы оценим разность $\varphi(t, \xi) - \varphi(t, 0)$ и выпишем уравнение (7) для $\rho(t) = \varphi(t, 0)$. Решая это уравнение, докажем в лемме 4 двустороннюю оценку

$$C_1 \delta (1 + \varepsilon_1^4 \log t)^{-\frac{1}{4}} \leq |\rho(t)| \leq C_2 \varepsilon_1 (1 + \delta^4 \log t)^{-\frac{1}{4}}.$$

В § 3 доказана теорема 1. В § 4 мы приведем доказательство вспомогательных тождеств и оценок.

§ 2. Оценка производной

Как и в работе [20], мы используем факторизацию для свободной группы Шрёдингера

$$\mathcal{U}(t) = e^{\frac{it}{2}\partial_x^2} = M(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{V}(t)\mathcal{F},$$

где $M(t, x) = e^{\frac{it}{2t}x^2}$ и $(\mathcal{D}(t)s)(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} t} \frac{1}{\sqrt{|t|}} s\left(\frac{x}{t}\right)$ – оператор растяжения,

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{F}M(t)\mathcal{F}^{-1} = e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} t} \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{it}{2}(\xi-y)^2} dy.$$

Также имеем $\mathcal{F}\mathcal{U}(-t) = i\mathcal{V}(-t)\overline{E}(t)\mathcal{D}\left(\frac{1}{t}\right)$, где $E(t, \xi) = e^{\frac{it}{2}\xi^2}$. Здесь мы использовали коммутационное соотношение $\mathcal{D}\left(\frac{1}{t}\right)M(t) = E(t)\mathcal{D}\left(\frac{1}{t}\right)$. Тогда получаем

$$\mathcal{F}M\mathcal{U}(-t)\left(i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2\right) = \mathcal{L}\mathcal{F}M\mathcal{U}(-t),$$

где $\mathcal{L} = i\partial_t + \frac{1}{2t^2}\partial_\xi^2$ и

$$\mathcal{F}M\mathcal{U}(-t)u^\beta \bar{u}^\alpha = i\overline{E}(t)\mathcal{D}\left(\frac{1}{t}\right)u^\beta \bar{u}^\alpha = i^{\frac{1+\alpha-\beta}{2}} t^{-1} E^{\beta-\alpha-1} v^\beta \bar{v}^\alpha;$$

здесь $v = \mathcal{F}M\mathcal{U}(-t)u = i\overline{E}\mathcal{D}\left(\frac{1}{t}\right)u$. Умножив теперь уравнение (1) на $\mathcal{F}M\mathcal{U}(-t)$, получим

$$\mathcal{L}v = t^{-1} \sum_{j=1}^3 i^{2-j} \lambda_j E^{2j-4} v^j \bar{v}^{3-j}. \quad (8)$$

Применяя оператор $\mathcal{V}(-t)$ к уравнению (8), находим

$$i\partial_t \varphi = t^{-1} \sum_{j=1}^3 i^{2-j} \lambda_j \mathcal{V}(-t)(E^{2j-4} v^j \bar{v}^{3-j}) \quad (9)$$

для новой неизвестной функции

$$\varphi(t) = \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t) = \mathcal{V}(-t)v(t) = e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} t} \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}(\xi-y)^2} v(t, y) dy.$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(-t)E^{\rho-1}s &= e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} t} \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}(\xi^2-2y\xi+y^2\rho)} s(y) dy \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sign} \rho + \operatorname{sign}(t\rho) - \operatorname{sign} t)} E^{1-\frac{1}{\rho}} \mathcal{D}(\rho)\mathcal{V}(-t\rho)s \end{aligned} \quad (10)$$

при $\rho \neq 0$, получаем уравнение для φ

$$i\partial_t \varphi = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3)\mathcal{V}((3-2j)t)v^j \bar{v}^{3-j}, \quad (11)$$

где $\theta_j = i^{2-j} \lambda_j e^{i\frac{\pi}{4}(\operatorname{sign}(2j-3) + \operatorname{sign}((2j-3)t) - \operatorname{sign} t)}$, $a_j = \frac{2j-4}{2j-3}$.

Приведем теорему локального существования решений задачи Коши для уравнения (11) (см. [7]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi_0 \in \mathbf{H}^1$ – начальные возмущения. Тогда для некоторого $T > 1$ существует единственное решение $\varphi \in \mathbf{C}([1, T]; \mathbf{H}^1)$ задачи Коши для уравнения (11) с начальным возмущением $\varphi(1) = \varphi_0$.

Введем автомодельную переменную $\tilde{\xi} = \xi\sqrt{t}$. Определим нормы

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t \in [1, T]} (\|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + Q^{\frac{1}{4}}(t) \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} \varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

$$\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T} = \sup_{t \in [1, T]} Q^{\frac{3}{4}}(t) \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} (\varphi - \rho)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \quad \|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} = \sup_{t \in [1, T]} t^{-\frac{1}{4}} Q^{\frac{5}{4}}(t) \|\psi(t)\|_{\mathbf{L}^2},$$

где $Q(t) = 1 + \delta^4 \log t$, $\delta = \varepsilon_1^{1+\nu}$, $\varepsilon = \varepsilon_1^{1-\nu}$, $\nu > 0$ мало, так что $\delta < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Также мы будем считать, что $\gamma > 0$ мало. Обозначим $\rho(t) = \varphi(t, 0)$ и

$$\psi = \varphi_\xi - \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau \quad (12)$$

при $\chi_j = \lambda_j \frac{i^{2-j}}{\sqrt{|2j-3|}} e^{i\frac{\pi}{4}(\text{sign}(2j-3)-1)}$. Ввиду нашего выбора $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = i\mu\sqrt{3}$ имеем $\chi_1 = b$, $\chi_2 = 1$, $\chi_3 = \mu$.

ЛЕММА 1. Предположим, что начальные возмущения $\varphi_0 \in \mathbf{H}^1$ таковы, что $\|\varphi_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1$ и $\|\psi_0\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon_1^4$, где $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Предположим, что решение $\varphi \in \mathbf{C}([1, T]; \mathbf{H}^1)$ уравнения (11) удовлетворяет оценкам $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T} \leq \varepsilon^3$, $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} \leq \varepsilon$. Тогда справедливо неравенство $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} < \varepsilon^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неравенство $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} < \varepsilon^4$ не выполнено. Ввиду непрерывности решения можно найти максимальный момент времени $\tilde{T} \in (1, T]$ такой, что $\|w\|_{\mathbf{Y}_{\tilde{T}}} \leq \varepsilon^4$. Дифференцируя (11), получаем

$$\partial_t \varphi_\xi = \sum_{j \neq 2} \theta_j a_j \xi E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \mathcal{V}((3-2j)t) v^j \bar{v}^{3-j} + R_1, \quad (13)$$

где

$$R_1 = -it^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \mathcal{V}((3-2j)t) \partial_\xi (v^j \bar{v}^{3-j}).$$

Представим первое слагаемое в правой части уравнения (13) в виде

$$\begin{aligned} & \theta_j a_j \xi E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \mathcal{V}((3-2j)t) v^j \bar{v}^{3-j} \\ &= a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi E^{a_j} + \theta_j a_j \xi E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \mathcal{V}((3-2j)t) g_j, \end{aligned}$$

где $\chi_j = \theta_j \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}(2j-3)}}{\sqrt{|2j-3|}}$ и $g_j = v^j \bar{v}^{3-j} - \rho^j \bar{\rho}^{3-j}$. Запишем уравнение (13) следующим образом:

$$\partial_t \varphi_\xi = \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi E^{a_j} + R_1 + R_2, \quad (14)$$

где

$$R_2 = \sum_{j \neq 2} \theta_j a_j \xi E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \mathcal{V}((3-2j)t) g_j = \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} g_j(t, y) dy;$$

здесь $S_j = a_j \frac{\xi^2}{2} - \frac{3-2j}{2} \left(\frac{\xi}{2j-3} - y \right)^2 = \frac{\xi^2}{2} - \xi y + \frac{2j-3}{2} y^2$ и $\nu_j = \frac{\theta_j a_j}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{2} \text{sign}(3-2j)}$. Преобразуем первое слагаемое в правой части уравнения (14) в виде

$$\sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi E^{a_j} = \partial_t \left(\sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau \right) - \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j (\rho^j \bar{\rho}^{3-j})_t \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau.$$

Далее, используя тождество $e^{itS_j} = H_j(\partial_t(t e^{itS_j}) + S_{jy} \partial_y e^{itS_j})$, где $H_j = (1 + it(S_j + S_{jy}^2))^{-1}$ и

$$\begin{aligned} S_j + S_{jy}^2 &= \frac{1}{2} \left((4j-5)(2j-3) \left(y - \frac{\xi}{2j-3} \right)^2 + \frac{2j-4}{2j-3} \xi^2 \right) \\ &\geq C(\xi^2 + y^2) \end{aligned}$$

при $j = 0, 1, 3$, находим

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} g_j dy = \partial_t \left(\sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} t H_j g_j dy \right) \\ &\quad - \sum_{j \neq 2} \nu_j \xi \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (t \partial_t(\sqrt{t} H_j g_j) + \sqrt{t} \partial_y(S_{jy} H_j g_j)) dy. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$w_t = R_1 + R_3 + R_4,$$

где

$$\begin{aligned} w &= \varphi_\xi - \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau - \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} t H_j g_j dy, \\ R_3 &= - \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j (\rho^j \bar{\rho}^{3-j})_t \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau, \\ R_4 &= - \sum_{j \neq 2} \nu_j \xi \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (t \partial_t(\sqrt{t} H_j g_j) + \sqrt{t} \partial_y(S_{jy} H_j g_j)) dy. \end{aligned}$$

Отметим, что при $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) \xi \int_0^t E^a d\tau &= (\xi t - i \partial_\xi) \int_0^1 \mathcal{V}(t) E^{az} dz = (\xi t - i \partial_\xi) \int_0^1 E^{\frac{az}{1+az}} \frac{dz}{\sqrt{|1+az|}} \\ &= -\xi t \int_0^1 e^{\frac{it}{2} \xi^2 \frac{az}{1+az}} z \partial_z \frac{1}{(1 + \frac{it}{2} \xi^2 \frac{az}{(1+az)^2}) (1+az)^{\frac{3}{2}}} dz + \frac{C \xi t e^{\frac{it}{2} \xi^2 \frac{a}{1+a}}}{1 + \frac{it}{2} \xi^2 \frac{a}{(1+a)^2}} \\ &= O(\xi t \langle \tilde{\xi} \rangle^{-2+\gamma}). \end{aligned}$$

Чтобы оценить R_3 , воспользуемся оценкой $|\int_0^t E^a d\tau| \leq C t \langle \tilde{\xi} \rangle^{-2}$ при $a > 0$. Тогда

$$\|R_3\|_{L^2} \leq C t^{-1} |\rho|^5 \left\| \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau \right\|_{L^2} \leq C \varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t).$$

В силу равенства $v_\xi = \mathcal{V}(t)\varphi_\xi$ имеем

$$v_\xi = \mathcal{V}(t)w + \sum_{j \neq 2} a_j \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} \mathcal{V}(t)\xi \int_0^t E^{a_j} d\tau + \sum_{j \neq 2} \nu_j \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} t \tilde{\xi} H_j g_j dy.$$

Таким образом, нам нужно рассмотреть члены вида $\mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j s dy$ и $\mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} S_{jy} H_j s dy$. Имеем

$$\mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j s dy = \int_{\mathbb{R}} P_j(\tilde{\xi}, \tilde{y}) s(t, y) dy,$$

где

$$P_j(\tilde{\xi}, \tilde{y}) = -\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2\pi}} \bar{E} \partial_{\tilde{\xi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tilde{x}(\tilde{\xi}-\tilde{y}) + \frac{i}{2}(2j-3)\tilde{y}^2} d\tilde{x}}{(\tilde{x} - \frac{4j-5}{3}\tilde{y})^2 + \frac{2}{9}((5-4j)(2-j)\tilde{y}^2 - 3i)}.$$

Ввиду теоремы Коши имеем $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixz} dz}{(z-a)^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} e^{iax-b|x|}$ при $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} b > 0$. Следовательно,

$$P_j(\tilde{\xi}, \tilde{y}) = -\frac{2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Omega} \bar{E} e^{\frac{i}{2}(2j-3)\tilde{y}^2} \partial_{\tilde{\xi}} e^{i\frac{4j-5}{3}\tilde{y}(\tilde{\xi}-\tilde{y}) - \frac{\sqrt{2}}{3}|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\Omega},$$

где $\Omega = \sqrt{(5-4j)(2-j)\tilde{y}^2 - 3i}$, откуда получаем оценку

$$|P_j(\tilde{\xi}, \tilde{y})| \leq C e^{-C|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\langle \tilde{y} \rangle}.$$

Необходимо также рассмотреть ядро

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} it \tilde{\xi} S_{jy} H_j s dy \\ = -\mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_{jy} s dy + \bar{E} \int_{\mathbb{R}} s(t, y) \partial_y (e^{\frac{i}{2}(2j-3)\tilde{y}^2} P_j(\tilde{\xi}, \tilde{y})) dy. \end{aligned}$$

Поскольку $\langle \tilde{\xi} \rangle^\alpha e^{-C|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\langle \tilde{y} \rangle} \leq \langle \tilde{y} \rangle^\alpha e^{-C|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\langle \tilde{y} \rangle}$, находим оценки

$$\begin{aligned} \left\| \langle \tilde{\xi} \rangle^\alpha \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j s dy \right\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \left\| \langle \tilde{\xi} \rangle^\alpha \int_{\mathbb{R}} |s(t, y)| e^{-C|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\langle \tilde{y} \rangle} dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{\alpha-1} s\|_{\mathbf{L}^2} \end{aligned}$$

при $\alpha \in [0, 1]$ и

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} t \tilde{\xi} S_{jy} H_j s dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ \leq C t^{\frac{1}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{|s(t, y)| dy}{\tilde{\xi}^2 + \tilde{y}^2} \right\|_{\mathbf{L}^2} + C t^{\frac{1}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}} |s(t, y)| |\tilde{y}| e^{-C|\tilde{\xi}-\tilde{y}|\langle \tilde{y} \rangle} dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|s(t, \xi)\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\|R_1\|_{\mathbf{L}^2} &\leq Ct^{-1} \| |v|^2 v_\xi \|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-1} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\mathcal{V}(t)w\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + Ct^{-1} \sum_{j \neq 2} |\rho|^3 \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \left\| \langle \tilde{\xi} \rangle^{2\gamma} \mathcal{V}(t) \xi \int_0^t E^{a_j} d\tau \right\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad + C \sum_{j \neq 2} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \left\| \langle \tilde{\xi} \rangle^{2\gamma} \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq Ct^{-1} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|w\|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-\frac{3}{4}} |\rho|^3 \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \\
&\quad + Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^4 \|v - \varphi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t),
\end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\|\langle \tilde{\xi} \rangle^{2\gamma-1} g_j\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 (\|v - \varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{5\gamma-1}\|_{\mathbf{L}^2} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} (\varphi - \rho)\|_{\mathbf{L}^\infty}), \\
\|v - \varphi\|_{\mathbf{L}^2} &= \|(\mathcal{V}(t) - 1)\varphi\|_{\mathbf{L}^2} = \|\mathcal{F}(M(t) - 1)\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|x\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{\mathbf{L}^2} = Ct^{-\frac{1}{2}} \|\varphi_\xi\|_{\mathbf{L}^2} = Ct^{-\frac{1}{2}} \|v_\xi\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим R_4 . Используя уравнение $v_t = \frac{i}{2t^2} v_\xi \xi - i\mathcal{L}v$ и интегрируя в интеграле R_4 по частям, получаем

$$\begin{aligned}
R_4 &= - \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (\sqrt{t} \partial_t (\sqrt{t} H_j) + \partial_y (S_{jy} H_j)) g_j dy \\
&\quad + \sum_{j \neq 2} it \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j (j v^{j-1} \bar{v}^{3-j} \mathcal{L}v - (3-j) v^j \bar{v}^{2-j} \overline{\mathcal{L}v}) dy \\
&\quad + \sum_{j \neq 2} \frac{i}{2t} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j (j (v^{j-1} \bar{v}^{3-j})_y v_y - (3-j) (v^j \bar{v}^{2-j})_y \bar{v}_y) dy \\
&\quad - \sum_{j \neq 2} \frac{i}{2t} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (it S_{jy} H_j + H_{jy}) (j v^{j-1} \bar{v}^{3-j} v_y - (3-j) v^j \bar{v}^{2-j} \bar{v}_y) dy \\
&\quad - \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} S_{jy} H_j \partial_y g_j dy + \sum_{j \neq 2} \nu_j \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j t \partial_t (\rho^j \bar{\rho}^{3-j}) dy. \quad (15)
\end{aligned}$$

Для первого слагаемого запишем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (\sqrt{t} \partial_t (\sqrt{t} H_j) + \partial_y (S_{jy} H_j)) g_j dy \\
&= \left(2j - \frac{7}{2}\right) \mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j g_j dy + \mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j^2 g_j dy \\
&\quad - (4j - 5) it \mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} S_{jy}^2 H_j^2 g_j dy.
\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\left\| \mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1} g_j\|_{\mathbf{L}^2},$$

а второе слагаемое –

$$\left\| \mathcal{V}(t) \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j^2 g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} (\langle \tilde{\xi} \rangle + \langle \tilde{y} \rangle)^{-3} |g_j| dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1} g_j\|_{\mathbf{L}^2}.$$

В последнем слагаемом из (15) проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \left\| it \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} S_{jy}^2 H_j^2 g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} (\langle \tilde{\xi} \rangle + \langle \tilde{y} \rangle)^{-3} |g_j| dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &+ Ct^{-\frac{1}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}} (\langle \tilde{\xi} \rangle + \langle \tilde{y} \rangle)^{-2} |\partial_y g_j| dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1} g_j\|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-1} \|\partial_\xi g_j\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} (\sqrt{t} \partial_t (\sqrt{t} H_j) + \partial_y (S_{jy} H_j)) g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1} g_j\|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-1} \|\partial_\xi g_j\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t). \end{aligned}$$

Чтобы оценить второе слагаемое в (15), ввиду неравенства

$$\left\| \langle \tilde{\xi} \rangle^\alpha \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j s dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{\alpha-1} s(t, \xi)\|_{\mathbf{L}^2}$$

и в силу уравнения (8) найдем

$$\begin{aligned} \left\| t \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} H_j (j v^{j-1} \bar{v}^{3-j} \mathcal{L} v - (3-j) v^j \bar{v}^{2-j} \overline{\mathcal{L} v}) dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1} v^5(t, \xi)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t). \end{aligned}$$

Тогда из (15) получаем

$$\begin{aligned} \|R_4\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t) + C\varepsilon t^{-1} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1}\|_{\mathbf{L}^2} \|v_\xi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &+ Ct^{-1} \| |v|^2 v_y \|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-\frac{1}{2}} |\rho|^5 \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1}\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 t^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t)$, откуда интегрированием по времени имеем

$$\|w\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon_1^4 + C\varepsilon^5 t^{\frac{1}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t) < \frac{\varepsilon^4}{2} t^{\frac{1}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t)$$

при $t \in [1, \tilde{T}]$. Имеем также

$$\begin{aligned} \|\psi - w\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \left\| \tilde{\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} t H_j g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} = Ct \left\| \mathcal{V}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itS_j} \tilde{\xi} H_j g_j dy \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq Ct^{\frac{1}{2}} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 (\|v - \varphi\|_{\mathbf{L}^2} + \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{5\gamma-1}\|_{\mathbf{L}^2} \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} (\varphi - \rho)\|_{\mathbf{L}^\infty}) \\ &\leq C\varepsilon^5 t^{\frac{1}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к противоречию со сделанным в начале доказательства предположением, поэтому оценка леммы справедлива для всех $t \in [1, T]$. Лемма доказана.

§ 3. Оценки в равномерной метрике

Для начала оценим разность $\varphi(t, \xi) - \rho(t)$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что начальные возмущения $\varphi_0 \in \mathbf{H}^1$ таковы, что $\|\varphi_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1$ и $\|\psi_0\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon_1^4$, где $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Пусть решение $\varphi \in \mathbf{C}([1, T]; \mathbf{H}^1)$ уравнения (11) таково, что $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} \leq \varepsilon$ и $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} \leq \varepsilon^4$. Тогда имеет место неравенство $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T} \leq \varepsilon^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим первообразную при всех $\xi \neq 0$ следующим образом:

$$\partial_\xi^{-1} f = \begin{cases} -\int_\xi^\infty f(\xi) d\xi & \text{при } \xi > 0, \\ \int_{-\infty}^\xi f(\xi) d\xi & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$G_b(\tilde{\xi}) = -e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} b} \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{2\pi}} \partial_{\tilde{\xi}}^{-1} e^{-\frac{ib}{2} \tilde{\xi}^2}$$

при $b \neq 0$. Поскольку $G_b(+0) - G_b(-0) = e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} b} \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ib}{2} z^2} dz = 1$, интегрирование по частям в интеграле $\mathcal{V}(bt)$ дает

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(bt)s &= e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(bt)} \frac{\sqrt{|bt|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ibt}{2} y^2} s(t, \xi - y) dy \\ &= s(t, \xi) - \int_{\mathbb{R}} G_b(\tilde{y}) s_\xi(t, \xi - y) dy. \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, имеем

$$q(t, \xi) = v(t, \xi) - v(t, 0) - \int_{\mathbb{R}} (G_{-1}(\tilde{\xi} - \tilde{y}) - G_{-1}(-\tilde{y})) v_y(t, y) dy. \quad (17)$$

Для всех $x, y > 0$ получаем

$$|G_b(x) - G_b(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^x e^{i\frac{b}{2} \tilde{\xi}^2} d\tilde{\xi} \right| \leq C|x - y|.$$

С другой стороны, при $x > 0$ имеем

$$|G_b(x)| \leq C \left| \int_x^\infty \partial_\eta \left(\frac{\eta e^{\frac{ib}{2} \eta^2}}{1 + ib\eta^2} \right) d\eta \right| + C \left| \int_x^\infty \frac{\eta^2 e^{\frac{ib}{2} \eta^2}}{(1 + ib\eta^2)^2} d\eta \right| \leq C \langle x \rangle^{-1}.$$

Следовательно, находим $|G_b(x) - G_b(y)| \leq C|x - y|^\gamma (\langle x \rangle^{\gamma-1} + \langle y \rangle^{\gamma-1})$ при всех $x, y > 0$. Отсюда получаем оценку

$$\begin{aligned} \|G_b(\tilde{\xi} - \tilde{y}) - G_b(-\tilde{y})\|_{\mathbf{L}_y^2} &\leq Ct^{-\frac{1}{4}} \left(\int_{|\tilde{y}| \geq |\tilde{\xi}|} |G_b(|\tilde{\xi}| - \tilde{y}) - G_b(-\tilde{y})|^2 d\tilde{y} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ Ct^{-\frac{1}{4}} \left(\int_0^{|\tilde{\xi}|} |G_b(|\tilde{\xi}| - \tilde{y}) - G_b(-\tilde{y})|^2 d\tilde{y} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ct^{-\frac{1}{4}} |\tilde{\xi}|^\gamma, \end{aligned} \quad (18)$$

так что в силу (17) находим

$$\begin{aligned} |q(t, \xi) - (v(t, \xi) - v(t, 0))| &\leq C \|G_{-1}(\tilde{\xi} - \tilde{y}) - G_{-1}(-\tilde{y})\|_{\mathbf{L}_y^2} \|v_y\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C\varepsilon^3 |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь, преобразуя правую часть уравнения (11) при использовании соотношения (16), имеем

$$\mathcal{V}((3-2j)t)v^j\bar{v}^{3-j} = v^j\bar{v}^{3-j} - \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) \partial_\xi v^j\bar{v}^{3-j}(t, \xi - y) dy. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (11), получим

$$i\partial_t q(t, \xi) = (R_5(t, \xi) - R_5(t, 0)) - (R_6(t, \xi) - R_6(t, 0)), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} R_5(t, \xi) &= t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) v^j\bar{v}^{3-j}(t, \xi), \\ R_6(t, \xi) &= t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) \partial_\xi v^j\bar{v}^{3-j}(t, \xi - y) dy. \end{aligned}$$

Поскольку $|v(t, 0)| \leq Q^{-\frac{1}{4}}(t) \|v\|_{\mathbf{X}_T} \leq \varepsilon Q^{-\frac{1}{4}}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} |R_5(t, \xi) - R_5(t, 0)| &\leq Ct^{-1} \sum_{j=1}^3 |\mathcal{D}(2j-3) v^j\bar{v}^{3-j}(t, \xi) - v^j\bar{v}^{3-j}(t, 0)| \\ &\quad + Ct^{-1} \sum_{j \neq 2} |(E^{a_j} - 1) v^j\bar{v}^{3-j}(t, 0)| \\ &\leq C\varepsilon^2 t^{-1} \sum_{j=1}^3 |\mathcal{D}(2j-3) q(t, \xi)| + C\varepsilon^3 t^{-1} |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t). \end{aligned}$$

Ввиду (18) получаем

$$\begin{aligned} |R_6(t, \xi) - R_6(t, 0)| &\leq Ct^{-1} \sum_{j=1}^3 \left| \mathcal{D}(2j-3) \int_{\mathbb{R}} (G_{3-2j}(\tilde{\xi} - \tilde{y}) - G_{3-2j}(-\tilde{y})) \partial_y v^j\bar{v}^{3-j}(t, y) dy \right| \\ &\quad + Ct^{-1} \sum_{j \neq 2} |E^{a_j} - 1| \left| \int_{\mathbb{R}} G_b(\tilde{y}) \partial_y v^j\bar{v}^{3-j}(t, y) dy \right| \leq C\varepsilon^5 t^{-1} |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t). \end{aligned}$$

Следовательно, из (21) вытекает оценка

$$|\partial_t q(t, \xi)| \leq C\varepsilon^2 t^{-1} \sum_{j=1}^3 |\mathcal{D}(2j-3) q(t, \xi)| + C\varepsilon^3 t^{-1} |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t). \quad (22)$$

Докажем оценку леммы от противного. В силу непрерывности функции $q(t)$ можно найти максимальный интервал времени $[1, \tilde{T}]$, $\tilde{T} \in (1, T]$, такой, что

$|\varphi(t, \xi) - \rho(t)| \leq C\varepsilon^3 |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t)$ для всех $t \in [1, \tilde{T}]$, $\xi \in \mathbb{R}$. Тогда из оценки (22) получим $|\partial_t q(t, \xi)| \leq C\varepsilon^3 t^{\frac{7}{2}-1} |\xi|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t)$, откуда, интегрируя по времени, находим

$$\begin{aligned} |q(t, \xi)| &\leq |q(1, \xi)| + C\varepsilon^3 |\xi|^\gamma \int_1^t \tau^{\frac{7}{2}-1} Q^{-\frac{3}{4}}(\tau) d\tau \\ &\leq \varepsilon_1 |\xi|^\gamma + C\varepsilon^3 |\xi|^\gamma t^{\frac{7}{4}} + C\varepsilon^3 |\xi|^\gamma t^{\frac{7}{2}} Q^{-\frac{3}{4}}(t) < C\varepsilon^3 t^{\frac{7}{2}-1} |\xi|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t) \end{aligned}$$

для всех $t \in [1, \tilde{T}]$. Мы приходим к противоречию. Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{2\pi}{3}b^2, & \omega_2 &= -\mu \left(\frac{\pi}{3} + i \ln 3 \right), \\ \omega_3 &= -4b\mu \left(\frac{\pi}{3} - i \ln 3 \right), & \omega_4 &= -\frac{2\pi}{3}b, & \omega_5 &= -6i\mu^2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Предположим, что решение $\varphi \in \mathbf{C}([1, T]; \mathbf{H}^1)$ уравнения (11) таково, что $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} \leq \varepsilon$ и $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} \leq \varepsilon^4$. Тогда функция $\rho(t) = \varphi(t, 0)$ удовлетворяет уравнению*

$$i\rho' = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} - t^{-1} \sum_{l=1}^5 \omega_l \rho^l \bar{\rho}^{5-l} + O(t^{-1} \varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}}) \quad (23)$$

при всех $t \in [1, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (16) имеем

$$v(t, 0) = \mathcal{V}(t)\varphi = \rho(t) + \int_{\mathbb{R}} G_1(\tilde{\xi}) \varphi_\xi(t, \xi) d\xi. \quad (24)$$

Поскольку $ita_k \xi E^{a_k z} = \partial_\xi \left(\frac{E^{a_k z} - 1}{z} \right)$, делая замену переменной интегрирования $\tau = tz$ в формуле (12), получаем

$$\varphi_\xi = - \sum_{k \neq 2} i \chi_k \rho^k \bar{\rho}^{3-k} \partial_\xi \int_0^1 (E^{a_k z} - 1) \frac{dz}{z} + \psi. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), имеем

$$v(t, 0) = \rho(t) - \sum_{k \neq 2} i \chi_k \Phi_{a_k} \rho^k \bar{\rho}^{3-k} + R_7, \quad (26)$$

где $\Phi_a = \int_{\mathbb{R}} G_1(\tilde{\xi}) \partial_\xi \int_0^1 (E^{a z} - 1) \frac{dz}{z} d\xi$ и $R_7 = \int_{\mathbb{R}} G_1(\tilde{\xi}) \psi(t, \xi) d\xi$. Из определения видно, что функция $G_b(\tilde{y})$ убывает на бесконечности, как $|\tilde{y}|^{-1}$. Следовательно, остаток R_7 можно оценить следующим образом:

$$|R_7| \leq C \|\langle \tilde{y} \rangle^{-1}\|_{\mathbf{L}^2} \|\psi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon^5 Q^{-\frac{5}{4}}(t).$$

Взяв $\xi = 0$ в уравнении (11), получаем

$$i\rho' = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \chi_j \mathcal{V}((3-2j)t) v^j \bar{v}^{3-j} \Big|_{\xi=0} \quad (27)$$

для $\rho(t) = \varphi(t, 0)$. С помощью (16) для правой части (27) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}((3-2j)t) v^j \bar{v}^{3-j} \Big|_{\xi=0} &= v^j \bar{v}^{3-j}(t, 0) + j \rho^{j-1} \bar{\rho}^{3-j} \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) v_y dy \\ &\quad + (3-j) \rho^j \bar{\rho}^{2-j} \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) \bar{v}_y dy + R_8, \end{aligned} \quad (28)$$

так как $G_b(-\tilde{\xi}) = -G_b(\tilde{\xi})$, где

$$\begin{aligned} R_8 &= j \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) (v^{j-1} \bar{v}^{3-j}(t, y) - \rho^{j-1} \bar{\rho}^{3-j}) v_y dy \\ &\quad + (3-j) \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) (v^j \bar{v}^{2-j}(t, y) - \rho^j \bar{\rho}^{2-j}) \bar{v}_y dy. \end{aligned}$$

Ввиду (19) получаем $|v(t, \xi) - v(t, 0)| \leq C\varepsilon^3 |\tilde{\xi}|^\gamma Q^{-\frac{3}{4}}(t)$, поэтому с помощью равенства (26) имеем

$$|R_8| \leq C\varepsilon^4 Q^{-1}(t) \int_{\mathbb{R}} \langle \tilde{y} \rangle^{-1} (1 + |\tilde{y}|^\gamma) |v_y| dy \leq C\varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}}(t).$$

Также в силу (26) получаем $v^j \bar{v}^{3-j}(t, 0) = \rho^j \bar{\rho}^{3-j} - \Omega_j - \overline{\Omega_{3-j}} + O(\varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}})$, где $\Omega_j = j \sum_{k \neq 2} i \chi_k \Phi_{a_k} \rho^{j+k-1} \bar{\rho}^{6-j-k}$. Заметим, что

$$G_{-b}(\tilde{\xi}) = -e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} b} \frac{\sqrt{|tb|}}{\sqrt{2\pi}} \partial_{\tilde{\xi}}^{-1} e^{-i\frac{b}{2} \tilde{\xi}^2} = \overline{G_b(\tilde{\xi})},$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{\xi}) \bar{v}_\xi d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}} G_{3-2(3-j)}(\tilde{\xi}) v_\xi d\xi}.$$

Таким образом, из (28) находим

$$\mathcal{V}((3-2j)t) v^j \bar{v}^{3-j} \Big|_{\xi=0} = \rho^j \bar{\rho}^{3-j} - \Omega_j - \overline{\Omega_{3-j}} + W_j + \overline{W_{3-j}} + O(\varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}}), \quad (29)$$

где $W_j = j \rho^{j-1} \bar{\rho}^{3-j} \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{\xi}) v_\xi d\xi$. Ввиду (25) имеем

$$v_\xi = \mathcal{V}(t) \varphi_\xi = - \sum_{k \neq 2} i \chi_k \rho^k \bar{\rho}^{3-k} \partial_\xi \mathcal{V}(t) \int_0^1 (E^{a_k z} - 1) \frac{dz}{z} + \mathcal{V}(t) \psi.$$

Используя тождество (10) при $\rho = 1 - a_k z$, получаем

$$\mathcal{V}(t) E^{a_k z} = E^{\frac{a_k z}{1-a_k z}} e^{i\frac{\pi}{4}(1-\operatorname{sign}(1-a_k z))} \frac{1}{\sqrt{|1-a_k z|}}.$$

Поэтому

$$v_\xi = - \sum_{k \neq 2} i \chi_k \rho^k \bar{\rho}^{3-k} \partial_\xi \int_0^1 (E^{\frac{a_k z}{1-a_k z}} - 1) \frac{e^{i \frac{\pi}{4} (1 - \text{sign}(1-a_k z))} dz}{z \sqrt{|1-a_k z|}} + \mathcal{V}(t) \psi. \quad (30)$$

Следовательно,

$$W_j = - \sum_{k \neq 2} i j \chi_k \Psi_{3-2j, a_k} \rho^{j+k-1} \bar{\rho}^{6-j-k} + O(\varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}}),$$

где

$$\Psi_{b,a} = \int_{\mathbb{R}} G_b(\tilde{\xi}) \partial_\xi d\xi \int_0^1 (E^{\frac{az}{1-az}} - 1) \frac{e^{i \frac{\pi}{4} (1 - \text{sign}(1-az))} dz}{z \sqrt{|1-az|}}.$$

Таким образом, используя (27) и (29), получаем

$$\begin{aligned} i \rho' = & t^{-1} \sum_{j=1}^3 \chi_j \rho^j \bar{\rho}^{3-j} - t^{-1} \sum_{j=1}^3 \sum_{k \neq 2} \chi_j A_{j,k} \rho^{j+k-1} \bar{\rho}^{6-j-k} \\ & - t^{-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{k \neq 2} \chi_{3-j} \overline{A_{j,k}} \rho^{6-j-k} \bar{\rho}^{j+k-1} + O(t^{-1} \varepsilon^7 Q^{-\frac{7}{4}}), \end{aligned} \quad (31)$$

где $A_{j,k} = i j \chi_k (\Phi_{a_k} + \Psi_{3-2j, a_k})$. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k \neq 2} \chi_j A_{j,k} \rho^{j+k-1} \bar{\rho}^{6-j-k} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k \neq 2} \chi_{3-j} \overline{A_{j,k}} \rho^{6-j-k} \bar{\rho}^{j+k-1} = \sum_{l=1}^5 \omega_l \rho^l \bar{\rho}^{5-l},$$

где

$$\omega_l = \sum_{\substack{k=1,3 \\ l-2 \leq k \leq l}} \chi_{l+1-k} A_{l+1-k, k} + \sum_{\substack{k=1,3 \\ 3-l \leq k \leq 5-l}} \chi_{k+l-3} \overline{A_{6-k-l, k}},$$

так что получаем (23), где коэффициенты ω_l вычислены далее, в лемме 7. Лемма доказана.

Перейдем к полярным координатам $\rho = r e^{-i\theta}$ в уравнении (23). Тогда

$$r' - i r \theta' = -t^{-1} r^3 \sum_{j=1}^3 i \chi_j e^{(2-j)2i\theta} + t^{-1} r^5 \sum_{l=1}^5 i \omega_l e^{(3-l)2i\theta} + H,$$

где $H = O(t^{-1} \varepsilon^6 Q^{-\frac{7}{4}})$. Отсюда, отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$r' = t^{-1} r^3 F_1(\theta) + t^{-1} r^5 K_1(\theta) + r f_1, \quad \theta' = t^{-1} r^2 F_2(\theta) + t^{-1} r^4 K_2(\theta) + f_2,$$

где

$$F_1(\theta) = -\text{Re} \left(\sum_{j=1,3} i \chi_j e^{(2-j)2i\theta} \right), \quad F_2(\theta) = \lambda_2 + \text{Im} \left(\sum_{j=1,3} i \chi_j e^{(2-j)2i\theta} \right),$$

$$K_1(\theta) = \text{Re} \sum_{l=1}^5 i \omega_l e^{(3-l)2i\theta}, \quad K_2(\theta) = -\text{Im} \sum_{l=1}^5 i \omega_l e^{(3-l)2i\theta},$$

$$f_1 = \frac{1}{r} \text{Re } H, \quad f_2 = -\frac{1}{r} \text{Im } H.$$

Введем новую функцию $z = r^2 \exp(-2 \int \frac{F_1(\theta')}{F_2(\theta')} d\theta')$. Тогда $z' = -z^2 K_3(\theta) \theta'' + F_3$, где

$$K_3(\theta) = -2 \exp\left(2 \int \frac{F_1(\theta')}{F_2(\theta')} d\theta'\right) \left(\frac{K_1(\theta)}{F_2(\theta)} - \frac{F_1(\theta)}{F_2^2(\theta)} K_2(\theta)\right)$$

и $F_3 = z^2(t^{-1}r^4 K_2 + f_2)K_3 + 2z(f_1 - \frac{F_1(\theta)}{F_2(\theta)} f_2)$, так что получаем систему

$$z' = -z^2 K_3 \theta'' + F_3, \quad \theta'' = t^{-1} z F_2 \exp\left(2 \int \frac{F_1(\theta')}{F_2(\theta')} d\theta'\right) + t^{-1} r^4 K_2 + f_2.$$

В силу нашего выбора $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = i\mu\sqrt{3}$ имеем $\chi_1 = b$, $\chi_2 = 1$, $\chi_3 = \mu$ и $F_1(\theta) = -(a - 2b) \sin(2\theta)$, $F_2(\theta) = 1 + a \cos(2\theta)$, где $a = b + \mu$. Следовательно,

$$2 \int \frac{F_1(\theta')}{F_2(\theta')} d\theta' = \left(1 - \frac{2b}{a}\right) \ln(1 + a \cos(2\theta)).$$

Таким образом, имеем

$$z' = -z^2 K_3 \theta'' + F_3, \quad \theta'' = t^{-1} z (1 + a \cos(2\theta))^{2 - \frac{2b}{a}} + t^{-1} r^4 K_2 + f_2, \quad (32)$$

где

$$K_3(\theta) = -\frac{2K_1(\theta)}{(1 + a \cos(2\theta))^{\frac{2b}{a}}} - \frac{2(a - 2b) \sin(2\theta) K_2(\theta)}{(1 + a \cos(2\theta))^{1 + \frac{2b}{a}}};$$

здесь

$$\begin{aligned} K_1(\theta) &= \frac{2\pi}{3} b^2 \sin(4\theta) + 6\mu^2 \left(\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right) \cos(4\theta) \\ &\quad + \frac{\pi}{3} (\mu - 2b) \sin(2\theta) + (\ln 3) \mu \cos(2\theta) - 4b\mu \ln 3, \\ K_2(\theta) &= \frac{2\pi}{3} b^2 \cos(4\theta) + 6\mu^2 \left(\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right) \sin(4\theta) \\ &\quad + \frac{\pi}{3} (\mu + 2b) \cos(2\theta) - (\ln 3) \mu \sin(2\theta) + \frac{4\pi}{3} b\mu. \end{aligned}$$

В следующей лемме мы изучим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (32) с начальным возмущением $z(1) = |\rho(1)|^2 (1 + a \cos(2\theta(1)))^{1 - \frac{2b}{a}}$, которое удовлетворяет неравенствам $\frac{\delta^2}{2} (1 + a)^{1 - \frac{2b}{a}} < z(1) < 2\varepsilon_1^2 (1 - a)^{1 - \frac{2b}{a}}$.

ЛЕММА 4. *Предположим, что существует решение $z \in \mathbf{C}^1([1, T])$ системы (32) с начальным возмущением $z(1)$, удовлетворяющим неравенствам $\frac{\delta^2}{2} (1 + a)^{1 - \frac{2b}{a}} < z(1) < 2\varepsilon_1^2 (1 - a)^{1 - \frac{2b}{a}}$. Тогда существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что $C_1 z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) < z(t) < C_2 z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t)$ при $t \in [1, T]$, где $\Theta(t) = 1 + \sigma z^2(1) \log t$, а постоянная $\sigma > 0$ определена в лемме 8 ниже.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая от противного, в силу непрерывности решения $z(t)$ найдем максимальный интервал времени $[1, \tilde{T}]$, $\tilde{T} > 1$, такой, что

$$C_1 z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \leq z(t) \leq C_2 z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \quad (33)$$

при всех $t \in [1, \tilde{T}]$. Разделив первое уравнение системы (32) на z^2 и интегрируя по t , получим $\int_1^t \frac{z'}{z^2} d\tau = \int_1^t K_3 \theta' d\tau - \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{z(t)} = \frac{1}{z(1)} + \int_{\theta(1)}^{\theta(t)} K_3(\theta) d\theta - \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau.$$

Следовательно,

$$z(t) = z(1) \left(1 + z(1) \left(\int_{\theta(1)}^{\theta(t)} K_3(\theta) d\theta - \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau \right) \right)^{-1}. \quad (34)$$

Ввиду леммы 8 (см. далее § 4) имеем

$$\int_{\theta(1)}^{\theta(t)} K_3(\theta) d\theta = \sigma \theta(t) + K_5(t), \quad (35)$$

где $\sigma > 0$ и $K_5(t) = K_4(\theta(t)) - \sigma \theta(1) - K_4(\theta(1))$ – ограниченная функция. Подставив (35) в (34), найдем

$$z(t) = \frac{z(1)}{1 + z(1)(\sigma \theta(t) + F_4)}, \quad (36)$$

где $F_4 = K_5(t) - \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau$. Подставляя теперь (36) во второе уравнение системы (32), получим

$$\frac{\frac{1}{z(1)} + \sigma \theta}{(1 + a \cos(2\theta))^{2 - \frac{2b}{a}}} \theta'' = t^{-1} + F_5, \quad (37)$$

где $F_5 = \frac{1}{z}(t^{-1} r^4 K_2 + f_2)(1 - z F_4)(1 + a \cos(2\theta))^{\frac{2b}{a} - 2} - t^{-1} z F_4$. Проинтегрировав (37) по t , получим

$$\int_{\theta(1)}^{\theta(t)} \frac{\frac{1}{z(1)} + \sigma \theta}{(1 + a \cos(2\theta))^{2 - \frac{2b}{a}}} d\theta = \log t + \int_1^t F_5 d\tau. \quad (38)$$

Ввиду (33) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau \right| &\leq C \varepsilon_1^4 \int_1^t \Theta^{-1}(\tau) \tau^{-1} d\tau + C \varepsilon^6 \delta^{-3} \int_1^t \Theta^{\frac{3}{4}}(\tau) Q^{-\frac{7}{4}} \tau^{-1} d\tau \\ &\leq C \varepsilon^\nu z(1) \int_1^t \Theta^{-\frac{1}{2}}(\tau) \tau^{-1} d\tau \\ &= \frac{C \varepsilon^\nu}{z(1)} \int_0^{\sigma z^2(1) \log t} (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy \leq C \varepsilon^\nu z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \log t. \end{aligned}$$

Таким образом, теперь оценим остаток в (36):

$$|F_4| \leq |K_5(t)| + \left| \int_1^t z^{-2} F_3 d\tau \right| \leq C + C \varepsilon^\nu z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \log t.$$

Также с помощью (33) оценим остаток в (38):

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t F_5 d\tau \right| &\leq C \int_1^t (z(1)\Theta^{-\frac{1}{2}}(\tau) + \varepsilon^6 \delta^{-3} \Theta^{\frac{3}{4}}(\tau) Q^{-\frac{7}{4}}) \tau^{-1} d\tau \\ &+ Cz(1) \int_1^t \Theta^{-\frac{1}{2}}(\tau) (1 + \varepsilon^\nu z(1) \Theta^{-\frac{1}{2}}(\tau) \log \tau) \tau^{-1} d\tau \leq C\varepsilon^\nu \int_1^t \tau^{-1} d\tau \leq C\varepsilon^\nu \log t, \end{aligned}$$

поэтому (38) влечет двустороннюю оценку

$$\begin{aligned} \frac{h(t)}{(1+a)^{2-\frac{2b}{a}}} \left(\frac{\sigma}{2} h(t) + \frac{1}{z(1)} + \sigma\theta(1) \right) &\leq \log t + \int_1^t F_5 d\tau \\ &\leq \frac{h(t)}{(1-a)^{2-\frac{2b}{a}}} \left(\frac{\sigma}{2} h(t) + \frac{1}{z(1)} + \sigma\theta(1) \right) \end{aligned}$$

для $h(t) = \theta(t) - \theta(1)$. Таким образом, имеем $S_1 \leq \frac{\sigma}{2} h^2 + Bh \leq S_2$, где $B = \frac{1}{z(1)} + \sigma\theta(1)$, $S_1 = (1-a)^{2-\frac{2b}{a}} (1 - C\varepsilon^\nu) \log t$ и $S_2 = (1+a)^{2-\frac{2b}{a}} (1 + C\varepsilon^\nu) \log t$. Обозначим корни уравнения $\frac{\sigma}{2} h^2 + Bh = S_1$ через $h_2 = \frac{1}{\sigma} (-B - \sqrt{B^2 + 2\sigma S_1})$ и $h_3 = \frac{1}{\sigma} (-B + \sqrt{B^2 + 2\sigma S_1})$, а корни уравнения $\frac{\sigma}{2} h^2 + Bh = S_2$ обозначим через $h_1 = \frac{1}{\sigma} (-B - \sqrt{B^2 + 2\sigma S_2})$ и $h_4 = \frac{1}{\sigma} (-B + \sqrt{B^2 + 2\sigma S_2})$. Поскольку $h_3(1) = h(1) = h_4(1) = 0$, по непрерывности получаем $h_3(t) \leq h(t) \leq h_4(t)$. Далее, оценивая

$$h_4 \leq 3(1+a)^{2-\frac{2b}{a}} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) z(1) \log t, \quad h_3 \geq (1-a)^{2-\frac{2b}{a}} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) z(1) \log t,$$

имеем

$$\theta(t) \leq \theta(1) + 3(1+a)^{2-\frac{2b}{a}} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) z(1) \log t, \quad (39)$$

$$\theta(t) \geq \theta(1) + (1-a)^{2-\frac{2b}{a}} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) z(1) \log t. \quad (40)$$

Тогда ввиду (39), (40) и (36) находим

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \frac{z(1)}{1 - Cz(1) + ((1-a)^{2-\frac{2b}{a}} - C\varepsilon^\nu) \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \sigma z^2(1) \log t} \\ &\leq \frac{z(1)}{(1-a)^{2-\frac{2b}{a}} - C\varepsilon^\nu} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t) \end{aligned}$$

и $z(t) > \frac{z(1)}{3(1+a)^{2-\frac{2b}{a}} + C\varepsilon^\nu} \Theta^{-\frac{1}{2}}(t)$ при $t \in [1, \tilde{T}]$. Следовательно, мы пришли к противоречию. Значит, оценки леммы справедливы при всех $t \in [1, T]$. Лемма доказана.

В следующей лемме мы оценим функцию φ в норме пространства $\mathbf{X}_T$.

ЛЕММА 5. Пусть начальное возмущение $\varphi_0 \in \mathbf{H}^1$ таково, что $\|\varphi_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1$ и $\|\psi_0\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon_1^4$, где $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Предположим, что решение $\varphi \in \mathbf{C}([1, T]; \mathbf{H}^1)$ уравнения (11) таково, что $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T} \leq \varepsilon^3$ и $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T} \leq \varepsilon^4$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T} < \varepsilon. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неравенство (41) не выполнено. Тогда ввиду непрерывности функции φ можем найти максимальное время $\tilde{T} \in (1, T]$ такое, что

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + Q^{\frac{1}{4}}(t) \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} \varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon$$

при всех $t \in [1, \tilde{T}]$. Применяя лемму 2, находим $|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} |\varphi(t, \xi) - \rho(t)|| \leq \varepsilon^3 Q^{-\frac{3}{4}}(t)$ при $t \in [1, \tilde{T}]$. Тогда в силу леммы 4 получаем

$$|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} |\varphi(t, \xi)| \leq |\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} |\rho(t)| + |\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} |\varphi(t, \xi) - \rho(t)| \leq C\varepsilon_1 Q^{-\frac{1}{4}}(t) + \varepsilon^3 Q^{-\frac{3}{4}}(t).$$

Таким образом,

$$Q^{\frac{1}{4}}(t) \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} \varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{4} \quad (42)$$

при всех $t \in [1, \tilde{T}]$. Как и выше, для $|\tilde{\xi}| \leq \langle \log t \rangle$ получаем

$$|\varphi(t, \xi)| \leq |\rho(t)| + |\varphi(t, \xi) - \rho(t)| \leq C\varepsilon_1 + C\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} \varepsilon^3 Q^{-\frac{3}{4}}(t) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (43)$$

Поэтому, чтобы доказать оценку $\|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$, достаточно рассмотреть случай $t\xi^2 \geq \langle \log t \rangle^2$. Из (16) имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(t, \xi) - v(t, \xi)| &\leq C \int_{\mathbb{R}} \langle \sqrt{t}(\xi - \eta) \rangle^{-1} |w(t, \eta)| d\eta \\ &\quad + C\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \langle \sqrt{t}(\xi - \eta) \rangle^{-1} \langle \sqrt{t}\eta \rangle^{-1} |v^3(t, \eta)| d\eta \\ &\leq C\varepsilon^4 Q^{-\frac{5}{4}}(t) + C\varepsilon^3 Q^{-\frac{3}{4}}(t) \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \langle \sqrt{t}(\xi - \eta) \rangle^{-1} \langle \sqrt{t}\eta \rangle^{-1+3\gamma} d\eta, \end{aligned}$$

где второе слагаемое при всех $\tilde{\xi}$ можем оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \langle \sqrt{t}(\xi - \eta) \rangle^{-1} \langle \sqrt{t}\eta \rangle^{3\gamma-1} d\eta \\ &= \int_{|\tilde{\eta}| \leq \frac{|\tilde{\xi}|}{2}} \langle \tilde{\xi} - \tilde{\eta} \rangle^{-1} \langle \tilde{\eta} \rangle^{3\gamma-1} d\tilde{\eta} + \int_{|\tilde{\eta}| > \frac{|\tilde{\xi}|}{2}} \langle \tilde{\xi} - \tilde{\eta} \rangle^{-1} \langle \tilde{\eta} \rangle^{3\gamma-1} d\tilde{\eta} \leq C\langle \tilde{\xi} \rangle^{4\gamma-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\varphi(t, \xi) - v(t, \xi)| \leq C\varepsilon^4 Q^{-\frac{5}{4}}(t) + C\varepsilon^3 \langle \tilde{\xi} \rangle^{4\gamma-1} Q^{-\frac{3}{4}}(t). \quad (44)$$

Из (20) и (11) для $t\xi^2 \geq \langle \log t \rangle^2$ получаем

$$i\partial_t \varphi(t, \xi) = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) v^j \bar{v}^{3-j}(t, \xi) + R_6,$$

где

$$R_6 = t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \int_{\mathbb{R}} G_{3-2j}(\tilde{y}) \partial_\xi v^j \bar{v}^{3-j}(t, \xi - y) dy.$$

Поскольку $|G_{3-2j}(\tilde{\xi})| \leq C\langle \tilde{\xi} \rangle^{-1}$ и

$$\left| \partial_\xi \int_0^1 \left(E^{\frac{a_k z}{1-a_k z}} - 1 \right) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-a_k z))}}{z\sqrt{|1-a_k z|}} dz \right| \leq Ct^{\frac{1}{2}} \langle \tilde{\xi} \rangle^{-1},$$

используя соотношение (30), получаем оценку

$$\begin{aligned} |R_6| &\leq Ct^{-1} \langle \tilde{\xi} \rangle^{-\frac{3}{4}} |\rho|^3 \|\langle \tilde{\xi} \rangle^{-\gamma} v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 + C\varepsilon^2 t^{-\frac{5}{4}} \|\psi\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C\varepsilon^5 t^{-1} \langle \log t \rangle^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{5}{4}}(t) + C\varepsilon^6 t^{-1} Q^{-\frac{5}{4}}(t) \end{aligned}$$

при $t\xi^2 \geq \langle \log t \rangle^2$. Тогда в силу (42) и (44) имеем

$$\begin{aligned} i\partial_t \varphi(t, \xi) &= t^{-1} \sum_{j=1}^3 \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi) \\ &\quad + O(\varepsilon^5 t^{-1} \langle \log t \rangle^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{3}{4}}(t)) + O(\varepsilon^6 t^{-1} Q^{-\frac{5}{4}}(t)), \end{aligned}$$

откуда, умножая последнее равенство на $e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}}$, находим

$$\begin{aligned} i\partial_t \varphi_1(t, \xi) &= t^{-1} e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \sum_{j=1,3} \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi) \\ &\quad + O(\varepsilon^5 t^{-1} \langle \log t \rangle^{-\frac{3}{4}} Q^{-\frac{3}{4}}(t)) + O(\varepsilon^6 t^{-1} Q^{-\frac{5}{4}}(t)) \quad (45) \end{aligned}$$

для новой неизвестной функции $\varphi_1(t, \xi) = e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \varphi(t, \xi)$. Рассмотрим уравнение (45) при $t \geq t_1$, где $t_1 = \max(1, t_2)$ и t_2 таково, что $\frac{t_2}{(\log t_2)^2} = \frac{1}{\xi^2}$. Пользуясь тождеством $E^{a_j} = \frac{2}{a_j i \xi^2} \partial_t E^{a_j}$, находим

$$\begin{aligned} &t^{-1} e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \sum_{j=1,3} \theta_j E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi) \\ &= -i\partial_t \left(it^{-1} e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \sum_{j=1,3} \frac{2\theta_j}{a_j i \xi^2} E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi) \right) + R_9, \quad (46) \end{aligned}$$

где

$$R_9 = \sum_{j=1,3} \frac{2\theta_j}{a_j i \xi^2} E^{a_j} \partial_t (t^{-1} e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi)).$$

Поскольку $|R_9| \leq C\varepsilon^3 t^{-1} \langle \log t \rangle^{-\frac{5}{4}} + C\varepsilon^6 t^{-1} Q^{-\frac{5}{4}}(t)$ в области $t\xi^2 \geq \langle \log t \rangle^2$, применяя (46) к (45), получаем

$$i\partial_t \varphi_2 = O(\varepsilon^3 t^{-1} \langle \log t \rangle^{-\frac{5}{4}}) + O(\varepsilon^6 t^{-1} Q^{-\frac{5}{4}}(t)) \quad (47)$$

для новой функции

$$\varphi_2(t, \xi) = \varphi_1(t, \xi) + it^{-1} e^{i \int_1^t |\varphi|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \sum_{j=1,3} \frac{2\theta_j}{a_j i \xi^2} E^{a_j} \mathcal{D}(2j-3) \varphi^j \bar{\varphi}^{3-j}(t, \xi).$$

Следовательно, интегрируя (47) по $t \geq t_1$, в силу (43) и (44) получим

$$|\varphi_2(t)| \leq |\varphi_2(t_1)| + C\varepsilon^{1+\nu} \leq C\varepsilon_1 + C\varepsilon^{1+\nu} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $t \in [1, \tilde{T}]$. Таким образом, $|\varphi(t, \xi)| < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t\xi^2 \geq \langle \log t \rangle^2$. Значит, $\|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$, что приводит нас к противоречию с предположением. Таким образом, оценка (41) выполнена для всех $t \in [1, T]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Лемма 1 устанавливает, что априорные оценки норм $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T}$ и $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T}$ влекут оценку нормы $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T}$. В свою очередь лемма 2 дает оценку нормы $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T}$ в предположении известных оценок норм $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T}$ и $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T}$. И наконец, в лемме 5 доказано, что оценки нормы $\|\varphi\|_{\mathbf{Z}_T}$ и нормы $\|\psi\|_{\mathbf{Y}_T}$ дают априорную оценку нормы $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_T}$. Таким образом, с помощью стандартного продолжения ввиду локального существования решения, установленного в теореме 2, имеем существование глобального по времени решения $\varphi \in \mathbf{C}([1, \infty); \mathbf{H}^1)$ задачи Коши для уравнения (9), удовлетворяющего оценке $\|\varphi\|_{\mathbf{X}_\infty} + \|\psi\|_{\mathbf{Y}_\infty} < 2\varepsilon$. Чтобы доказать оценку убывания решения, воспользуемся соотношением $u(t, x) = t^{-\frac{1}{2}}Ev(t, \xi)$, $\xi = \frac{x}{t}$, откуда $\sup_{|x| \leq \sqrt{t}} |u(t)| = t^{-\frac{1}{2}} \sup_{|\xi| \leq 1/\sqrt{t}} |Ev(t, \xi)|$. Тогда из (44) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sup_{|x| \leq \sqrt{t}} |u(t)| - t^{-\frac{1}{2}} |\rho(t)| \right| &\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \sup_{|\xi| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}} |v(t, \xi) - \varphi(t, \xi)| + Ct^{-\frac{1}{2}} |\varphi(t, \xi) - \rho(t)| \\ &\leq C\varepsilon^2 t^{-\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{4}}(t) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$, что в силу леммы 5 дает первую оценку теоремы. Вторая оценка получается следующим образом:

$$|u(t, x)| = t^{-\frac{1}{2}} |Ev(t, \xi)| \leq t^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Приложение

Сначала мы вычислим явно интегралы

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \int_{\mathbb{R}} G_1(\tilde{\xi}) \partial_\xi \int_0^1 (E^{az} - 1) \frac{dz}{z} d\xi, \\ \Psi_{b,a} &= \int_{\mathbb{R}} G_b(\tilde{\xi}) \partial_\xi \int_0^1 (E^{\frac{az}{1-az}} - 1) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-az))} dz}{z\sqrt{|1-az|}} d\xi \end{aligned}$$

при $a > 0$, $|b| \geq 1$.

ЛЕММА 6. Справедливы следующие равенства:

$$\Phi_a = \begin{cases} -2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} \right) & \text{при } 0 < a \leq 1, \\ -\ln \frac{a}{4} + 2i \arctan \sqrt{a-1} & \text{при } a > 1, \end{cases}$$

и $\Psi_{b,a} = \Phi_h - \Phi_a$, где $h = \frac{b+1}{b}a$, $a > 0$, $|b| \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тождества

$$\int_0^\infty e^{-\frac{i}{2}\xi^2 a} d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{|a|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign } a} \quad (48)$$

получаем

$$\Phi_a = \int_{\mathbb{R}} G_1(\tilde{\xi}) \partial_{\xi} \int_0^1 (E^{az} - 1) \frac{dz}{z} d\xi = \int_0^a \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-z))}}{\sqrt{|1-z|}} - 1 \right) \frac{dz}{z}.$$

Имеем

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{|1-z|}} = \begin{cases} \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right) & \text{при } 0 < z < 1, \\ 2 \arctan \sqrt{z-1} & \text{при } z > 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\Phi_a = \begin{cases} -2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{2}\right) & \text{при } 0 < a \leq 1, \\ -\ln \frac{a}{4} + 2i \arctan \sqrt{a-1} & \text{при } a > 1. \end{cases}$$

Ввиду равенства (48) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{b,a} &= \int_{\mathbb{R}} G_b(\tilde{\xi}) \partial_{\xi} \int_0^1 (E^{\frac{az}{1-az}} - 1) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-az))}}{z\sqrt{|1-az|}} dz d\xi = \Lambda_{b,a} - \Phi_a, \\ \Lambda_{b,a} &= \int_0^1 \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-az)+\text{sign } b+\text{sign}(\frac{az}{1-az}-b))}}{\sqrt{|1-hz|}} - 1 \right) \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\Lambda_{b,a} = \int_0^h \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-gz)-\text{sign } b(\text{sign}(1-z)(1-gz)-1))}}{\sqrt{|1-z|}} - 1 \right) \frac{dz}{z},$$

где $g = \frac{a}{h} = \frac{b}{b+1}$. Заметим, что $\Lambda_{-1,a} = 0$. Чтобы доказать второе равенство леммы, отметим следующее тождество:

$$1 - \text{sign}(1-gz) - \text{sign } b(\text{sign}(1-z)(1-gz)-1) = 1 - \text{sign}(1-z) \quad (49)$$

при всех $0 < z < h$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{b,a} &= \int_0^h \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-gz)-\text{sign } b(\text{sign}(1-z)(1-gz)-1))}}{\sqrt{|1-z|}} - 1 \right) \frac{dz}{z} \\ &= \int_0^h \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(1-\text{sign}(1-z))}}{\sqrt{|1-z|}} - 1 \right) \frac{dz}{z} = \Phi_h. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь вычислим коэффициенты

$$\omega_l = \sum_{\substack{k=1,3 \\ l-2 \leq k \leq l}} \chi_{l+1-k} A_{l+1-k,k} + \sum_{\substack{k=1,3 \\ 3-l \leq k \leq 5-l}} \chi_{k+l-3} \overline{A_{6-k-l,k}},$$

где $A_{j,k} = ij\chi_k(\Phi_{a_k} + \Psi_{3-2j,a_k})$, $\chi_j = \lambda_j \frac{i^{2-j}}{\sqrt{|2j-3|}} e^{i\frac{\pi}{4}(\text{sign}(2j-3)-1)}$, $a_j = \frac{2j-4}{2j-3}$.

ЛЕММА 7. *Справедливы следующие равенства:*

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{2\pi}{3}b^2, & \omega_2 &= -\mu\left(\frac{\pi}{3} + i \ln 3\right), \\ \omega_3 &= -4b\mu\left(\frac{\pi}{3} - i \ln 3\right), & \omega_4 &= -\frac{2\pi}{3}b, & \omega_5 &= -6i\mu^2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6 имеем $\Phi_{a_k} + \Psi_{b_j, a_k} = \Phi_{h_{j,k}}$, где $h_{j,k} = \frac{b_j+1}{b_j}a_k$, $b_j = 3 - 2j$. Поскольку $a_1 = 2$, $a_3 = \frac{2}{3}$, имеем $h_{1,1} = 4$, $h_{1,3} = \frac{4}{3}$, $h_{2,k} = 0$, $h_{3,1} = \frac{4}{3}$, $h_{3,3} = \frac{4}{9}$. Также имеем $\chi_1 = \lambda_1$, $\chi_2 = \lambda_2$, $\chi_3 = -\frac{i}{\sqrt{3}}\lambda_3$, поэтому в силу леммы 6 находим $\Phi_{h_{1,1}} = \frac{2\pi i}{3}$, $\Phi_{h_{1,3}} = \Phi_{h_{3,1}} = \ln 3 + \frac{\pi i}{3}$, $\Phi_{h_{3,3}} = 2 \ln \frac{6}{3+\sqrt{5}}$, $\Phi_{h_{2,k}} = 0$. Следовательно, получаем $A_{2,k} = 0$, $A_{1,1} = -\frac{2\pi}{3}\lambda_1$, $A_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_3(\ln 3 + \frac{\pi i}{3})$, $A_{3,1} = 3i\lambda_1(\ln 3 + \frac{\pi i}{3})$, $A_{3,3} = 2\sqrt{3}\lambda_3 \ln \frac{6}{3+\sqrt{5}}$, откуда находим

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \chi_1 A_{1,1} + \chi_1 \overline{A_{2,3}} = -\frac{2\pi}{3}\lambda_1^2, \\ \omega_2 &= \chi_2 A_{2,1} + \chi_2 \overline{A_{1,3}} = \lambda_2 \overline{\lambda_3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3 - \frac{\pi i}{3\sqrt{3}} \right), \\ \omega_3 &= \chi_3 A_{3,1} + \chi_1 A_{1,3} + \chi_1 \overline{A_{2,1}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\lambda_1 \lambda_3 \left(\ln 3 + \frac{\pi i}{3} \right), \\ \omega_4 &= \chi_2 A_{2,3} + \chi_2 \overline{A_{1,1}} = -\frac{2\pi}{3}\overline{\lambda_1} \lambda_2, & \omega_5 &= \chi_3 A_{3,3} = -2i\lambda_3^2 \ln \frac{6}{3 + \sqrt{5}}.\end{aligned}$$

В силу нашего выбора $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = i\mu\sqrt{3}$ имеем $\chi_1 = b$, $\chi_2 = 1$, $\chi_3 = \mu$, поэтому мы приходим к результату леммы. Лемма доказана.

В следующей лемме мы рассмотрим

$$K_3(\theta) = -\frac{2K_1(\theta)}{(1 + a \cos(2\theta))^{\frac{2b}{a}}} - \frac{2(a - 2b) \sin(2\theta) K_2(\theta)}{(1 + a \cos(2\theta))^{1 + \frac{2b}{a}}},$$

где

$$\begin{aligned}K_1(\theta) &= \frac{2\pi}{3}b^2 \sin(4\theta) + 6\mu^2 \left(\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right) \cos(4\theta) \\ &\quad + \frac{\pi}{3}(\mu - 2b) \sin(2\theta) + (\ln 3)\mu \cos(2\theta) - 4b\mu \ln 3, \\ K_2(\theta) &= \frac{2\pi}{3}b^2 \cos(4\theta) + 6\mu^2 \left(\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right) \sin(4\theta) \\ &\quad + \frac{\pi}{3}(\mu + 2b) \cos(2\theta) - (\ln 3)\mu \sin(2\theta) + \frac{4\pi}{3}b\mu.\end{aligned}$$

ЛЕММА 8. *Пусть $\mu > 0$, $b \geq 0$ и $\mu + b < 1$. Тогда существует постоянная $\sigma > 0$ такая, что*

$$\int_{\theta(1)}^{\theta(t)} K_3(\theta') d\theta' = \sigma\theta + K_4(\theta),$$

где $K_4(\theta)$ – некоторая ограниченная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $K_3(\theta) = 2\mu K_m(\theta) + K_r(\theta)$, где

$$K_m(\theta) = \frac{6\mu\left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \cos(4\theta) + (\ln 3)(-\cos(2\theta)) + 4b \ln 3}{(1 + a \cos(2\theta))^{\beta-1}} + \frac{(\mu - b)(\ln 3 + 12\mu\left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \cos(2\theta)) \sin^2(2\theta)}{(1 + a \cos(2\theta))^\beta},$$

$$K_r(\theta) = -\frac{2\left(\frac{2\pi}{3}b^2 \sin(4\theta) + \frac{\pi}{3}(\mu - 2b) \sin(2\theta)\right)}{(1 + a \cos(2\theta))^{\beta-1}} - \frac{2(a - 2b) \sin(2\theta)\left(\frac{2\pi}{3}b^2 \cos(4\theta) + \frac{\pi}{3}(\mu + 2b) \cos(2\theta) + \frac{4\pi}{3}b\mu\right)}{(1 + a \cos(2\theta))^\beta},$$

здесь $a = b + \mu$, $\beta = 1 + \frac{2b}{a}$. Легко видеть, что $\int_{\pi/2}^{\pi} K_r(\theta) d\theta = -\int_0^{\pi/2} K_r(\theta) d\theta$ и $\int_{\pi/2}^{\pi} K_m(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta$. Следовательно, $\int_0^{\pi} K_r(\theta) d\theta = 0$. Покажем теперь, что $\int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta = \frac{\pi}{4\mu}\sigma > 0$. Отсюда получаем результат леммы с некоторой ограниченной функцией $K_4(\theta)$, поскольку функция $K_3(\theta)$ периодична с периодом π . В случае $b \geq \mu > 0$ запишем

$$2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta = 6\mu \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{(1 + a \cos x)^{\beta-1}} dx + 12\mu(b - \mu) \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x (-\cos x)}{(1 + a \cos x)^\beta} dx + \int_0^{\pi} \frac{(\ln 3)(-\cos x) + 4b \ln 3}{(1 + a \cos x)^{\beta-1}} dx - \int_0^{\pi} \frac{(b - \mu)(\ln 3) \sin^2 x}{(1 + a \cos x)^\beta} dx,$$

откуда в силу тождества $(1 - \frac{1}{a} \cos x)(1 + a \cos x) - \sin^2 x = -\frac{1-a^2}{a} \cos x$ получаем

$$2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta = 6\mu \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{(1 + a \cos x)^{\beta-1}} dx + 12\mu(b - \mu) \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x (-\cos x)}{(1 + a \cos x)^\beta} dx + \frac{2\mu}{a} (\ln 3) \int_0^{\pi} \frac{(-\cos x) dx}{(1 + a \cos x)^{\beta-1}} + (3b + \mu)(\ln 3) \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + a \cos x)^{\beta-1}} + (b - \mu)(\ln 3) \frac{1 - a^2}{a} \int_0^{\pi} \frac{(-\cos x)}{(1 + a \cos x)^\beta} dx > 0.$$

Рассмотрим случай $1 > \mu > b \geq 0$. Воспользуемся неравенством

$$\frac{\sin^2 x}{2(1 + a \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{2(1 + a \cos x)} \leq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta &\geq \int_0^\pi \frac{6\mu \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \cos(2x) + (\ln 3)(-\cos x)}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} dx \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{(\mu-b) \left(\left(1 + \frac{2b}{\mu-b}\right) \ln 3 + \mu \left(-12 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \cos x \right) \sin^2 x}{(1+a \cos x)^\beta} dx \\ &\geq (\mu-b)\mu \left(-12 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) \int_0^\pi \frac{(g + \cos x) \sin^2 x}{(1+a \cos x)^\beta} dx, \end{aligned}$$

где $g = \frac{a}{\mu(\mu-b)}q$, $q = \frac{\ln 3}{(-12 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{6})}$. Если $g \geq 1$, то $2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta > 0$. Поэтому остается рассмотреть случай $g < 1$, т.е. $b < (\mu-b)\frac{\mu-q}{2q} < (\mu-b)\frac{1-q}{2q}$, откуда следует, что $b < \mu\frac{1-q}{1+q} < \frac{1}{5}\mu \leq \frac{1}{4}a$, а значит, $\beta < \frac{3}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta &= 6\mu \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) I_1 + (\ln 3) I_2 + 4b(\ln 3) I_3 \\ &\quad + (\mu-b)(\ln 3) I_4 - 12\mu(\mu-b) \left(-\ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right) I_5, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} dx, & I_2 &= \int_0^\pi \frac{(-\cos x)}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} dx, \\ I_3 &= \int_0^\pi \frac{dx}{(1+a \cos x)^{\beta-1}}, & I_4 &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{(1+a \cos x)^\beta} dx, \\ I_5 &= \int_0^\pi \frac{(-\cos x) \sin^2 x}{(1+a \cos x)^\beta} dx. \end{aligned}$$

По теореме Тэйлора найдем

$$\begin{aligned} (1-at)^{1-\beta} - (1+at)^{1-\beta} \\ = 2(\beta-1)at + \frac{(\beta-1)\beta}{2} a^2 t^2 ((1-\xi_1)^{-\beta-1} - (1+\xi_2)^{-\beta-1}) \geq 2(\beta-1)at \end{aligned}$$

при $\beta \geq 1$, $t > 0$, $0 < a < 1$. Следовательно, делая замену $t = \cos x$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} dx = \int_0^1 \frac{((1-at)^{1-\beta} - (1+at)^{1-\beta})(2t^2-1)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\geq 2(\beta-1)a \int_0^1 \frac{(2t^2-1)t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{3}(\beta-1)a \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \frac{(-\cos x)}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} dx = \int_0^1 \frac{((1-at)^{1-\beta} - (1+at)^{1-\beta})t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\geq 2(\beta-1)a \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi(\beta-1)a}{2}. \end{aligned}$$

Снова по теореме Тэйлора имеем

$$\begin{aligned} (1+at)^\beta + (1-at)^\beta &= 2 + \beta(\beta-1)a^2t^2 + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}a^3t^3((1+\xi_1)^{\beta-3} - (1-\xi_2)^{\beta-3}) \\ &\geq 2(1-t^2) + (2 + \beta(\beta-1)a^2)t^2 \end{aligned}$$

при $\beta \in (1, 2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\pi \frac{dx}{(1+a \cos x)^{\beta-1}} = \int_0^1 \frac{(1+at)^{1-\beta} + (1-at)^{1-\beta}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{2 + \beta(\beta-1)a^2t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq \pi, \\ I_4 &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{(1+a \cos x)^\beta} \geq 2 \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-a^2t^2)^\beta} dt + (2 + \beta(\beta-1)a^2) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^2}{(1-a^2t^2)^\beta} dt \\ &\geq \frac{3}{8}\pi + (2 + \beta(\beta-1)a^2) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^2}{(1-a^2t^2)^\beta} dt. \end{aligned}$$

Наконец, по теореме Тэйлора получаем

$$(1+at)^\beta - (1-at)^\beta = 2\beta at - \frac{\beta(\beta-1)}{2}a^2t^2((1-\xi_1)^{\beta-2} - (1+\xi_2)^{\beta-2}) \leq 2\beta at$$

при $\beta \in (1, 2)$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^\pi \frac{(-\cos x) \sin^2 x}{(1+a \cos x)^\beta} dx = \int_0^1 ((1+at)^\beta - (1-at)^\beta) \frac{\sqrt{1-t^2}t}{(1-a^2t^2)^\beta} dt \\ &\leq 2\beta a \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^2}{(1-a^2t^2)^\beta} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, при $1 > \mu > b \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta &\geq (\ln 3) \left(\frac{2}{3}b\mu k + 5\pi b + \frac{3}{8}\pi(\mu - b) \right) \\ &\quad + 2(\mu - b)(\ln 3)(1 + \beta ba - \mu\beta ak) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^2}{(1-a^2t^2)^\beta} dt, \end{aligned}$$

где

$$k = \frac{-12 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{6}}{\ln 3}.$$

Используя оценку

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}t^2}{(1-a^2t^2)^\beta} dt \leq \int_0^1 \frac{t}{(1-a^2t^2)^{\beta-\frac{1}{2}}} dt \leq \frac{1}{2a^2} \left(\frac{3}{2} - \beta \right)^{-1},$$

находим

$$2 \int_0^{\pi/2} K_m(\theta) d\theta \geq \frac{2}{3}(\ln 3)k\mu b + \frac{(\mu - b) \ln 3}{a(\frac{3}{2} - \beta)} \left(1 + \frac{3}{16}\pi - k\right) a + \frac{(\mu - b) \ln 3}{a(\frac{3}{2} - \beta)} \left(\beta(1 + k) + 5\pi \frac{\frac{3}{2} - \beta}{\mu - b} a - \frac{3\pi}{4} - 2k\right) b > 0,$$

так как $b < \frac{\mu}{5}$. Лемма доказана.

В заключение выражаю благодарность неизвестному мне рецензенту за весьма ценные замечания и предложения.

Список литературы

1. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987, 480 с.; пер. с англ.: M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM Stud. Appl. Math., **4**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1981, x+425 pp.
2. В. Е. Захаров, С. В. Манакон, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980, 320 с.; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau [Plenum], New York, 1984, xi+276 pp.
3. J. E. Barab, "Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation", *J. Math. Phys.*, **25**:11 (1984), 3270–3273.
4. T. Ozawa, "Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension", *Comm. Math. Phys.*, **139**:3 (1991), 479–493.
5. П. И. Наумкин, "Асимптотика при больших временах решений нелинейного уравнения Шрёдингера", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:4 (1997), 81–118; англ. пер.: P. I. Naumkin, "Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation", *Izv. Math.*, **61**:4 (1997), 757–794.
6. N. Hayashi, P. I. Naumkin, "Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations", *Amer. J. Math.*, **120**:2 (1998), 369–389.
7. Th. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lect. Notes Math., **10**, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, xiv+323 pp.
8. N. Hayashi, T. Ozawa, "Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrödinger equation", *Math. Ann.*, **298**:3 (1994), 557–576.
9. S. Katayama, Y. Tsutsumi, "Global existence of solutions for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension", *Comm. Partial Differential Equations*, **19**:11-12 (1994), 1971–1997.
10. Y. Tsutsumi, "The null gauge condition and the one dimensional nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity", *Indiana Univ. Math. J.*, **44**:1 (1994), 241–254.
11. T. Ozawa, "On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type", *Indiana Univ. Math. J.*, **45**:1 (1996), 137–163.
12. P. I. Naumkin, "Cubic derivative nonlinear Schrödinger equations", *SUT J. Math.*, **36**:1 (2000), 9–42.
13. S. Tonegawa, "Global existence for a class of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension", *Hokkaido Math. J.*, **30**:2 (2001), 451–473.
14. N. Hayashi, P. I. Naumkin, "Asymptotics of small solutions to nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearities", *Int. J. Pure Appl. Math.*, **3**:3 (2002), 255–273.

15. N. Hayashi, P. I. Naumkin, “On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations”, *Complex Var. Theory Appl.*, **49**:5 (2004), 339–373.
16. N. Hayashi, P. I. Naumkin, “Nongauge invariant cubic nonlinear Schrödinger equations”, *Rus. J. Appl. Math.*, **1**:1 (2008), 1–16.
17. P. I. Naumkin, I. Sánchez-Suárez, “On the critical nongauge invariant nonlinear Schrödinger equation”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **30**:3 (2011), 807–834.
18. N. Hayashi, P. I. Naumkin, “Global existence for the cubic nonlinear Schrödinger equation in low order Sobolev spaces”, *Differential Integral Equations*, **24**:9-10 (2011), 801–828.
19. N. Hayashi, P. I. Naumkin, “Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations”, *J. Differential Equations*, **246**:4 (2009), 1703–1722.
20. N. Hayashi, T. Ozawa, “Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbb{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **48**:1 (1988), 17–37.
21. J. Shatah, “Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **38**:5 (1985), 685–696.

ПАВЕЛ ИВАНОВИЧ НАУМКИН
(PAVEL I. NAUMKIN)
National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics, Mexico
E-mail: pavelni@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию
22.10.2013
04.07.2014