Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Лукомский, Кратномасштабный анализ Рисса на нульмерных группах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 153–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:09:59

УДК 517.518+519.688

С. Ф. Лукомский

Кратномасштабный анализ Рисса на нульмерных группах

Построены всплесковые базисы с некомпактным носителем на нульмерных группах. Для групп Виленкина получен алгоритм построения масштабирующей функции в терминах деревьев.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: КМА, всплесковые базисы, нульмерные группы, группы Виленкина.

DOI: 10.4213/im8181

Введение

В последние годы значительный интерес вызывают вопросы построения всплесковых базисов как на локально компактных нульмерных абелевых группах общего вида, так и на конкретных группах. Для построения таких базисов обычно строят кратномасштабный анализ (КМА), а затем по известной схеме получают всплесковые базисы. В работах [1]–[3] эти вопросы рассмотрены на двоичной группе Кантора. Наибольший интерес к этой тематике проявился после работ С. Козырева [4], [5], в которых были впервые построены p -адические базисы Хаара. В. Протасов, Ю. Фарков в работе [6] охарактеризовали все двоичные финитные всплески на $\mathbb{R}_+$. Аппроксимативные свойства всплесков, построенных в [6], изучены в [7]. В [6] доказана теорема о том, что если финитная функция $\varphi \in L_2(0, +\infty)$ является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \ominus k),$$

маска m_0 которого удовлетворяет условию

$$m_0(0) = 1, \quad |m_0(\omega)|^2 + \left| m_0\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \quad \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$$

то φ порождает двоичный КМА на $[0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда маска m_0 не имеет блокирующих множеств или удовлетворяет модифицированному условию Коэна. Из этой теоремы следует алгоритм построения вейвлетов:

1) сначала выбирается произвольная функция $m_0(\omega)$ на $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, постоянная на двоичных интервалах ранга n и такая, что $m_0(0) = 1$;

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

2) затем m_0 продолжается на $[0, +\infty)$ с помощью равенств

$$|m_0(\omega)|^2 + \left| m_0\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \quad m_0(\omega + 1) = m_0(\omega);$$

3) если полученная маска m_0 не имеет блокирующих множеств (или, что равносильно, m_0 удовлетворяет модифицированному условию Коэна), то она порождает двоичный КМА в $L_2(0, +\infty)$ и соответствующую систему вейвлетов.

В [8] для случая, когда масштабирующее уравнение содержит 2^4 слагаемых, приведен полный список наборов значений параметров, при которых маска имеет блокирующие множества, и для каждого из этих наборов указано по одному блокирующему множеству. Таким образом, при построении диадических вейвлетов имеется свобода в выборе ступенчатой двоичной функции на интервале $[0, \frac{1}{2})$ с единственным ограничением в виде отсутствия блокирующих множеств. В этой же работе приведены примеры масок, которые удовлетворяют условию Коэна и которые порождают вейвлеты, являющиеся аналогами вейвлетов Добеши в классическом случае. Отметим, что если маска имеет блокирующие множества, то предложенный в [6] алгоритм построения ортогональных всплесков приводит к фреймам Парсевалья [9].

Ю. Фарков [10]–[13] распространил эти результаты на p -ичные группы Виленкина, получил аналог отмеченной выше теоремы, для любого p определил широкий класс масок без блокирующих множеств (см. [12, пример 5]) и привел алгоритмы построения p -ичных масштабирующих функций и вейвлетов с компактными носителями на группах Виленкина.

В работах автора [14], [15] рассмотрен класс (N, M) -элементарных функций φ (см. определение 3.2), для которых модуль $|m_0|$ принимает только два значения 0 и 1 и сама маска является ступенчатой функцией. В [14] доказано, что если $(1, M)$ -масштабирующая функция φ порождает КМА, то $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_{p-2}^\perp$, и доказана точность этого результата. Построенные в [14] масштабирующие функции, доказывающие точность включения $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_{p-2}^\perp$, не исчерпывают всех масштабирующих функций, модуль маски которых принимает значения 0 и 1. В работе [15] доказано, что $(1, M)$ -элементарная функция порождает p -ичный КМА на группе Виленкина тогда и только тогда, когда она порождается некоторым корневым деревом $T(V)$ с корнем в нуле, построенным по множеству вершин $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$. В этой же работе приведен соответствующий алгоритм, который не требует перебора.

Много работ связано с построением КМА на группе (поле) всех p -адических чисел. С. Албеверио, С. Евдокимов, В. Шелкович, А. Хренников, М. Скопина в работах [16]–[18] ввели понятие p -адического КМА и описали общую схему их построения. Особо следует отметить работу [18], в которой доказано, что p -адический ортогональный КМА, порожденный ступенчатой функцией, обязательно будет хааровским. Для КМА на группах Виленкина это не так. Кратномасштабный анализ, порожденный масштабирующей функцией, носитель преобразования Фурье которой не лежит в единичном шаре, не будет хааровским. Таким образом, примеры и алгоритмы из [6], [10]–[15] дают нехааровские ортогональные КМА Виленкина.

В работе автора [19] вопросы построения ортогонального КМА и ортогональных всплесковых базисов рассмотрены на произвольных локально компактных нульмерных группах. В предположении того, что носитель преобразования

Фурье лежит в единичном шаре, в [20] получены необходимые и достаточные условия для масштабирующей функции, при которых она порождает КМА Рисса.

Во всех этих работах предполагается, что масштабирующая функция имеет компактный носитель, что соответствует конечному масштабирующему уравнению. В настоящей статье мы рассмотрим вопросы построения всплесковых базисов Рисса с некомпактным носителем как на произвольной локально компактной группе, так и на группе Виленкина и приведем конкретные алгоритмы их построения. Для корректного определения оператора растяжения в нульмерной группе мы будем предполагать, что факторгруппы, построенные по соседним подгруппам, порождающим топологию, имеют один и тот же простой порядок p и во всех полученных результатах это условие предполагается выполненным. Для аддитивности оператора растяжения будем дополнительно предполагать, что групповая операция удовлетворяет условию (2.1). Для группы Виленкина и поля p -адических чисел это условие выполняется автоматически. В случае произвольной нульмерной группы мы ограничимся рассмотрением случая, когда преобразование Фурье масштабирующей функции имеет компактный носитель, совпадающий с единичным шаром, центр которого есть характер $\chi \equiv 1$. Это означает, что сама масштабирующая функция постоянна на смежных классах по подгруппе, совпадающей с единичным шаром, и может иметь некомпактный носитель. Для группы Виленкина мы рассмотрим более общий случай, когда носитель преобразования Фурье масштабирующей функции получается “размазыванием” единичного шара с сохранением его меры. Мы укажем простую конструкцию таких носителей и соответствующих масштабирующих функций в терминах деревьев, основанную на работе [15].

Статья организована следующим образом. В § 1 приводятся необходимые сведения из теории локально компактных групп. В § 2 обсуждаются свойства оператора растяжения на произвольной локально компактной группе и группе ее характеров. В § 3 рассмотрены вопросы построения КМА Рисса как на произвольной локально компактной группе, так и на группе Виленкина. Предполагается, что функция $\varphi \in L_2$ удовлетворяет бесконечному масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty.$$

Для произвольной нульмерной группы мы доказываем, что если преобразование Фурье масштабирующей функции $\varphi \in L_2$ имеет модуль, равномерно ограниченный сверху и снизу на единичном шаре, то функция φ порождает КМА Рисса, который будет хааровским. В случае группы Виленкина мы вводим понятие (N, M) -элементарного множества и доказываем, что любая масштабирующая функция $\varphi \in L_2$, преобразование Фурье которой имеет носителем (N, M) -элементарное множество E и модуль которого равномерно ограничен сверху и снизу на E положительными константами, порождает КМА Рисса, который не будет хааровским.

В § 4 мы приводим алгоритм построения всплескового базиса Рисса с некомпактным носителем на произвольной нульмерной группе.

В § 5 приведено построение на группе Виленкина масштабирующей функции, порождающей КМА Рисса с некомпактным носителем. Для решения этой задачи используется алгоритм, разработанный автором в [15]. Доказано, что

любое корневое дерево с корнем в нуле, узлами которого являются элементы множества $\{1, 2, \dots, p-1\}$, определяет носитель масштабирующей функции, которая порождает КМА Рисса на p -ичной группе Виленкина. Указан явный алгоритм построения такой функции. Для случая $p = 3$ в качестве примера приведен явный вид масштабирующей функции и соответствующих вейвлетов.

§ 1. Локально компактные нульмерные группы, топология, характеры

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нульмерных группах. Более подробную информацию можно найти в [21], а для групп Виленкина – в [22]. Терминология и обозначения соответствуют [21]. Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

таких, что $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$ (0 – нулевой элемент группы G). При каждом фиксированном $N \in \mathbb{Z}$ подгруппа G_N является компактной абелевой группой относительно той же операции $\dot{+}$ в топологии, порожденной системой подгрупп

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots.$$

Пусть, далее, X – совокупность характеров группы G , которая является группой относительно операции умножения, $G_n^\perp$ – аннулятор группы G_n , т. е. $G_n^\perp = \{\chi \in X : \chi(x) = 1 \ \forall x \in G_n\}$.

Поскольку каждая группа G_n компактна, каждая факторгруппа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n – ее порядок. Можно считать, что p_n – простые числа, так как, используя теорему Силова [23], можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки факторгрупп G_n/G_{n+1} станут простыми. В этом случае базой топологии являются всевозможные смежные классы $G_n \dot{+} g$, $g \in G$.

Определим, далее, числа $(m_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$m_0 = 1, \quad m_{n+1} = m_n \cdot p_n.$$

Ясно, что при $n \geq 1$

$$m_n = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}, \quad m_{-n} = \frac{1}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-n}}.$$

Смежные классы $G_n \dot{+} g$, $n \in \mathbb{Z}$, вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{K}$. На каждом классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = \frac{1}{m_n}$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$. Меру μ можно продолжить с полукольца $\mathcal{K}$ на σ -алгебру (например, по схеме Каратеодори). Получим меру μ , совпадающую на борелевских множествах с мерой Хаара на G и инвариантную относительно сдвига. Пусть, далее, $\int_G f(x) d\mu(x)$ – абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p_n - 1}, \quad (1.1)$$

причем в сумме (1.1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n, \quad a_n = \overline{0, p_n - 1}, \quad a_N \neq 0. \quad (1.2)$$

Систему элементов (g_n) будем называть *базисной*.

Каждый аннулятор $G_n^\perp$ является группой относительно умножения, $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность

$$\cdots \subset G_{-n}^\perp \subset \cdots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \cdots \subset G_n^\perp \subset \cdots \quad (1.3)$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем факторгруппа $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ имеет порядок p_n .

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \overline{0, p_n - 1},$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть *функциями Радемахера*.

В группе характеров X можно ввести топологию, используя цепочку подгрупп (1.3) и выбирая в качестве базы топологии совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$, $\chi \in X$. Группа характеров X с такой топологией является нульмерной локально компактной группой, и имеет место двойственная ситуация: каждый элемент $x \in G$ является характером группы X и G_n – аннулятор группы $G_n^\perp$. Совокупность смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$, $\chi \in X$, вместе с пустым множеством образуют полукольцо $\mathcal{X}$. Для каждого смежного класса $G_n^\perp \cdot \chi$ определим его меру ν следующим соотношением:

$$\nu(G_n^\perp \cdot \chi) = \nu(G_n^\perp) = m_n.$$

Таким образом, всегда имеем $\mu(G_n)\nu(G_n^\perp) = 1$. Мера ν продолжается стандартным способом на σ -алгебру измеримых множеств. По этой мере строится абсолютно сходящийся интеграл $\int_X F(\chi) d\nu(\chi)$.

Значение $\chi(g)$ характера χ на элементе $g \in G$ будем обозначать через (χ, g) . Преобразование Фурье сначала определяется для гладких финитных функций равенством

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \int_G \varphi(x) \overline{(\chi, x)} dx.$$

Для гладких финитных функций справедливы формула обращения

$$\varphi(x) = \int_X \widehat{\varphi}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi)$$

и равенство Планшереля

$$\int_G |\varphi(x)|^2 d\mu(x) = \int_X |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 d\nu(\chi).$$

Поэтому отображение $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ изометрично на множестве гладких финитных функций и может быть продолжено до изометричного отображения из $L_2(G)$ на $L_2(X)$. Таким образом, преобразование Фурье функции $f \in L_2(G)$ может быть определено следующим образом:

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_{-n}} f(x) \overline{\chi(x)} d\mu(x), \quad (1.4)$$

где $\lim$ понимается в смысле сходимости по норме $L_2(X)$. Для $f \in L_2(G)$ остаются справедливыми как формула обращения, так и равенство Планшереля. Из такого определения преобразования Фурье следует, что если $f_n \rightarrow f$ в $L_2(G)$, то п. в. в X справедливо равенство $\lim \hat{f}_n = (\lim f_n)^\wedge$. Это дает возможность применять преобразование Фурье к сходящемуся в L_2 ряду.

В дальнейшем (в определении 2.1) мы определим на группе G оператор растяжения. Однако определить такой оператор удастся только в случае, когда $p_n = p$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому всюду далее будем рассматривать группы G , для которых $p_n = p$. Через $f_{\dot{+}g}$ будем обозначать сдвиг функции f на элемент $g \in G$, т. е. $f_{\dot{+}g}(x) = f(x \dot{+} g)$. Символ $\sqcup$ будет обозначать объединение дизъюнктивных множеств.

§ 2. Оператор растяжения в нульмерной группе и группе ее характеров

В данном и следующих параграфах мы будем рассматривать локально компактную группу $(G, \dot{+})$ с основной цепочкой подгрупп

$$\cdots \subset G_n \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \cdots \subset G_{-n} \subset \cdots,$$

в которой $\sharp(G_n/G_{n+1}) = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (через $\sharp X$ обозначено количество элементов множества X). Будем также предполагать, что операция $\dot{+}$ в группе G удовлетворяет условию

$$pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \alpha_s g_{n+s} \quad (2.1)$$

при некоторых фиксированных числах $\alpha_j = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{1, s}$.

Отметим, что при $pg_n = 0$ группа G является группой Виленкина. Если $pg_n = g_{n+1}$, то G есть группа всех p -адических чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Оператор $\mathcal{A}: G \rightarrow G$ задается равенством

$$\mathcal{A}x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{n-1} \quad (2.2)$$

при $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$. Если оператор $\mathcal{A}$ аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Оператор $\mathcal{A}$ будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2.1). В частности, оператор $\mathcal{A}$ будет аддитивным в наиболее важных группах: группах Виленкина с условием $pg_n = 0$ и группе p -адических чисел ($pg_n = g_{n+1}$). Без условия (2.1) оператор $\mathcal{A}$ может не быть аддитивным. В самом деле, рассмотрим группу $(G, \dot{+})$, в которой операция удовлетворяет

условиям $pg_0 = g_1 \dot{+} g_2$, $pg_{-1} = g_0$ и $pg_n = 0$ при n , отличных от 0 и -1 . В этом случае $\mathcal{A}((p-1)g_0 \dot{+} g_0) = \mathcal{A}(pg_0) = \mathcal{A}(g_1 \dot{+} g_2) = g_0 \dot{+} g_1$. С другой стороны, $\mathcal{A}(p-1)g_0 = (p-1)g_{-1}$, $\mathcal{A}(g_0) = g_{-1}$ и, значит,

$$\mathcal{A}(p-1)g_0 \dot{+} \mathcal{A}(g_0) = (p-1)g_{-1} \dot{+} g_{-1} = pg_{-1} = g_0 \neq g_0 \dot{+} g_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Действие оператора растяжения $\mathcal{A}$ на характеры $\chi \in X$ задается равенством $(\chi\mathcal{A})(x) = \chi(\mathcal{A}x)$, или, что то же самое, $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Оператор растяжения $\mathcal{A}$ действует на элемент $x \in G$ слева, а на характер $\chi \in X$ – справа.

Обозначим

$$H_0^{(N)} = \{x \in G: x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, a_{-j} = \overline{0, p-1}\},$$

$$H_0 = \{x \in G: x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, N \in \mathbb{N}, a_{-j} = \overline{0, p-1}\}.$$

Множество H_0 является множеством целых неотрицательных чисел.

Следующие утверждения были доказаны в [20].

ЛЕММА 2.1. Если $\mathcal{A}$ – оператор растяжения, то $\mathcal{A}G_n = G_{n-1}$, $\mathcal{A}^{-1}G_n = G_{n+1}$.

ЛЕММА 2.2. Если $f \in L(G)$, $\mathcal{A}$ – оператор растяжения, то

$$\int_G f(\mathcal{A}x) d\mu(x) = \frac{1}{p} \int_G f(x) d\mu(x). \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.3. Если $h, g \in H_0$, то

$$\int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g)}(\chi, h) d\nu(\chi) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0, & g \neq h. \end{cases}$$

Последняя лемма означает, что H_0 есть ортонормированная система в $L_2(G_0^\perp)$. Нетрудно проверить, что система H_0 полна относительно $L_2(G_0^\perp)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если G – группа Вилленкина, то группа характеров изоморфна самой группе. Поэтому в группе Вилленкина утверждение леммы 2.3 можно рассматривать как ортогональность системы характеров компактной подгруппы G_0 .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Имеем $\int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор растяжения в G . Тогда:

- 1) $G_n^\perp \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp$;
- 2) $G_n^\perp \mathcal{A}^{-1} = G_{n-1}^\perp$;
- 3) $G_n^\perp r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}} \mathcal{A} = G_{n+1}^\perp r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} r_{n+2}^{\alpha_{n+2}} \dots r_{n+1+s}^{\alpha_{n+1+s}}$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $r_0 \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$ – функция Радемахера. Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$ имеем $r_0 A^n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$, т.е. характер $r_0 A^n$ является n -й функцией Радемахера.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор растяжения в G и $\chi = \prod_{k=-\infty}^N r_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\chi \mathcal{A} = \prod_{k=-\infty}^N r_{k+1}^{\alpha_k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из леммы 2.6 следует, что оператор $\mathcal{A}$ является оператором растяжения в группе характеров, и по аналогии с леммой 2.2 для $f \in L(X)$ имеем

$$\int_X f(\chi \mathcal{A}) d\nu(\chi) = \frac{1}{p} \int_X f(\chi) d\nu(\chi).$$

§ 3. Кратномасштабный анализ Рисса

Напомним [24], что система функций $(\varphi_n) \subset L_2(G)$ называется системой Рисса с постоянными A и B ($A, B > 0$), если для любой последовательности $C = (c_j) \in l_2$ ряд $\sum_n c_n \varphi_n$ сходится в $L_2(G)$ и

$$A \|C\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_n c_n \varphi_n \right\|_{L_2(G)}^2 \leq B \|C\|_{l_2}^2. \quad (3.1)$$

Отметим, что из условия (3.1) уже следует сходимость ряда $\sum_n c_n \varphi_n$. Очевидно также, что система Рисса будет базисом в пространстве

$$V := \left\{ f = \sum_n c_n \varphi_n : \sum_k |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная группа с условиями $\sharp(G_n/G_{n+1}) = p$, $pg_n = \gamma_1 g_{n+1} \dot{+} \gamma_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_\sigma g_{n+\sigma}$, $\mathcal{A}$ – оператор растяжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Совокупность замкнутых подпространств $V_n \subset L_2(G)$, $n \in \mathbb{Z}$, назовем КМА Рисса, если выполнены следующие условия:

- A.1) $V_n \subset V_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$;
- A.2) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ плотно в $L_2(G)$;
- A.3) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$;
- A.4) $f(x) \in V_n \iff f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$;
- A.5) $f(x) \in V_0 \implies f(x \dot{-} h) \in V_0$, $h \in H_0$;

A.6) существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образует базис Рисса в V_0 .

Для построения КМА будем использовать традиционную схему. Выбираем произвольную пока функцию $\varphi \in L_2(G)$ такую, что сдвиги $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки по норме $L_2(G)$. Строим подпространства

$$V_n = \overline{\text{span}(\varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h))_{h \in H_0}}.$$

После этого находим условия для функции φ , при которых подпространства V_n , $n \in \mathbb{Z}$, образуют КМА в смысле определения 3.1. Мы будем рассматривать КМА Рисса как на произвольной нульмерной локально компактной группе $(G, \dot{+})$, так и на p -ичной группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$. Группу характеров группы Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ будем обозначать $\mathfrak{X}$.

В случае произвольной группы $(G, \dot{+})$ в работе [20] было доказано, что если $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$ и почти всюду в $G_0^\perp$

$$0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B, \quad (3.2)$$

то система сдвигов $(\varphi(x \dot{+} h))_{h \in H_0}$ является базисом Рисса с границами A и B в замыкании своей линейной оболочки. Поэтому в случае произвольной группы $(G, \dot{+})$ мы будем предполагать, что функция φ , порождающая КМА Рисса, удовлетворяет условию (3.2) при всех $\chi \in G_0^\perp$.

В случае группы Виленкина будем предполагать, что неравенство (3.2) выполнено на множестве $E \subset \mathfrak{X}$ с мерой $\nu E = 1$, которое получается “размазыванием” множества $\mathfrak{G}_0^\perp$ на более широкий аннулятор $\mathfrak{G}_M^\perp$. Приведем точную характеристику множества E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \sqcup \{0\}$, $\mathfrak{G}$ – p -ичная группа Виленкина, $\mathfrak{X}$ – группа характеров для $\mathfrak{G}$. Множество $E \subset \mathfrak{X}$ назовем (N, M) -элементарным, если оно есть дизъюнктное объединение p^N смежных классов вида

$$\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j = \mathfrak{G}_{-N}^\perp \underbrace{r_{-N}^{\alpha-N} r_{-N+1}^{\alpha-N+1} \cdots r_{-1}^{\alpha-1}}_{\xi_j} \underbrace{r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}_{\eta_j} = \mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j \eta_j$$

при $j = 0, 1, \dots, p^N - 1$ таких, что:

- 1) $\bigsqcup_{j=0}^{p^N-1} \mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j = \mathfrak{G}_0^\perp$, $\mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_0 = \mathfrak{G}_{-N}^\perp$;
- 2) при каждом $l = 0, M + N - 1$ имеем $(\mathfrak{G}_{-N+l+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-N+l}^\perp) \cap E \neq \emptyset$.

При построении КМА Рисса на группе Виленкина мы будем предполагать, что неравенство (3.2) выполнено на (N, M) -элементарном множестве E . Из определения (N, M) -элементарного множества E следует, что $E \subset \mathfrak{G}_{p^N-N-1}^\perp$. Отметим, что аннулятор $\mathfrak{G}_0^\perp$ является $(N, 0)$ -элементарным множеством при любом $N \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3.1. Множество H_0 является полной ортонормированной системой на любом (N, M) -элементарном множестве $E \subset \mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Используя определение (N, M) -элементарного множества и инвариантность интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \int_E (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j} (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) \\ &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j}(\chi) (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) \\ &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j}(\chi \eta_j) (\chi \eta_j, h) \overline{(\chi \eta_j, g)} d\nu(\chi) \\ &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j}(\chi) (\chi, h) \overline{(\chi, g)} (\eta_j, h) \overline{(\eta_j, g)} d\nu(\chi), \end{aligned}$$

так как $\zeta_j = \xi_j \eta_j$. Поскольку

$$\begin{aligned} (\eta_j, h) &= (r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \cdots + a_{-s}g_{-s}) = 1, \\ (\eta_j, g) &= (r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{-1}g_{-1} + b_{-2}g_{-2} + \cdots + b_{-s}g_{-s}) = 1, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_E (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j} (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) = \int_{\mathfrak{G}_0^{\perp}} (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) \\ &= \delta_{h, g}. \end{aligned}$$

2) Покажем, что система H_0 полна относительно $L_2(E)$. Пусть $f \in L_2(E)$. Аналогично п. 1) имеем

$$\begin{aligned} \int_E f(\chi) \overline{(\chi, h)} d\nu(\chi) &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j}(\chi) f(\chi \eta_j) \overline{(\chi \eta_j, h)} d\nu(\chi) \\ &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j}(\chi) f(\chi \eta_j) \overline{(\chi, h)} d\nu(\chi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функцию f доопределим на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j$ равенствами $f(\chi) = f(\chi \eta_j)$. Тогда равенство (3.3) примет вид

$$\begin{aligned} \int_E f(\chi) \overline{(\chi, h)} d\nu(\chi) &= \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j}(\chi) f(\chi) \overline{(\chi, h)} d\nu(\chi) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} f(\chi) \overline{(\chi, h)} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_0^{\perp}}(\chi) d\nu(\chi) = \int_{\mathfrak{G}_0^{\perp}} f(\chi) \overline{(\chi, h)} d\nu(\chi) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку система H_0 полна относительно $L_2(\mathfrak{G}_0^{\perp})$, то $f(\chi) = 0$ п. в. на $\mathfrak{G}_0^{\perp}$, а значит, $f(\chi) = 0$ п. в. на E . Лемма доказана.

Следующая лемма дает условие, при котором система сдвигов будет системой Рисса на группе Виленкина.

ЛЕММА 3.2. Пусть $(\mathfrak{G}, +)$ – p -ичная группа Виленкина, $E \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$ – (N, M) -элементарное множество в $\mathfrak{X}$, $\varphi \in L^2(\mathfrak{G})$. Если существуют $A, B > 0$ такие, что п. в. на $\mathfrak{X}$

$$\mathbf{1}_E(\chi) A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq \mathbf{1}_E(\chi) B,$$

то система сдвигов $(\varphi(x + \cdot))_{h \in H_0}$ будет системой Рисса с постоянными A и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\left\| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \varphi(x \dot{+} h) \right\|_2^2$ сверху, предполагая, что $\tilde{H}_0 \subset H_0$ – конечное множество. Используя равенство Планшереля, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{G}} \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \varphi(x \dot{+} h) \right|^2 d\mu(x) &= \int_{\mathfrak{X}} \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \widehat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) \\ &\leq B \int_E \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) = B \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \zeta_j} \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Преобразуем внутренний интеграл, используя инвариантность интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \zeta_j} \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) &= \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \zeta_j}(\chi) \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \zeta_j}(\chi \eta_j) \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi \eta_j, h)} \right|^2 d\nu(\chi) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j}(\chi) \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi \eta_j, h)} \right|^2 d\nu(\chi) \\ &= \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j} \sum_{h \in \tilde{H}_0} \sum_{g \in \tilde{H}_0} c_h \overline{c_g} \overline{(\eta_j, h)} (\eta_j, g) \overline{(\chi, h)} (\chi, g) d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (\eta_j, h) &= (r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s}g_{-s}) = 1, \\ (\eta_j, g) &= (r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-s}g_{-s}) = 1, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \zeta_j} \left| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) &= \sum_{g, h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{c_g} \sum_{j=0}^{p^N-1} \int_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} \xi_j} \overline{(\chi, h)} (\chi, g) d\nu(\chi) \\ &= \sum_{g, h \in \tilde{H}_0} c_h \overline{c_g} \int_{\mathfrak{G}_0^{\perp}} \overline{(\chi, h)} (\chi, g) d\nu(\chi) = \sum_{h \in \tilde{H}_0} |c_h|^2, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\left\| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \varphi(x \dot{+} h) \right\|_{L_2}^2 \leq B \sum_{h \in \tilde{H}_0} |c_h|^2.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\left\| \sum_{h \in \tilde{H}_0} c_h \varphi(x \dot{+} h) \right\|_{L_2}^2 \geq A \sum_{h \in \tilde{H}_0} |c_h|^2.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. 1) Если $\varphi \in L_2(G)$, $\text{supp } \widehat{\varphi} \subset G_0^\perp$, $\widehat{\varphi}$ удовлетворяет условиям (3.2) на $G_0^\perp$ и $V_0 \subset V_1$, то функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty. \quad (3.4)$$

2) Если $\varphi \in L_2(\mathfrak{G})$, E – (N, M) -элементарное множество, $\text{supp } \widehat{\varphi} = E$, $\widehat{\varphi}$ удовлетворяет условиям (3.2) на E и $V_0 \subset V_1$, то функция φ удовлетворяет уравнению (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi(x \dot{-} h)$ – система Рисса с постоянными A и B , то для любого $C = (c_h)_{h \in H_0} \in l_2$

$$A\|C\|_{l_2}^2 \leq \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \leq B\|C\|_{l_2}^2. \quad (3.5)$$

Учитывая, что $\int_G f(Ax) d\mu = \frac{1}{p} \int_G f(x) d\mu$, из (3.5) сразу следует

$$A\|C\|_{l_2}^2 \leq p \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(Ax \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \leq B\|C\|_{l_2}^2,$$

т. е. система $\sqrt{p}(\varphi(Ax \dot{-} h))_{h \in H_0}$ является системой Рисса с постоянными A и B и, значит, будет базисом V_1 . Поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, выполнено (3.4), причем $\sum |\beta_h|^2 < +\infty$. Лемма доказана.

Таким образом, в случае (3.2) условие (3.4) является необходимым для включения $\varphi \in V_0 \subset V_1$. Уравнение (3.4) называют *масштабирующим уравнением*, а его решение – функцию φ – *масштабирующей функцией*. Применяя к обеим частям (3.4) преобразование Фурье, получаем равенство

$$\widehat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \widehat{\varphi}(\chi A^{-1}), \quad (3.6)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{\widehat{\varphi}(\chi A^{-1}h)}. \quad (3.7)$$

Равенство (3.6) называют *масштабирующим уравнением в частотной области*, т. е. под частотой следует понимать аргумент преобразования Фурье. Отметим, что почленное применение преобразования Фурье к правой части уравнения (3.4) возможно ввиду равенства $\lim \widehat{f}_n = (\lim f_n)^\wedge$. Функцию $m_0(\chi)$ называют *маской*. Отметим, что в случае группы Виленкина ряд в правой части равенства (3.7) есть ряд по системе Крестенсона–Леви [21, с. 68], которую в последнее время чаще называют системой Виленкина.

ЛЕММА 3.4. Пусть функция $\varphi \in L_2(G)$ – решение масштабирующего уравнения (3.4).

1) Если G – произвольная группа, то $m_0(\chi) \in L_2(G_1^\perp)$.

2) Если $G = \mathfrak{G}$ – группа Виленкина и $E \subset \mathfrak{X}$ – произвольное (N, M) -элементарное множество, то $m_0(\chi) \in L_2(EA)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 2). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_{EA} (\chi \mathcal{A}^{-1}, h) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, g)} d\nu(\chi) &= \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{EA}(\chi) (\chi \mathcal{A}^{-1}, h) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, g)} d\nu(\chi) \\ &= p \int_{\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{EA}(\chi \mathcal{A})(\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) = p \int_E (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) = p \delta_{h,g}. \end{aligned}$$

Это означает, что $(\frac{1}{\sqrt{p}} \mathcal{A}^{-1} h)_{h \in H_0}$ является ортонормированной системой на множестве EA . Поскольку $(\beta_h) \in l_2$, то $m_0(\chi) \in L_2(EA)$.

Случай 1) рассматривается аналогично, в качестве E берем $G_0^\perp$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция $\varphi \in L_2(G)$ – решение масштабирующего уравнения (3.4).

- 1) Если $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п.в. на $G_0^\perp$, то $V_0 \subset V_1$.
- 2) Если $G = \mathfrak{G}$ – группа Виленкина, $E = (N, M)$ -элементарное множество, $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = E$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п.в. на E , то $V_0 \subset V_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 3.3 было отмечено, что в условиях теоремы $(\sqrt{p} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ – система Рисса с постоянными A и B . Поэтому ряд из (3.4) сходится в $L_2(G)$ при любой перестановке. Пусть $f \in \text{span}(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, т.е.

$$f(x) = \sum_{\tilde{h} \in \tilde{H} \subset H_0} \alpha_{\tilde{h}} \varphi(x \dot{-} \tilde{h}), \quad (3.8)$$

где $\tilde{H} \subset H_0$ – конечное множество. Подставляя (3.4) в (3.8), получим

$$f(x) = \sum_{\tilde{h} \in \tilde{H}} \alpha_{\tilde{h}} \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h)) = \sum_{h \in H_0} \sum_{\tilde{h} \in \tilde{H}} \alpha_{\tilde{h}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h)). \quad (3.9)$$

Поскольку операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = \gamma_1 g_{n+1} \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_\sigma g_{n+\sigma}$, то

$$\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h = h_0 \dot{-} \tilde{a}_{-1} g_{-1} \dot{-} \tilde{a}_{-2} g_{-2} \dot{-} \dots \dot{-} \tilde{a}_{-N} g_{-N} = h_0 \dot{-} g,$$

где $g \in H_0$, $h_0 \in G_0$. Так как $h_0 \in G_0$, то при фиксированном $\tilde{h} \in \tilde{H}$ для любого $g \in H_0$ существует единственный элемент $h \in H_0$ такой, что $\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h = g \dot{-} h_0$ при некотором $h_0 \in G_0$. При этом элемент h_0 определяется однозначно по элементу h . Верно и обратное: для любого $h \in H_0$ существует единственный элемент $g \in H_0$ такой, что $\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h = g \dot{-} h_0$ при некотором $h_0 \in G_0$.

1) Если G – произвольная группа, то $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$ и функция $\varphi(x)$ постоянна на смежных классах $G_0 \dot{+} \xi$, а значит,

$$\varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h)) = \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (h_0 \dot{-} g)) = \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} g).$$

2) Если $G = \mathfrak{G}$ – группа Виленкина, то $h_0 = 0$ и, значит, снова

$$\varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (\mathcal{A}\tilde{h} \dot{-} h)) = \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} g).$$

Поэтому $f(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{h \in H_0} \sum_{\tilde{h} \in \tilde{H}} \alpha_{\tilde{h}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} g) \\ &= \sum_{g \in H_0} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} g) \sum_{\tilde{h}: A\tilde{h} \dot{+} h = g \dot{+} h_0} \alpha_{\tilde{h}} \beta_h = \sum_{g \in H_0} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} g) c_g, \end{aligned}$$

где $c_g = \sum_{\tilde{h}: A\tilde{h} \dot{+} h = g \dot{+} h_0} \alpha_{\tilde{h}} \beta_h$.

Согласно рассуждениям после формулы (3.9) получаем, что число слагаемых во внутренней сумме равно $\#\tilde{H}$ и, значит,

$$\sum_{g \in H_0} |c_g|^2 \leq (\#\tilde{H}) \sum_{\tilde{h} \in \tilde{H}} |\alpha_{\tilde{h}}|^2 \sum_{g \in H_0} |\beta_g|^2 < +\infty,$$

т. е. $V_0 \subset V_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В условиях теоремы 3.1 имеем $V_n \subset V_{n+1}$, т. е. выполнена аксиома A1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. В условиях теоремы 3.1 выполнена аксиома A5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in V_0$. Тогда $f(x) \in \overline{\text{span}(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}}$. Следовательно, $f(x \dot{-} \tilde{h}) \in \overline{\text{span}(\varphi(x \dot{-} \tilde{h} \dot{-} h))_{h \in H_0}}$. Если $h, \tilde{h} \in H_0$, то, как мы видели при доказательстве теоремы 3.1, $h \dot{+} \tilde{h} = g \dot{+} h_0$, где $h_0 \in G_0$, $g \in H_0$, и, значит, $\varphi(x \dot{-} \tilde{h} \dot{-} h) = \varphi(x \dot{-} g)$, откуда и следует утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. В условиях теоремы 3.1 выполнена аксиома A4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аксиома A4), очевидно, следует из определения V_n и равенства $\int_G f(\mathcal{A}x) d\mu = \frac{1}{p} \int_G f(x) d\mu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $\hat{\varphi}(\chi) = 0$ вне $G_{n_0}^\perp$ при некотором n_0 . Тогда $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $f \in V_n$ и покажем, что $\hat{f}(\chi) = 0$ п. в. вне $G_{n_0+n}^\perp$. Поскольку $f \in V_n$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_G \left| \sum_{h \in H_0^{(N)}} c_h^{(N)} \varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h) - f(x) \right|^2 d\mu = 0$$

и по равенству Планшереля

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \left| \left(\sum_{h \in H_0^{(N)}} c_h^{(N)} \varphi(\mathcal{A}^n x \dot{-} h) - f(x) \right)^\wedge(\chi) \right|^2 d\nu(\chi) = 0.$$

Учитывая, что

$$\hat{\varphi}_{\mathcal{A}^n \dot{-} h}(\chi) = \frac{1}{p^n} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}),$$

получаем

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \left| \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0^{(N)}} c_h^{(N)} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-n}, h)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-n}) - \hat{f}(\chi) \right|^2 d\nu(\chi)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} p^n \int_X \left| \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0^{(N)}} c_h^{(N)} \overline{(\chi, h)} \widehat{\varphi}(\chi) - \widehat{f}(\chi \mathcal{A}^n) \right|^2 d\nu(\chi) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(p^n \int_{G_{n_0}^\perp} \left| \frac{1}{p^n} \sum_{h \in H_0^{(N)}} c_h^{(N)}(\chi, h) \widehat{\varphi}(\chi) - \widehat{f}(\chi \mathcal{A}^n) \right|^2 d\nu(\chi) \right. \\
 &\quad \left. + p^n \int_{X \setminus G_{n_0}^\perp} |\widehat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\int_{X \setminus G_{n_0}^\perp} |\widehat{f}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 d\nu(\chi) = 0$ и, значит, $\widehat{f}(\chi \mathcal{A}^n) = 0$ п. в. на $X \setminus G_{n_0}^\perp$, т. е. $\widehat{f}(X \setminus G_{n_0+n}^\perp) = 0$. Это означает, что если $f \in V_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, то $\widehat{f}(\chi) = 0$ п. в. на X . Поэтому $f(x) = 0$ п. в. на G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$

1) Пусть $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п. в. на $G_0^\perp$. Тогда $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$, если и только если $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot \mathcal{A}^{-n}) = X$.

2) Пусть $\varphi \in L_2(\mathfrak{G})$, $E - (N, M)$ -элементарное множество, $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = E$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п. в. на E . Тогда $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n} = L_2(\mathfrak{G})$, если и только если $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{supp } \widehat{\varphi}(\cdot \mathcal{A}^{-n}) = \mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [19] в предположении $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. При доказательстве условие $|\widehat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ использовалось только для того, чтобы получить включение $V_n \subset V_{n+1}$. Однако согласно теореме 3.1 это включение выполняется и в случае $A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$. Поэтому предложение верно.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. В условиях предложения 3.4 выполнена аксиома A2), так как при некотором n_0

$$\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}) \supset G_{n_0}^\perp.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $\varphi, \psi \in L_2(G)$, $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = \text{supp } \widehat{\psi}(\chi) = G_0^\perp$.

1) Если $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ на $G_0^\perp$, то система $(\varphi(x \dot{-} g), \psi(x \dot{-} h))_{g, h \in H_0}$ будет биортонормированной в $L_2(G)$.

2) Верно и обратное. Если система $(\varphi(x \dot{-} g), \psi(x \dot{-} h))$ биортонормирована, то $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ п. в. на $G_0^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство Планшереля и инвариантность интеграла, имеем

$$\int_G \varphi(x \dot{-} g) \overline{\psi(x \dot{-} h)} d\mu(x) = \int_{G_0^\perp} \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} \overline{(\chi, g)}(\chi, h) d\nu(\chi). \quad (3.10)$$

1) Поскольку H_0 – ортонормированная система на $G_0^\perp$ и $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$, то из равенства (3.10) выводим

$$\int_G \varphi(x \dot{-} g) \overline{\psi(x \dot{-} h)} d\mu(x) = \delta_{g, h}.$$

2) Положим $g = 0$ в (3.10) и обозначим

$$c_h = \int_{G_0^\perp} \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)}(\chi, h) d\nu(\chi) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим $h \in H_0$ как характеры группы $G_0^\perp$. Поскольку $G_0^\perp$ – компактная группа, то H_0 – ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp)$ и, значит, числа c_h являются коэффициентами Фурье функции $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)}$ по системе H_0 . Так как $\int_{G_0^\perp} 1 d\mu = 1$, в силу теоремы единственности разложения функции в ряд Фурье по системе характеров имеем $\|\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} - 1\|_{L_2(G_0^\perp)} = 0$, т. е. $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ п. в. на $G_0^\perp$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mathfrak{G}$ – p -ичная группа Вилленкина, $E \subset \mathfrak{X} - (N, M)$ -элементарное множество в $\mathfrak{X}$, $\text{supp } \widehat{\varphi} = \text{supp } \widehat{\psi} = E$.

1) Если $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ п. в. на E , то $(\varphi(x \dot{-} h), \psi(x \dot{-} g))_{h, g \in H_0}$ – биортонормированная система на E .

2) Обратно, если $(\varphi(x \dot{-} h), \psi(x \dot{-} g))_{h, g \in H_0}$ – биортонормированная система на E , то $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ п. в. на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Используя равенство Планшереля с учетом леммы 3.1, имеем

$$\int_{\mathfrak{G}} \varphi(x \dot{-} h) \overline{\psi(x \dot{-} g)} d\mu(x) = \int_E \overline{(\chi, h)}(\chi, g) d\nu(\chi) = \delta_{h, g}.$$

2) Согласно предложению 3.5 из биортогональности системы $(\varphi(x \dot{-} h), \psi(x \dot{-} g))$ имеем

$$\int_{\mathfrak{G}} \overline{\varphi(x \dot{-} h)} \psi(x) d\mu(x) = \int_E \overline{\widehat{\varphi}(\chi)} \widehat{\psi}(\chi)(\chi, h) d\nu(\chi) = c_h = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0, h \in H_0, \end{cases}$$

по теореме единственности $\widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\psi}(\chi)} = 1$ п. в. на E . Лемма доказана.

Из теоремы 3.1, леммы 3.2 и предложений 3.1–3.4 сразу получается

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty.$$

1) Пусть G – произвольная нульмерная группа с условием (2.1), в том числе и группа p -адических чисел. Если $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ на $G_0^\perp$, то φ порождает КМА Рисса с границами A и B .

2) Если $G = \mathfrak{G}$ – группа Вилленкина, $E - (N, M)$ -элементарное множество, $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = E$, $0 < A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п. в. на E , то φ порождает КМА Рисса с границами A и B .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из условия $A \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ следует, что КМА, который порожден функцией φ , будет КМА Хаара, т. е. V_0 – замыкание линейной оболочки сдвигов $\mathbf{1}_{G_0}(x \dot{-} h)$, $h \in H_0$. Покажем это. Пусть

$\sum_{h \in H_0} |c_h|^2 < +\infty$. Используя равенство Планшереля, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_0} \left| \mathbf{1}_{G_0}(x) - \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu &= \int_X \left| \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) - \sum_{h \in H_0} c_h \widehat{\varphi}(\chi) \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu \\ &= \int_{G_0^\perp} \left| 1 - \widehat{\varphi}(\chi) \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu. \end{aligned}$$

Однако (H_0) – полная ортонормированная система в $L_2(G_0^\perp)$ и $|\widehat{\varphi}(\chi)| \geq A$ на $G_0^\perp$. Поэтому существуют коэффициенты $(c_h) \in l_2$ такие, что

$$\sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} = \frac{1}{\widehat{\varphi}(\chi)}$$

п. в. в $G_0^\perp$, т. е. $\mathbf{1}_{G_0}(x) \in V_0$. Таким образом, несмотря на то, что функция $\varphi(x)$ имеет некомпактный носитель, она порождает КМА Хаара. Это означает, что если $\varphi \in L_2(G)$ порождает нехааровский КМА Рисса, то носитель $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi)$ не лежит в $G_0^\perp$. Задача построения (или хотя бы существования) такой функции φ для произвольной группы в настоящий момент не решена. Не решена она и в случае, когда G – поле $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел. В случае группы Виленкина теорема 3.2 дает нехааровский КМА при любом $M \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Зная КМА Рисса, можно перейти к ортогональному КМА, используя стандартную процедуру из [25, с. 378] или [26, с. 191]. В нашем случае ситуация проще. Поскольку $A\mathbf{1}_E(\chi) \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B\mathbf{1}_E(\chi)$, где $E = (N, M)$ -элементарное множество в случае группы Виленкина и $E = G_0^\perp$ в случае произвольной нульмерной группы, то функция ψ , определенная равенством

$$\widehat{\psi}(\chi) = \begin{cases} \frac{\widehat{\varphi}(\chi)}{|\widehat{\varphi}(\chi)|}, & \chi \in \text{supp } \widehat{\varphi}, \\ 0, & \chi \notin \text{supp } \widehat{\varphi}, \end{cases}$$

образует ортонормированный базис в V_0 .

§ 4. Построение всплесковых базисов Рисса на произвольной нульмерной группе

Всюду в этом параграфе G – произвольная нульмерная группа с постоянной образующей последовательностью (p_n) , т. е. $\sharp(G_n/G_{n+1}) = p$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ – решение уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty.$$

Тогда

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \in L_2(G_1^\perp).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $h, g \in H_0$

$$\int_{G_0^\perp} (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) = \delta_{h,g},$$

имеем

$$\int_{G_1^\perp} (\chi \mathcal{A}^{-1}, h) \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, g)} d\nu(\chi) = p \int_{G_0^\perp} (\chi, h) \overline{(\chi, g)} d\nu(\chi) = p \delta_{h,g},$$

т. е. множество $(\frac{\mathcal{A}^{-1}h}{\sqrt{p}})_{h \in H_0}$ можно рассматривать как ортонормированную систему на $G_1^\perp$. Поэтому $m_0(\chi) \in L_2(G_1^\perp)$ и $\frac{\beta_h}{\sqrt{p}}$ — коэффициенты Фурье функции $m_0(\chi)$ по системе $(\frac{\mathcal{A}^{-1}h}{\sqrt{p}})_{h \in H_0}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть функция $\varphi \in L_2(G)$ определена равенством

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \widehat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}),$$

где $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$ и $\widehat{\varphi}(1) = 1$. Если при $\chi \in G_{-k}^\perp$ выполнены неравенства $0 < A_k \leq |m_0(\chi)|^2 \leq B_k$ и $\prod_{k=0}^{\infty} A_k = A$, $\prod_{k=0}^{\infty} B_k = B$, то

$$A \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$ следует, что

$$m_0(G_{k+1}^\perp \mathcal{A}^{-k} \setminus G_k^\perp \mathcal{A}^{-k}) = 0$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, и поэтому $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$. Из неравенств $A_k \leq |m_0(\chi)|^2 \leq B_k$, $\chi \in G_{-k}^\perp$, следует, что при $\chi \in G_0^\perp$

$$A_k \leq |m_0(\chi \mathcal{A}^{-k})|^2 \leq B_k.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Будем строить всплесковые базисы Рисса в $L_2(G)$. Обозначим через W_n ортогональное дополнение V_n до V_{n+1} , т. е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ и $W_n \perp V_n$. Нетрудно проверить, что:

- 1) $f \in W_n \iff f(\mathcal{A}x) \in W_{n+1}$;
- 2) $W_n \perp W_k$ при $k \neq n$;
- 3) $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n = L_2(G)$.

Выберем функцию

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)}, \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty, \quad (4.1)$$

такую, что

$$0 < A_n \leq |m_0(G_{-n}^\perp)|^2 \leq B_n, \quad n \geq 0; \quad m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0; \quad m_0(1) = 1, \quad (4.2)$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} A_n = A > 0, \quad \prod_{n=0}^{\infty} B_n = B > 0. \quad (4.3)$$

В этом случае согласно лемме 4.2 имеем $A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ на $G_0^\perp$ и $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = G_0^\perp$. Можно считать, что B_n образуют убывающую последовательность, $A_n -$

возрастающую, $\lim A_n = \lim B_n = 1$. Построить такую маску можно, например, следующим образом. Выберем произвольную последовательность $(\gamma_n)_{n=0}^\infty$ такую, что $\sum_{n=0}^\infty \gamma_n < +\infty$, $0 < \gamma_n < 1$, и пусть $m_0(\chi)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $m_0(1) = 1$;
- 2) $m_0(\mathfrak{G}_1^\perp \setminus \mathfrak{G}_0^\perp) = 0$, $|m_0(\chi)| > 0$ при $\chi \in \mathfrak{G}_0^\perp$;
- 3) $|m_0(\chi) - m_0(1)| \leq \gamma_n$ при $\chi \in \mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$.

Определим функцию $\widehat{\varphi}(\chi)$ равенством

$$\widehat{\varphi}(\chi) = \prod_{j=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}). \quad (4.4)$$

ЛЕММА 4.3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) произведение (4.4) сходится равномерно на любом множестве $\mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) функция $\widehat{\varphi}(\chi)$ непрерывна в точке $x = 1$;
- 3) $\widehat{\varphi}(1) = 1$;
- 4) $\widehat{\varphi}(X \setminus \mathfrak{G}_0^\perp) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\chi \in \mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$. Рассмотрим разность

$$|P_{N+q}(\chi) - P_N(\chi)| = |P_N(\chi)| \left| \prod_{j=N+1}^{N+q} m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) - 1 \right|,$$

где $P_N(\chi) = \prod_{j=0}^N m_0(\chi \mathcal{A}^{-j})$. Поскольку $\chi \mathcal{A}^{-j} \in \mathfrak{G}_{-n-j}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-j-1}^\perp$, то $|m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) - 1| \leq \gamma_{n+j}$. Обозначим $m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) - 1 = \alpha_{n,j}(\chi)$. Тогда

$$|P_N(\chi)| \leq \prod_{j=0}^N (1 + |\alpha_{n,j}(\chi)|) \leq \prod_{j=0}^N (1 + \gamma_{n+j}) < \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \gamma_{n+j}).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Выбираем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_j < \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=N+1}^{N+q} m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) - 1 \right| &= \left| \prod_{j=N+1}^{N+q} (1 + \alpha_{n,j}(\chi)) - 1 \right| \\ &\leq \sum_{s=1}^{\infty} (|\gamma_{n+N+1}| + |\gamma_{n+N+2}| + \cdots + |\gamma_{n+N+q}|)^s < \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, $P_N(\chi)$ сходится равномерно на $\mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$.

2) Покажем, что $\lim \widehat{\varphi}(\chi) = 1$ при $\chi \rightarrow 1$. В самом деле, при $\chi \in \mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$ имеем

$$\left| \prod_{j=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) \right| \leq \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \gamma_{n+j}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично,

$$\left| \prod_{j=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-j}) \right| \geq \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \gamma_{n+j}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

3) Равенства $\widehat{\varphi}(1) = 1$ и $\widehat{\varphi}(X \setminus \mathfrak{G}_0^\perp) = 0$ очевидны. Лемма доказана.

В качестве A_n и B_n в (4.2) можно взять

$$A_n = \sup_{k \geq n} (1 + \gamma_k), \quad B_n = \inf_{k \geq n} (1 - \gamma_k).$$

Коэффициенты β_h масштабирующего уравнения $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h) \beta_h$ могут быть найдены из разложения

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)}$$

по формулам

$$\beta_h = \int_{G_1^\perp} m_0(\chi)(\chi \mathcal{A}^{-1}, h) d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp} m_0(\chi)(\chi \mathcal{A}^{-1}, h) d\nu(\chi).$$

Пусть маска m_0 построена. Положим по определению для $l = \overline{1, p-1}$

$$\begin{aligned} m_l(\chi) &= m_0(\chi r_0^{-l}) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi r_0^{-l}, \mathcal{A}^{-1}h)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(r_0^{-l}, \mathcal{A}^{-1}h)} \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)}, \end{aligned}$$

где $\beta_h^{(l)} = \overline{\beta_h(r_0^{-l}, \mathcal{A}^{-1}h)}$.

ЛЕММА 4.4. Если $\nu \neq l$, то $m_l(G_0^\perp r_0^\nu) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\nu \neq l$, то $r_0^{\nu-l} \subset G_1^\perp \setminus G_0^\perp$. Поэтому

$$m_l(G_0^\perp r_0^\nu) = m_0(G_0^\perp r_0^\nu r_0^{-l}) = m_0(G_0^\perp r_0^{\nu-l}) = 0.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть маска m_0 удовлетворяет условиям (4.1), (4.2), функции ψ_l определены равенствами

$$\psi_l(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad l = \overline{1, p-1}.$$

Тогда функции $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{1, p-1}$, образуют базис Рисса в W_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Проверим, что $(\varphi(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$. Сначала заметим, что

$$\hat{\psi}_l(\chi) = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_l(\chi). \quad (4.5)$$

В самом деле, из определения ψ_l следует

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_l(\chi) &= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} = \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} \\ &= \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) m_l(\chi). \end{aligned}$$

Используя условие $\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi) = G_0^\perp$, равенство Планшереля и (4.5), имеем

$$\begin{aligned} (\varphi(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) &= \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\psi_l(x \dot{-} g^{(2)})} d\mu(x) \\ &= \int_{G_0^\perp} \widehat{\varphi}(\chi) \overline{\widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})} \overline{(\chi, g^{(1)})} (\chi, g^{(2)}) \overline{m_l(\chi)} d\nu(\chi) = 0, \end{aligned}$$

так как $m_l(G_0^\perp) = m_0(G_0^\perp r_0^{-l}) = 0$.

2) Аналогично получаем, с учетом леммы 4.1, что $(\psi_k(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$, если $k \neq l$.

3) Покажем, что система $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ при каждом $l = \overline{1, p-1}$ образует систему Рисса. Оценим интеграл

$$\int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x),$$

предполагая, что только конечное число коэффициентов c_h не равно нулю. Учитывая равенство Планшереля, имеем

$$\begin{aligned} \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) &= \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \sum_{\tilde{h} \in H_0} \beta_{\tilde{h}}^{(l)} \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} (\mathcal{A}h \dot{-} \tilde{h})) \right|^2 d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p^2} \int_X \left| \sum_{h \in H_0} \sum_{\tilde{h} \in H_0} c_h \beta_{\tilde{h}}^{(l)} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}h \dot{-} \tilde{h}))} \right|^2 d\nu(\chi) \\ &= \frac{1}{p^2} \int_X \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 \left| \sum_{\tilde{h} \in H_0} \beta_{\tilde{h}}^{(l)} \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}\tilde{h})} \right|^2 |\widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})|^2 d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{p} \sum_{\tilde{h} \in H_0} \beta_{\tilde{h}}^{(l)} \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}\tilde{h})} = m_l(\chi),$$

$$\text{supp } \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) = G_1^\perp, \quad A \leq |\widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1})|^2 \leq B, \quad \chi \in G_1^\perp,$$

получаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) &\leq B \int_{G_1^\perp} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi), \\ \int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) &\geq A \int_{G_1^\perp} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Поскольку $m_l(\chi) = m_0(r_0^{-l}\chi) = 0$ при $\chi \notin G_0^\perp r_0^l$, для интеграла в правых частях имеем

$$\begin{aligned} \int_{G_1^\perp} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi) &= \int_{G_0^\perp r_0^l} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_0(\chi r_0^{-l})|^2 d\nu(\chi) \\ &\leq B_0 \int_{G_0^\perp r_0^l} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi). \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла отметим, что элементы $h \in H_0$ являются характерами компактной группы $G_0^\perp$ и, значит, образуют на $G_0^\perp$ ортонормированную систему. Поэтому, учитывая инвариантность интеграла относительно сдвига, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_0^\perp r_0^l} \left| \sum_{h \in H_0} c_h(\chi, h) \right|^2 d\nu(\chi) &= \int_X \left| \sum_{h \in H_0} c_h(\chi, h) \right|^2 \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^l}(\chi) d\nu(\chi) \\ &= \int_X \left| \sum_{h \in H_0} c_h(\chi r_0^l, h) \right|^2 \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0^l}(\chi r_0^l) d\nu(\chi) = \int_X \left| \sum_{h \in H_0} c_h(\chi r_0^l, h) \right|^2 \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) d\nu(\chi) \\ &= \int_{G_0^\perp} \left| \sum_{h \in H_0} c_h(\overline{r_0^l}, h) \overline{(\chi, h)} \right|^2 d\nu(\chi) = \sum_{h \in H_0} |c_h(\overline{r_0^l}, h)|^2 = \sum_{h \in H_0} |c_h|^2. \end{aligned}$$

Соединяя полученные соотношения, имеем оценку

$$\int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \leq BB_0 \sum_{h \in H_0} |c_h|^2$$

и, аналогично, оценку

$$\int_G \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \geq AA_0 \sum_{h \in H_0} |c_h|^2.$$

Тем самым доказано, что система сдвигов $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ является системой Рисса.

4) Покажем, что любая функция $f \in W_0$ может быть представлена в виде сходящегося ряда по системе $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{1, p-1}$. Поскольку при каждом $l = \overline{1, p-1}$ подпространства $\text{span}(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ ортогональны, достаточно доказать, что любая функция $f \in V_1$ есть сумма ряда по системе $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{0, p-1}$. Пусть $f \in V_1$ и

$$f = \sum_{h \in H_0} a_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |a_h|^2 < +\infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{f}(\chi) &= \sum_{h \in H_0} a_h \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} = \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \sum_{h \in H_0} a_h \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} \\ &= \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) Q(\chi), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $Q(\chi) = \sum_{h \in H_0} a_h \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} \in L_2(G_1^\perp)$. Верно и обратное: если f задана равенством (4.6), в котором $Q(\chi) = \sum_{h \in H_0} a_h \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} \in L_2(G_1^\perp)$, то $f \in L_2(G)$ и

$$f = \sum_{h \in H_0} a_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$

Покажем, что $f \in V_1$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)} \psi_l(x \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |b_h^{(l)}|^2 < +\infty.$$

Поскольку $f(x) = \sum_{h \in H_0} a_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, с учетом (4.6) имеем

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \mathbf{1}_{G_1^\perp}(\chi) Q(\chi) = \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) \frac{\sum_{l=0}^{p-1} |m_l(\chi)|^2}{M(\chi)} Q(\chi),$$

где $M(\chi) = \sum_{l=0}^{p-1} |m_l(\chi)|^2$. Отсюда с учетом (4.5) находим

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{p} \frac{Q(\chi)}{M(\chi)} \sum_{l=0}^{p-1} \overline{m_l(\chi)} m_l(\chi) \widehat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{p} \frac{Q(\chi)}{M(\chi)} \overline{m_l(\chi)} \widehat{\psi}_l(\chi).$$

Поскольку $\lim A_n = \lim B_n = 1$, при $\chi \in G_1^\perp$ имеем

$$0 < \inf A_n \leq |M(\chi)|^2 \leq \sup B_n < +\infty.$$

Поэтому $\frac{1}{p} \frac{Q(\chi)}{M(\chi)} \in L_2(G_1^\perp) \subset L_2(G_0^\perp)$, и так как маска $m_0(\chi)$ ограничена на $G_0^\perp$, то $\frac{1}{p} \frac{Q(\chi)}{M(\chi)} \overline{m_0(\chi)} \in L_2(G_0^\perp)$. Система элементов $(h)_{h \in H_0}$ есть ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp)$, и, значит,

$$\frac{1}{p} Q(\chi) \frac{\overline{m_0(\chi)}}{M(\chi)} = \sum_{h \in H_0} b_h^{(0)} \overline{(\chi, h)}, \quad \sum_{h \in H_0} |b_h^{(0)}|^2 < +\infty.$$

Это означает, что функция $\frac{1}{p} Q(\chi) \frac{\overline{m_0(\chi)}}{M(\chi)} \widehat{\varphi}(\chi)$ есть преобразование Фурье функции

$$f_0(x) = \sum_{h \in H_0} b_h^{(0)} \varphi(x \dot{-} h).$$

При $l = \overline{1, p-1}$ рассмотрим функции

$$\frac{1}{p} Q(\chi) \frac{\overline{m_l(\chi)}}{M(\chi)} \widehat{\psi}_l(\chi).$$

Поскольку $Q(\chi) \in L_2(G_1^\perp)$, $m_l(\chi) = 0$ на $G_1^\perp \setminus G_0^\perp r_0^l$, маска $m_l(\chi)$ ограничена на $G_0^\perp r_0^l$, то

$$\frac{1}{p} Q(\chi) \frac{\overline{m_l(\chi)}}{M(\chi)} \in L_2(G_0^\perp r_0^l), \quad \frac{1}{p} \overline{Q(\chi)} \frac{m_l(\chi)}{M(\chi)} \in L_2(G_0^\perp r_0^l).$$

Элементы $h \in H_0$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(G_0^\perp)$, поэтому элементы $h(\chi r_0^{-l})$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(G_0^\perp r_0^l)$. Это означает, что при каждом $l = \overline{1, p-1}$:

$$\text{i) } \frac{1}{p} \overline{Q(\chi)} \frac{m_l(\chi)}{M(\chi)} = \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)}(r_0^l, h) (\chi r_0^{-l}, h), \quad \sum_{h \in H_0} |b_h^{(l)}(r_0^l, h)|^2 < +\infty,$$

$$\text{ii) } f_l(x) = \sum_{h \in H_0} b_h^{(l)} \psi_l(x \dot{-} h) \in L_2(G),$$

$$\text{iii) } \hat{f}_l(\chi) = \widehat{\psi}_l(\chi) \frac{1}{p} Q(\chi) \frac{\overline{m_l(\chi)}}{M(\chi)},$$

и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что W_0 можно представить в виде $W_0 = \bigoplus_{l=1}^{p-1} W_{0,l}$, так что при каждом l функции $(\psi_l(x \cdot h))_{h \in H_0}$ образуют базис Рисса в $W_{0,l}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Имеем $L_2(G) = \bigoplus W_{n,l}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $l = \overline{1, p-1}$), и при каждом $n \in \mathbb{Z}$ и каждом $l = \overline{1, p-1}$ функции $\psi_l(\mathcal{A}^n x \cdot h)p^{\frac{n}{2}}$ образуют базис Рисса в $W_{n,l}$.

§ 5. Построение базисов Рисса на группах Виленкина

В этом параграфе мы укажем алгоритм построения на группе Виленкина масштабирующей функции $\varphi(x)$, для которой $E = \text{supp } \widehat{\varphi}(\chi)$ есть $(1, M)$ -элементарное множество и $A \leq |\widehat{\varphi}(\chi)| \leq B$ на E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\tilde{E} = \bigsqcup_{\alpha_{-1}, \alpha_0} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \subset \mathfrak{G}_1^\perp$ есть $(1, 1)$ -элементарное множество. Будем говорить, что $\tilde{E}_X$ — периодическое продолжение множества $\tilde{E}$, если

$$\tilde{E}_X = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcap_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=0}^{p-1} \tilde{E} r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s},$$

и что $\tilde{E}$ порождает $(1, M)$ -элементарное множество E , если $\bigcap_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n = E$.

Поскольку $\tilde{E}_X \supset \mathfrak{G}_{-N}^\perp$, то $\bigcap_{n=0}^{M+1} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n = E$ и $(\bigcap_{n=0}^{M+1} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n) \cap (\mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp) = \emptyset$. Верно и обратное. В самом деле,

$$\left(\bigcap_{n=0}^{M+1} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n \right) \cap (\mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp) = \emptyset.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{n=0}^{M+2} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n \right) \cap (\mathfrak{G}_{M+2}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{M+1}^\perp) &= \tilde{E}_X \cap \left(\bigcap_{n=0}^{M+1} \tilde{E}_X \mathcal{A}^n \cap (\mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp) \right) \mathcal{A} \\ &= \tilde{E}_X \cap \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Мы будем исходить из произвольного дерева T , построенного следующим образом. Обозначим $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$ и запишем его в виде $V = \{0, u_1, u_2, \dots, u_q, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{p-q-1}}\}$, где $u_j \neq \alpha_{i_k}$ и $q \leq p-2$. Через

$$T(V) = T(0, u_1, u_2, \dots, u_q, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{p-q-1}})$$

обозначим дерево на множестве вершин V , в котором 0 есть корень, $u_1, u_2, \dots, u_q$ — вершины первого уровня. Например, при $p = 7$, $q = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ будем получать деревья, два из которых приведены на рис. 1, 2.

Выберем произвольный путь $P_j = (0, u_j, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$, в котором α_{-1} не обязательно лист. По этому пути построим совокупность смежных классов

$$\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{u_j}, \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{s-1}} r_0^{u_j}, \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{s-2}} r_0^{\alpha_{s-1}}, \dots, \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_1}, \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}. \quad (5.1)$$

Рис. 1

Например, для дерева на рис. 2 путь $(0, 3, 2)$ порождает смежные классы $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^3$, $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^2, r_0^3$. Через E_j обозначим объединение всех смежных классов (5.1) при фиксированном j , и пусть

$$\tilde{E} = \left(\bigsqcup_{j=1}^q E_j \right) \sqcup \mathfrak{G}_{-1}^\perp. \quad (5.2)$$

Ясно, что $\tilde{E}$ есть $(1, 1)$ -элементарное множество и $\tilde{E} \subset \mathfrak{G}_1^\perp$.

Рис. 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\tilde{E}_X$ – периодическое расширение множества $\tilde{E}$, т. е.

$$\tilde{E}_X = \bigcup_s \bigcup_{(a_1, \dots, a_s)} \tilde{E} r_1^{a_1} r_2^{a_2} \dots r_s^{a_s}. \quad (5.3)$$

Скажем, что дерево $T(V)$ порождает множество E , если $E = \bigcap_{n=0}^\infty \tilde{E}_X \mathcal{A}^n$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $T(V)$ – корневое дерево с нулем в качестве корня. Пусть множество $E \subset X$ порождено деревом $T(V)$, H – высота дерева $T(V)$. Тогда E – $(1, H - 2)$ -элементарное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$m(\chi) = \mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi), \quad M(\chi) = \prod_{n=0}^\infty m(\chi \mathcal{A}^{-n}).$$

Тогда $M(\chi) = \mathbf{1}_E(\chi)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_E(\chi) = 1 &\iff \chi \in E \iff \forall n \ \chi \mathcal{A}^{-n} \in \tilde{E}_X \iff \forall n \ \mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi \mathcal{A}^{-n}) = 1 \\ &\iff \forall n \ m(\chi \mathcal{A}^{-n}) = 1 \iff \prod_{n=0}^\infty m(\chi \mathcal{A}^{-n}) = 1 \iff M(\chi) = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $M(\chi) = \mathbf{1}_E(\chi)$.

Докажем теперь, что $1_E(\chi) = 0$ для $\chi \in \mathfrak{G}_{H-1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{H-2}^\perp$. Поскольку $\tilde{E}_X \supset \mathfrak{G}_{-1}^\perp$, то $1_{\tilde{E}_X}(\mathfrak{G}_{H-1}^\perp \mathcal{A}^{-H}) = 1_{\tilde{E}_X}(\mathfrak{G}_{-1}^\perp) = 1$. Следовательно,

$$\prod_{n=0}^{\infty} 1_{\tilde{E}_X}(\chi \mathcal{A}^{-n}) = \prod_{n=0}^{H-1} 1_{\tilde{E}_X}(\chi \mathcal{A}^{-n})$$

при $\chi \in \mathfrak{G}_{H-1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{H-2}^\perp$. Обозначим $m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^k) = \lambda_{i+kp}$. По определению смежных классов (5.1) имеем $m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^k) \neq 0$ тогда и только тогда, когда пара (k, i) – ребро дерева $T(V)$.

Нам нужно доказать, что

$$1_E(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{H-2}^{\alpha_{H-2}}) = 0$$

при $\alpha_{H-1} \neq 0$. Поскольку $\tilde{E}_X$ – периодическое продолжение множества $\tilde{E}$, то функция $m(\chi) = 1_{\tilde{E}_X}(\chi)$ периодична с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}$, $s \in \mathbb{N}$, т.е. $m(\chi r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}) = m(\chi)$ при $\chi \in \mathfrak{G}_1^\perp$. Используя этот факт, мы можем записать $M(\chi)$ при $\chi \in \mathfrak{G}_{\alpha_{H-1}}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{\alpha_{H-2}}^\perp$ в виде

$$\begin{aligned} M(G_{-1}^\perp \zeta) &= M(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{H-2}^{\alpha_{H-2}}) \\ &= m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_1}) \dots m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{H-3}} r_0^{\alpha_{H-2}}) m(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{H-2}}) \\ &= \lambda_{\alpha_{-1}+p\alpha_0} \lambda_{\alpha_0+p\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}} \lambda_{\alpha_{H-2}}, \quad \alpha_{H-2} \neq 0. \end{aligned}$$

Если $\lambda_{\alpha_{H-2}} = 0$, то $M(\mathfrak{G}_{-1}^\perp \zeta) = 0$. Пусть $\lambda_{\alpha_{H-2}} \neq 0$. Это означает, что $\alpha_{H-2} = u_j$ для некоторого $j = \overline{1, q}$. Если $\lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}} = 0$, то $M(\mathfrak{G}_{-1}^\perp \zeta) = 0$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}} \neq 0$. Это верно тогда и только тогда, когда пара $(\alpha_{H-2}, \alpha_{H-3})$ образует ребро графа $T(V)$. Повторяя эти рассуждения, мы получаем путь $(0, u_j = \alpha_{H-2}, \alpha_{H-3}, \dots, \alpha_s)$ дерева $T(V)$. Поскольку $\text{height}(T) = H$, то $s \geq 0$. Следовательно, (α_s, α_{s-1}) не будет ребром, и $\lambda_{\alpha_{s-1}+p\alpha_s} = 0$ при $s \geq 0$. Это означает, что $M(\mathfrak{G}_{-1}^\perp \zeta) = 0$.

Докажем теперь, что $E - (1, H-2)$ -элементарное множество. В самом деле, из равенства $M(\chi) = 1_E(\chi)$ следует, что любой путь $(0, u_j = \alpha_{s-1}, \alpha_{s-2}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ определяет смежный класс $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \subset E$. Однако для любого $\alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$ существует единственный путь с конечной точкой α_{-1} и начальной точкой в нуле. Это и означает, что $E - (1, H-2)$ -элементарное множество. Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве теоремы 5.1 фактически была доказана

ТЕОРЕМА 5.2 (о структуре множества E). Пусть $T = T(V)$ – корневое дерево с корнем в нуле, H – высота дерева, E порождено деревом $T(V)$. Тогда E – дизъюнктное объединение смежных классов:

$$E = \bigcup_{\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_s} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_s^{\alpha_s}, \quad s \in \{-1, 0, \dots, H-2\},$$

где объединение берется по всевозможным путям $(0, \alpha_s = u_j, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ дерева $T(V)$ с начальной точкой в корне и конечной точкой в узле $\alpha_{-1} \in T(V)$.

Теперь мы можем указать алгоритм построения функции φ , порождающей КМА Рисса.

Пусть $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$, $T(V)$ – корневое дерево с нулем в качестве корня, $\text{height}(T(V)) = H$. Пусть $\tilde{E}$ определено равенством (5.2) и множество E порождено деревом $T(V)$. Используя смежные классы (5.1), определим маску $m_0(\chi)$ на подгруппе $\mathfrak{G}_1^\perp$ так, чтобы:

- 1) $m_0(1) = 1$;
- 2) $|m_0(\chi) - 1| \leq \gamma_n$ на множестве $\mathfrak{G}_{-n}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-n-1}^\perp$ и $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n < +\infty$;
- 3) $0 < A_{i,j} \leq |m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j)|^2 \leq B_{i,j}$, когда $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j \subset \tilde{E}$;
- 4) $m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j) = 0$ в случае $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j \subset \mathfrak{G}_1^\perp \setminus \tilde{E}$.

Продолжим $m_0(\chi)$ на $X \setminus \mathfrak{G}_1^\perp$ периодически, т. е. $m_0(\chi r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}) = m_0(\chi)$, и определим функцию $\varphi(x)$ равенством $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^\infty m_0(\chi \mathcal{A}^{-n})$. Согласно лемме 4.4 произведение сходится.

ТЕОРЕМА 5.3. *Для функции φ справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) \subset \mathfrak{G}_{H-2}^\perp$;
- 2) $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) = E$ есть $(1, H-2)$ -элементарное множество;
- 3) система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть система Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5.1 имеем $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) \subset \mathfrak{G}_{H-2}^\perp$ и, кроме того, $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) = E$, причем E – $(1, H-2)$ -элементарное множество. По лемме 4.3 существуют постоянные $A, B > 0$ такие, что для любого $\chi \in E$

$$A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B,$$

и по лемме 3.2 система сдвигов является системой Рисса.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Функция φ , построенная по графу $T(V)$, порождает КМА Рисса.*

По построенным функциям $m_0(\chi)$ и $\hat{\varphi}(\chi)$ всплесковый базис Рисса строится по той же схеме, что и в § 4. Коэффициенты β_h масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$$

находим из разложения

$$m_0 = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)}$$

по формулам

$$\beta_h = \int_{\mathfrak{G}_1^\perp} m_0(\chi) (\chi \mathcal{A}^{-1}, h) d\nu(\chi).$$

По маске $m_0(\chi)$ определяем функции

$$m_l(\chi) = m_0(\chi r_0^{-l}) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)},$$

где $\beta_h^{(l)} = \beta_h \overline{(r_0^{-l}, \mathcal{A}^{-1}h)}$.

ЛЕММА 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $m_l(\tilde{E}_X r_0^l) \neq 0$, $l = \overline{1, p-1}$;
- 2) $m_l(\tilde{E}_X r_0^\nu) = 0$ при $l \neq \nu$;
- 3) $m_l(E) = 0$ при $l \neq 0$;
- 4) $m_l(\chi)m_k(\chi) = 0$, если $k \neq l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению m_l имеем

$$|m_l(\tilde{E}_X r_0^l)| = |m_0(\tilde{E}_X r_0^{-l} r_0^l)| = |m_0(\tilde{E}_X)| \neq 0.$$

2) Если $\nu \neq l$, то

$$m_l(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha-1} r_0^{\alpha_0} r_0^\nu) = m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha-1} r_0^{\alpha_0} r_0^{\nu-l}) = 0,$$

так как для одного узла α_{-1} не существует двух различных путей к корню.

3) Равенство $m_l(E) = 0$ очевидно, так как $E \subset \tilde{E}_X$.

4) Равенство $m_l(\chi)m_k(\chi) = 0$ выполняется, так как $\tilde{E}r_0^l \cap \tilde{E}r_0^k = \emptyset$.

Аналогично теореме 4.1 доказывается

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть маска m_0 построена по дереву $T(V)$, функции ψ_l определены равенствами*

$$\psi_l(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h^{(l)} \varphi(Ax \dot{-} h), \quad l = \overline{1, p-1}.$$

Тогда функции $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{1, p-1}$, образуют базис Рисса в W_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1. Необходимо:

- 1) проверить, что $(\varphi(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$;
- 2) проверить, что $(\psi_k(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$, если $k \neq l$;
- 3) доказать, что система $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ при каждом $l = \overline{1, p-1}$ образует систему Рисса;
- 4) доказать, что любая функция $f \in W_0$ может быть представлена в виде сходящегося ряда по системе $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{1, p-1}$.

Доказательства пп. 1), 2) мало отличаются от доказательств соответствующих пунктов теоремы 4.1. При их доказательстве необходимо использовать лемму 5.1 и учесть, что $\text{supp } \hat{\varphi}(\chi) = E$, $0 < A \leq |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \leq B$ п. в. на E , а не на $\mathfrak{G}_0^\perp$.

Доказательство п. 4) полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения в теореме 4.1, за исключением двух моментов. Во-первых, $m_l(\chi) \neq 0$ на множестве $\tilde{E}r_0^l$, и $\bigsqcup_{l=0}^{p-1} \tilde{E}r_0^l = \mathfrak{G}_1^\perp$. Во-вторых, нужно использовать тот факт, что H_0 есть полная ортонормированная система на $(1, 1)$ -элементарном множестве $\tilde{E}$ (а не на $\mathfrak{G}_0^\perp$, как в теореме 4.1).

Доказательство п. 3) существенно отличается, и мы его приведем. Как и в теореме 4.1, имеем неравенства

$$\int_{\mathfrak{G}} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \leq B \int_{EA} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi), \quad (5.4)$$

$$\int_{\mathfrak{G}} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \psi_l(x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) \geq A \int_{EA} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi). \quad (5.5)$$

Для оценки интеграла в правых частях неравенств (5.4), (5.5) имеем

$$\int_{EA} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_l(\chi)|^2 d\nu(\chi) = \int_{EA \cap X_0 r_0^l} \left| \sum_{h \in H_0} c_h \overline{(\chi, h)} \right|^2 |m_0(\chi r_0^{-l})|^2 d\nu(\chi).$$

Покажем, что $EA \cap X_0 r_0^l - (1, H-1)$ -элементарное множество. По определению имеем

$$E = \bigsqcup_{(0, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1}) \in T(V)} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_s^{\alpha_s} r_{s+1}^0, \quad s \leq H-3, \quad (5.6)$$

где объединение берется по всем путям $(0, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ дерева $T(V)$. Это означает, что для любого $\alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$ объединение (5.6) содержит единственный смежный класс $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_s^{\alpha_s} r_{s+1}^0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} EA &= \bigsqcup_{(0, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1}) \in T(V)} \mathfrak{G}_0^\perp r_0^{\alpha_{-1}} r_1^{\alpha_0} \dots r_{s+1}^{\alpha_s} r_{s+2}^0 \\ &= \bigsqcup_{\alpha_{-2}=0}^{p-1} \bigsqcup_{(0, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1}) \in T(V)} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-2}} r_0^{\alpha_{-1}} \dots r_{s+1}^{\alpha_s} r_{s+2}^0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$X_0 r_0^l = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{(\gamma_{-1}, \gamma_0) \in T(V)} \bigsqcup_{b_1, b_2, \dots, b_j=0}^{p-1} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\gamma_{-1}} r_0^{\gamma_0+l} r_1^{b_1} \dots r_j^{b_j}.$$

Поэтому

$$EA \cap X_0 r_0^l = \bigsqcup_{\gamma_{-1}=0}^{p-1} \bigsqcup_{(0, \alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_{-1}=\gamma_0+l, \gamma_{-1}) \in T(V)} \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\gamma_{-1}} r_0^{\gamma_{-1}} r_1^{\alpha_0} \dots r_{s+1}^{\alpha_s} r_{s+2}^0.$$

Это означает, что $EA \cap X_0 r_0^l - (1, H-1)$ -элементарное множество. Поскольку $A_0 = \min A_{i,j} \leq |m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j)|^2 \leq B_0 = \max B_{i,j}$ на множестве $\tilde{E}$, по лемме 3.2 в силу (5.4), (5.5) система сдвигов $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$, $l = \overline{1, p-1}$, образует систему Рисса. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из теоремы 5.4 следует, что W_0 можно представить в виде $W_0 = \bigoplus_{l=1}^{p-1} W_{0,l}$ так, что при каждом l функции $(\psi_l(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют базис Рисса в $W_{0,l}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Имеем $L_2(G) = \bigoplus W_{n,l}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $l = \overline{1, p-1}$), и при каждом $n \in \mathbb{Z}$ и каждом $l = \overline{1, p-1}$ функции $(p^{\frac{n}{2}} \psi_l(A^n x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ образуют базис Рисса в $W_{n,l}$.

ПРИМЕР 5.1. Пусть $p = 3$. Возможны два дерева $T_1(V): 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ и $T_2(V): 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Рассмотрим дерево $T_2(V)$. Соответствующее множество $E = \mathfrak{G}_{-1}^\perp \sqcup \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^2 \sqcup \mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^2$ есть $(1, 1)$ -элементарное множество. Строим функцию $\widehat{\varphi}(\chi)$, удовлетворяющую условиям теоремы 5.2. Выберем последовательность $(\gamma_k)_{k=-1}^\infty$ следующим образом: $\gamma_{-1} = \gamma_0 = \gamma_1 = 1$, $\gamma_k = 1 - \frac{1}{k^2}$ при $k \geq 2$. Определяем m_0 на $\mathfrak{G}_1^\perp$ равенствами

$$m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^2) = \gamma_{-1}, \quad m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^2) = \gamma_0, \quad m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-2}^\perp) = \gamma_1, \\ m_0(\mathfrak{G}_{-k}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-(k+1)}^\perp) = \gamma_k, \quad m_0(\mathfrak{G}_1^\perp \setminus E) = 0.$$

Продолжаем маску $m_0(\chi)$ периодически с $\mathfrak{G}_1^\perp$ на всю группу X . Вычисляем $\widehat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^\infty m_0(\chi \mathcal{A}^{-k})$. Имеем

$$\widehat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^2) = \prod_{j=-1}^\infty \gamma_j = \prod_{j=2}^\infty \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \eta_{-1} = \frac{1}{2}, \\ \widehat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^2) = \prod_{j=0}^\infty \gamma_j = \eta_0 = \frac{1}{2}, \quad \widehat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-2}^\perp) = \prod_{j=1}^\infty \gamma_j = \eta_1 = \frac{1}{2}, \\ \widehat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-k}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-(k+1)}^\perp) = \prod_{j=k}^\infty \gamma_j = \eta_k = \frac{k-1}{k} \quad \text{при } k \geq 2.$$

Находим функцию

$$\varphi(x) = \int_X \widehat{\varphi}(\chi)(\chi, x) d\nu(\chi) = \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathfrak{G}_{-k}^\perp \setminus \mathfrak{G}_{-(k+1)}^\perp} \eta_k(\chi, x) d\nu(\chi) \\ + \int_{\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^2} \eta_0(\chi, x) d\nu(\chi) + \int_{\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^1 r_0^2} \eta_{-1}(\chi, x) d\nu(\chi).$$

Вычисляем интегралы из правой части последнего соотношения, используя равенства из [14]:

$$\int_{\mathfrak{G}_n^\perp r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n (r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, x) \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_n}(x).$$

В результате находим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{p}(r_{-1}^2, x) + \frac{\eta_{-1}}{p}(r_{-1}^1 r_0^2, x) + \frac{\eta_1}{p} + \sum_{k=2}^\infty \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{p^k}, & x \in \mathfrak{G}_{-1}, \\ \sum_{k=n}^\infty \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{p^k} = \zeta_n, & x \in \mathfrak{G}_{-n} \setminus \mathfrak{G}_{-n+1}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Масштабирующую функцию можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{p} (\eta_0 H_{\frac{2}{p}}(x) + \eta_{-1} H_{\frac{1}{p}}(x)(r_0^2, x) + \eta_1 \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-1}}(x)) + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{p^k} (\eta_k - \eta_{k-1}) \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-k}}(x),$$

где

$$H_{jp^k+l}(x) = r_k^j(x \dot{-} q) \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_k}(x \dot{-} q), \quad j = \overline{1, p-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

– функции Хаара, нормированные в C . Вейвлеты $\psi_l(x)$, $l = \overline{1, p-1}$, согласно

теореме 5.4 задаются формулами

$$\psi_l(x) = \sum_{h \in H_0} (r_0^l, \mathcal{A}^{-1}h) \beta_h \varphi(\mathcal{A}x - h),$$

коэффициенты β_h могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_h = \frac{1}{p} (H_{2, \frac{1}{p}}(\mathcal{A}^{-1}h) + H_{\frac{1}{p}}(\mathcal{A}^{-1}h)(r_0, \mathcal{A}^{-1}h) + \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-1}}(\mathcal{A}^{-1}h)) \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{p^k} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-k}}(\mathcal{A}^{-1}h). \end{aligned}$$

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить статью.

Список литературы

1. W. C. Lang, “Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group”, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:1 (1996), 305–312.
2. W. C. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.
3. W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.
4. С. В. Козырев, “Теория всплесков как p -адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “Wavelet theory as p -adic spectral analysis”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 367–376.
5. С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “ p -adic pseudodifferential operators and p -adic wavelets”, *Theoret. and Math. Phys.*, **138**:3 (2004), 322–332.
6. В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160; англ. пер.: V. Yu. Protasov, Yu. A. Farkov, “Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1529–1558.
7. В. Ю. Протасов, “Аппроксимация диадическими всплесками”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 135–152; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by dyadic wavelets”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1665–1681.
8. Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, “Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 429–444; англ. пер.: E. A. Rodionov, Yu. A. Farkov, “Estimates of the smoothness of dyadic orthogonal wavelets of Daubechies type”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 407–421.
9. Yu. A. Farkov, “Examples of frames on the Cantor dyadic group”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **187**:1 (2012), 22–34.
10. Ю. А. Фарков, “Биортогональные всплески на группах Виленкина”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 110–124; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Biorthogonal wavelets on Vilenkin groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265**:1 (2009), 101–114.
11. Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 623–650.

12. Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups”, *Math. Notes*, **82**:6 (2007), 843–859.
13. Yu. A. Farkov, E. A. Rodionov, “Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **3**:3 (2011), 181–195.
14. S. F. Lukomskii, “Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **20**:1 (2014), 42–65.
15. S. F. Lukomskii, *Trees in wavelet analysis on Vilenkin groups*, 2013, arXiv: 1303.5635.
16. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. Skopina, “ p -adic refinable functions and MRA-based wavelets”, *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 226–238.
17. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -adic nonorthogonal wavelet bases”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 7–18; S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -adic nonorthogonal wavelet bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265**:1 (2009), 1–12.
18. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -adic multiresolution analysis and wavelet frames”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714.
19. С. Ф. Лукомский, “Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы”, *Матем. сб.*, **201**:5 (2010), 41–64; англ. пер.: S. F. Lukomskii, “Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases”, *Sb. Math.*, **201**:5 (2010), 669–691.
20. С. Ф. Лукомский, “Неортогональный кратномасштабный анализ на нульмерных локально компактных группах”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **3**(1) (2011), 25–32.
21. Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Элм, Баку, 1981, 180 с.
22. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, 2-е изд., испр. и доп., Изд-во ЛКИ, М., 2008, 352 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, xiv+368 pp.
23. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, 3-е изд., Наука, М., 1982, 288 с.; англ. пер. 2-го изд.: M. I. Kargapolov, Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Grad. Texts in Math., **62**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979, xvii+203 pp.
24. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005, 613 с.; англ. пер.: I. Ya. Novikov, V. Yu. Protasov, M. A. Skopina, *Wavelet theory*, Transl. Math. Monogr., **239**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xiv+506 pp.
25. M. Holschneider, *Wavelets. An analysis tool*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995, xiv+423 pp.
26. B. Behera, Q. Jahan, “Biorthogonal wavelets on local fields of positive characteristic”, *Commun. Math. Anal.*, **15**:2 (2013), 52–75.

СЕРГЕЙ ФЕДОРОВИЧ ЛУКОМСКИЙ
(SERGEI F. LUKOMSKII)

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
24.10.2013