Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 83–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:52:48

УДК 517.984.64

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах

Построены наилучшие (оптимальные) методы восстановления производных функций из обобщенного соболевского класса функций на $\mathbb{R}^d$ при условии, что о каждой такой функции известно точно или приближенно ее преобразование Фурье на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^d$. В обоих случаях построены семейства оптимальных методов. В этих методах используется не весь объем информации о преобразовании Фурье, однако та часть, которая используется, подвергается некоторой фильтрации. Рассмотрена задача о нахождении наилучшего множества для восстановления данной производной среди всех множеств фиксированной меры.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, соболевский класс, экстремальная задача, преобразование Фурье.

DOI: 10.4213/im8182

§ 1. Постановки задач и формулировки результатов

Пусть d – натуральное число и F – преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то удобно считать, что функция $Fx(\cdot)$ определена на $\mathbb{R}^d$ с мерой Лебега, деленной на $(2\pi)^d$. Норму функции $y(\cdot)$ в пространстве суммируемых с квадратом функций на $\mathbb{R}^d$ с такой мерой обозначаем $\|y(\cdot)\|_{\hat{L}_2(\mathbb{R}^d)}$, т. е.

$$\|y(\cdot)\|_{\hat{L}_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |y(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Для каждого $r > 0$ обобщенное соболевское пространство (или пространство бесселевых потенциалов) $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ определяется как совокупность функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |(Fx)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Соответствующим обобщенным соболевским классом назовем множество

$$H_2^r(\mathbb{R}^d) = \{x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d) \mid \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}.$$

Если r – натуральное число, то функция $x(\cdot)$ (переменных $t_1, \dots, t_d$) принадлежит $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда все ее обобщенные производные

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-12447, № 14-01-00456).

$\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}x/\partial t_1^{\alpha_1}\dots\partial t_d^{\alpha_d}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq r$, принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае норма

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_d \leq r} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d} x(\cdot)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

эквивалентна норме в $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, если r натурально, то $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ – классическое соболевское пространство функций на $\mathbb{R}^d$.

Введем теперь определение дробной производной. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$, где $(i\xi_j)^{\alpha_j} = |\xi_j|^{\alpha_j} \times \exp\{\frac{1}{2}\pi i \operatorname{sign} \xi_j\}$, $j = 1, \dots, d$ ($\operatorname{sign} 0 = 0$, $0^0 = 1$), и $\mathcal{E}^\alpha$ – оператор умножения на функцию $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha$ в $\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Если функция $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что $(\mathcal{E}^\alpha \circ F)x(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$, то определена функция

$$D^\alpha x(\cdot) = (F^{-1} \circ \mathcal{E}^\alpha \circ F)x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где F^{-1} – обратное преобразования Фурье, которая называется α -й производной (по Вейлю) функции $x(\cdot)$. Ясно, что если $x(\cdot)$ – достаточно гладкая и быстро убывающая функция на $\mathbb{R}^d$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d} x(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}}.$$

Нас интересуют вопросы, которые на содержательном уровне формулируются следующим образом.

1. Пусть о каждой функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно (точно или приближенно) ее преобразование Фурье на некотором подмножестве в $\mathbb{R}^d$. Как по этой информации наилучшим образом восстановить $D^\alpha x(\cdot)$?

2. Пусть имеется возможность измерить (точно или приближенно) преобразование Фурье функций $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ на любом множестве, мера которого не превосходит некоторого числа $\sigma > 0$, т.е. имеется возможность измерить фиксированное “число гармоник”. Какие гармоники лучше всего взять для восстановления $D^\alpha x(\cdot)$?

Приведем точные постановки задач 1, 2. Пусть A – произвольное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$ и для каждой функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на A либо точно, либо с точностью до $\delta > 0$ в метрике $\widehat{L}_2(A)$, т.е. известна функция $y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A)$ такая, что $\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta$. По этой информации мы хотим восстановить $D^\alpha x(\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$. Понимается это следующим образом.

Пусть $I^\delta(A): H_2^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow \widehat{L}_2(A)$ – отображение, ставящее в соответствие функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ множество $I^\delta(A)x(\cdot) = \{y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A) \mid \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta\}$ ($I^0(A)$ – обычное отображение, которое ставит в соответствие функции $x(\cdot)$ функцию $Fx(\cdot)|_A$ – сужение $Fx(\cdot)$ на A). Обозначим через $\operatorname{Im} I^\delta(A)$ образ этого отображения.

Всякий метод восстановления должен по функции (наблюдению) $y(\cdot) \in \operatorname{Im} I^\delta(A)$ указать функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая является приближением к α -й производной функции из $H_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, всякий метод есть некоторое отображение $\varphi: \operatorname{Im} I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью этого метода назовем

величину

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ y(\cdot) \in I^\delta(A)}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

При $\delta = 0$ последнее равенство можно записать короче:

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi) = \sup_{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(Fx(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересуют величина

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \inf_{\varphi} e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi: \text{Im } I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\hat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \hat{\varphi}).$$

Такие методы $\hat{\varphi}$ будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Вопрос о нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов восстановления и составляет точную постановку вопроса 1.

Пусть теперь $\sigma > 0$ и $\mathcal{A}_\sigma$ – совокупность всех измеримых подмножеств в $\mathbb{R}^d$, мера Лебега которых не больше σ . Нас будут интересовать также величина

$$E_\sigma(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma} E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \quad (1)$$

и те множества, на которых нижняя грань достигается и которые мы называем *оптимальными множествами*.

Задача о нахождении величины (1) и оптимальных множеств есть точная постановка вопроса 2.

Первоначальные идеи, связанные с данными постановками, принадлежат А. Н. Колмогорову, который в работе [1] ввел понятие поперечника – величины, характеризующей наилучшее приближение класса функций подпространствами фиксированной размерности. Затем в 1950-е годы стали изучать наилучшие квадратуры на классах функций (первые исследования принадлежат А. Сарду [2] и С. М. Никольскому [3]). С. А. Смоляк в 1965 г. поставил [4] общую задачу об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов по неточной информации о самих элементах и доказал, что если класс – выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов существует линейный. Впоследствии была поставлена более общая задача о восстановлении линейных операторов и тематика оптимального восстановления получила достаточно интенсивное развитие. Определенное представление об этом можно получить из обзоров и монографий [5]–[11]. В работах [12]–[17] изучались задачи оптимального восстановления, близкие к тем, которые рассматриваются в настоящей статье. Отдельно отметим работу авторов [18], в которой исследуется та же задача, что и в данной статье, но множество A является пространством $\mathbb{R}^d$.

Перед формулировкой основных утверждений приведем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \alpha^\alpha = \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\alpha_j}, \quad |\xi|^\alpha = \prod_{j=1}^d |\xi_j|^{\alpha_j}.$$

Пусть $0 < \bar{\alpha} < r$. Рассмотрим функцию $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, определенную формулой

$$f(\xi) = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Эта функция, очевидно, ограничена и стремится к нулю при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Несложный подсчет показывает, что ее максимальным значением является

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha^\alpha (r - \bar{\alpha})^{r - \bar{\alpha}}}{r^r}$$

и оно достигается только в точках

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{r - \bar{\alpha}}}, \dots, \pm \sqrt{\frac{\alpha_d}{r - \bar{\alpha}}} \right).$$

Обозначим

$$\hat{\delta} = \left(\frac{r - \bar{\alpha}}{r} \right)^{r/2}$$

и на полупрямой $[0, \infty]$ рассмотрим функцию h , определенную формулой

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\alpha}{r \bar{\alpha}^{\bar{\alpha}-1}} (1 - t^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} t^{2(1-\bar{\alpha}/r)}, & 0 \leq t \leq \hat{\delta}, \\ \hat{\lambda}, & t \geq \hat{\delta}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $h(t)$ строго монотонно возрастает на отрезке $[0, \hat{\delta}]$, $h(0) = 0$ и $h(\hat{\delta}) = \hat{\lambda}$.

Определим для каждого $\lambda \geq 0$ множество

$$\Omega_\lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid f(\xi) \geq \lambda\}$$

и поставим в соответствие любому измеримому подмножеству A в $\mathbb{R}^d$ число

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda > 0 \mid \text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) = \text{mes } \Omega_\lambda\}.$$

Равенство $\text{mes}(A \cap \Omega_{\hat{\lambda}}) = \text{mes } \Omega_{\hat{\lambda}}$ очевидным образом выполняется, поскольку $\text{mes } \Omega_{\hat{\lambda}} = 0$, а если A совпадает п. в. с $\mathbb{R}^d$, то $\lambda(A) = 0$. Таким образом, $0 \leq \lambda(A) \leq \hat{\lambda}$.

Если $\delta = 0$ и $\lambda(A) = 0$, то мы располагаем полной информацией о функции и задача восстановления становится очевидной. По этой причине случай $\delta + \lambda(A) = 0$ далее исключен из рассмотрения.

Для каждого $\delta \geq 0$ и каждого измеримого подмножества A в $\mathbb{R}^d$ таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$, положим

$$\Delta = \Delta(\delta, A) = \begin{cases} \delta, & 0 < \delta < \hat{\delta}, \quad \lambda(A) \leq h(\delta), \\ h^{-1}(\lambda(A)), & 0 \leq \delta < \hat{\delta}, \quad \lambda(A) > h(\delta), \\ \hat{\delta}, & \delta \geq \hat{\delta}, \end{cases}$$

и определим числа

$$\lambda_1 = \lambda_1(\delta, A) = \frac{r}{\bar{\alpha}\Delta^2}(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r})h(\Delta), \quad \lambda_2 = \lambda_2(\delta, A) = h(\Delta).$$

Заметим, что $h(\Delta) = \max\{\lambda(A), h(\delta)\}$.

Наконец, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $0 < \bar{\alpha} < r$, $\delta \geq 0$, A — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$ и $\delta + \lambda(A) \neq 0$. Тогда $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ и справедливо равенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2}(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}) + 1\right)h(\Delta)}. \quad (2)$$

Если $\delta = 0$, то для каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что для п. в. $\xi \in A$

$$|a(\xi) - 1| \leq \sqrt{\lambda(A)} \frac{(1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha}, \quad (3)$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, действующий для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$ по правилу

$$\widehat{\varphi}_a(Fx(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

является оптимальным.

Если $\delta > 0$, то для каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что для п. в. $\xi \in A$

$$\begin{aligned} & \left| a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha(\lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r)} \sqrt{-|\xi|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r}, \end{aligned} \quad (4)$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, действующий для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$ по правилу

$$\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) y(\xi) e^{i\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

является оптимальным.

Приведем комментарии к теореме 1.

1. Если $\delta = 0$, то из выражения (2) для оптимальной погрешности восстановления следует, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) = \sqrt{\lambda(A)},$$

т.е. преобразование Фурье функций из $H_2^r(\mathbb{R}^d)$ достаточно знать только на множестве $A' \subset A$ (включение понимается с точностью до множества меры нуль), для которого $\lambda(A') = \lambda(A)$. Минимальным среди таких множеств является $\Omega_{\lambda(A)}$.

Оптимальный метод представляет собой α -ю производную функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A есть функция $Fx(\cdot)$, “сглаженная” с помощью функции $a(\cdot)$. В силу (3) функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $\widehat{L}_2(A)$, и если она принадлежит еще и $L_1(A)$ (например, мера A

конечна), то выражение для оптимального метода есть формула обращения преобразования Фурье, а если не принадлежит, то интеграл в выражении для оптимального метода при каждом $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

На множестве $A \setminus \Omega_{\lambda(A)}$ функция $f(\cdot)$ не превосходит $\lambda(A)$. Поэтому согласно (3) на этом множестве можно положить $a(\cdot) = 0$, а значит, достаточно брать интеграл только по множеству $\Omega_{\lambda(A)}$.

Если положить $a(\cdot) = 1$ на A , то формула (3) тривиальным образом выполняется, т. е. наблюдаемое преобразование Фурье можно совсем не сглаживать.

Наконец, если $\lambda(A) = \hat{\lambda}$, то $f(\xi) \leq \hat{\lambda}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Неравенство (3) выполняется при $a(\cdot) = 0$ на A , и поэтому в данном случае нулевой метод является оптимальным.

Суммируя изложенное, можно утверждать, что наиболее “разумным” является следующий оптимальный метод:

$$\widehat{\varphi}(F_x(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{\lambda(A)}} (i\xi)^\alpha F_x(\xi) e^{(\xi, t)} d\xi,$$

так как он использует минимальный объем информации о преобразовании Фурье и не требует его обработки (кроме того, в случае $\lambda(A) = \hat{\lambda}$ интеграл берется по множеству меры нуль и тем самым $\widehat{\varphi} = 0$).

2. Если $\delta > 0$, то непосредственные (но довольно рутинные) вычисления показывают, что погрешность оптимального восстановления как функция от $\lambda(A)$ убывает при убывании $\lambda(A)$ от $\hat{\lambda}$ до $h(\delta)$, а затем (что уже легко следует из определения Δ) стабилизируется на уровне

$$\sqrt{\left(\frac{r}{\bar{\alpha}}(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1\right) h(\delta)}.$$

Таким образом, информация о преобразовании Фурье за пределами множества, для которого $\lambda(A) \leq h(\delta)$, оказывается лишней. Минимальным из таких множеств является множество $\Omega_{h(\delta)}$.

В теореме 1 представлено семейство оптимальных методов, каждый из которых есть α -я производная функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A является функцией $y(\cdot)$, “сглаженной” с помощью функции $a(\cdot)$.

На множестве $A \setminus \Omega_{h(\Delta)}$ (напомним, что $h(\Delta) = \max\{\lambda(A), h(\delta)\}$) можно положить $a(\cdot) = 0$. Действительно, в этом случае из приведенного в § 2 неравенства (23), равносильного соотношению (4), следует, что на этом множестве должно выполняться условие $f(\xi) \leq \lambda_2$, которое верно, поскольку $\lambda_2 = h(\Delta)$. Таким образом, для каждого $a(\cdot)$, удовлетворяющего (4), наиболее экономный оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{h(\Delta)}} (i\xi)^\alpha a(\xi) y(\xi) e^{(\xi, t)} d\xi.$$

Приведем также явное выражение для оптимального метода, соответствующего функции $a(\cdot)$, обращающей левую часть (4) в нуль:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(y(\cdot))(t) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{h(\Delta)}} (i\xi)^\alpha \left(1 + \frac{\bar{\alpha}\Delta^2}{r} \frac{1}{\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}} (1 + \|\xi\|^2)^r\right)^{-1} y(\xi) e^{(\xi, t)} d\xi. \end{aligned}$$

Перед формулировкой следующей теоремы приведем еще некоторые определения. Понятно, что функция $m: \lambda \mapsto \text{mes } \Omega_\lambda$ монотонно убывает на $(0, \widehat{\lambda}]$, $m(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $m(\widehat{\lambda}) = 0$. Для любого $\sigma > 0$ обозначим через $\lambda(\sigma)$ единственное решение уравнения $m(\lambda) = \sigma$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $0 < \bar{\alpha} < r$, $\delta \geq 0$, $\sigma > 0$ и $\lambda(\sigma, \delta) = \max(\lambda(\sigma), h(\delta))$. Тогда любое множество, совпадающее с точностью до множества меры нуль с $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$, является оптимальным.

Отметим, что если $\delta = 0$, то $\lambda(\sigma, \delta) = \lambda(\sigma)$, поскольку $h(0) = 0$, тем самым $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество, и чем больше σ , тем меньше погрешность оптимального восстановления, равная $\sqrt{\lambda(\sigma)}$.

Если $\delta > 0$ и $\sigma > 0$ таковы, что $\lambda(\sigma) \leq h(\delta)$, то информация о преобразовании Фурье за пределами множества $\Omega_{h(\delta)}$ оказывается лишней, поскольку погрешность оптимального восстановления не уменьшается.

§ 2. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем прежде всего, что если $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$, то $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Действительно, согласно определениям $\widehat{\lambda}$ и пространства $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \widehat{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Далее, по определению α -й производной и теореме Планшереля

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha x(t)|^2 dt,$$

т.е. $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теперь оценим снизу величину погрешности оптимального восстановления $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения экстремальной задачи

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta, \quad \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad (5)$$

т.е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях (при этом если $\delta = 0$, то первое ограничение задачи имеет вид $Fx(\cdot) = 0$ для п.в. $\xi \in A$).

Пусть $x_0(\cdot)$ – допустимая функция в (5) (т.е. $x_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи); тогда, очевидно, функция $-x_0(\cdot)$ также допустима и мы для любого $\varphi: \widehat{L}_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\varphi(0)(\cdot)$ – значение отображения φ на нулевой

функции) имеем

$$\begin{aligned}
 2\|D^\alpha x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|D^\alpha x_0(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|D^\alpha(-x_0)(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (5), а справа к нижней грани по всем методам φ , получаем требуемое.

Теперь оценим снизу значение задачи (5). Для этого удобно переписать задачу в образах Фурье. Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (5) равен значению задачи

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\
 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi &\leq 1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Если $\delta = 0$, то первое ограничение в этой задаче имеет вид $Fx(\cdot) = 0$ для п. в. $\xi \in A$.

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай 1: $\delta \geq \widehat{\delta}$. Положим

$$\widehat{\xi} = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{r - \bar{\alpha}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d}{r - \bar{\alpha}}} \right),$$

где, напомним, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|\widehat{\xi}\|} \right) \widehat{\xi},$$

рассмотрим шар $B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon\| \leq \varepsilon\}$ и определим на $\mathbb{R}^d$ функции

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (6).

Второе ограничение в задаче (6), очевидно, выполнено. Если $A \cap B_\varepsilon = \emptyset$, то первое ограничение тривиальным образом верно.

Пусть $A \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$. Легко проверить, что $(1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^{-r} = \widehat{\delta}^2$ и $\|\xi\| \geq \|\widehat{\xi}\|$ для всех $\xi \in B_\varepsilon$. Учитывая это, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A \cap B_\varepsilon} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \text{mes } B_\varepsilon \\
 &\leq \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \text{mes } B_\varepsilon = (1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^{-r} = \widehat{\delta}^2 \leq \delta^2.
 \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(\cdot)$ допустима в задаче (5), а значит, значение этой задачи не меньше

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к величине

$$f(\widehat{\xi}) = \frac{|\widehat{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^r},$$

которая равна $\widehat{\lambda}$, поскольку в точке $\widehat{\xi}$ достигается максимум функции f (что отмечено перед формулировкой теоремы).

Поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (5), при $\delta \geq \widehat{\delta}$ получена оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}}. \quad (7)$$

Величина в правой части (7) совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, так как в рассматриваемом случае $\Delta = \widehat{\delta}$ и $h(\widehat{\delta}) = \widehat{\lambda}$.

Случай 2: $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) \leq h(\delta)$. Пусть

$$\widetilde{\xi} = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \delta^{2/r})}{\bar{\alpha}\delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1 - \delta^{2/r})}{\bar{\alpha}\delta^{2/r}}} \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widetilde{\xi}_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{\xi}\|} \right) \widetilde{\xi}$$

и рассмотрим шар $\widetilde{B}_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \widetilde{\xi}_\varepsilon\| \leq \varepsilon\}$.

Поскольку $\delta < \widehat{\delta}$ и тем самым $r(1 - \delta^{2/r})/\bar{\alpha} > 1$, то

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\xi}) &= \frac{|\widetilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{r\bar{\alpha}^{\alpha-1}} (1 - \delta^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} \delta^{2(1-\bar{\alpha}/r)} \\ &= \frac{r}{\bar{\alpha}} (1 - \delta^{2/r}) h(\delta) > h(\delta) \geq \lambda(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{\xi} \in \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$, поэтому $B_\varepsilon \subset \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$ для достаточно малых ε , а значит, $\text{mes}(A \cap \widetilde{B}_\varepsilon) = \text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon$ для таких ε . Определим на $\mathbb{R}^d$ функции

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon}}, & \xi \in \widetilde{B}_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \widetilde{B}_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (6). Первое ограничение в задаче выполняется очевидным образом. Далее элементарно проверяется, что $\|\xi\| \leq \|\widetilde{\xi}\|$, если

$\xi \in \widetilde{B}_\varepsilon$, а $\delta^2(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r = 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon} \int_{\widetilde{B}_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ &\leq \frac{\delta^2}{\text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon} (1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r \text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon = \delta^2(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r = 1. \end{aligned}$$

Итак, функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (5), а значит, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ значение этой задачи не меньше

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon} \int_{\widetilde{B}_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &= \frac{1}{(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r \text{mes } \widetilde{B}_\varepsilon} \int_{\widetilde{B}_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к числу

$$\frac{|\widetilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \frac{(1 - \delta^{2/r})^{\bar{\alpha}}}{\delta^{2\bar{\alpha}/r}} \delta^2 = \left(\frac{r}{\bar{\alpha}} (\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1 \right) h(\delta).$$

Тогда по тем же соображениям, что и выше, для рассматриваемого случая доказана оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\left(\frac{r}{\bar{\alpha}} (\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1 \right) h(\delta)}, \quad (8)$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, поскольку в рассматриваемом случае $\Delta = \delta$.

Случай 3: $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$. Пусть сначала $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$. Тогда для каждого $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$ справедливо неравенство $\text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) < \text{mes } \Omega_\lambda$, а значит, для таких λ

$$\text{mes}(\Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)) = \text{mes}(\Omega_\lambda \setminus A) = \text{mes } \Omega_\lambda - \text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) > 0.$$

Обозначим $G_\lambda = \Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)$ и определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\lambda(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in G_\lambda, \\ 0, & \xi \notin G_\lambda. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\lambda(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\lambda(\cdot) = F^{-1}z_\lambda(\cdot)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\lambda(\cdot)$ допустимы в задаче (6). Тогда для всех указанных λ (учитывая, что $f(\xi) \geq \lambda$, если $\xi \in \Omega_\lambda$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\lambda(\xi)|^2 d\xi &= \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{G_\lambda} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &= \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{G_\lambda} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ &\geq \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \lambda \int_{G_\lambda} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi = \lambda, \end{aligned}$$

и тем самым значение задачи (6) не меньше λ . Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \hat{\lambda}$, получаем, что значение этой задачи не меньше $\hat{\lambda}$.

Снова, поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (6), для случая $\lambda(A) = \hat{\lambda}$ доказана оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\hat{\lambda}}, \quad (9)$$

где величина справа также совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемой ситуации $\Delta = \hat{\delta}$.

Пусть теперь $\lambda(A) < \hat{\lambda}$. Покажем сначала, что для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$ мера множества

$$F_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})$$

положительна. Предположим, что $\text{mes } F_\varepsilon = 0$ для некоторого ε . Тогда, учитывая, что $\Omega_{\lambda(A)} \subset \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, получим

$$\begin{aligned} \text{mes}(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})) &= \text{mes}(\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)}) \\ &= \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} - \text{mes}(\Omega_{\lambda(A)} \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} - \text{mes } \Omega_{\lambda(A)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{mes}(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})) &= \text{mes}((A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) \setminus \Omega_{\lambda(A)}) \\ &= \text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) - \text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}). \end{aligned}$$

Из определения $\lambda(A)$ легко вытекает, что $\text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)}$. Тогда из полученных выражений следует равенство $\text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, которое противоречит определению $\lambda(A)$. Итак, $\text{mes } F_\varepsilon \neq 0$ для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$.

Пусть сначала $\delta = 0$. Для указанных ε определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin F_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \hat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (6). Те же рассуждения, что и выше, показывают, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \geq \lambda(A) - \varepsilon,$$

откуда, как и раньше, следует, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) \geq \sqrt{\lambda(A)}. \quad (10)$$

Величина справа в (10) совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $\delta = 0$ и $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Положим

$$\xi' = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \Delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \Delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1 - \Delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \Delta^{2/r}}} \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\xi'_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\xi'\|}\right)\xi'$$

и рассмотрим шар $B'_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \xi'_\varepsilon\| \leq \varepsilon\}$.

Поскольку $\lambda(A) < \hat{\lambda}$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) < h^{-1}(\hat{\lambda}) = \hat{\delta}$, и тогда аналогично случаю 2 имеем

$$\begin{aligned} f(\xi') &= \frac{|\xi'|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi'\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{r\bar{\alpha}^{\bar{\alpha}-1}} (1 - \Delta^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} \Delta^{2(1-\bar{\alpha}/r)} \\ &= \frac{r}{\bar{\alpha}} (1 - \Delta^{2/r}) h(\Delta) > h(\Delta) = \lambda(A). \end{aligned}$$

Это означает, что $\xi' \in \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$. Следовательно, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ шар B'_ε принадлежит $\Omega_{\lambda(A)}$, и тем самым $B'_\varepsilon \cap F_\varepsilon = \emptyset$.

Простая проверка показывает, что $\|\xi\| \leq \|\xi'\|$, если $\xi \in B'_\varepsilon$ и $(1 + \|\xi'\|^2)^r = 1/\Delta^2$. Далее, поскольку $\lambda(A) > h(\delta)$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) > \delta$, и поэтому

$$\frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \leq \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi'\|^2)^r d\xi = \delta^2 (1 + \|\xi'\|^2)^r = \frac{\delta^2}{\Delta^2} < 1.$$

Обозначим через C_ε левую часть последнего неравенства и для указанных выше ε определим функции на $\mathbb{R}^d$ по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } B'_\varepsilon}}, & \xi \in B'_\varepsilon, \\ (2\pi)^{d/2} \sqrt{1 - C_\varepsilon} \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B'_\varepsilon \cup F_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \hat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (6).

Действительно, так как $B'_\varepsilon \subset \Omega_{\lambda(A)}$, то $\text{mes } B'_\varepsilon = \text{mes}(A \cap B'_\varepsilon)$ и, следовательно, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{A \cap B'_\varepsilon} d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \text{mes}(A \cap B'_\varepsilon) = \delta^2.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ &+ (1 - C_\varepsilon) \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{F_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi = C_\varepsilon + 1 - C_\varepsilon = 1, \end{aligned}$$

и, таким образом, функции $x_\varepsilon(\cdot)$ для достаточно малых ε допустимы в задаче (6). Тогда для всех таких ε значение этой задачи не меньше

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &+ (1 - C_\varepsilon) \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{F_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Поступая так же, как и выше, получаем, что произведение двух последних сомножителей во втором слагаемом справа в (11) не меньше $\lambda(A) - \varepsilon$. Оценивая первое слагаемое и C_ε по теореме о среднем, получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ всё выражение справа в (11) стремится к величине

$$\delta^2 |\xi'|^{2\alpha} + (1 - \delta^2 (1 + \|\xi'\|^2)^r) \lambda(A) = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}} \frac{(1 - \Delta^{2/r})^{\bar{\alpha}}}{\Delta^{2\bar{\alpha}/r}} \delta^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\Delta^2}\right) \lambda(A) = \left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2} (\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}) + 1\right) \lambda(A).$$

Следовательно, для $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$ получена оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2} (\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}) + 1\right) \lambda(A)}, \quad (12)$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Итак, для всех $\delta \geq 0$ и измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$, получена оценка снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (7)–(10) и (12)), которая совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, приведенной в формулировке теоремы. Оценим теперь сверху эту величину и построим оптимальные методы.

Пусть $\delta \geq 0$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ фиксированы и $\delta + \lambda(A) \neq 0$. Оптимальность метода $\varphi: \text{Im } I^\alpha(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\begin{aligned} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\rightarrow \max, & x(\cdot) &\in H_2^r(\mathbb{R}^d), \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} &\leq \delta, & y(\cdot) &\in \widehat{L}_2(A), \end{aligned} \quad (13)$$

совпадает с $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Если $\delta = 0$, то задача (13) переписывается следующим образом:

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(Fx(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d). \quad (14)$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай (а): $\delta = 0$. Поскольку отображение $x(\cdot) \mapsto D^\alpha x(\cdot)$ в образах Фурье есть умножение функции $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha$ на $Fx(\cdot)$, то и оптимальные методы естественно искать среди подобных отображений. Каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что $a(\cdot)\sqrt{f(\cdot)} \in L_\infty(A)$, сопоставим отображение $\varphi_a: \text{Im } I^0(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, действующее в образах Фурье по правилу $F\varphi_a(y(\cdot))(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{a}(\xi) \widetilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{a}(\cdot) = a(\cdot)$, $\widetilde{y}(\cdot) = y(\cdot)$ на A и $\widetilde{a}(\cdot) = 0$, $\widetilde{y}(\cdot) = 0$ вне A . Определение корректно, так как если $y(\cdot) \in \text{Im } I^0(A)$, то $y(\cdot) = Fx(\cdot)|_A$ для некоторого $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$, и тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |F\varphi_a(y(\cdot))(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |\xi|^{2\alpha} |a(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |a(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \| |a(\cdot)|^2 f(\cdot) \|_{L_\infty(A)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме Планшереля имеем $\varphi_a(y(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a – такое отображение. Оценим квадрат максимизируемого функционала в (14) с $\varphi = \varphi_a$, переходя по теореме Планшереля к образам Фурье ($f(\xi) \leq \lambda(A)$, если $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - \varphi_a(Fx(\cdot)|_A)(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |1 - a(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in A} |1 - a(\xi)|^2 f(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
 &\quad + \lambda(A) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если

$$|1 - a(\xi)|^2 f(\xi) \leq \lambda(A) \quad (16)$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, то величина из правой части в (15) не превосходит $\lambda(A)$ и, значит, погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda(A)}$. Тогда с учетом оценки (10) имеем

$$\sqrt{\lambda(A)} \leq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) \leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi_a) \leq \sqrt{\lambda(A)},$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) = \sqrt{\lambda(A)}$, а φ_a – оптимальный метод.

Существование таких функций $a(\cdot)$ очевидно. Например, подходит функция, равная тождественно единице.

Если $\lambda(A) = \hat{\lambda}$, то $f(\xi) \leq \hat{\lambda}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ и (16) выполняется с $a(\cdot) = 0$, т. е. нулевой метод оптимален в данном случае.

Если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для оптимального метода, приведенное в теореме, является формулой обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

Случай (b): $\delta > 0$, $\lambda(A) = \hat{\lambda}$. Покажем, что в этой ситуации нулевой метод является оптимальным.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) &\leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0) \\
 &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y(\cdot) \in \hat{L}_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\hat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Согласно теореме Планшереля квадрат величины из правой части в (17) равен значению задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \quad (18)$$

Отсюда в силу определения $\widehat{\lambda}$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \widehat{\lambda},$$

т. е. значение задачи (18) не превосходит $\widehat{\lambda}$. Следовательно, для случаев $\delta \geq \widehat{\delta}$ и $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ (см. (7) и (9)) имеем

$$\sqrt{\widehat{\lambda}} \leq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0) \leq \sqrt{\widehat{\lambda}},$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}}$ и $\widehat{\varphi} = 0$ – оптимальный метод.

Случай (с): $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $0 \leq \lambda(A) < \widehat{\lambda}$. В этой ситуации ранее были получены оценки снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (8) и (12)), которые, как нетрудно проверить, можно записать в виде одной формулы:

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}, \quad (19)$$

причем $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $a(\cdot)$ – измеримая функция на A такая, что функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$. Оптимальные методы, как и выше, будем искать среди таких отображений $\varphi_a: \text{Im} I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу $F\varphi_a(y(\cdot))(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{a}(\xi) \widetilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{a}(\cdot) = a(\cdot)$, $\widetilde{y}(\cdot) = y(\cdot)$ на A и $\widetilde{a}(\cdot) = 0$, $\widetilde{y}(\cdot) = 0$ вне A . Ясно, что $\varphi_a(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a – такой метод. Оценим значение задачи (13) в этой ситуации. Переходя по теореме Планшереля к образам Фурье, получаем, что квадрат ее значения равен значению следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d), \quad y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь оценим по неравенству Коши–Буняковского для каждого $\xi \in A$ выражение под знаком первого интеграла в максимизируемом функционале:

$$\begin{aligned} & |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)|^2 = |\xi|^{2\alpha} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ & \leq |\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 \\ & \quad + \lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим

$$S_a = \text{vrai sup}_{\xi \in A} |\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right).$$

Если предположить, что $S_a \leq 1$, то, интегрируя по A неравенство (21) и учитывая, что $f(\xi) \leq \lambda(A)$ за пределами A , получаем следующую оценку для

максимизируемого функционала в (20):

$$\begin{aligned}
 & \lambda_2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi + \lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\
 & \quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
 & \leq \lambda_2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi + \lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\
 & \quad + \lambda(A) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Если $\lambda(A) \leq h(\delta)$, то $\Delta = \delta$ и тем самым $\lambda(A) \leq h(\Delta) = \lambda_2$. Если же $\lambda(A) \geq h(\delta)$, то $\lambda_2 = h(\Delta) = \lambda(A)$. Итак, всегда $\lambda(A) \leq \lambda_2$, и поэтому из оценки (22), учитывая ограничения в задаче (20), получаем, что максимизируемый функционал в этой задаче не превосходит величины $\lambda_2 + \lambda_1 \delta^2$, т. е. погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda_2 + \lambda_1 \delta^2}$. Вместе с (19) это означает, что метод φ_a оптимален.

Теперь покажем, что указанные функции $a(\cdot)$, для которых $S_a \leq 1$, существуют.

Если для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \tag{23}$$

то $S_a \leq 1$. Далее, если

$$-|\xi|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{24}$$

то нетрудно проверить (выделяя полный квадрат), что (23) равносильно соотношению, приведенному в теореме. Из него следует, что для любой измеримой функции $a(\cdot)$, ему удовлетворяющей, функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$ и, таким образом, оптимальных методов “достаточно много”.

Осталось доказать неравенство (24). Для этого рассмотрим функцию $g(\cdot)$ на полупрямой $[0, \infty)$, определенную формулой

$$g(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} (x^{1/r} - 1)^{\bar{\alpha}}.$$

Простая проверка показывает, что эта функция вогнута на $[x_0, \infty)$, где $x_0 = (r/(r - \bar{\alpha}))^r$.

В нашем случае $\Delta < \hat{\delta}$, или равносильно $\Delta^{-2} > x_0$. Непосредственный подсчет показывает, что прямая $x \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 x$ является касательной к графику функции $g(\cdot)$ в точке Δ^{-2} , и поэтому в силу вогнутости $g(\cdot)$ имеем

$$g(x) \leq \lambda_1 + \lambda_2 x \quad \forall x \geq x_0.$$

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^d$. Положим $x_\xi = (1 + \|\xi\|^2)^r$. Тогда

$$g(x_\xi) = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}}.$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. [19, с. 29]) легко следует, что

$$|\xi|^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}}.$$

Объединяя последние соотношения и учитывая, что $x_\varepsilon > x_0$, получаем

$$|\xi|^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}} = g(x_\varepsilon) \leq \lambda_1 + \lambda_2 x_\varepsilon = \lambda_1 + \lambda_2(1 + \|\xi\|^2)^r,$$

что и доказывает (24), а значит, и выражение для функций $a(\cdot)$ из формулировки теоремы.

Как и в случае $\delta = 0$, если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для оптимального метода, приведенное в теореме, есть формула обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Покажем, что $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma)$. Действительно, если $\lambda(A_\sigma) < \lambda(\sigma)$, то существует такое $\lambda < \lambda(\sigma)$, что $\text{mes}(A_\sigma \cap \Omega_\lambda) = \text{mes } \Omega_\lambda$, и так как $\text{mes } \Omega_\lambda > \text{mes } \Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$, то $\text{mes } A_\sigma > \sigma$, что невозможно.

Пусть $\delta = 0$. Из теоремы 1 вытекает, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0) = \sqrt{\lambda(A_\sigma)} \geq \sqrt{\lambda(\sigma)}.$$

Однако поскольку $\text{mes } \Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$ и $\lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)}) = \lambda(\sigma)$, то $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество и, очевидно, любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ лишь на множестве меры нуль, также оптимально.

Если $\delta \geq \hat{\delta}$, то для любого множества и, в частности, для любого A_σ выполнено

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0) = \sqrt{\hat{\lambda}}.$$

Следовательно, в этом случае любое множество является оптимальным.

Пусть теперь $0 < \delta < \hat{\delta}$ и $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Если $\lambda(\sigma) \geq h(\delta)$, то $\lambda(\sigma, \delta) = \lambda(\sigma)$. Выше показано, что $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma)$ и тем самым $\lambda(A_\sigma) \geq h(\delta)$. В этом случае погрешность оптимального восстановления, как отмечено в комментарии 2 к теореме 1, убывает с убыванием $\lambda(A)$, и поскольку $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma) = \lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)})$, то имеем

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \geq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{\lambda(\sigma)}, \delta).$$

Следовательно, $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ – оптимальное множество.

Пусть $\lambda(\sigma) \leq h(\delta)$; тогда $\lambda(\sigma, \delta) = h(\delta)$. Если $\lambda(A_\sigma) \geq h(\delta)$, то по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, получаем

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \geq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta).$$

Если же $\lambda(A_\sigma) \leq h(\delta)$, то согласно теореме 1

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) = \sqrt{\left(\frac{r}{\alpha}(\hat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}) + 1\right)h(\delta)} = E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta),$$

т. е. $\Omega_{h(\delta)}$ – оптимальное множество.

Итак, при $\delta > 0$ множество $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$ и любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$ на множестве меры нуль, оптимальны. Терема доказана.

Рассмотрим теперь один пример. Пусть $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ и $r = 2$. Иными словами, рассматривается задача восстановления частной производной $x_{t_1}(\cdot)$ на классе $H_2^2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \hat{\delta} = \frac{1}{2},$$

$$\Omega_\lambda = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \frac{\xi_1^2}{(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} \geq \lambda \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что Ω_λ при $\lambda < 1/4$ представляет собой два шара:

$$\Omega_\lambda = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \left(|\xi_1| - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \right)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leq \frac{1}{4\lambda} - 1 \right\}.$$

Из теоремы 1 получаем, что $E(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = 1/2$ при $\delta \geq 1/2$, а при $\delta < 1/2$

$$E(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \begin{cases} \sqrt{(1 - \delta)\delta}, & \lambda(A) \leq \frac{\delta}{2}, \\ \sqrt{\left(\frac{1 - 4\lambda(A)}{4\lambda(A)} \right) \delta^2 + \lambda(A)}, & \lambda(A) > \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Семейство оптимальных методов для рассматриваемого случая также может быть легко получено из теоремы 1. В частности, при $0 < \delta < 1/2$ метод

$$\hat{\varphi}(Fx(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \frac{i\xi_1}{1 + \frac{\Delta^2}{1-2\Delta}(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} Fx(\xi) e^{\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \delta, & \lambda(A) \leq \frac{\delta}{2}, \\ 2\lambda(A), & \lambda(A) > \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

является оптимальным.

В силу известной формулы для объема d -мерного шара имеем

$$\text{mes } \Omega_\lambda = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{4\lambda} - 1 \right)^{d/2}$$

и тем самым получаем

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \right)^{2/d} \right)^{-1}.$$

Как отмечалось в доказательстве теоремы 2, при $\delta \geq 1/2$ любое множество оптимально. При $\delta < 1/2$ из той же теоремы вытекает, что шары

$$\left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid (|\xi_1| - \sqrt{R^2 + 1})^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leq R^2 \right\},$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) \right)^{1/d}, & \sigma < \frac{2}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{2\delta} - 1 \right)^{d/2}, \\ \sqrt{\frac{1}{2\delta} - 1}, & \sigma \geq \frac{2}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{2\delta} - 1 \right)^{d/2}, \end{cases}$$

являются оптимальным множеством.

Список литературы

1. A. Kolmogoroff, "Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse", *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110.
2. A. Sard, "Best approximate integration formulas; best approximation formulas", *Amer. J. Math.*, **71**:1 (1949), 80–91.
3. С. М. Никольский, "К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами", *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.
4. С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
5. С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal estimation in approximation theory*, Proc. Internat. Sympos. (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.
6. Дж. Фр. Трауб, Х. Вожняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 382 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monograph Series, Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.
7. С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, "Lectures on optimal recovery", *Numerical analysis Lancaster 1984* (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 21–93.
8. В. В. Арестов, "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, "Optimal recovery of operators and related problems", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189**:4 (1990), 1–20.
9. K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000, 220 pp.
10. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2011, 176 с.; англ. пер. 1-го изд.: G. G. Magaril-II'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
11. G. G. Magaril-II'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
12. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives", *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.
13. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "О восстановлении операторов сверточно-го типа по неточной информации", *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Сб. статей., Тр. МИАН, **269**, МАИК, М., 2010, 181–192; англ. пер.: G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, "On the reconstruction of convolution-type operators from inaccurate information", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **269** (2010), 174–185.
14. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру", *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79; англ. пер.: G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, "On optimal harmonic synthesis from inaccurate spectral data", *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 223–225.
15. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "О наилучшем выборе информации в задаче восстановления функции по спектру", *Математический форум*, т. 1: Исследования по математическому анализу, ВНЦ РАН, Владикавказ, 2008, 142–150.

16. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “How best to recover a function from its inaccurately given spectrum?”, *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 51–58.
17. Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 119–130; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, E. O. Sivkova, “Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data”, *Sb. Math.*, **203**:4 (2012), 569–580.
18. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление производных на соболевских классах”, *Владикавказ. матем. журн.*, **5**:1 (2003), 39–47.
19. Г. Харди, Дж. И. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948, 456 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Univ. Press, Cambridge, 1934, xii+314 pp.

ГЕОРГИЙ ГЕОРГИЕВИЧ МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ
(GEORGII G. MAGARIL-IL'YAEV)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва

E-mail: magaril@mech.math.msu.su

КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ ОСИПЕНКО
(KONSTANTIN YU. OSIPENKO)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ),
г. Москва;

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва

E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило в редакцию
25.10.2013