Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, Разделение систем гидродинамического типа на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 6, 171–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:41:47

УДК 517.956+514.763.8

Д. В. Туницкий

Разделение систем гидродинамического типа на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы

Статья посвящена системам n неоднородных уравнений гидродинамического типа с двумя независимыми переменными. Для таких систем имеет место восходящая к Риману геометрическая формализация, позволяющая поставить в соответствие системе гидродинамического типа векторное поле и поле линейных операторов, действующее на соответствующем касательном расслоении. В терминах этих полей получен ряд признаков разделения неоднородных систем гидродинамического типа на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы. Эти признаки дополняют известные результаты О.И. Богоявленского о разделении однородных систем гидродинамического типа на не взаимодействующие подсистемы.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: системы гидродинамического типа, не взаимодействующие подсистемы, блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы, тензор Нейенхайса.

DOI: 10.4213/im8194

Статья состоит из шести параграфов. В § 1, который является вводным, ставится задача о разделении неоднородных систем гидродинамического типа на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы, а также обосновывается актуальность этой задачи. В § 2 поставленная задача формализуется и формулируется в геометрических терминах, а именно в терминах приведения к надлежащему виду соответствующих полей линейных операторов и векторных полей. В § 3 приводится краткий исторический очерк. Основным является § 4. В нем сформулированы необходимые и достаточные условия разделения неоднородных систем гидродинамического типа на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы. В § 5 применение сформулированных условий иллюстрируется на примере системы уравнений одномерной газовой динамики. Для полноты изложения все значимые утверждения снабжены доказательствами, которые приводятся в заключительном § 6, носящем преимущественно технический характер.

Все окрестности в статье предполагаются открытыми, а областью называется связное открытое множество. Большинство утверждений носит локальный характер. Наложив на рассматриваемые области дополнительные ограничения, можно получить глобальные аналоги этих утверждений, но это остается за рамками статьи. Для всех встречающихся объектов, в частности расслоений и подрасслоений, под гладкостью для простоты понимается бесконечная дифференцируемость, хотя на самом деле все значимые результаты остаются справедливыми и в случае конечной дифференцируемости.

Важным частным случаем систем гидродинамического типа служат *блочно-диагональные* системы, т. е. системы вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_x^1 = \tilde{A}^1 + \sum_{l=1}^{n_1} \tilde{B}_l^1 \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_1} = \tilde{A}^{n_1} + \sum_{l=1}^{n_1} \tilde{B}_l^{n_1} \tilde{u}_y^l, \\ \tilde{u}_x^{n_1+1} = \tilde{A}^{n_1+1} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \tilde{B}_l^{n_1+1} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_2} = \tilde{A}^{n_2} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2} \tilde{B}_l^{n_2} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_{k-1}+1} = \tilde{A}^{n_{k-1}+1} + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_l^{n_{k-1}+1} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^n = \tilde{A}^n + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_l^n \tilde{u}_y^l, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

где k и $n_1, \dots, n_{k-1}$ – положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $2 \leq k \leq n$ и $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1} < n$, x и y , как и выше, – независимые переменные,

$$\tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(x, y), \quad \dots, \quad \tilde{u}^n = \tilde{u}^n(x, y) \quad (1.8)$$

– неизвестные функции, а

$$\tilde{A}^j = \tilde{A}^j(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n), \quad \tilde{B}_l^j = \tilde{B}_l^j(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$$

– гладкие коэффициенты, заданные в фиксированной области

$$\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

пространства зависимых переменных $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n$. Матрица системы (1.7) блочно-диагональна: на ее главной диагонали расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все остальные элементы равны нулю. В частности, если $k = n$ и $n_j = j$ при $j = 1, \dots, k - 1$, то система (1.7) является *диагональной*, т. е. системой в инвариантах Римана. Придерживаясь терминологии, используемой в статье [2], будем называть блочно-диагональную систему (1.7) *разделенной на k не взаимодействующих подсистем*, если для $\alpha = 0, \dots, k - 1$ и $j, l = n_\alpha + 1, \dots, n_{\alpha+1}$ имеют место представления вида

$$\tilde{A}^j = \tilde{A}^j(\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^{n_{\alpha+1}}), \quad \tilde{B}_l^j = \tilde{B}_l^j(\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^{n_{\alpha+1}}), \quad (1.10)$$

где

$$n_0 = 0, \quad n_k = n. \quad (1.11)$$

В частности, при $k = n$ будем называть систему (1.7) *разделенной на n не взаимодействующих уравнений*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Возможность приведения системы (1.1) к диагональному или блочно-диагональному виду (1.7) с помощью подходящей замены переменных, а тем более разделение ее на не взаимодействующие подсистемы, позволяет кардинально снизить объем вычислений при ее исследовании, например численном. Естественно, что эта возможность существенным образом зависит от свойств системы, и, как известно, далеко не всякая система (1.1) приводится к диагональному или блочно-диагональному виду, а тем более разделяется на не взаимодействующие подсистемы [3, разд. I], [4, разд. I]. Проблема нахождения условий такой приводимости и делимости восходит к Р. Куранту (см. [5], [6]) и для однородных систем гидродинамического типа (1.1), (1.6) исследовалась в работах О. И. Богоявленского [3] и [4]. Дополнительные подробности см. ниже в § 3.

Наряду с блочно-диагональной системой (1.7) рассмотрим *блочно-треугольную* систему гидродинамического типа

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_x^1 = \tilde{A}^1 + \sum_{l=1}^n \tilde{B}_l^1 \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_1} = \tilde{A}^{n_1} + \sum_{l=1}^n \tilde{B}_l^{n_1} \tilde{u}_y^l, \\ \tilde{u}_x^{n_1+1} = \tilde{A}^{n_1+1} + \sum_{l=n_1+1}^n \tilde{B}_l^{n_1+1} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_2} = \tilde{A}^{n_2} + \sum_{l=n_1+1}^n \tilde{B}_l^{n_2} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^{n_{k-1}+1} = \tilde{A}^{n_{k-1}+1} + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_l^{n_{k-1}+1} \tilde{u}_y^l, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^n = \tilde{A}^n + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_l^n \tilde{u}_y^l, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

где, как и в случае (1.7), k и $n_1, \dots, n_{k-1}$ — положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $2 \leq k \leq n$ и $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1} < n$. Система (1.12) имеет верхнюю блочно-треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно; все элементы, расположенные ниже этих блоков, равны нулю. В частности, если $k = n$ и $n_j = j$ при $j = 1, \dots, k-1$, то система (1.12) является *треугольной*. Придерживаясь терминологии, используемой в статье [2], будем называть блочно-треугольную систему (1.12) *разделенной на k блочно-треугольно взаимодействующих подсистем*, если для $\alpha = 0, \dots, k-1$ и $j = n_\alpha + 1, \dots, n_{\alpha+1}$, $l = n_\alpha + 1, \dots, n$ имеют место представления вида

$$\tilde{A}^j = \tilde{A}^j(\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^n), \quad \tilde{B}_l^j = \tilde{B}_l^j(\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^n), \quad (1.13)$$

где приняты обозначения (1.11). В частности, при $k = n$ будем называть систему (1.12) *разделенной на n треугольно взаимодействующих уравнений*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Аналогично сказанному в замечании 1.1, приводимость системы гидродинамического типа к треугольному или блочно-треугольному виду (1.12), а тем более возможность ее разделения на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы, также существенным образом зависит от ее свойств и позволяет кардинально снизить объем вычислений при ее решении. В частности, при численном решении задачи Коши для системы (1.1) с помощью явной схемы первого порядка получаются системы линейных алгебраических уравнений общего вида, а при решении блочно-треугольной системы (1.12) – системы линейных алгебраических уравнений с верхними блочно-треугольными матрицами. Конечно, во втором случае решать полученные системы линейных алгебраических уравнений существенно проще, чем в первом. А если система (1.12) еще и разделена на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы, то для всякого $\alpha = 1, \dots, k-1$ ее последние $n - n_\alpha$ уравнений образуют независимую от остальных уравнений подсистему с неизвестными функциями $\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^n$. Эту подсистему можно исследовать отдельно от первых n_α уравнений системы (1.12). Если в результате такого исследования удастся тем или иным способом найти неизвестные функции $\tilde{u}^{n_\alpha+1}, \dots, \tilde{u}^n$, то, подставив их в первые n_α уравнений, получим блочно-треугольную систему n_α уравнений с неизвестными функциями $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{n_\alpha}$, разделенную на α блочно-треугольно взаимодействующих подсистем. При $\alpha > 1$ к полученной системе можно снова применить данное замечание, и тем самым выполнить еще один шаг к ее рекурсивной декомпозиции на подсистемы меньшей размерности.

Понятно, что условия приводимости системы (1.1) к блочно-треугольному виду (1.12) менее ограничительны, чем условия приводимости этой системы к блочно-диагональному виду (1.7). Так что множество тех систем (1.1), которые приводятся к треугольному виду (1.12), шире, чем множество систем, приводимых к диагональному виду (1.7). Аналогичным образом, условия разделения на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы также менее ограничительны по сравнению с условиями разделения на не взаимодействующие подсистемы. Иллюстрацией этих фактов служит система уравнений газовой динамики, рассматриваемая в § 5 (см., например, замечания 5.1 и 5.2).

Итак, естественно (см. § 6) поставить две следующие задачи.

ЗАДАЧА 1.3. Найти условия, по возможности эффективно проверяемые, при которых система (1.1) допускает приведение к блочно-треугольному виду (1.12).

ЗАДАЧА 1.4. Найти условия, также по возможности эффективно проверяемые, при которых система (1.1) наряду с приведением к блочно-треугольному виду (1.12) допускает разделение на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы.

Для данной статьи основной является задача 1.4; задача 1.3 играет промежуточную вспомогательную роль.

§ 2. Геометрическая формализация

Поставленные выше задачи 1.3 и 1.4 по сути являются геометрическими. Действительно, требуется выяснить, можно ли с помощью подходящего преобразования перевести один объект в другой. Прежде чем присту-

Тем самым в результате замены переменных (2.1), (2.2) система (1.1) приводится к системе гидродинамического типа

$$\begin{cases} \tilde{u}_x^1 = \tilde{A}^1 + \sum_{\alpha=1}^n \tilde{B}_\alpha^1 \tilde{u}_y^\alpha, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_x^n = \tilde{A}^n + \sum_{\alpha=1}^n \tilde{B}_\alpha^n \tilde{u}_y^\alpha. \end{cases} \quad (2.7)$$

Коэффициенты $\tilde{A}^j$ и $\tilde{B}_l^j$ системы (2.7) явным образом выражаются через коэффициенты A^j и B_l^j системы (1.1) и элементы матриц Якоби (2.4) и (2.5):

$$\tilde{A}^j = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{w}^j}{\partial u^\beta} A^\beta, \quad \tilde{B}_l^j = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{w}^j}{\partial u^\beta} \sum_{\gamma=1}^n B_\gamma^\beta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^l}, \quad j, l = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Рассмотрим касательное расслоение

$$TM \cong M \times \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

над областью M (1.3). Матрица B_l^j (1.4) системы (1.1), определенная в области M , естественным образом задает в этой области гладкое поле линейных операторов

$$B: TM \ni \zeta \mapsto B\zeta \in TM, \quad (2.10)$$

действующее на касательном расслоении TM (2.9). Будем называть его *полем линейных операторов системы* (1.1). Аналогичным образом, свободный член A (1.5) системы (1.1) определяет гладкое сечение

$$A: M \ni m \mapsto A(m) \in TM \quad (2.11)$$

касательного расслоения TM . Будем называть его *векторным полем системы* (1.1). Соответственно матрица

$$(\tilde{B}_l^j(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n))_{j,l=1}^n \quad (2.12)$$

системы (2.7), определенная в области $\widetilde{M}$ (1.9) выражениями (2.8), задает гладкое поле линейных операторов

$$\tilde{B}: T\tilde{M} \ni \tilde{\zeta} \mapsto \tilde{B}\tilde{\zeta} \in T\tilde{M} \quad (2.13)$$

системы (2.7), действующее на касательном расслоении

$$T\widetilde{M} \cong \widetilde{M} \times \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

а свободный член

$$\tilde{A} = (\tilde{A}^j(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n))_{j=1}^n \quad (2.15)$$

задает гладкое векторное поле

$$\tilde{A}: \widetilde{M} \ni \tilde{m} \mapsto \tilde{A}(\tilde{m}) \in T\widetilde{M} \quad (2.16)$$

системы (2.7) в области $\widetilde{M}$. При этом матрица B (1.4) и вектор A (1.5) исходной системы (1.1) и матрица $\widetilde{B}$ (2.12) и вектор $\widetilde{A}$ (2.15) преобразованной системы связаны тензорными законами преобразования (2.8). Иными словами, диффеоморфизм f (2.1) переводит поле линейных операторов B (2.10) системы (1.1) в поле линейных операторов $\widetilde{B}$ (2.13) системы (2.7), а векторное поле A (1.5) системы (1.1) в векторное поле $\widetilde{A}$ (2.15), (2.16) системы (2.7). Итогом проведенных рассуждений служит

ЛЕММА 2.1. (а) Система гидродинамического типа (1.1) тогда и только тогда приводится к блочно-треугольному виду (1.12) (блочно-диагональному виду (1.7)), когда найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее ей поле линейных операторов B (2.10) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с соответствующей блочно-треугольной (блочно-диагональной) матрицей $\tilde{B}_l^j$ (2.12).

(б) Система гидродинамического типа (1.1) тогда и только тогда разделяется на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12) (невзаимодействующие подсистемы вида (1.7)), когда найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее ей поле линейных операторов B (2.10) и векторное поле A (2.11) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с соответствующей блочно-треугольной (блочно-диагональной) матрицей $\tilde{B}_l^j$ (2.12) и векторное поле $\tilde{A}$ (2.15), удовлетворяющие условиям разделения (1.13) (условиям разделения (1.10)).

Таким образом, приходим к следующей геометрической формулировке задачи 1.3.

ЗАДАЧА 2.2. Выяснить, существует ли такой диффеоморфизм f (2.1), (2.2), который переводит поле линейных операторов B (2.10) с матрицей B_l^j (1.4) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с верхней блочно-треугольной матрицей $\tilde{B}_l^j$ (2.12).

Аналогичным образом приходим к геометрической формулировке задачи 1.4.

ЗАДАЧА 2.3. Выяснить, существует ли такой диффеоморфизм f (2.1), (2.2), который переводит поле линейных операторов B (2.10) с матрицей B_l^j (1.4) и векторное поле A (2.11) с координатами A^j (1.5) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с верхней блочно-треугольной матрицей $\tilde{B}_l^j$ (2.12) и векторное поле $\tilde{A}$ (2.16) с координатами $\tilde{A}^j$ (2.15), удовлетворяющие условиям разделения (1.13).

Как уже отмечалось выше, для данной статьи задача 2.3 является главной, и все основные результаты посвящены именно ее решению. Что касается задачи 2.2, то для данной статьи она является промежуточной и вспомогательной. Ее решению посвящена работа [7], а в данной статье это решение существенно используется в качестве ключевого инструмента доказательства основных результатов.

§ 3. Краткий исторический обзор

Как следует из названия этого параграфа, он ни в коей мере не претендует на полноту и всего лишь указывает на ряд работ, являющихся непосредственными историческими и логическими предшественниками данной статьи, а именно на работы А. Нейенхейса [8], Й. Хаантьеса [9], О. И. Богоявленского [2]–[4] и Д. В. Туницкого [7].

Как уже отмечалось выше, методика сведения задачи о приведении системы гидродинамического типа (1.1) к тому или иному виду к задаче о приведении к надлежащему виду отвечающего этой системе поля линейных операторов B (2.10) восходит к Риману [1, § 2]. Иными словами, любой результат о приведении поля линейных операторов к некоторому специальному виду естественным

образом переносится на систему гидродинамического типа с определяемой этим полем матрицей; обратное также справедливо. Примером реализации этой методики для конкретных частных случаев служит лемма 2.1.

Здесь можно провести аналогию с системами линейных алгебраических уравнений и их матрицами. Матрица системы линейных уравнений тогда и только тогда приводится к тому или иному специальному виду, когда соответствующее приведение возможно для самой системы. В связи с этим уместно начать обзор с известных работ Альберта Нейенхейса [8] и Йоханнеса Хаантёса [9], несмотря на то, что в этих работах собственно системы гидродинамического типа не изучаются и не упоминаются.

В § 4 и 5 статьи [8] исследуются поля линейных операторов. В § 4 установлены необходимые и достаточные условия пропорциональности собственных коекторов поля линейных операторов с различными вещественными собственными значениями дифференциалам функций. По сути, эти условия равносильны диагонализуемости поля линейных операторов и потому в контексте вышесказанного эквивалентны приводимости к инвариантам Римана строго гиперболической системы гидродинамического типа с определяемой этим полем матрицей. Далее в § 5 доказано, что обращение в нуль тензора Нейенхейса поля линейных операторов равносильно приводимости этого поля к диагональному виду с зависимостью диагональных элементов от одной-единственной переменной, различной для разных элементов. Тем самым в контексте вышесказанного обращение тензора Нейенхейса в нуль эквивалентно разделению на не взаимодействующие уравнения однородной строго гиперболической системы гидродинамического типа с определяемой указанным полем матрицей.

В § 1 статьи [9] также изучаются поля линейных операторов. В частности, здесь сформулирован критерий диагонализуемости поля линейных операторов с вещественными собственными значениями, алгебраические и геометрические кратности которых совпадают. По сути, условия этого критерия означают не что иное, как обращение в нуль тензора Хаантёса изучаемого поля линейных операторов. Тем самым в контексте вышесказанного обращение тензора Хаантёса в нуль эквивалентно приводимости гиперболической системы гидродинамического типа с определяемой рассматриваемым полем матрицей к инвариантам Римана. Далее установлено, что обращение в нуль тензора Нейенхейса поля линейных операторов с вещественными собственными значениями, алгебраические и геометрические кратности которых совпадают, равносильно приводимости этого поля к диагональному виду с зависимостью диагональных элементов только от своих переменных, различных для разных элементов. И потому в контексте вышесказанного обращение тензора Нейенхейса в нуль эквивалентно разделению на не взаимодействующие уравнения однородной гиперболической системы гидродинамического типа с соответствующей матрицей. Интересно, что в последних абзацах § 1 статьи [9] кратко обсуждается блочная диагонализация полей линейных операторов с собственными значениями, имеющими несовпадающие алгебраические и геометрические кратности. В контексте вышесказанного это, по сути, обсуждение приведения к блочно-диагональному виду систем гидродинамического типа.

Непосредственное исследование приводимости систем гидродинамического типа к блочно-диагональному виду осуществлено в статье Олега Игоревича Богоявленского [3], в которой установлены условия такой приводимости. Статья [4] посвящена делимости однородных систем гидродинамического типа

на не взаимодействующие подсистемы, и в ней найден критерий такой разделимости. Полученные в статьях [3] и [4] результаты формулируются в терминах инвариантности операторов соответствующих систем и их тензоров Нейенхейса и Хаантеса. В статье [2] сформулированы необходимые условия разделимости общих квазилинейных систем с многими независимыми переменными на независимые и треугольно взаимодействующие подсистемы. Эти условия носят алгебраический характер и связаны с инвариантными многочленами линейных операторов квазилинейных систем.

В работе [7] изучается приводимость к блочно-треугольному виду квазилинейных систем общего вида с двумя независимыми переменными. Основные результаты формулируются и доказываются в терминах, аналогичных использованным в статье [3]. Частным случаем полученных в [7] результатов являются леммы 4.3, 4.4 и 4.5 настоящей статьи. Эти леммы играют весьма важную вспомогательную роль и существенно используются и в § 6 при доказательстве основных результатов, и в § 5 для иллюстрации этих результатов на примере системы уравнений газовой динамики.

§ 4. Основные результаты

Прежде чем приступить непосредственно к решению задач 1.3, 2.2 и 1.4, 2.3, введем одно вспомогательное понятие. Рассмотрим произвольное конечномерное линейное пространство L над полем вещественных чисел R и его подпространство

$$L_0 \subseteq L. \quad (4.1)$$

Предположим, что в пространстве L действует линейный оператор

$$\mathcal{B}: L \rightarrow L \quad (4.2)$$

и подпространство L_0 (4.1) инвариантно относительно этого оператора. Обозначим через $P_{\mathcal{B}}(t)$ характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ (4.2). Поскольку подпространство L_0 (4.1) инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2), то этот оператор естественным образом индуцирует на факторпространстве L/L_0 линейный оператор

$$\mathcal{B}_{|L/L_0}: L/L_0 \rightarrow L/L_0. \quad (4.3)$$

При этом характеристический многочлен $P_{\mathcal{B}}(t)$ оператора $\mathcal{B}$ (4.2) раскладывается в произведение

$$P_{\mathcal{B}}(t) = P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(t) P_{\mathcal{B}_{|L/L_0}}(t) \quad (4.4)$$

характеристического многочлена $P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(t)$ ограничения $\mathcal{B}_{|L_0}$ оператора $\mathcal{B}$ (4.2) на подпространство L_0 (4.1) и характеристического многочлена $P_{\mathcal{B}_{|L/L_0}}(t)$ индуцированного оператора $\mathcal{B}_{|L/L_0}$ (4.3) [10, лекция 16]. Аналогичным образом, поскольку подпространство L_0 (4.1) инвариантно относительно линейного оператора $P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(\mathcal{B})$, то этот оператор также индуцирует на факторпространстве L/L_0 линейный оператор

$$P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(\mathcal{B})_{|L/L_0}: L/L_0 \rightarrow L/L_0. \quad (4.5)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть подпространство L_0 (4.1) инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2). Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) если вектор e из линейного пространства L лежит вне подпространства L_0 (4.1), т. е. $e \notin L_0$, то его образ относительно линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$ также лежит вне подпространства L_0 (4.1), т. е. $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e \notin L_0$;
- (б) линейный оператор $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})|_{L/L_0}$ (4.5) невырожден;
- (с) линейное подпространство L_0 (4.1) служит корневым подпространством линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$, принадлежащим его нулевому собственному значению;
- (д) операторы $\mathcal{B}|_{L_0}$ и $\mathcal{B}|_{L/L_0}$ имеют различные собственные значения;
- (е) характеристические многочлены $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)$ и $P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t)$ взаимно просты;
- (ф) у линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2) имеются такие различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что комплексификация $L_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L_0$ линейного подпространства L_0 (4.1) представима в виде прямой суммы

$$L_0^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \quad (4.6)$$

корневых подпространств $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$ (4.2), принадлежащего этим собственным значениям.

- (г) для любых корневых векторов e_1, e_2 оператора $\mathcal{B}$ (4.2), отвечающих одному и тому же собственному значению λ , из принадлежности $e_1 \in L_0^{\mathbb{C}}$ вытекает включение $e_2 \in L_0^{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Будем говорить, что подпространство L_0 (4.1), инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2), собственно замкнуто относительно этого оператора, если выполнено одно из эквивалентных условий леммы 4.1.

Рассмотрим систему (1.1) и отвечающее ей поле линейных операторов $\mathcal{B}$ (2.10), определенных матрицей B_i^j (1.4) этой системы. Как известно, выражение

$$N_B(e_1, e_2) = B^2[e_1, e_2] + [Be_1, Be_2] - B[Be_1, e_2] - B[e_1, Be_2], \quad (4.7)$$

где e_1 и e_2 – произвольные гладкие векторные поля в области M (1.3), задает тензор Нейенхейса поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1) (см. [9] и [11, гл. 1, § 3]), компоненты которого выражаются через коэффициенты B_i^j матрицы (1.4) системы (1.1) формулой

$$(N_B)_{\beta, \gamma}^{\alpha} = \sum_{\delta=1}^n \left(B_{\beta}^{\delta} \frac{\partial B_{\gamma}^{\alpha}}{\partial u^{\delta}} - B_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial B_{\beta}^{\alpha}}{\partial u^{\delta}} + B_{\delta}^{\alpha} \frac{\partial B_{\beta}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}} - B_{\delta}^{\alpha} \frac{\partial B_{\gamma}^{\delta}}{\partial u^{\beta}} \right), \quad (4.8)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$. Этот тензор обладает следующим замечательным свойством: если гладкие сечения e_1 и e_2 являются собственными векторами поля линейных операторов B , отвечающими гладким собственным значениям λ_1 и λ_2 , то

$$N_B(e_1, e_2) = (B - \lambda_1)(B - \lambda_2)[e_1, e_2] + (\lambda_1 - \lambda_2)(e_1(\lambda_2)e_2 - e_2(\lambda_1)e_1). \quad (4.9)$$

Имеют место три леммы, которые являются инструментами для решения задачи 1.3, 2.2.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что в некоторой окрестности точки*

$$m_0 \in M \quad (4.10)$$

найдется флаг гладких векторных подрасслоений

$$L_1 \subsetneq \cdots \subsetneq L_{k-1} \subsetneq TM \quad (4.11)$$

касательного расслоения TM (2.9) размерностей

$$\dim L_1 = n_1, \quad \dots, \quad \dim L_{k-1} = n_{k-1}, \quad (4.12)$$

которые при $j = 1, \dots, k-1$ удовлетворяют включениям

$$BL_j \subseteq L_j, \quad (4.13)$$

$$N_B(L_j, L_j) \subseteq L_j \quad (4.14)$$

и почти всюду собственно замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.10). Тогда система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) к блочно-треугольной системе вида (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

Лемма 4.3 обеспечивает лишь достаточные условия приводимости системы (1.1) к блочно-треугольному виду. В самом деле, условие собственной замкнутости, вообще говоря, необходимым не является. Сформулируем необходимые условия приводимости системы (1.1) к блочно-треугольному виду.

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) к блочно-треугольной системе вида (1.12). Тогда в некоторой окрестности этой точки найдется флаг (4.11) гладких подрасслоений L_j касательного расслоения TM (2.9) размерностей (4.12), для которых при $j = 1, \dots, k-1$ выполняются включения (4.13), (4.14).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

Для удобства изложения введем еще одно вспомогательное понятие. Система (1.1) имеет *строгий тип* в точке m_0 (4.10) области M (1.3), если в этой точке все собственные значения (и вещественные, и комплексные) матрицы B_l^j (1.4) системы (1.1) различны. Если система (1.1) имеет строгий тип во всех точках области M , то она называется системой *строгого типа* в области M .

Все строго гиперболические и строго эллиптические системы принадлежат классу систем строгого типа. Иными словами, класс систем строгого типа является обобщением классов строго гиперболических и строго эллиптических систем.

Рассмотрим систему (1.1) строгого типа и предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) ее поле линейных операторов B (2.10) имеет N_0 различных вещественных собственных значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0} \quad (4.15)$$

и N_1 различных комплексных собственных значений

$$\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}, \quad (4.16)$$

$N_0 + 2N_1 = n$. Гладкие одномерные подрасслоения векторного расслоения TM (2.9), порожденные собственными векторами, принадлежащими вещественным собственным значениям (4.15), обозначим через

$$l_1, \dots, l_{N_0} \subseteq TM. \quad (4.17)$$

Аналогичным образом, гладкие двумерные подрасслоения векторного расслоения TM (2.9), порожденные собственными векторами, отвечающими комплексным собственным значениям (4.16), обозначим через

$$l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1} \subseteq TM \quad (4.18)$$

[10, лекция 18]. Ясно, что векторные подрасслоения (4.17) и (4.18) инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.10). В рассматриваемом случае имеет место

ЛЕММА 4.5. Система уравнений (1.1) строгого типа тогда и только тогда приводится в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) к блочно-треугольной системе вида (1.12), у матрицы $\tilde{B}$ (2.12) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , когда для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (4.17) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (4.18), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (4.15) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (4.16) поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага

$$L_1 = l_{\sigma(1)} \subsetneq L_2 = L_1 \oplus l_{\sigma(2)} \subsetneq \dots \subsetneq L_{N_0+N_1-1} = L_{N_0+N_1-2} \oplus l_{\sigma(N_0+N_1-1)} \subsetneq TM \quad (4.19)$$

в некоторой окрестности этой точки при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

Подобно тому, как леммы 4.3–4.5 являются инструментами для решения задачи 1.3, 2.2, инструментами для решения задачи 1.4, 2.3 являются следующие три утверждения. Аналогом леммы 4.3 служит

ТЕОРЕМА 4.6. Предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) найдется флаг (4.11) гладких векторных подрасслоений L_j касательного расслоения TM (2.9) размерностей (4.12), которые почти всюду существенно замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.10) и при $j = 1, \dots, k - 1$ удовлетворяют включениям (4.13) и

$$N_B(L_j, TM) \subseteq L_j. \quad (4.20)$$

Кроме того, пусть векторное поле A (2.11) системы (1.1) таково, что включение

$$[A, \zeta] \in L_j \quad (4.21)$$

имеет место для любого гладкого сечения ζ векторного подрасслоения L_j , $j = 1, \dots, k - 1$. Тогда в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) система уравнений (1.1) разделяется на k блочно-треугольно взаимодействующих подсистем вида (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

Теорема 4.6 является основным результатом данной работы. Как и лемма 4.3, она обеспечивает лишь достаточные условия разделения системы (1.1) на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы. Условие собственной замкнутости и в данном случае, вообще говоря, необходимым не является. По

аналогии с леммой 4.4 сформулируем необходимые условия разделения системы (1.1) на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы.

ТЕОРЕМА 4.7. *Предположим, что система уравнений (1.1) разделяется в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) на k блочно-треугольно взаимодействующих подсистем вида (1.12). Тогда в некоторой окрестности этой точки найдется флаг (4.11) гладких векторных подрасслоений L_j касательного расслоения ТМ (2.9) размерностей (4.12), которые при $j = 1, \dots, k-1$ удовлетворяют включениям (4.13) и (4.20). Кроме того, тогда для векторного поля A (2.11) системы (1.1) и любого гладкого сечения ζ расслоения L_j , $j = 1, \dots, k-1$, выполняются включения (4.21).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

И, наконец, аналогом леммы 4.5 служит

СЛЕДСТВИЕ 4.8. *Система уравнений (1.1) строгого типа тогда и только тогда разделяется в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) на k блочно-треугольно взаимодействующих подсистем вида (1.12) так, что у матрицы $\tilde{B}$ (2.12) на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, из которых N_0 имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , когда для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (4.17) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (4.18), порожденных собственными векторами, отвечающими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (4.15) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (4.16) поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (4.19) в некоторой окрестности этой точки при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (4.20), а для векторного поля A (2.11) системы (1.1) и любого сечения ζ расслоения L_j – включения (4.21).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в § 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Из свойства (f) леммы 4.1 ясно, что всякое собственное замкнутое относительно линейного оператора подпространство является прямой суммой инвариантных подпространств, порожденных корневыми подпространствами этого оператора. В терминах этих инвариантных подпространств можно сформулировать и доказать обобщения леммы 4.5 и следствия 4.8. При этом подрасслоения L_j из флага (4.19) следует заменить прямыми суммами подрасслоений, порожденных соответствующими корневыми подпространствами поля линейных операторов B (2.10) системы уравнений (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Как отмечалось выше, условие леммы 4.3 и теоремы 4.6 о собственной замкнутости гладких подрасслоений L_j из флага (4.11) относительно поля линейных операторов B (2.10) почти всюду в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) не является необходимым. Его можно ослабить, заменив на собственную замкнутость указанных подрасслоений в точках плотного в некоторой окрестности этой точки множества. При этом доказательства леммы 4.3 и теоремы 4.6, изложенные в § 6, остаются в силе. Важно также отметить, что если условие собственной замкнутости векторных подрасслоений L_j из флага (4.11) относительно поля линейных операторов B (2.10) выполняется почти всюду в окрестности некоторой точки, то, вообще говоря, оно не распространяется по непрерывности на всю окрестность. Простым контрпримером может

служить система в инвариантах Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u^1}{\partial x} = u^2 \frac{\partial u^1}{\partial y}, \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} = u^1 \frac{\partial u^2}{\partial y}. \end{cases}$$

Очевидно, что собственными значениями поля линейных операторов

$$B = \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & u^1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

этой системы являются $\lambda_1 = u^2$ и $\lambda_2 = u^1$, а принадлежащие им собственные векторные поля имеют вид

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Векторные поля e_1 и e_2 порождают одномерные инвариантные подрасслоения l_1 и l_2 , с помощью которых можно двумя способами определить флаг (4.11):

$$l_1 \subsetneq TM, \quad l_2 \subsetneq TM.$$

При этом оба подрасслоения l_1 и l_2 собственнo замкнуты относительно поля линейных операторов B (4.22) во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$ параметров u^1, u^2 , за исключением точек прямой $u^1 = u^2$. В точках этой прямой условие собственной замкнутости подрасслоений l_1 и l_2 относительно поля линейных операторов B (4.22) нарушается, поскольку отвечающие им собственные значения λ_1 и λ_2 совпадают. Таким образом, одномерные инвариантные подрасслоения l_1 и l_2 удовлетворяют условию собственной замкнутости в любой окрестности точки (u, u) почти всюду, но не всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Условия (4.13) допускают следующую алгебраическую интерпретацию. Пусть m принадлежит рассматриваемой окрестности точки m_0 (4.10) и $\mathbb{R}[B(m)]$ – коммутативная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, порожденная оператором $B(m)$ (2.10). Иными словами, $\mathbb{R}[B(m)]$ – это алгебра полиномов с вещественными коэффициентами и переменной $B(m)$, т. е.

$$\mathbb{R}[B(m)] = \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\beta} c_{\alpha} B^{\alpha}(m) \mid c_{\alpha} \in \mathbb{R}; \beta = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Действие поля линейных операторов B (2.10) естественным образом определяет в касательном пространстве $T_m M$ структуру модуля над алгеброй $\mathbb{R}[B(m)]$. В терминах этой структуры условия (4.13) означают, что флаг

$$L_1(m) \subsetneq \dots \subsetneq L_{k-1}(m) \subsetneq T_m M \quad (4.23)$$

состоит из подмодулей модуля $T_m M$ над алгеброй $\mathbb{R}[B(m)]$. Условия (4.14) и (4.20) также допускают алгебраическую интерпретацию. Действительно, тензор Нейенхейса N_B (4.7) задает в касательном пространстве $T_m M$ произведение

$$T_m M \times T_m M \ni (e_1, e_2) \mapsto e_1 \cdot e_2 = N_B(e_1, e_2) \in T_m M, \quad (4.24)$$

которое превращает его в алгебру над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Эта алгебра антикоммутативна, но, вообще говоря, не удовлетворяет тождеству Якоби, т. е. не является алгеброй Ли, и не ассоциативна. В контексте умножения (4.24) условия (4.14) означают, что все подпространства флага (4.23) – это подалгебры, а условия (4.20) означают, что все эти подпространства – идеалы алгебры $T_m M$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Условия (4.21) допускают геометрическую интерпретацию. Действительно, для фиксированного векторного поля A (2.11) и произвольного гладкого сечения ζ касательного расслоения TM формула

$$\nabla_A \zeta = [A, \zeta] \quad (4.25)$$

определяет операцию, удовлетворяющую формуле Лейбница, поскольку, в силу свойств скобки Ли [12, разд. 1.45], для всякой гладкой функции f выполняется тождество

$$\nabla_A(f\zeta) = Af\zeta + f\nabla_A(\zeta).$$

Иными словами, операция ∇_A является ковариантным дифференцированием. В этой терминологии условия (4.21) означают, что для любого номера $j = 1, \dots, k-1$ гладкие сечения ζ подрасслоения L_j из флага (4.11) инвариантны относительно ковариантного дифференцирования ∇_A (4.25), т. е. $\nabla_A \zeta$ также является сечением подрасслоения L_j .

§ 5. Уравнения одномерного течения газа

Для иллюстрации конкретного применения результатов § 4 рассмотрим пример из газовой динамики, а именно одномерное течение сжимаемого газа, давление p которого связано с плотностью ρ и энтропией S уравнением состояния

$$p = p(\rho, S), \quad (5.1)$$

где функция в правой части (5.1) задана в открытой полуплоскости

$$L = \{(\rho, S) \mid 0 < \rho < +\infty, -\infty < S < +\infty\}, \quad (5.2)$$

является гладкой и имеет положительную производную по ρ , т. е.

$$p_\rho(\rho, S) > 0. \quad (5.3)$$

С математической точки зрения течение такого газа описывается тремя функциями

$$u = u(x, t), \quad \rho = \rho(x, t), \quad S = S(x, t), \quad (5.4)$$

соответствующими скорости, плотности и энтропии, которые зависят от эйлеровых координат, пространственной переменной x и времени t и удовлетворяют системе трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{p_S(\rho, S)}{\rho} \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial S}{\partial x} \end{cases} \quad (5.5)$$

[13, гл. 2, § 2, разд. 6]. Здесь x и t – независимые переменные, а u , ρ и S (5.4) – неизвестные функции. Система (5.5) определена в области

$$M = \{(u, \rho, S) \mid -\infty < u, S < +\infty, 0 < \rho < +\infty\} \quad (5.6)$$

зависимых переменных u , ρ , S .

В данном случае неизвестными функциями являются $u^1 = u$, $u^2 = \rho$ и $u^3 = S$, а матрицей (1.4) системы (5.5) служит матрица

$$B = \begin{pmatrix} -u & -\frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho} & -\frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho} \\ -\rho & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Собственные значения поля линейных операторов, заданных матричной функцией (5.7), – это функции

$$\lambda_1 = -c - u, \quad \lambda_2 = c - u, \quad \lambda_3 = -u, \quad (5.8)$$

где

$$c = c(\rho, S) = \sqrt{p_\rho(\rho, S)} \quad (5.9)$$

– скорость звука. В силу неравенства (5.3) собственные значения λ_1 , λ_2 и λ_3 (5.8), (5.9) матричной функции B (5.7) вещественны и различны, т. е. система (5.5) строго гиперболична. Этим вещественным собственным значениям отвечают одномерные инвариантные подпространства l_1 , l_2 и l_3 (4.17), порожденные собственными векторными полями

$$e_1 = c \frac{\partial}{\partial u} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad e_2 = c \frac{\partial}{\partial u} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad e_3 = p_S \frac{\partial}{\partial \rho} + p_\rho \frac{\partial}{\partial S}, \quad (5.10)$$

т. е.

$$l_1 = \text{span}(e_1), \quad l_2 = \text{span}(e_2), \quad l_3 = \text{span}(e_3). \quad (5.11)$$

Собственные векторы (5.10) отвечают различным собственным значениям и потому линейно независимы. Следовательно, базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial}{\partial S}$ можно представить в виде линейных комбинаций собственных векторных полей (5.10), а именно,

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2c}(e_1 + e_2), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{2\rho}(e_1 - e_2), \quad \frac{\partial}{\partial S} = \frac{p_S}{2\rho p_\rho}(e_1 - e_2) - \frac{1}{p_\rho}e_3. \quad (5.12)$$

Используя представления (5.12), условие (5.3) и определение (5.9), выразим скобки Ли $[e_1, e_2]$, $[e_1, e_3]$ и $[e_2, e_3]$ векторных полей e_1 , e_2 и e_3 (5.10) через эти векторные поля:

$$[e_1, e_2] = e_1(c) \frac{\partial}{\partial u} - e_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} - e_2(c) \frac{\partial}{\partial u} - e_2(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} = 2\rho c_\rho \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\rho p_{\rho\rho}}{2p_\rho}(e_1 + e_2), \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= (e_1(p_S) - p_S) \frac{\partial}{\partial \rho} - e_1(p_\rho) \frac{\partial}{\partial S} - e_3(c) \frac{\partial}{\partial u} \\ &= (e_1(p_S) - p_S) \frac{1}{2\rho}(e_1 - e_2) \\ &\quad - e_1(p_\rho) \left(\frac{p_S}{2\rho p_\rho}(e_1 - e_2) - \frac{1}{p_\rho}e_3 \right) - e_3(c) \frac{1}{2c}(e_1 + e_2) \\ &= \left(\frac{\rho p_{\rho S} - p_S}{2\rho} - \frac{p_{\rho\rho} p_S}{2p_\rho} - \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{4p_\rho} \right) e_1 \\ &\quad - \left(\frac{\rho p_{\rho S} - p_S}{2\rho} - \frac{p_{\rho\rho} p_S}{2p_\rho} + \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{4p_\rho} \right) e_2 + \frac{\rho p_{\rho\rho}}{p_\rho} e_3, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= (e_2(p_S) + p_S) \frac{\partial}{\partial \rho} - e_2(p_\rho) \frac{\partial}{\partial S} - e_3(c) \frac{\partial}{\partial u} \\
&= (e_2(p_S) + p_S) \frac{1}{2\rho} (e_1 - e_2) \\
&\quad - e_2(p_\rho) \left(\frac{p_S}{2\rho p_\rho} (e_1 - e_2) - \frac{1}{p_\rho} e_3 \right) - e_3(c) \frac{1}{2c} (e_1 + e_2) \\
&= - \left(\frac{\rho p_\rho S - p_S}{2\rho} - \frac{p_\rho p_S}{2p_\rho} + \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{4p_\rho} \right) e_1 \\
&\quad + \left(\frac{\rho p_\rho S - p_S}{2\rho} - \frac{p_\rho p_S}{2p_\rho} - \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{4p_\rho} \right) e_2 - \frac{\rho p_{\rho\rho}}{p_\rho} e_3. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Тем самым, в силу свойства (4.9) и соотношений (5.13)–(5.15), для тензора Нейенхейса поля линейных операторов (5.7) системы (5.5) справедливы соотношения

$$N_B(e_1, e_2) = -(\rho p_{\rho\rho} - 2p_\rho)(e_2 + e_1), \tag{5.16}$$

$$N_B(e_1, e_3) = -\frac{\rho p_\rho p_{\rho S} - 2p_\rho p_S - \rho p_S p_{\rho\rho}}{2\rho} e_2 + p_\rho e_3 - \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{2} e_1, \tag{5.17}$$

$$N_B(e_2, e_3) = -\frac{\rho p_\rho p_{\rho S} - 2p_\rho p_S - \rho p_S p_{\rho\rho}}{2\rho} e_1 - p_\rho e_3 - \frac{p_S p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho S}}{2} e_2, \tag{5.18}$$

которые можно получить и непосредственно с помощью формул (4.8).

Воспользуемся полученными соотношениями (5.16)–(5.18) и исследуем возможность приведения системы (5.5) к блочно-треугольному виду, а также возможность ее разделения на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы.

Для исследования возможности приведения системы (5.5) к блочно-треугольному виду воспользуемся леммой 4.5. В рассматриваемом случае имеем $k = n = N_0 = 3$ и $N_1 = 0$. Положим $\sigma = \text{Id} \in S_3$. Тогда в соответствии с определениями (4.19) и (5.11) подрасслоение L_1 порождается векторным полем e_1 , а подрасслоение L_2 – векторными полями e_1 и e_2 . Очевидно, что, согласно равенству (5.16), для построенного флага

$$L_1 = l_1 \subsetneq L_2 = L_1 \oplus l_2 \subsetneq TM \tag{5.19}$$

и тензора Нейенхейса N_B поля линейных операторов B (5.7) системы (5.5) выполняется включение

$$N_B(L_2, L_2) \subseteq L_2. \tag{5.20}$$

Таким образом, поскольку $N_B(L_1, L_1) = 0$, то все условия леммы 4.5 выполнены, и, следовательно, система (5.5) всегда приводится к треугольному виду (1.12) с $k = n = 3$, $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. Построим явным образом соответствующую замену переменных (2.2) и выполним это приведение.

В качестве $\tilde{u}^1$ и $\tilde{u}^3$ выберем

$$\tilde{u}^1(u, \rho, S) = \rho, \quad \tilde{u}^3(u, \rho, S) = S, \tag{5.21}$$

а в качестве $\tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u, \rho, S)$ выберем интеграл векторного поля e_2 , т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению первого порядка

$$e_2 \tilde{u}^2 = c \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u} - \rho \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \rho} = 0. \tag{5.22}$$

В частности, уравнению (5.22) удовлетворяет функция

$$\tilde{u}^2(u, \rho, S) = u + F(\rho, S), \quad (5.23)$$

где

$$F(\rho, S) = \int \frac{c(\rho, S)}{\rho} d\rho \quad (5.24)$$

– первообразная функции $c(\rho, S)/\rho$ по переменной ρ . Тем самым, с помощью (5.21), (5.23) и (5.24) определена замена переменных

$$u = \tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3), \quad \rho = \tilde{u}^1, \quad S = \tilde{u}^3. \quad (5.25)$$

В результате подстановки выражений (5.25) в левую и правую части уравнений системы (5.5) получим соотношения

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial t} - \frac{c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} - F_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} \\ &= -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \left(\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} - \frac{c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - F_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x} \right) \\ & \quad - \frac{p_{\tilde{u}^1}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - \frac{p_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}, \\ & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - \tilde{u}^1 \left(\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} - \frac{c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - F_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x} \right), \\ & \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} = -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}. \end{aligned} \right. \quad (5.26)$$

По определению (5.9) функции $c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)$ соотношения (5.26) равносильны системе

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) - c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - \tilde{u}^1 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} + \tilde{u}^1 F_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) \tilde{u}^3, \\ & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial t} = -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) + c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} \\ & \quad - \left(\frac{p_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)}{\tilde{u}^1} - c(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) F_{\tilde{u}^3}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3) \right) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}, \\ & \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} = -(\tilde{u}^2 - F(\tilde{u}^1, \tilde{u}^3)) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}. \end{aligned} \right. \quad (5.27)$$

Полученная система (5.27) имеет верхнюю треугольную матрицу, т.е. посредством замены переменных (5.25) система (5.5) уравнений газовой динамики всегда приводится к треугольному виду (5.27). В частности, в случае политропного газа уравнение состояния (5.1) задается формулой

$$p = \frac{A^2(S)}{\gamma} \rho^\gamma, \quad (5.28)$$

где $A(S)$ – некоторая положительная функция одной переменной, а γ – вещественная постоянная, большая единицы, $\gamma > 1$ [13, гл. 2, § 2, разд. 9]. Для уравнения состояния (5.28) скорость звука c (5.9) выражается равенством

$$c = c(\rho, S) = A(S) \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (5.29)$$

а функция $F(\rho, S)$ (5.24) – равенством

$$F(\rho, S) = A(S) \frac{2\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\gamma-1}. \quad (5.30)$$

Поэтому в случае политропного газа согласно (5.28)–(5.30) система (5.27) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = - \left(\tilde{u}^2 - A(\tilde{u}^3)(\tilde{u}^1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x} - \tilde{u}^1 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} + A'(\tilde{u}^3) \frac{2(\tilde{u}^1)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial t} = - \left(\tilde{u}^2 - A(\tilde{u}^3)(\tilde{u}^1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} - A(\tilde{u}^3) A'(\tilde{u}^3) \frac{2(\tilde{u}^1)^{\gamma-1}}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} = - \left(\tilde{u}^2 - A(\tilde{u}^3) \frac{2(\tilde{u}^1)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как известно, система (5.5) тогда и только тогда приводится к диагональному виду (1.7) с $k = n = 3$, $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$, т. е. к инвариантам Римана, когда для тензора Нейенхейса N_B поля линейных операторов B (5.7) этой системы и подрасслоений l_1 , l_2 и l_3 (5.11) справедливы включения

$$N_B(l_1, l_2) \subseteq l_1 \oplus l_2, \quad N_B(l_1, l_3) \subseteq l_1 \oplus l_3, \quad N_B(l_2, l_3) \subseteq l_2 \oplus l_3 \quad (5.32)$$

(см. [3]). Непосредственная проверка показывает, что в силу равенства (5.16) первое включение выполнено, а в силу равенств (5.17) и (5.18) как второе, так и третье включение (5.32) равносильно представимости правой части уравнения состояния (5.1) в виде

$$p(\rho, S) = G \left(a(S) - \frac{1}{\rho} \right), \quad (5.33)$$

где $G = G(X)$ – возрастающая гладкая функция и $a = a(S)$ – произвольная гладкая функция. Таким образом, систему (5.5) можно привести к треугольному виду для любой гладкой функции $p(\rho, S)$ (5.1)–(5.3), а к диагональному – лишь для функции специального вида (5.33). Этот факт можно рассматривать в качестве иллюстрации того, что условия приводимости системы (1.1) к блочно-треугольному виду (1.12) менее ограничительны по сравнению с условиями приводимости этой системы к блочно-диагональному виду (1.7).

Исследуем возможность разделения системы (5.5) на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы. Так как система (5.5) строго гиперболична, то все одномерные векторные подрасслоения касательного пространства TM (2.9), инвариантные относительно поля линейных операторов B (5.7) системы (5.5), исчерпываются подрасслоениями (5.11), а двумерные – подрасслоениями

$$l_1 \oplus l_2, \quad l_1 \oplus l_3, \quad l_2 \oplus l_3. \quad (5.34)$$

При этом по построению как подрасслоения (5.11), так и подрасслоения (5.34) являются собственно замкнутыми. Число уравнений системы (5.5) равно трем, $n = 3$, и если она каким-либо образом разделяется на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12), то возможное число k таких подсистем равно либо двум, т. е. $k = 2$, либо трем, т. е. $k = 3$.

Начнем со случая $k = 2$. При этом размер “нижней” независимой подсистемы исчерпывается двумя возможностями: он либо равен единице, и тогда $n_1 = 2$, либо двум, и тогда $n_1 = 1$. По теоремам 4.6 и 4.7 для того, чтобы система (5.5) допускала выделение “нижней независимой” подсистемы в случае $n_1 = 2$, необходимо и достаточно, чтобы среди подрасслоений (5.34) нашлось хотя бы одно, для которого выполняется одно соответствующее ему включение из набора

$$\begin{aligned} N_B(l_1 \oplus l_2, TM) &\subseteq l_1 \oplus l_2, & N_B(l_1 \oplus l_3, TM) &\subseteq l_1 \oplus l_3, \\ N_B(l_2 \oplus l_3, TM) &\subseteq l_2 \oplus l_3. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Аналогичным образом, чтобы система (5.5) допускала выделение “нижней независимой” подсистемы в случае $n_1 = 1$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из подрасслоений (5.11) удовлетворяло одному из трех включений

$$N_B(l_1, TM) \subseteq l_1, \quad N_B(l_2, TM) \subseteq l_2, \quad N_B(l_3, TM) \subseteq l_3. \quad (5.36)$$

Первое включение (5.35) не может быть выполнено, поскольку в силу равенств (5.17), (5.18) и неравенства (5.3) мы имеем $N_B(e_1, e_3) \not\subseteq l_1 \oplus l_2$, $N_B(e_2, e_3) \not\subseteq l_1 \oplus l_2$. Выполнение второго включения (5.35) в силу равенств (5.16)–(5.18) эквивалентно системе трех уравнений

$$\rho p_{\rho\rho} - 2p_\rho = 0, \quad p s p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho s} = 0, \quad p_\rho p_s = 0. \quad (5.37)$$

Согласно неравенству (5.3), из третьего уравнения (5.37) вытекает равенство

$$p_s = 0. \quad (5.38)$$

При этом второе уравнение (5.37) превращается в тождество, а первое равносильно представимости уравнения состояния (5.1) в виде

$$p = p(\rho) = \frac{A^2}{3} \rho^3, \quad (5.39)$$

где A – положительная постоянная. Иными словами, газ является политропным, причем в правой части уравнения состояния (5.28) показатель γ равен 3. Выполнение третьего включения (5.35) также эквивалентно уравнениям (5.37) и сводится к представлению (5.39). Таким образом, по теоремам 4.6 и 4.7 система уравнений (5.5) тогда и только тогда разделяется на две блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12) с $n_1 = 2$, когда уравнение состояния (5.1) представимо в виде (5.39), т.е. система (5.5) описывает течение политропного газа с показателем $\gamma = 3$.

Выполнение первого включения (5.36) невозможно, поскольку в силу равенства (5.17) и неравенства (5.3) $N_B(e_1, e_3) \not\subseteq l_1$. Аналогичным образом, выполнение второго включения (5.36) невозможно, поскольку в силу равенства (5.18) и неравенства (5.3) $N_B(e_2, e_3) \not\subseteq l_2$. Выполнение третьего включения (5.36) в силу равенств (5.17) и (5.18) эквивалентно системе двух уравнений

$$p s p_{\rho\rho} - p_\rho p_{\rho s} = 0, \quad p_\rho p_s = 0. \quad (5.40)$$

Из второго уравнения (5.40) согласно неравенству (5.3), как и выше, вытекает равенство (5.38), в силу которого первое уравнение (5.40) превращается в тождество. Таким образом, по теоремам 4.6 и 4.7 система уравнений (5.5) тогда и

только тогда разделяется на две блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12) с $n_1 = 1$, когда для правой части уравнения состояния (5.1) выполняется равенство (5.38). При этом в результате замены переменных

$$u = \tilde{u}^2, \quad \rho = \tilde{u}^3, \quad S = \tilde{u}^1$$

система (5.5) приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = -\tilde{u}^2 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial t} = -\tilde{u}^2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x} - \frac{p_\rho(\tilde{u}^3)}{\tilde{u}^3} \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} = -\frac{\partial(\tilde{u}^3 \tilde{u}^2)}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.41)$$

Два последних уравнения полученной системы (5.41) образуют независимую подсистему.

Теперь рассмотрим случай, когда система (5.5) допускает разделение на три треугольно взаимодействующие уравнения вида (1.12), т. е. $k = 3$, $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. По следствию 4.8 для этого необходимо и достаточно найти такую подстановку $\sigma \in S_3$, чтобы флаг

$$L_1 = l_{\sigma(1)} \subsetneq L_2 = L_1 \oplus l_{\sigma(2)} \subsetneq TM$$

удовлетворял включениям (4.20). Как было установлено выше при рассмотрении включений (5.35), двумерным подрасслоением L_2 , для которого выполняется включение (4.20) с $j = 2$, могут служить только два подрасслоения, а именно $l_1 \oplus l_3$ и $l_2 \oplus l_3$. Аналогичным образом, выше при рассмотрении включений (5.36) было установлено, что одномерным подрасслоением L_1 , для которого выполняется включение (4.20) с $j = 1$, может служить лишь одно подрасслоение, а именно l_3 . Поэтому выберем в качестве $\sigma \in S_3$ такую подстановку, для которой

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 1.$$

В результате, опираясь на проведенные выше выкладки, заключаем, что по следствию 4.8 система (5.5) тогда и только тогда допускает разделение на три треугольно взаимодействующих уравнения вида (1.12), когда правая часть уравнения состояния (5.1) имеет вид (5.39), т. е. система (5.5) описывает течение политропного газа с показателем $\gamma = 3$. При этом в результате замены переменных

$$u = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{u}^3}{2}, \quad \rho = \frac{\tilde{u}^3 - \tilde{u}^2}{2A}, \quad S = \tilde{u}^1$$

система (5.5) приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = -\frac{\tilde{u}^2 + \tilde{u}^3}{2} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial t} = -\tilde{u}^2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial t} = -\tilde{u}^3 \frac{\partial \tilde{u}^3}{\partial x} \end{cases} \quad (5.42)$$

[13, гл. 2, § 2, разд. 9]. Каждое из двух последних уравнений полученной системы (5.42) независимо от остальных уравнений. Таким образом, в случае (5.39) течения политропного газа с показателем $\gamma = 3$ система (5.5) разделяется на три треугольно взаимодействующих уравнения, два из которых независимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Как известно, система (5.5) тогда и только тогда разделяется на $k = n = 3$ не взаимодействующих уравнений, когда тензор Нейенхейса N_B поля линейных операторов B (5.7) обращается в нуль (см. [4], а также [8] и [9]). Но в силу равенств (5.17), (5.18) и неравенства (5.3) в рассматриваемом случае тензор Нейенхейса N_B всегда отличен от нуля. Таким образом, система (5.5) не разделяется на не взаимодействующие уравнения ни для каких правых частей уравнения состояния (5.1), в то время как ее можно разделить на три треугольно взаимодействующих уравнения (5.42) в случае (5.39). Это иллюстрирует тот факт, что условия разделения системы (1.1) на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12), (1.13) менее ограничительны по сравнению с условиями разделения этой системы на блочно-не взаимодействующие подсистемы вида (1.7), (1.10).

§ 6. Доказательства

В § 4 семь утверждений, требующих доказательства, а именно леммы 4.1, 4.3–4.5, теоремы 4.6 и 4.7 и следствие 4.8. Начнем с леммы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Очевидно, что (a) $\iff$ (b) и (d) $\iff$ (e). Чтобы доказать равносильность условий (a), (c), (d), (f) и (g), достаточно установить цепочку логических зависимостей (f) $\iff$ (g) $\implies$ (a) $\implies$ (c) $\implies$ (d) $\implies$ (f).

(f) $\iff$ (g). Пусть выполнено условие (f). Тогда согласно представлению (4.6) всякое корневое подпространство $\mathcal{R}_{\lambda_j}^B$ линейного оператора B (4.2) либо полностью содержится в комплексном подпространстве L_0^C , т. е. $\mathcal{R}_{\lambda_j}^B \subseteq L_0^C$, либо дизъюнктно ему, т. е. $\mathcal{R}_{\lambda_j}^B \cap L_0^C = 0$. Следовательно, для любых корневых векторов e_1, e_2 оператора B (4.2), отвечающих одному и тому же собственному значению λ , из принадлежности $e_1 \in L_0^C$ в силу представления (4.6) вытекает включение $e_2 \in L_0^C$.

Обратно, пусть выполнено условие (g). Рассмотрим ограничение $B|_{L_0}$ оператора B (4.2) на инвариантное подпространство L_0 (4.1). Обозначим все его различные собственные значения через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и разложим комплексификацию L_0^C инвариантного подпространства L_0 (4.1) в прямую сумму корневых подпространств $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}}$ оператора $B|_{L_0}$, отвечающих этим собственным значениям:

$$L_0^C = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}} \quad (6.1)$$

[10, лекция 17, предложение 5]. Очевидно, что корневые подпространства $\mathcal{R}_{\lambda_1}^B, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^B$ оператора B (4.2) и корневые подпространства $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}}$ оператора $B|_{L_0}$ связаны соотношениями $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^B \cap L_0^C, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^B \cap L_0^C$. А поскольку из выполнения условия (g) следует, что $\mathcal{R}_{\lambda_1}^B = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}} \cup L_0^C, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^B = \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}} \cup L_0^C$, то

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}^{B|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^B, \quad \dots, \quad \mathcal{R}_{\lambda_s}^{B|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^B. \quad (6.2)$$

Из представления (6.1) и равенств (6.2) вытекает разложение (4.6).

(g) $\implies$ (a). Пусть выполнено условие (g). Рассмотрим различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_v$ линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2). Разложим комплексификацию $L^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ линейного пространства L в прямую сумму

$$L^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \oplus \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_v}^{\mathcal{B}}, \quad (6.3)$$

корневых подпространств линейного оператора $\mathcal{B}$ (4.2), принадлежащих этим собственным значениям. При этом в силу установленной выше равносильности условий (g) и (f) можно, не ограничивая общности, считать, что $L_0^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}$. Положим $L_1 = \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_v}^{\mathcal{B}}$. Тогда $L^{\mathbb{C}} = L_0^{\mathbb{C}} \oplus L_1$ и любой вектор $e \in L$ однозначно раскладывается на соответствующие проекции $e_0 \in L_0^{\mathbb{C}}$ и $e_1 \in L_1$, т. е.

$$e = e_0 + e_1. \quad (6.4)$$

Предположим, что вектор e не принадлежит L_0 . Тогда в разложении (6.4) этого вектора проекция e_1 отлична от нуля. По условию леммы комплексификация $L_0^{\mathbb{C}}$ подпространства L_0 (4.1) инвариантна относительно оператора $\mathcal{B}$ (4.2), и поэтому $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e_0 \in L_0^{\mathbb{C}}$. Подпространство L_1 по построению также инвариантно относительно оператора $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})$, который невырожден на этом подпространстве [10, лекция 17, предложение 4]. Следовательно, по теореме Гамильтона–Кэли из разложения (6.4) вытекает, что

$$P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e = P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e_0 + P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e_1 = P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e_1,$$

причем вектор $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e_1$ лежит в подпространстве L_1 и отличен от нуля. Таким образом, получаем, что $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e \notin L_0^{\mathbb{C}}$, а следовательно, $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e \notin L_0$.

(a) $\implies$ (c). Пусть выполнено условие (a). По теореме Гамильтона–Кэли $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})L_0 = 0$. Следовательно, подпространство L_0 (4.1) содержится в корневом подпространстве $\mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$, принадлежащем нулевому собственному значению линейного оператора $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})$, т. е. $L_0 \subseteq \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$. Предположим, что условие (c) не выполнено, т. е. $L_0 \neq \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$. Тогда найдется такой вектор $e \in \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$, что $e \notin L_0$. По свойству (a) из соотношения $e \notin L_0$ вытекает, что $P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})e \notin L_0$. Поэтому $(P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B}))^{\alpha}e \neq 0$ для любого натурального числа α . Это противоречит включению $e \in \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$, и, следовательно, $L_0 = \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|L_0}(\mathcal{B})}$.

(c) $\implies$ (d). Пусть выполнено условие (c). Предположим, что условие (d) не выполнено, т. е. найдется число λ , являющееся собственным значением как оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$, так и оператора $\mathcal{B}|_{L/L_0}$. В силу разложения (4.4) множество $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различных собственных значений линейного оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$ можно дополнить до множества $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_v$ различных собственных значений линейного оператора $\mathcal{B}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = \lambda_1$. Поскольку алгебраическая кратность собственного значения совпадает с размерностью принадлежащего ему корневого подпространства [10, лекция 17, предложение 6], то, в силу разложения (6.1) комплексификации $L_0^{\mathbb{C}}$ инвариантного подпространства L_0 (4.1) в прямую сумму корневых подпространств оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$, для характеристического многочлена этого оператора по основной теореме алгебры имеет место представление

$$P_{\mathcal{B}|L_0}(t) = (t - \lambda_1)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|L_0}} \dots (t - \lambda_s)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|L_0}}. \quad (6.5)$$

Аналогичным образом, в силу разложения (6.3) для характеристического многочлена оператора $\mathcal{B}$ имеет место представление

$$P_{\mathcal{B}}(t) = (t - \lambda_1)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}} \dots (t - \lambda_s)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}} (t - \lambda_{s+1})^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}}} \dots (t - \lambda_v)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_v}^{\mathcal{B}}}. \quad (6.6)$$

Из сделанного предположения, представлений (6.5), (6.6) и разложения (4.4) вытекает, что $\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}_{|L_0}} < \dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$, т. е. $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}_{|L_0}} \subsetneq \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$. Иными словами, найдется корневой вектор e , отвечающий собственному значению λ_1 , который лежит в корневом подпространстве $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$, но не лежит в корневом подпространстве $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}_{|L_0}}$ оператора $\mathcal{B}_{|L_0}$. Тем самым этот корневой вектор согласно разложению (6.1) лежит вне комплексификации $L_0^{\mathbb{C}}$ инвариантного подпространства L_0 (4.1), т. е. $e \notin L_0^{\mathbb{C}}$. В силу разложения (6.5) моном $t - \lambda_1$ делит многочлен $P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(t)$. Поэтому по определению корневого вектора найдется такое натуральное число α , что $(P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(\mathcal{B}))^{\alpha} e = 0$, откуда по свойству (с) вытекает включение $e \in L_0^{\mathbb{C}}$. Получили противоречие.

(d) $\implies$ (f). Пусть выполняется свойство (d) и $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – различные собственные значения линейного оператора $\mathcal{B}_{|L_0}$, а $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_v$ – различные собственные значения линейного оператора $\mathcal{B}_{|L/L_0}$. Тогда поскольку алгебраическая кратность собственных значений совпадает с размерностью принадлежащих им корневых подпространств [10, лекция 17, предложение 6], то для характеристических многочленов $P_{\mathcal{B}_{|L_0}}(t)$ и $P_{\mathcal{B}_{|L/L_0}}(t)$ операторов $\mathcal{B}_{|L_0}$ и $\mathcal{B}_{|L/L_0}$ по основной теореме алгебры справедливости представления (6.5) и

$$P_{\mathcal{B}_{|L/L_0}}(t) = (t - \lambda_{s+1})^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}_{|L/L_0}}} \dots (t - \lambda_v)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_v}^{\mathcal{B}_{|L/L_0}}}, \quad (6.7)$$

в которых $\lambda_{j_1} \neq \lambda_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$. Отсюда в силу разложения (4.4) и представления (6.6) для $j = 1, \dots, s$ получаем $\dim \mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}_{|L_0}} = \dim \mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}}$, т. е. выполняются равенства (6.2). Из разложения (6.1) и равенств (6.2) вытекает представление (4.6). Лемма 4.1 доказана.

Докажем леммы 4.3–4.5, связанные с задачей 1.3, 2.2. Начнем с леммы 4.3. Ключевым моментом ее доказательства служит

ЛЕММА 6.1 (О. И. Богоявленский). *Рассмотрим произвольный полином*

$$P(m; t) = \sum_{\alpha=0}^N a_{\alpha}(m) t^{\alpha} \quad (6.8)$$

с переменной t и гладкими коэффициентами, заданными в области M (1.3), и поле линейных операторов B (2.10). Тогда тензор Нейенхейса $N_P(m; B)$ поля линейных операторов $P(m; B)$ и тензор Нейенхейса N_B поля линейных операторов B связаны формулой

$$\begin{aligned} N_P(m; B)(e_1, e_2) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^N a_{\alpha}(m) a_{\beta}(m) \sum_{1 \leq \gamma < \alpha, 1 \leq \delta < \beta} B^{\alpha+\beta-\gamma-\delta-2} N_B(B^{\gamma} e_1, B^{\delta} e_2) \\ &+ \sum_{\alpha=0}^N ((P(m; B)e_1)(a_{\alpha}) B^{\alpha} e_2 - (P(m; B)e_2)(a_{\alpha}) B^{\alpha} e_1 \\ &- e_1(a_{\alpha}) P(m; B) B^{\alpha} e_2 + e_2(a_{\alpha}) P(m; B) B^{\alpha} e_1). \end{aligned} \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4, лемма 1], или [14, теорема 3.1], или [15, замечание 3].

Ниже, следуя руководству [11, гл. 1, § 1], для всякого гладкого отображения f будем обозначать через f_* дифференциал этого диффеоморфизма, а через f^* – отображение, сопряженное к дифференциалу f_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Рассмотрим в окрестности точки m_0 , в которой выполняются условия леммы, ограничение $B|_{L_j}$ поля линейных операторов B (2.10) на инвариантное подрасслоение L_j с номером $j = 1, \dots, k-1$ и отвечающий этому ограничению характеристический многочлен $P_{B|_{L_j}}(t)$. По теореме Гамильтона–Кэли ограничение поля линейных операторов $P_{B|_{L_j}}(B)$ на подрасслоение L_j обращается в нуль, т. е. $P_{B|_{L_j}}(B)|_{L_j} = 0$, и все векторы инвариантного подпространства L_j являются собственными векторами оператора $P_{B|_{L_j}}(B)$, принадлежащими нулевому собственному значению. Следовательно, согласно свойству (4.9) тензора Нейенхейса для любых гладких сечений e_1 и e_2 векторного подрасслоения $L_j \subseteq TM$ имеем

$$N_{P_{B|_{L_j}}(B)}(e_1, e_2) = P_{B|_{L_j}}(B)^2[e_1, e_2]. \quad (6.10)$$

В силу леммы 6.1 и условий (4.13), (4.14) для тензора Нейенхейса $N_{P_{B|_{L_j}}(B)}$ поля линейных операторов $P_{B|_{L_j}}(B)$ выполняется включение

$$N_{P_{B|_{L_j}}(B)}(L_j, L_j) \subseteq L_j. \quad (6.11)$$

Из (6.10) и (6.11) заключаем, что для сечений e_1 и e_2 справедливо включение

$$P_{B|_{L_j}}(B)^2[e_1, e_2] \in L_j. \quad (6.12)$$

По условию леммы подрасслоение L_j почти всюду собственнo замкнуто относительно поля линейных операторов B (2.10), и поэтому согласно лемме 4.1, (а), если $[e_1, e_2] \notin L_j$, то включение (6.12) невозможно. Следовательно, для любых гладких сечений e_1 и e_2 подрасслоения $L_j \subseteq TM$ почти всюду выполняется включение

$$[e_1, e_2] \in L_j. \quad (6.13)$$

По непрерывности включение (6.13) выполняется во всех точках рассматриваемой окрестности. Иными словами, для всех индексов $j = 1, \dots, k-1$ подрасслоения $L_j \subseteq TM$ инволютивны в некоторой окрестности точки m_0 (4.10). Таким образом, можно применить теорему Фробениуса [12, разд. 1.60]. С ее помощью непосредственной индукцией по k устанавливается, что в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) определены такие гладкие функции

$$\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{n_1}, \dots, \tilde{u}^{n_{k-1}+1}, \dots, \tilde{u}^n, \quad (6.14)$$

которые в некоторой окрестности $U(m_0) \subseteq M$ этой точки образуют локальную систему координат $(U(m_0), \varphi)$, где

$$\begin{aligned} \varphi: U(m_0) \ni m \mapsto (\tilde{u}^1(m), \dots, \tilde{u}^{n_1}(m), \dots, \tilde{u}^{n_{k-1}+1}(m), \dots, \tilde{u}^n(m)) \\ \in \varphi(U(m_0)) \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

и удовлетворяют равенствам

$$L_\alpha \lrcorner d\tilde{u}^j = 0 \quad (6.16)$$

при $\alpha = 1, \dots, k-1$ и $j = n_\alpha + 1, \dots, n$. Согласно (6.16) в построенной системе локальных координат $(U(m_0), \varphi)$ (6.15) интегральные поверхности подрасслоений L_α задаются уравнениями

$$\tilde{u}^{n_\alpha+1} = \text{const}, \dots, \tilde{u}^{n_{\alpha+1}} = \text{const}, \dots, \tilde{u}^{n_{k-1}+1} = \text{const}, \dots, \tilde{u}^n = \text{const}, \quad (6.17)$$

$\alpha = 1, \dots, k-1$. При этом касательное пространство к интегральной поверхности (6.17), которое по построению совпадает с подпространством L_α , порождается базисными векторами

$$(\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \dots, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{n_\alpha}},$$

т. е.

$$L_\alpha = \text{span} \left((\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \dots, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{n_\alpha}} \right) \quad (6.18)$$

для $\alpha = 1, \dots, k-1$. Выберем в качестве диффеоморфизма (2.1) $f = \varphi^{-1}$. Поскольку по условию леммы подрасслоения L_α инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1), то выбранный диффеоморфизм f переводит поле B в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), имеющих верхнюю блочно-треугольную матрицу $\tilde{B}_l^j$ (2.12), у которой на главной диагонали расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все элементы, расположенные ниже их, равны нулю [10, лекция 16]. Отсюда по лемме 2.1, (а) заключаем, что в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) квазилинейная система приводится к блочно-треугольному виду (1.12). Лемма 4.3 доказана.

Приступим к лемме 4.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.4. Предположим, что система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) к блочно-треугольной системе вида (1.12). По лемме 2.1, (а) найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее ей поле линейных операторов B (2.10) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), матрица $\tilde{B}_l^j$ (2.12) которого имеет соответствующую блочно-треугольную структуру. Рассмотрим подрасслоения $\tilde{L}_j$, порожденные базисными сечениями

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{n_\alpha}}$$

касательного расслоения $T\tilde{M}$ (2.14), т. е.

$$\tilde{L}_j = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{n_\alpha}} \right), \quad (6.19)$$

где $j = 1, \dots, k-1$. Поскольку матрица $\tilde{B}_l^j$ (2.12) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру, то построенные подрасслоения $\tilde{L}_j$ инвариантны относительно отвечающего этой матрице поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13). При этом по построению (6.19) подрасслоения $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{k-1}$ являются гладкими, инволютивными, образуют флаг

$$\tilde{L}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{L}_{k-1} \subsetneq T\tilde{M} \quad (6.20)$$

и имеют размерности

$$\dim \tilde{L}_1 = n_1, \quad \dots, \quad \dim \tilde{L}_{k-1} = n_{k-1}. \quad (6.21)$$

Положим $L_j = f_* \tilde{L}_j$, так что

$$L_j = \text{span} \left(f_* \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, f_* \frac{\partial}{\partial u^{n_j}} \right) \quad (6.22)$$

для $j = 1, \dots, k-1$. По построению подрасслоений $\tilde{L}_j$ (6.19) и L_j (6.22) диффеоморфизм f (2.1) переводит флаг подрасслоений (6.20) во флаг (4.11). Поэтому подрасслоения L_j флага (4.11) являются гладкими, инволютивными [12, разд. 1.55] и инвариантными относительно поля линейных операторов B (2.10). Следовательно, по определению (4.7) тензора Нейенхейса для подрасслоений L_j (6.22) флага (4.11) выполнены включения (4.13), (4.14). Лемма 4.4 доказана.

Далее, перейдем к лемме 4.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.5. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) система уравнений (1.1) приводится к блочно-треугольной системе вида (1.12). По лемме 2.1, (а) найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее системе (1.1) поле линейных операторов B (2.10) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), у матрицы $\tilde{B}_l^j$ (2.12) которого на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Обозначим через $s_1, \dots, s_{N_0+N_1}$ номера первых строк диагональных блоков с соответствующими номерами. Для $j = 1, \dots, N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N_1$ определим $\tilde{l}_j$ как одномерное подрасслоение, порожденное базисным сечением $\frac{\partial}{\partial u^{s_j}}$, если j -й блок имеет размер 1×1 , и как двумерное подрасслоение, порожденное базисными сечениями $\frac{\partial}{\partial u^{s_j}}, \frac{\partial}{\partial u^{s_j+1}}$, если его размер 2×2 . Матрица $\tilde{B}_l^j$ (2.12) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру указанного в условиях леммы типа, и поэтому выбранные подрасслоения порождены собственными векторами, принадлежащими вещественным и комплексным собственным значениям отвечающего ей поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13). Диффеоморфизм (2.1) переводит построенные подрасслоения $l_1, \dots, l_{N_0}, l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ в подрасслоения (4.17), (4.18), которые принадлежат соответствующим вещественным и комплексным собственным значениям поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1). Выберем такую подстановку $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что $l_{\sigma(j)} = f_* \tilde{l}_j$ для $j = 1, \dots, N_0 + N_1$. При этом по построению векторные подрасслоения $\tilde{L}_j$ из флага

$$\tilde{L}_1 = \tilde{l}_1 \subsetneq \tilde{L}_2 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{l}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{L}_{N_0+N_1-1} = \tilde{L}_{N_0+N_1-2} \oplus \tilde{l}_{N_0+N_1-1} \subsetneq T\tilde{M} \quad (6.23)$$

инволютивны, а следовательно, и подрасслоения $L_j = f_* \tilde{L}_j$ из флага (4.19) инволютивны [12, разд. 1.55], и поскольку подрасслоения $l_1, \dots, l_{N_0+N_1}$ инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.10), то их прямые суммы L_j из флага (4.19) также инвариантны. Отсюда по определению (4.7) тензора Нейенхейса получаем включения (4.14). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для некоторой окрестности точки m_0 (4.10), гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (4.17) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (4.18), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (4.15)

и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (4.16) поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1) строгого типа, найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (4.17)–(4.19) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (4.14). Тогда, по построению, подрасслоения L_j из флага (4.19) инвариантны и собственны полны относительно действия этого поля линейных операторов. Тем самым выполнены все условия леммы 4.3, согласно которой система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 к блочно-треугольной системе вида (1.12), так что у матрицы $\tilde{B}$ (2.12) на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, N_0 из которых имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Достаточность доказана.

Лемма 4.5 доказана.

Теперь докажем теоремы 4.6, 4.7 и следствие 4.8, связанные с решением задачи 1.4, 2.3. Начнем с теоремы 4.6. Для ее доказательства потребуются

ЛЕММА 6.2. Пусть Z и Y – квадратные матрицы размеров $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$ соответственно, а X – прямоугольная матрица размера $N_1 \times N_2$. Если характеристические многочлены $P_Y(t)$ и $P_Z(t)$ матриц Y и Z взаимно просты, то матричное уравнение

$$XY = ZX \quad (6.24)$$

имеет единственное решение $X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [16, гл. VIII, § 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) выполнены условия доказываемой теоремы. Тогда в этой окрестности и подавно выполнены все условия леммы 4.3, согласно которой система (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) к блочно-треугольной системе вида (1.12). Более точно, при доказательстве леммы 4.3 в некоторой окрестности $U(m_0) \subseteq M$ точки m_0 (4.10) были построены гладкие функции (6.14), образующие локальную систему координат $(U(m_0), \varphi)$ (6.15) и удовлетворяющие равенствам (6.16) при $\alpha = 1, \dots, k-1$ и $j = n_\alpha + 1, \dots, n$. Тем самым подрасслоения L_α инволютивны, а их интегральные поверхности задаются уравнениями (6.17), $\alpha = 1, \dots, k-1$, так что касательные пространства к этим интегральным поверхностям совпадают с подпространствами L_α и порождаются базисными векторами

$$(\varphi^{-1})^* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}, \dots, (\varphi^{-1})^* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{n_\alpha}},$$

т.е. выполняются представления (6.18). В построенной системе локальных координат $(U(m_0), \varphi)$ (6.15) оператор $\tilde{B}$ (2.13) имеет верхнюю блочно-треугольную матрицу $\tilde{B}_l^j$ (2.12), у которой на главной диагонали расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все элементы, расположенные ниже их, равны нулю. Это равносильно инвариантности подрасслоений $\tilde{L}_j$ (6.19) относительно действия поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с матрицей $\tilde{B}_l^w$ (2.12). Выберем в качестве диффеоморфизма (2.1) $f = \varphi^{-1}$. При этом представление (6.18) записывается в виде (6.22), так что диффеоморфизм f (2.1) переводит подрасслоение $\tilde{L}_j$ (6.19) в подрасслоение

L_j (6.22), т. е. $L_j = f_* \tilde{L}_j$ при $j = 1, \dots, k-1$. По условию доказываемой теоремы векторные подрасслоения L_j из флага (4.11) почти всюду собственнo замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.10). И так как диффеоморфизм f (2.1), (2.2) переводит поле линейных операторов B (2.10) и подрасслоения L_j (6.22) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) и подрасслоения $\tilde{L}_j$ (6.19), то и векторные подрасслоения $\tilde{L}_j$ почти всюду собственнo замкнуты относительно поля линейных операторов $\tilde{B}$, ибо диффеоморфизм отображает множество меры нуль в множество меры нуль. Далее, поскольку диффеоморфизм f (2.1), (2.2) переводит поле линейных операторов B (2.10) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), то тензорные поля N_B и $N_{\tilde{B}}$ связаны соотношениями

$$N_B \left(f_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, f_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta} \right) = f_* N_{\tilde{B}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta} \right) \quad (6.25)$$

при $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. Поэтому в силу условий (4.13) и (4.20) выполняются включения

$$\tilde{B} \tilde{L}_j \subseteq \tilde{L}_j, \quad N_{\tilde{B}}(\tilde{L}_j, T\tilde{U}) \subseteq \tilde{L}_j, \quad (6.26)$$

где $j = 1, \dots, k-1$ и

$$\tilde{U} = \varphi(U(m_0)). \quad (6.27)$$

Согласно лемме 2.1, (b) для доказательства теоремы достаточно установить, что элементы $\tilde{B}_l^w$ матрицы (2.12) и элементы $\tilde{A}^w$ вектора (2.15) удовлетворяют в окрестности $\tilde{U}$ условиям разделения (1.13), т. е. для $j = 0, \dots, k-1$ и $w = n_j + 1, \dots, n_{j+1}$, $l = n_j + 1, \dots, n$ при $\beta = 1, \dots, n_j$

$$\frac{\partial \tilde{B}_l^w}{\partial \tilde{u}^\beta} = 0 \quad (6.28)$$

и

$$\frac{\partial \tilde{A}^w}{\partial \tilde{u}^\beta} = 0. \quad (6.29)$$

Начнем с равенств (6.28). По определению (4.7) тензора Нейенхейса имеем

$$N_{\tilde{B}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right) = \tilde{B}^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] + \left[\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] - \tilde{B} \left[\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] - \tilde{B} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right]. \quad (6.30)$$

Зафиксируем номер $j = 1, \dots, k-1$. Первое слагаемое в правой части соотношения (6.30) равно нулю по определению скобки Ли, а третье слагаемое при $\beta = 1, \dots, n_j$ и $\gamma = n_j + 1, \dots, n$ в силу первого включения (6.26) лежит в подрасслоении $\tilde{L}_j$ (6.19), т. е.

$$\tilde{B}^2 \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] = 0, \quad \tilde{B} \left[\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] \in \tilde{L}_j. \quad (6.31)$$

Из (6.26) на основании (6.30) и (6.31) выводим соотношения

$$\left[\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] - \tilde{B} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} \right] \in \tilde{L}_j \quad (6.32)$$

для $\beta = 1, \dots, n_j$ и $\gamma = n_j + 1, \dots, n$. По определению элементов $\tilde{B}_l^w$ матрицы (2.12) поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) имеем

$$\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\gamma} = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{B}_\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha} \quad (6.33)$$

для $\gamma = 1, \dots, n$, причем в силу блочно-треугольной структуры этой матрицы

$$\tilde{B} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta} = \sum_{\delta=1}^{n_j} \tilde{B}_\beta^\delta \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\delta} \quad (6.34)$$

для $\beta = 1, \dots, n_j$. В силу (6.33), (6.34), (6.19) и определения скобки Ли соотношения (6.32) равносильны векторным равенствам

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=n_j+1}^n \sum_{\delta=1}^{n_j} \tilde{B}_\beta^\delta \frac{\partial \tilde{B}_\gamma^\alpha}{\partial \tilde{u}^\delta} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha} - \sum_{\alpha=n_j+1}^n \frac{\partial \tilde{B}_\gamma^\alpha}{\partial \tilde{u}^\beta} \sum_{\delta=n_j+1}^n \tilde{B}_\alpha^\delta \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\delta} \\ = \sum_{\alpha=n_j+1}^n \left(\sum_{\delta=1}^{n_j} \frac{\partial \tilde{B}_\gamma^\alpha}{\partial \tilde{u}^\delta} \tilde{B}_\beta^\delta - \sum_{\delta=n_j+1}^n \tilde{B}_\delta^\alpha \frac{\partial \tilde{B}_\gamma^\delta}{\partial \tilde{u}^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

для $\beta = 1, \dots, n_j$ и $\gamma = n_j + 1, \dots, n$. Запишем эти равенства в эквивалентной матричной форме. Для этого при $\gamma = n_j + 1, \dots, n$ введем прямоугольные матрицы

$$X_\gamma = \left(\frac{\partial \tilde{B}_\gamma^\alpha}{\partial \tilde{u}^\delta} \right)_{\substack{\alpha=n_j+1, \dots, n \\ \delta=1, \dots, n_j}} \quad (6.36)$$

размера $(n - n_j) \times n_j$, квадратную матрицу

$$Y = (\tilde{B}_\beta^\delta)_{\substack{\delta=1, \dots, n_j \\ \beta=1, \dots, n_j}} \quad (6.37)$$

размера $n_j \times n_j$ и квадратную матрицу

$$Z = (\tilde{B}_\delta^\alpha)_{\substack{\alpha=n_j+1, \dots, n \\ \delta=n_j+1, \dots, n}} \quad (6.38)$$

размера $(n - n_j) \times (n - n_j)$. В результате векторные равенства (6.35) запишутся в виде матричных уравнений

$$X_\gamma Y - Z X_\gamma = 0, \quad (6.39)$$

$\gamma = n_j + 1, \dots, n$. По определению (6.37) Y является матрицей ограничения $\tilde{B}|_{\tilde{L}_j}$ поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) на подрасслоение $\tilde{L}_j$. Аналогичным образом, по определению (6.38) Z является матрицей поля линейных операторов $\tilde{B}|_{T\tilde{U}/\tilde{L}_j}$, индуцированного полем $\tilde{B}$ на факторрасслоении $T\tilde{U}/\tilde{L}_j$. Поскольку по условию доказываемой теоремы векторные подрасслоения $\tilde{L}_j$ (6.19) почти всюду в окрестности $\tilde{U}$ (6.27) собственнo замкнуты относительно поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), то по лемме 4.1, (е) характеристические многочлены матриц Y и Z почти всюду взаимно просты. Следовательно, если в уравнении (6.24) положить $X = X_\gamma$, то по лемме 6.2 получим

$$X_\gamma = 0 \quad (6.40)$$

для $\gamma = n_j + 1, \dots, n$ почти всюду в окрестности $\tilde{U}$. По определению (6.36) матрицы X_γ равенства (6.40) и (6.28) равносильны. Поэтому равенства (6.28) выполняются почти всюду в окрестности $\tilde{U}$ и по непрерывности – во всей окрестности $\tilde{U}$.

Перейдем к установлению равенств (6.29). По свойствам скобки Ли [12, разд. 1.55] для вектора $\tilde{A}$ (2.15), (2.16) приведенной системы (1.12) и векторного поля $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}$ в окрестности $\tilde{U}$ при $\alpha = 1, \dots, n_j$ имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \tilde{A} \right] = \left[(f^{-1})_* f_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, (f^{-1})_* A \right] = (f^{-1})_* \left[f_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, A \right]. \quad (6.41)$$

Из (6.41) согласно представлениям (6.19), (6.22) и условию (4.21) доказываемой теоремы выводим

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \tilde{A} \right] \in (f^{-1})_* L_j = \tilde{L}_j \quad (6.42)$$

при $\alpha = 1, \dots, n_j$. По определению скобки Ли

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \tilde{A} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \sum_{\beta=1}^n \tilde{A}^\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta} \right] = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{A}^\beta}{\partial \tilde{u}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}. \quad (6.43)$$

Из включения (6.42), представлений (6.19) и соотношений (6.43) вытекают равенства (6.29). Теорема 4.6 доказана.

Далее, перейдем к теореме 4.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.7. Предположим, что система уравнений (1.1) разделяется в некоторой окрестности $U(m_0) \subseteq M$ точки m_0 (4.10) на k блочно-треугольно взаимодействующих подсистем вида (1.12). По лемме 2.1, (b) найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее ей поле линейных операторов B (2.10) и векторное поле A (2.11) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13) с соответствующей блочно-треугольной матрицей $\tilde{B}_i^j$ (2.12) и векторное поле $\tilde{A}$ (2.15), удовлетворяющие условиям разделения (1.13). Рассмотрим подрасслоения $\tilde{L}_j$ касательного расслоения $T\tilde{M}$ (2.14), построенные согласно (6.19). Поскольку матрица $\tilde{B}_i^j$ (2.12) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру, то построенные подрасслоения инвариантны относительно отвечающего этой матрице поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13). При этом, по построению (6.19), подрасслоения $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{k-1}$ гладки, инволютивны, образуют флаг (6.20) и имеют размерности (6.21). Положим $L_j = f_* \tilde{L}_j$, так что для $j = 1, \dots, k-1$ имеют место представления (6.22). По построению подрасслоений $\tilde{L}_j$ (6.19) и L_j (6.22) диффеоморфизм f (2.1) переводит флаг подрасслоений (6.20) во флаг (4.11). Поэтому подрасслоения L_j этого флага гладки, инволютивны [12, разд. 1.55] и инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.10), т.е. удовлетворяют включению (4.13). Далее, поскольку диффеоморфизм f (2.1), (2.2) переводит поле линейных операторов B (2.10) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), то тензорные поля N_B и $N_{\tilde{B}}$ связаны соотношениями (6.25) при $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. По определению (4.7) тензора Нейенхайса из этих соотношений в силу представлений (6.22) и условий разделения (1.13) вытекает, что подрасслоения L_j (6.22) из флага (4.11) удовлетворяют включению (4.20). Аналогичным образом, диффеоморфизм f (2.1), (2.2)

переводит векторное поле $\tilde{A}$ (2.15) приведенной системы (1.12) в векторное поле A (2.11) исходной системы (1.1), т.е. $f_*\tilde{A} = A$. Поэтому в силу тождеств (6.41) и (6.43) для $\alpha = 1, \dots, n$ выводим

$$\left[f_* \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, A \right] = f_* \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \tilde{A} \right] = f_* \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \sum_{\beta=1}^n \tilde{A}^\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta} \right] = f_* \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{A}^\beta}{\partial \tilde{u}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}. \quad (6.44)$$

Полученные равенства (6.44) вместе с представлениями (6.22) и условиями разделения (1.13) обеспечивают выполнение включений (4.21). Теорема 4.7 доказана.

И, наконец, займемся следствием 4.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.8. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (4.10) система уравнений (1.1) разделяется на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12). По лемме 2.1, (b) найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее системе (1.1) поле линейных операторов B (2.10) и векторное поле A (2.11) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13), у матрицы $\tilde{B}_l^j$ (2.12) которого на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, N_0 из которых имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , и векторное поле $\tilde{A}$ (2.15), удовлетворяющие условиям разделения (1.13). Обозначим через $s_1, \dots, s_{N_0+N_1}$ номера первых строк диагональных блоков с соответствующими номерами. Для $j = 1, \dots, N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N_1$ определим $\tilde{l}_j$ как одномерное подрасслоение, порожденное базисным сечением $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{s_j}}$, если j -й блок имеет размер 1×1 , и как двумерное подрасслоение, порожденное базисными сечениями $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{s_j}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{s_j+1}}$, если его размер 2×2 . Матрица $\tilde{B}_l^j$ (2.12) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру указанного в условиях теоремы типа, и поэтому выбранные подрасслоения порождены собственными векторами, принадлежащими вещественным и комплексным собственным значениям отвечающего ей поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.13). Диффеоморфизм (2.1) переводит построенные подрасслоения $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{N_0}, \tilde{l}_{N_0+1}, \dots, \tilde{l}_{N_0+N_1}$ в подрасслоения (4.17), (4.18), которые принадлежат соответствующим вещественным и комплексным собственным значениям поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1). Выберем такую подстановку $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что $l_{\sigma(j)} = f_*\tilde{l}_j$ для $j = 1, \dots, N_0 + N_1$. При этом по построению векторные подрасслоения $\tilde{L}_j$ из флага (6.23) инволютивны, а следовательно, и подрасслоения $L_j = f_*\tilde{L}_j$ из флага (4.19) инволютивны [12, разд. 1.55], и поскольку подрасслоения $l_1, \dots, l_{N_0+N_1}$ инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.10), то и их прямые суммы L_j из флага (4.19) также инвариантны. Отсюда согласно определению (4.7) тензора Нейенхейса и условиям разделения (1.13) аналогично доказательству теоремы 4.7 выводим включения (4.20) и (4.21). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для некоторой окрестности точки m_0 (4.10), гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (4.17) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (4.18), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (4.15) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (4.16) поля линейных операторов B (2.10) системы (1.1) строгого типа, найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (4.17)–(4.19) при

$j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (4.20). Пусть также для векторного поля A (2.11) системы (1.1) и всякого сечения ζ подрасслоения L_j выполняются включения (4.21). Тогда по построению подрасслоения L_j из флага (4.19) инвариантны и собственно полны относительно действия поля линейных операторов B (2.10). Тем самым выполнены все условия теоремы 4.6, согласно которой система уравнений (1.1) в некоторой окрестности точки m_0 разделяется на блочно-треугольно взаимодействующие подсистемы вида (1.12), так что у матрицы $\tilde{B}_l^j$ (2.12) на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Достаточность доказана.

Следствие 4.8 доказано.

Список литературы

1. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория”, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98; англ. пер.: B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, “Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory”, *Russian Math. Surveys*, **44**:6 (1989), 35–124.
2. О. И. Богоявленский, “Необходимые условия для разделимости систем уравнений в частных производных произвольного порядка”, *УМН*, **60**:1(361) (2005), 163–164; англ. пер.: O. I. Bogoyavlenskii, “Necessary conditions for the decoupling of systems of PDEs of arbitrary order”, *Russian Math. Surveys*, **60**:1 (2005), 159–160.
3. O. I. Bogoyavlenskij, “Block-diagonalizability problem for hydrodynamic type systems”, *J. Math. Phys.*, **47**:6 (2006), 063502, 9 pp.
4. O. I. Bogoyavlenskij, “Decoupling problem for systems of quasi-linear pde’s”, *Comm. Math. Phys.*, **269**:2 (2007), 545–556.
5. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964, 830 с.; пер. с англ.: R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, v. II: *Partial differential equations*, (vol. II by R. Courant), Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York–London, 1962, xxii+830 pp.
6. O. I. Bogoyavlenskij, “Courant’s problems and their extensions”, *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*, v. I (Zürich, 1998), Internat. Ser. Numer. Math., **129**, Birkhäuser, Basel, 1999, 97–104.
7. Д. В. Туницкий, “О приведении квазилинейных систем к блочно-треугольному виду”, *Матем. сб.*, **204**:3 (2013), 135–160; англ. пер.: D. V. Tunitsky, “Reducing quasilinear systems to block triangular form”, *Sb. Math.*, **204**:3 (2013), 438–462.
8. A. Nijenhuis, “ X_{n-1} -forming sets of eigenvectors”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54**, = Indagationes Math., **13** (1951), 200–212.
9. J. Haantjes, “On X_m -forming sets of eigenvectors”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **58**, = Indagationes Math., **17** (1955), 158–162.
10. М. М. Постников, *Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Семестр II*, 2-е изд., Наука, М., 1986, 401 с.; англ. пер. 1-го изд.: M. Postnikov, *Lectures in geometry. Semester II. Linear algebra and differential geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1982, 319 pp.
11. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, Наука, М., 1981, 344 с.; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. I, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York–London, 1963, xi+329 pp.

12. Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987, 304 с.; пер. с англ.: F.W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, IL–London, 1971, viii+270 pp.
13. Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, 2-е изд., Наука, М., 1978, 688 с.; англ. пер.: B.L. Rozhdestvenskii, N.N. Janenko, *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*, Transl. Math. Monogr., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, xx+676 pp.
14. О.И. Богоявленский, “Общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантжеса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 71–84; англ. пер.: O.I. Bogoyavlenskii, “General algebraic identities for the Nijenhuis and Haantjes tensors”, *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1129–1141.
15. O.I. Bogoyavlenskii, “Algebraic identities for the Nijenhuis tensors”, *Differential Geom. Appl.*, **24**:5 (2006), 447–457.
16. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 4-е изд., Наука, М., 1988, 549 с.; нем. пер. 1-го изд.: F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, v. 1, 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959, x+374 pp., ix+276 pp.

ДМИТРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ТУНИЦКИЙ
(DMITRY V. TUNITSKY)
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступило в редакцию
05.12.2013
25.03.2015