Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов, Усиление теоремы переноса Малера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 63–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:55:39

УДК 511.4

О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов

Усиление теоремы переноса Малера

Получены новые теоремы переноса, усиливающие некоторые классические теоремы, принадлежащие Малеру. Теоремы сформулированы в терминах последовательных минимумов псевдоприсоединенных параллелепипедов.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: принцип переноса, последовательные минимумы, псевдоприсоединенные параллелепипеды, двойственные решетки.

DOI: 10.4213/im8195

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена некоторому усилению теоремы Малера, опубликованной им в 1939 г. в работах [1], [2], из которой следуют многие классические теоремы переноса. К примеру, из нее следует принцип переноса Хинчина [3], связывающий задачу совместных приближений чисел $\theta_1, \dots, \theta_n$ с задачей приближения нуля значениями линейной формы $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n + x_{n+1}$ в целых точках.

Принцип переноса Хинчина связывает разрешимость в целых числах системы неравенств

$$0 < |x_{n+1}| \leq X, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_{n+1} \theta_i - x_i| \leq Y \quad (1)$$

с разрешимостью в целых числах системы неравенств

$$0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq U, \quad |\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n + x_{n+1}| \leq V, \quad (2)$$

где X, Y, U, V – некоторые положительные числа. Эти две задачи двойственны друг другу в следующем смысле. Пусть

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_i - \theta_i x_{n+1}, & i &= 1, \dots, n, \\ f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_{n+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

и пусть

$$\begin{aligned} g_i(x_1, \dots, x_{n+1}) &= x_i, & i &= 1, \dots, n, \\ g_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n + x_{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как легко видеть, $f_1, \dots, f_{n+1}$ и $g_1, \dots, g_{n+1}$ образуют двойственные базисы в пространстве линейных форм на $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. матрицы их коэффициентов F

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президента РФ (грант № МК-5016.2012.1), РФФИ (гранты № 12-01-00681, 12-01-31106, 12-01-33080), а также Фонда “Династия”.

и G (коэффициенты i -й формы считаем записанными в i -й строке матрицы) удовлетворяют соотношению $FG^\top = I$, где I – единичная матрица, а $G^\top$ – матрица, транспонированная G . Это и означает, что задачи (1) и (2) двойственны.

Заметим, что соотношение $FG^\top = I$ равносильно соотношению $F^\top G = I$, которое, в свою очередь, равносильно тому, что билинейная форма

$$\Phi(u_1, \dots, u_{n+1}, v_1, \dots, v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(u_1, \dots, u_{n+1}) g_i(v_1, \dots, v_{n+1})$$

имеет вид

$$\Phi(u_1, \dots, u_{n+1}, v_1, \dots, v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i. \quad (5)$$

Данная точка зрения привела Малера к следующей, ставшей классической, теореме о билинейной форме.

ТЕОРЕМА А (К. Малер, 1937). Пусть заданы два набора однородных линейных форм от d переменных: формы $f_1(\mathbf{u}), \dots, f_d(\mathbf{u})$ от $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ с матрицей F , $\det F \neq 0$, и формы $g_1(\mathbf{v}), \dots, g_d(\mathbf{v})$ от $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ с матрицей G , $\det G = D \neq 0$. Пусть коэффициенты билинейной формы

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d f_i(\mathbf{u}) g_i(\mathbf{v}) \quad (6)$$

целые. Пусть система неравенств

$$|f_i(\mathbf{u})| \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad (7)$$

разрешима в $\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Тогда разрешима в $\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ и система неравенств

$$|g_i(\mathbf{v})| \leq \frac{(d-1)\lambda}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (8)$$

где

$$\lambda = \left(|D| \prod_{i=1}^d \lambda_i \right)^{\frac{1}{d-1}}. \quad (9)$$

Теорема А была усилена первым автором в работах [4]–[6] для частных случаев, соответствующих задачам о разного рода диофантовых экспонентах. В настоящей работе мы усилим теорему А в общем случае. Более того, мы докажем, что в предположении разрешимости в $\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ неравенств (7) будет разрешима в $\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ каждая система из некоторого семейства систем, аналогичных (8). Кроме того, мы докажем существование нескольких различных решений самой системы (8), среди которых обязательно встретятся $d-1$ линейно независимых. Эти результаты будет удобно сформулировать в терминах последовательных минимумов псевдоприсоединенных параллелепипедов.

§ 2. Принцип переноса и последовательные минимумы псевдоприсоединенных параллелепипедов

Напомним следующие определения (см. также [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M – выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^d$ с центром в начале координат. Пусть Λ – d -мерная решетка в $\mathbb{R}^d$. Тогда k -м последовательным минимумом $\mu_k(M, \Lambda)$ тела M относительно решетки Λ называется минимальное $\mu > 0$ такое, что μM содержит k линейно независимых точек решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $h_1, \dots, h_d$ – линейные формы на $\mathbb{R}^d$ с матрицей H , $\det H = 1$, и пусть $h_1^*, \dots, h_d^*$ – двойственный набор линейных форм, т.е. $\langle h_i, h_j^* \rangle = \delta_{ij}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Пусть также задан набор положительных чисел $\eta_1, \dots, \eta_d$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid |h_i(\mathbf{z})| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d \}.$$

Тогда параллелепипед

$$\Pi^* = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid |h_i^*(\mathbf{z})| \leq \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^d \eta_j, i = 1, \dots, d \right\}$$

называется *псевдоприсоединенным* к параллелепипеду Π .

Переформулируем теорему А в терминах псевдоприсоединенных параллелепипедов и их последовательных минимумов. Сделаем это в два шага.

Покажем сначала, что D можно считать равным единице. Положим для каждого $i = 1, \dots, d$

$$f'_i = D^{\frac{1}{d}} f_i, \quad g'_i = D^{-\frac{1}{d}} g_i, \quad \lambda'_i = D^{\frac{1}{d}} \lambda_i, \quad \lambda' = \lambda.$$

Нетрудно проверить, что при замене всех $f_i, g_i, \lambda_i, \lambda, D$ на $f'_i, g'_i, \lambda'_i, \lambda', 1$ соответственно формулировка теоремы А меняется на эквивалентную. Следовательно, действительно, формулировка теоремы с $D = 1$ эквивалентна исходной формулировке. Поэтому во всей оставшейся части статьи будем полагать $D = 1$.

Теперь рассмотрим решетки $F\mathbb{Z}^d$ и $G\mathbb{Z}^d$. Соотношение (6) означает, что каждая из этих решеток является подрешеткой решетки, двойственной другой. Напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть Λ – d -мерная решетка в $\mathbb{R}^d$, и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение на $\mathbb{R}^d$. Тогда решетка

$$\Lambda^* = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \mathbf{w} \in \Lambda \}$$

называется *двойственной* к Λ .

Положим $\Lambda = G\mathbb{Z}^d$ и рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \left\{ \mathbf{z} = (z_1 \dots z_d)^\top \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \frac{\lambda}{\lambda_i}, i = 1, \dots, d \right\},$$

где λ определяется в (9) при $D = 1$, т. е. $\lambda = (\prod_{i=1}^d \lambda_i)^{1/(d-1)}$. Тогда $\det \Lambda = 1$, $F\mathbb{Z}^d \subseteq \Lambda^*$ и

$$\Pi^* = \{\mathbf{z} = (z_1 \dots z_d)^\top \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \lambda_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Стало быть, теорема А фактически утверждает существование в параллелепипеде $(d-1)\Pi$ ненулевой точки унимодулярной решетки Λ при условии, что параллелепипед Π^* содержит ненулевую точку какой-то подрешетки решетки Λ^* . Ясно, что в такой формулировке слова “какой-то подрешетки” можно опустить. Кроме того, наличие ненулевой точки решетки в параллелепипеде в точности означает, что его первый минимум относительно этой решетки не превосходит единицы. Получаем следующую переформулировку теоремы А.

ТЕОРЕМА В. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана d -мерная решетка Λ с определителем 1 и параллелепипед Π с центром в точке начала координат и гранями, параллельными плоскостям координат. Тогда

$$\mu_1(\Pi^*, \Lambda^*) \leq 1 \implies \mu_1(\Pi, \Lambda) \leq d-1.$$

Заметим, что для любого оператора $A \in \text{Sl}_d(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$(A\Pi)^* = (A^*)^{-1}\Pi^*, \quad (A\Lambda)^* = (A^*)^{-1}\Lambda^*,$$

где A^* — оператор, сопряженный к A . Следовательно, можно перевести Λ в $\mathbb{Z}^d$ и дать еще одну переформулировку теоремы А, “двойственную” формулировке теоремы В, но несколько более компактную.

ТЕОРЕМА С. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Тогда

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq d-1.$$

В то же время Малер в работе [2] доказал теорему о всех последовательных минимумах, которую можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА D (К. Малер, 1938). Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Тогда

$$\frac{2^d}{d \text{vol } \Pi} \leq \mu_k(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \mu_{d+1-k}(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq \frac{2^d d!}{\text{vol } \Pi}. \quad (10)$$

Объединяя это утверждение при $k = 1$ с теоремой Минковского о последовательных минимумах, утверждающей, что

$$\frac{2^d}{d! \text{vol } \Pi} \leq \prod_{i=1}^d \mu_i(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq \frac{2^d}{\text{vol } \Pi}, \quad (11)$$

получаем следующее усиление теоремы С.

ТЕОРЕМА Е. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1, \quad \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \geq 1.$$

Тогда

$$\mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq d^{\frac{1}{d-k}}, \quad k = 1, \dots, d-1.$$

Один из основных результатов настоящей работы заключается в следующем усилении теоремы Е.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1, \quad \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \geq 1.$$

Тогда

$$\mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq d^{\frac{1}{2(d-k)}}, \quad k = 1, \dots, d-1. \quad (12)$$

Для $k = 2$ удается получить несколько более сильное неравенство.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1, \quad \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) > 1.$$

Тогда

$$\mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq c_d, \quad (13)$$

где c_d – положительный корень многочлена $t^{2(d-1)} - (d-1)t^2 - 1$.

Нетрудно показать, что

$$d^{\frac{1}{2(d-1)}} < c_d < d^{\frac{1}{2(d-2)}}, \quad (14)$$

т. е., действительно, неравенство (13) сильнее неравенства (12) для $k = 2$. Кроме того, из (14) следует, что

$$c_d = 1 + \frac{\ln d}{2d} + O\left(\frac{\ln^2 d}{d^2}\right), \quad d \rightarrow \infty.$$

В случае $d = 3$ удастся доказать неравенства, более сильные, чем неравенства (12) и (13), являющиеся к тому же точными.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Пусть

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^3) \leq 1, \quad \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) > 1.$$

Тогда

$$\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^3) \leq \frac{5}{4}.$$

При этом константы $2/\sqrt{3}$ и $5/4$ неулучшаемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1–3 можно сформулировать согласно теореме В, тогда нужно $\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d)$ заменить на $\mu_1(\Pi, \Lambda)$, а $\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d)$ – на $\mu_1(\Pi^*, \Lambda^*)$.

Теоремы 2, 3 мы получим как следствия из наблюдения, которое представляет собой по сути семейство теорем переноса.

§ 3. Семейство теорем переноса

Грубо говоря, обычные теоремы переноса в предположении существования точки решетки в одном множестве утверждают наличие точки решетки в некотором другом множестве. Мы в таком же предположении построим целое семейство параллелепипедов, в каждом из которых будет точка решетки.

Пусть Π – произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке начала координат. Тогда существует такой оператор $A_\Pi \in GL_d(\mathbb{R})$, что $A_\Pi \Pi = [-1, 1]^d$. Для каждого набора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}_{>0}^d$ положим

$$H_{\tau, \Pi} = A_\Pi^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_d \end{pmatrix} A_\Pi,$$

т. е. оператор $H_{\tau, \Pi}$ представляет собой композицию гиперболического поворота и гомотетии, причем оси гиперболического поворота совпадают с осями параллелепипеда Π . Будем из соображений компактности обозначений записывать H_τ вместо $H_{\tau, \Pi}$, если из контекста ясно, о каком параллелепипеде идет речь.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Тогда для любого набора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ такого, что

$$\sum_{i=1}^d \tau_i^2 = \prod_{i=1}^d \tau_i^2, \quad (15)$$

справедливо

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1(H_\tau \Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для каждого набора $(\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}_{>0}^d$ существует только одно $\lambda > 0$ такое, что набор $(\lambda\tau_1, \dots, \lambda\tau_d)$ удовлетворяет соотношению (15).

Покажем, как из теоремы 4 вывести теорему 2.

Пусть $\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1$ и $\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) > 1$. Тогда по теореме 4 для каждого τ , удовлетворяющего (15), параллелепипед $H_\tau \Pi$ содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^d$. Рассмотрим минимальное такое t_1 , что при $\tau_1 = (t_1, \dots, t_1)$ параллелепипед $H_{\tau_1} \Pi$ содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^d$. Тогда

$$t_1 = \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) > 1.$$

Во внутренности параллелепипеда $H_{\tau_1} \Pi$ нет ненулевых точек $\mathbb{Z}^d$, но такая точка существует на его границе. Обозначим ее $\mathbf{v}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{v}$ находится на грани, пересекающей “первую” ось параллелепипеда Π , т. е. ту, которая переходит в первую координатную ось при действии оператора A_Π (переводящего Π в куб $[-1, 1]^d$). Рассмотрим минимальное $t_2 \geq t_1$ такое, что при $\tau_2 = (t_1, t_2, \dots, t_2)$ параллелепипед $H_{\tau_2} \Pi$ содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^d$, отличную от $\pm \mathbf{v}$. Эта новая точка будет линейно независима с $\mathbf{v}$, следовательно,

$$\mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq t_2.$$

Если t_2 строго больше положительного корня уравнения

$$t_1^2 t^{2(d-1)} = t_1^2 + (d-1)t^2, \quad (16)$$

то в силу замечания 2 во внутренности параллелепипеда $H_{\tau_2} \Pi$ содержится параллелепипед $H_{\tau} \Pi$ (гомотетичный $H_{\tau_2} \Pi$) с τ , удовлетворяющим (15). Однако в таком $H_{\tau} \Pi$ не будет ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^d$, поскольку таких точек нет во внутренности $H_{\tau_2} \Pi$. Это противоречит теореме 4, следовательно, t_2 не превосходит положительного корня уравнения (16). Как нетрудно заметить, этот корень убывает с ростом t_1 , а по предположению имеем $t_1 > 1$. Стало быть, t_2 , а вместе с ним и $\mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^d)$ не превосходят положительного корня многочлена $t^{2(d-1)} - (d-1)t^2 - 1$.

Таким образом, теорема 2, действительно, следует из теоремы 4. Теорему 4 мы докажем в § 7.

§ 4. Основной инструмент: секционно-двойственные тела

Опишем основную конструкцию, которая позволит нам доказать теоремы 4, 3.

Пусть Π – произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке начала координат. Для каждого $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$ будем использовать обозначение $\text{vol}_{\mathbf{e}}(\Pi)$ для $(d-1)$ -мерного объема пересечения параллелепипеда Π с $(d-1)$ -мерным подпространством, ортогональным вектору $\mathbf{e}$. Будем также обозначать через $\mathcal{S}^{d-1}$ (евклидову) сферу единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество

$$\Pi^{\wedge} = \{ \lambda \mathbf{e} \mid \mathbf{e} \in \mathcal{S}^{d-1}, 0 \leq \lambda \leq 2^{1-d} \text{vol}_{\mathbf{e}}(\Pi) \}$$

называется *секционно-двойственным* для Π .

Как самостоятельное понятие секционно-двойственные тела впервые, по-видимому, рассматривал Е. Лютвак [8]. Однако в его определении не было коэффициента 2^{1-d} , и он использовал термин “intersection body”. Нам же коэффициент 2^{1-d} удобен с точки зрения применения теоремы Минковского о выпуклом теле, используемой при доказательстве утверждения 1) леммы 1 и леммы 2 (см. ниже).

Следующее утверждение является частным случаем классической теоремы Буземана (см. [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество $\Pi^{\wedge}$ выпукло и центрально-симметрично относительно начала координат.*

В работе [5] доказываются следующие свойства секционно-двойственного множества.

ЛЕММА 1 [5]. 1) *Имеем $\mu_1(\Pi^{\wedge}, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1$.*

2) *Пусть $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$. Тогда $(A\Pi)^{\wedge} = A'(\Pi^{\wedge})$, где A' – матрица алгебраических дополнений A , т. е. $A' = (\det A)(A^*)^{-1}$.*

Утверждение 1) леммы 1 подсказывает основную идею доказательства теоремы 4. Достаточно доказать, что для каждого параллелепипеда Π с центром

в точке начала координат и каждого $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$, удовлетворяющего соотношению (15), справедливо вложение

$$\Pi^* \subset (H_\tau \Pi)^\wedge. \quad (17)$$

Однако для доказательства теоремы 1 нам понадобится усиленный вариант утверждения 1) леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть Π – произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке начала координат. Тогда

$$\mu_1(\Pi^\wedge, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \prod_{k=1}^{d-1} \mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_1(\Pi^\wedge, \mathbb{Z}^d) \leq 1$. Тогда в $\Pi^\wedge$ существует (ненулевая) примитивная точка $\mathbf{v}$ решетки $\mathbb{Z}^d$. По определению секционно-двойственного множества это означает, что

$$\text{vol}_{\mathbf{v}}(\Pi) \geq 2^{d-1} |\mathbf{v}|.$$

Рассмотрим $(d-1)$ -мерное подпространство $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$, ортогональное $\mathbf{v}$, и положим

$$S_{\mathbf{v}} = \Pi \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}}, \quad \Lambda_{\mathbf{v}} = \mathbb{Z}^d \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}}.$$

Тогда $\mathbf{v}$ с точностью до знака совпадает с векторным произведением векторов базиса решетки $\Lambda_{\mathbf{v}}$. Следовательно,

$$\det \Lambda_{\mathbf{v}} = |\mathbf{v}| \leq 2^{1-d} \text{vol}_{\mathbf{v}}(\Pi) = 2^{1-d} \text{vol}(S_{\mathbf{v}}).$$

Применяя теорему Минковского о последовательных минимумах, получаем

$$\prod_{k=1}^{d-1} \mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq \prod_{k=1}^{d-1} \mu_k(S_{\mathbf{v}}, \Lambda_{\mathbf{v}}) \leq \frac{2^{d-1} \det \Lambda_{\mathbf{v}}}{\text{vol}(S_{\mathbf{v}})} \leq 1.$$

Лемма доказана.

§ 5. Секционно-двойственное тело для единичного куба

Положим $\mathcal{B}_d = [-1, 1]^d$, т.е. $\mathcal{B}_d$ – единичный шар в sup-норме. По теореме Ваалера (см. [10]) объем любого центрального $(d-1)$ -мерного сечения куба $\mathcal{B}_d$ не меньше 2^d . Стало быть, $\mathcal{B}_d^\wedge$ содержит евклидов шар радиусом 1. Получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Имеем $\mathcal{B}_d^* = \mathcal{B}_d \subset \sqrt{d} \mathcal{B}_d^\wedge$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого параллелепипеда Π с центром в точке начала координат имеем

$$\Pi^* \subset \sqrt{d} \Pi^\wedge.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ такой, что $\Pi = A\mathcal{B}_d$. Тогда в силу леммы 3 и утверждения 2) леммы 1

$$\Pi^* = (A\mathcal{B}_d)^* = A' \mathcal{B}_d^* \subset A' (\sqrt{d} \mathcal{B}_d^\wedge) = \sqrt{d} (A\mathcal{B}_d)^\wedge = \sqrt{d} \Pi^\wedge.$$

Для доказательства теорем 4, 3 будет удобно переформулировать соотношение (17) в терминах свойств $\mathcal{B}_d^\wedge$.

ЛЕММА 4. Для любого параллелепипеда Π с центром в точке начала координат и любого набора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ вложение (17) равносильно включению

$$\left(\prod_{i=1}^d \tau_i \right)^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \cdots \\ \tau_d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_d^\wedge. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $A = A_\Pi$ из §3, т.е. такой, что $A\Pi = \mathcal{B}_d$. Тогда

$$A'(\Pi^*) = (A\Pi)^* = \mathcal{B}_d^* = \mathcal{B}_d$$

и в силу утверждения 2) леммы 1

$$A'((H_\tau \Pi)^\wedge) = (A H_\tau A^{-1} A\Pi)^\wedge = (D_\tau \mathcal{B}_d)^\wedge = D'_\tau \mathcal{B}_d^\wedge,$$

где

$$D_\tau = A H_\tau A^{-1} = H_{\tau, \mathcal{B}_d} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_d \end{pmatrix}.$$

Стало быть, вложение (17) равносильно включению

$$\frac{1}{\det D_\tau} D_\tau \mathcal{B}_d \subset \mathcal{B}_d^\wedge,$$

которое, в свою очередь, в силу выпуклости и симметричности относительно координатных плоскостей куба $\mathcal{B}_d$ и множества $\mathcal{B}_d^\wedge$ равносильно тому, что вершина параллелепипеда

$$\frac{1}{\det D_\tau} D_\tau \mathcal{B}_d$$

с положительными координатами лежит в $\mathcal{B}_d^\wedge$, но именно это и утверждается соотношением (18).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1$, то $\mu_1(H_\tau \Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1$ при любом $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$, удовлетворяющем (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется (18), то по лемме 4 выполняется и (17). Учитывая утверждение 1) леммы 1, получаем цепочку импликаций

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1((H_\tau \Pi)^\wedge, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1(H_\tau \Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1.$$

Следствие доказано.

§ 6. Доказательство теоремы 1

В силу леммы 2 и следствия 1 доказать теорему 1 не составляет труда. Действительно, из этих утверждений немедленно следует справедливость импликаций

$$\begin{aligned} \mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1 &\implies \mu_1(\sqrt{d}\Pi^\wedge, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1((d^{\frac{1}{2(d-1)}}\Pi)^\wedge, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \\ &\implies \prod_{k=1}^{d-1} \mu_k(d^{\frac{1}{2(d-1)}}\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \prod_{k=1}^{d-1} \mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq \sqrt{d}. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку

$$\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq \dots \leq \mu_{d-1}(\Pi, \mathbb{Z}^d),$$

из последнего неравенства (19) в предположении $\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^d) \geq 1$ следует, что для каждого $k = 1, \dots, d-1$

$$\mu_k(\Pi, \mathbb{Z}^d) \leq d^{\frac{1}{2(d-k)}}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 4 и ее несколько более точная формулировка

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Как известно из § 6, в силу теоремы Ваалера множество $\mathcal{B}_d^\wedge$ содержит евклидов шар радиусом 1. Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ удовлетворяет (15). Тогда евклидова норма точки

$$\left(\prod_{i=1}^d \tau_i \right)^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_d \end{pmatrix} \quad (20)$$

равна единице. Стало быть, τ удовлетворяет (18). Остается применить следствие 2. Теорема доказана.

Как видим, теорема 4 не точна: точность теряется в силу замены $\mathcal{B}_d^\wedge$ на единичный шар в евклидовой норме. Можно ограничиться следствием 2 и сразу получить более сильное утверждение. Положим

$$v_\tau = 2^{1-d} \text{vol} \left\{ (z_1 \dots z_d)^\top \in \mathcal{B}_d \mid \sum_{i=1}^d \tau_i z_i = 0 \right\},$$

т. е. v_τ – отнормированный (с точки зрения теоремы Минковского) объем $(d-1)$ -мерного центрального сечения куба $\mathcal{B}_d$, ортогонального вектору $(\tau_1 \dots \tau_d)^\top$. Непосредственное применение следствия 2 дает следующую, более сильную формулировку.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан произвольный параллелепипед Π с центром в точке начала координат. Тогда для любого набора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ такого, что

$$\sum_{i=1}^d \tau_i^2 = v_\tau^2 \prod_{i=1}^d \tau_i^2, \quad (21)$$

справедливо

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^d) \leq 1 \implies \mu_1(H_\tau \Pi, \mathbb{Z}^d) \leq 1.$$

Помимо теоремы Ваалера существует еще теорема Болла (см. [11]), оценивающая объем любого центрального $(d-1)$ -мерного сечения куба $\mathcal{B}_d$ сверху величиной $2^{d-1}\sqrt{2}$, т. е. в любой размерности и для любого τ справедливы неравенства

$$1 \leq v_\tau \leq \sqrt{2},$$

причем, как легко увидеть, обе границы достигаются. Отсюда следует, что в любой размерности расстояние Банаха–Мазура между пространствами, соответствующими $\mathcal{B}_d^\wedge$ и единичному евклидову шару, равно $\sqrt{2}$. Таким образом, замена v_τ на единицу не сильно ослабляет формулировку, но значительно ее упрощает, поскольку зависимость v_τ от τ при произвольном d весьма сложна.

При фиксированной размерности, например при $d = 3$, можно воспользоваться следствием 2 (а стало быть, теоремой 5) непосредственно, без приближения $\mathcal{B}_d^\wedge$ единичным шаром, и получить точные неравенства.

§ 8. Трехмерный случай. Доказательство теоремы 3

Для $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ положим

$$\mathbf{v}_\tau = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \tau_3} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}.$$

По определению секционно-двойственного множества соотношение (18) в точности означает, что евклидова норма $|\mathbf{v}_\tau|$ не превосходит четвертой части площади центрального сечения $\mathcal{B}_3$, перпендикулярного $\mathbf{v}_\tau$.

Следующее утверждение является несложным упражнением по школьной геометрии.

ЛЕММА 5. Пусть $0 \leq x \leq 1$. Тогда площадь центрального сечения куба $\mathcal{B}_d$, ортогонального вектору $(x \ 1 \ 1)^\top$, равна $(4-x)\sqrt{2} + x^2$.

ЛЕММА 6. Пусть $\tau' = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$, $\tau'' = (1, 5/4, 5/4)$. Тогда точки $\mathbf{v}_{\tau'}$ и $\mathbf{v}_{\tau''}$ лежат на границе множества $\mathcal{B}_3^\wedge$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно вычислить при помощи леммы 5 площади центральных сечений куба $\mathcal{B}_3$, перпендикулярных $\mathbf{v}_{\tau'}$ и $\mathbf{v}_{\tau''}$, и убедиться в том, что они равны соответственно $4|\mathbf{v}_{\tau'}|$ и $4|\mathbf{v}_{\tau''}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Импликация

$$\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^3) \leq 1 \implies \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (22)$$

мгновенно следует из леммы 6 и следствия 2.

Далее будем рассуждать так же, как при выводе теоремы 2 из теоремы 4. Предположим, что $\mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^3) \leq 1$, но $\mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) > 1$. Рассмотрим минимальное такое t_1 , что при $\tau_1 = (t_1, t_1, t_1)$ параллелепипед $H_{\tau_1} \Pi$ содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^3$. Тогда $t_1 = \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) > 1$.

Обозначим через $\mathbf{v}$ какую-нибудь точку решетки $\mathbb{Z}^3$, лежащую на границе параллелепипеда $H_{\tau_1}\Pi$ (во внутренности ненулевых точек $\mathbb{Z}^3$ нет). Как и прежде, будем считать, что $\mathbf{v}$ находится на грани, пересекающей “первую” ось параллелепипеда Π . Рассмотрим минимальное $t_2 \geq t_1$ такое, что при $\tau_2 = (t_1, t_2, t_2)$ параллелепипед $H_{\tau_2}\Pi$ содержит ненулевую точку решетки $\mathbb{Z}^3$, отличную от $\pm\mathbf{v}$. Эта точка линейно независима с $\mathbf{v}$, следовательно,

$$\mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^3) \leq t_2.$$

Если $t_2 > 5/4$, то во внутренности параллелепипеда $H_{\tau_2}\Pi$ содержится параллелепипед $H_{\tau''}\Pi$, где $\tau'' = (1, 5/4, 5/4)$. В $H_{\tau''}\Pi$ нет ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^3$, поскольку таких точек нет во внутренности $H_{\tau_2}\Pi$. Однако по лемме 6 и следствию 2 такие точки в $H_{\tau''}\Pi$ должны быть. Полученное противоречие доказывает, что $t_2 \leq 5/4$, т.е. справедлива импликация

$$\begin{cases} \mu_1(\Pi^*, \mathbb{Z}^3) \leq 1 \\ \mu_1(\Pi, \mathbb{Z}^3) > 1 \end{cases} \implies \mu_2(\Pi, \mathbb{Z}^3) \leq \frac{5}{4}. \quad (23)$$

Остается показать, что неравенства в (22) и (23) точны. Построим соответствующие примеры.

Пусть ε – произвольное положительное число, $\varepsilon \leq 1/2$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \{\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ z_3)^\top \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \varepsilon, \ i = 1, 2, 3\}$$

и соответствующий ему параллелепипед

$$\Pi^* = \{\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ z_3)^\top \in \mathbb{R}^d \mid |z_i| \leq \varepsilon^2, \ i = 1, 2, 3\}.$$

Рассмотрим также решетки $\Lambda_1 = A\mathbb{Z}^3$ и $\Lambda_2 = B\mathbb{Z}^3$, где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} & \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\varepsilon^2} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} & -\varepsilon & \frac{1}{3\varepsilon^2} \\ \frac{-2\varepsilon}{\sqrt{3}} & -\varepsilon & \frac{1}{3\varepsilon^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{2} & \frac{5\varepsilon}{4} & \frac{1}{3\varepsilon^2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{-3\varepsilon}{4} & \frac{1}{3\varepsilon^2} \\ -\varepsilon & \frac{-\varepsilon}{2} & \frac{1}{3\varepsilon^2} \end{pmatrix},$$

и двойственные к ним $\Lambda_1^* = (A^*)^{-1}\mathbb{Z}^3$ и $\Lambda_2^* = (B^*)^{-1}\mathbb{Z}^3$, где

$$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon\sqrt{3}} & \varepsilon^2 \\ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{3}} & \frac{-1}{\varepsilon\sqrt{3}} & \varepsilon^2 \\ \frac{-1}{\varepsilon\sqrt{3}} & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} & \varepsilon^2 \\ \frac{7}{12\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \varepsilon^2 \\ \frac{-2}{3\varepsilon} & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим столбцы матриц A , B , $(A^*)^{-1}$, $(B^*)^{-1}$ через $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{a}_i^*$, $\mathbf{b}_i^*$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \text{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), & \Lambda_1^* &= \text{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*), \\ \Lambda_2 &= \text{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), & \Lambda_2^* &= \text{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \mathbf{b}_3^*). \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Положим $\nu_1 = 2/\sqrt{3}$, $\nu_2 = 5/4$. Тогда

$$\begin{aligned}\nu_1\Pi \cap \Lambda_1 &= \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{a}_1, \pm\mathbf{a}_2, \pm(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\}, & \text{int}(\nu_1\Pi) \cap \Lambda_1 &= \text{int}(\Pi) \cap \Lambda_2 = \{\mathbf{0}\}, \\ \nu_2\Pi \cap \Lambda_2 &= \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{b}_1, \pm\mathbf{b}_2, \pm(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)\}, & \text{int}(\nu_2\Pi) \cap \Lambda_2 &= \Pi \cap \Lambda_2 = \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{b}_1\}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\Pi^* \cap \Lambda_1^* = \Pi^* \cap \Lambda_2^* = \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{a}_3^*\}, \quad \text{int}(\Pi^*) \cap \Lambda_1^* = \text{int}(\Pi^*) \cap \Lambda_2^* = \{\mathbf{0}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{a} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3$ с целыми k_1, k_2, k_3 , и пусть $\mathbf{a} \in \nu_1\Pi$. Тогда все координаты точки $\mathbf{a}$ по модулю не превосходят $2\varepsilon/\sqrt{3}$, т. е. должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{k_1}{2} + k_2 + \frac{k_3}{2\sqrt{3}\varepsilon^3} \leq 1, \\ -1 &\leq \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{2\sqrt{3}\varepsilon^3} \leq 1, \\ -1 &\leq -k_1 - \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{2\sqrt{3}\varepsilon^3} \leq 1.\end{aligned}\tag{24}$$

Отсюда видим, что $|k_3| \leq 2\sqrt{3}\varepsilon^3 < 1$, так как $\varepsilon \leq 1/2$. Следовательно, $k_3 = 0$. Тогда из (24) следует, что $|k_1| \leq 4/3$ и $|k_2| \leq 4/3$, т. е. $k_1, k_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Однако $k_1 = k_2 = \pm 1$ не удовлетворяет первому уравнению в (24). Остается непосредственно проверить, что точки $\pm\mathbf{a}_1, \pm\mathbf{a}_2, \pm(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$ лежат на границе $\nu_1\Pi$.

Рассуждая аналогично для $\mathbf{b} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + k_3\mathbf{b}_3 \in \nu_2\Pi$, получаем, что $k_3 = 0$, $k_1, k_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Теперь остается проверить, что точки $\pm(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ не лежат в $\nu_2\Pi$, точки $\pm\mathbf{b}_2, \pm(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$ лежат на границе $\nu_2\Pi$, а точки $\pm\mathbf{b}_1$ лежат на границе Π .

Последнее утверждение леммы доказывается описанным методом совсем просто ввиду наличия нулевых координат точек $\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{b}_2^*$ и в силу неравенства $\varepsilon \leq 1/2$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Справедливы равенства

$$\mu_1(\Pi^*, \Lambda_1^*) = \mu_1(\Pi^*, \Lambda_2^*) = \mu_1(\Pi, \Lambda_2) = 1, \quad \mu_1(\Pi, \Lambda_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \mu_2(\Pi, \Lambda_2) = \frac{5}{4}.$$

В принципе, ввиду замечания 1 следствия 3 уже достаточно для доказательства теоремы, но для полноты изложения переформулируем его. Положим

$$\Pi_1 = A^{-1}\Pi, \quad \Pi_2 = B^{-1}\Pi.$$

Тогда

$$A^{-1}\Lambda_1 = B^{-1}\Lambda_2 = A^*\Lambda_1^* = B^*\Lambda_2^* = \mathbb{Z}^3.$$

Получаем следующую переформулировку следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mu_1(\Pi_1^*, \mathbb{Z}^3) &= \mu_1(\Pi_2^*, \mathbb{Z}^3) = \mu_1(\Pi_2, \mathbb{Z}^3) = 1, \\ \mu_1(\Pi_1, \mathbb{Z}^3) &= \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \mu_2(\Pi_2, \mathbb{Z}^3) = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Таким образом, примеры, доказывающие точность неравенств (22) и (23), построены, и теорема доказана.

В заключение авторы выражают благодарность Н. Г. Моцевитину за плодотворные дискуссии, стимулировавшие появление леммы 2, а также К. С. Рютину за ссылку [8].

Список литературы

1. K. Mahler, “Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen”, *Časopis Pešt. Mat. Fys.*, **68** (1939), 85–92.
2. K. Mahler, “Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper”, *Časopis Pešt. Mat. Fys.*, **68** (1939), 93–102.
3. A. Ya. Khintchine, “Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **50:2** (1926), 170–195.
4. O. N. German, “Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents”, *Классическая и современная математика в поле деятельности Б. Н. Делоне*, Сборник статей. К 120-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Б. Н. Делоне, Тр. МИАН, **275**, МАИК, М., 2011, 227–239; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **275:1** (2011), 216–228.
5. O. N. German, “On Diophantine exponents and Khintchine’s transference principle”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **2:2** (2012), 22–51; arXiv: 1004.4933.
6. O. N. German, “Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers”, *Acta Arith.*, **154:1** (2012), 79–101.
7. W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, x+299 pp.
8. E. Lutwak, “Intersection bodies and dual mixed volumes”, *Adv. in Math.*, **71:2** (1988), 232–261.
9. H. Busemann, “A theorem on convex bodies of the Brunn–Minkowski type”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35** (1949), 27–31.
10. J. D. Vaaler, “A geometric inequality with applications to linear forms”, *Pacific J. Math.*, **83:2** (1979), 543–553.
11. K. Ball, “Volumes of sections of cubes and related problems”, *Geometric aspects of functional analysis* (1987–88), Lecture Notes in Math., **1376**, Springer, Berlin, 1989, 251–260.

Олег Николаевич Герман

(OLEG N. GERMAN)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет

E-mail: german@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию

10.12.2013

Константин Георгиевич Евдокимов

(KONSTANTIN G. EVDOKIMOV)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет

E-mail: EvdokimovKG@yandex.ru