Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Спектральный метод и эргодические теоремы для общих цепей Маркова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 101–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:47:10

УДК 519.21+517.98

С. В. Нагаев

Спектральный метод и эргодические теоремы для общих цепей Маркова

Изучаются эргодические свойства цепей Маркова с произвольным множеством возможных состояний. Доказывается теорема о геометрической эргодичности; метод доказательства является новым и может быть охарактеризован как операторный. Главным результатом является эргодическая теорема для харрисовских цепей Маркова в случае, когда математическое ожидание времени возвращения в некоторое фиксированное множество конечно. Условия, налагаемые при этом на переходную функцию, являются более общими, чем у Атрейя–Нея и Нуммелина. В отличие от последних, ограничения налагаются не на исходную переходную функцию, а на переходную функцию вложенной цепи Маркова, построенную по моментам возвращения в упомянутое выше фиксированное множество. Доказательство основано на спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве.

Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: вложенная цепь Маркова, равномерная эргодичность, резольвента, спектральный метод, стационарное распределение.

DOI: 10.4213/im8198

§ 1. Введение

Пусть $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ – однородная цепь Маркова с переходной вероятностью $p(x, B)$, $x \in X$, $B \in S$, где (X, S) – измеримое пространство. Как обычно, предполагается, что функция $p(x, B)$ измерима по x и является вероятностной мерой на S при любом фиксированном x . Обозначим через $p^{(n)}(x, B)$ переходную вероятность за n шагов.

Назовем цепь *равномерно эргодичной*, если существует распределение $p_0(\cdot)$ на S такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\| = 0. \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\|\lambda(\cdot)\| = |\lambda|(X)$, где $\lambda(\cdot)$ – любая знакопеременная или комплексная мера на S , $|\lambda|(\cdot)$ – ее полная вариация. Как показано в § 6, из равенства (1.1) следует, что найдутся $0 < \rho < 1$ и $c > 0$, для которых

$$\sup_{x \in X} \|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\| \leq c\rho^n. \quad (1.2)$$

По отношению к неравенству (1.2) часто употребляется термин *геометрическая эргодичность*. Мы видим, что равномерная эргодичность эквивалентна геометрической.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00238-а).

Главной целью настоящей работы является доказательство эргодических теорем для общих цепей Маркова, не удовлетворяющих, вообще говоря, условию равномерной эргодичности, спектральным методом. Последний впервые появился в [1], где он использовался при доказательстве предельных теорем для сумм случайных величин, заданных на равномерно эргодичной цепи Маркова. В работе [2], которая является продолжением [1], спектральный метод применяется к выводу асимптотических разложений в центральной предельной теореме. Различные модификации спектрального метода широко использовались другими авторами начиная с 1980-х годов (см. [3]–[14]). Целью перечисленных выше работ было доказательство различных вариантов центральной предельной теоремы. При этом так или иначе постулировалась равномерная эргодичность рассматриваемой цепи Маркова. В связи с этим возникает вопрос: как избавиться от этого ограничения? Настоящая работа дает ответ на этот вопрос применительно к эргодической теореме. Как и в цитируемых выше работах, мы используем равномерную эргодичность, но не исходной цепи Маркова, а вложенной цепи, построенной по моментам возвращения в некоторое фиксированное множество.

Отметим, что хотя в настоящей работе акцент делается на метод доказательства, тем не менее, все сформулированные ниже результаты являются новыми.

Сначала приведем следующее утверждение, которое дает достаточное условие для равномерной эргодичности.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть для любого $x \in X$

$$\sup_{y \in X} \sup_{A \in S} |p(x, A) - p(y, A)| \leq \rho < 1. \quad (1.3)$$

Далее, пусть $w^{(0)}$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке x , и последовательность мер $w^{(n)}(x_0; x, \cdot)$, $n \geq 1$, на (X, S) удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x_0; x, \cdot) &= w(x_0; x, \cdot) = p(x, \cdot) - p(x_0, \cdot), \\ w^{(n)}(x_0; x, \cdot) &= \int_X w(x_0; y, \cdot) w^{(n-1)}(x_0; x, dy). \end{aligned}$$

Тогда для любых x и x_0 из X

$$\|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot; x_0)\| \leq 2\rho^n, \quad (1.4)$$

где

$$p_0(B; x_0) = p(x_0, \cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_X w^{(k)}(x_0; x, B) p(x_0, dx), \quad (1.5)$$

причем ряд в правой части (1.5) абсолютно сходится с экспоненциальной скоростью равномерно по $x_0 \in X$ и $B \in S$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Нетрудно показать, что для $n \geq 1$ имеет место представление

$$w^{(n)}(x_0; x, B) = p^{(n)}(x, B) - \int_X p^{(n-1)}(y, B) p(x_0, dy) \quad (1.6)$$

тождественно по $x \in X$ и $B \in S$. Действительно, предположим, что для некоторого $n \geq 1$ справедливо (1.6). По определению

$$w^{(n+1)}(x_0; x, B) = \int_X p(y, B) w^{(n)}(x_0; x, dy) - p(x_0, B) w^{(n)}(x_0; x, X).$$

Очевидно, что

$$\int_X p(y, B) w^{(n)}(x_0; x, dy) = p^{(n+1)}(x, B) - \int_X p^{(n)}(y, B) p(x_0, dy).$$

С другой стороны, как нетрудно убедиться, $w^{(n)}(x_0; x, X) = 0$ тождественно по $x \in X$. Отсюда следует, что (1.6) выполняется для $n + 1$. Поскольку равенство (1.6) по определению справедливо для $n = 1$, оно выполняется и для $n > 1$. Вследствие (1.6) имеем

$$\int_X w^{(n)}(x_0; y, \cdot) p(x_0, dy) = \int_X (p^{(n)}(y, \cdot) - p^{(n-1)}(y, \cdot)) p(x_0, dy).$$

В результате получаем представление

$$p_0(\cdot; x_0) = p(x_0, \cdot) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_X (p^{(n)}(y, \cdot) - p^{(n-1)}(y, \cdot)) p(x_0, dy).$$

Сходимость этого ряда является следствием сходимости ряда в правой части равенства (1.5).

Сформулируем теперь почти очевидное следствие из теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть существует $k_0 \geq 1$ такое, что для любых $x, y \in X$

$$\sup_{A \in S} |p^{(k_0)}(x, A) - p^{(k_0)}(y, A)| \leq \rho < 1. \quad (1.7)$$

Тогда для любых $x, x_0 \in X$

$$\|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot; x_0, k_0)\| \leq 2\rho^{n/k_0-1}, \quad (1.8)$$

где распределение $p_0(\cdot; x_0, k_0)$ строится по $p^{(k_0)}(x, \cdot) - p^{(k_0)}(x_0, \cdot)$ так же, как $p_0(\cdot; x_0)$ по $p(x, \cdot) - p(x_0, \cdot)$.

Очевидно, условие (1.7) является необходимым для равномерной эргодичности цепи X_n . Нетрудно видеть, что распределение, удовлетворяющее равенству (1.1), является стационарным относительно $p(\cdot, \cdot)$, т. е. для любого $B \in S$

$$\int_X p(x, B) p_0(dx) = p_0(B). \quad (1.9)$$

Условие (1.7) было введено в [1], там же было сформулировано без доказательства утверждение (1.8), однако без явного выражения для стационарного распределения. Условие (1.3) является частным случаем условия Добрушина [15], которое было введено для неоднородных цепей Маркова.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Условие (1.3) нельзя заменить на более слабое: *существует $x_0 \in X$ такое, что*

$$\sup_{A \in S} |p(x, A) - p(x_0, A)| \leq \rho < 1. \quad (1.10)$$

Об этом свидетельствует следующий простой контрпример.

Пусть переходная функция цепи X_n задается стохастической матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sup_{B \in S} |p(1, B) - p(j, B)| = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2.$$

В то же время цепь X_n имеет два инвариантных множества: $\{2\}$ и $\{3\}$. Поэтому соотношение (1.4) в данном случае не может выполняться. Если подчинить ρ в (1.10) ограничению $\rho < 1/2$, то для любой пары $x, y \in X$

$$\sup_{A \in S} |p(x, A) - p(y, A)| \leq 2\rho < 1,$$

т. е. имеет место (1.3).

Пусть A_0 – некоторое собственное подмножество X , принадлежащее S , v_0 – первое из чисел $n > 0$ таких, что $X_n \in A_0$. Положим

$$q_n(x, B) = P\{X_n \in B, v_0 \geq n \mid X_0 = x\}, \quad q(x, B) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x, B).$$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что выполнено условие: *для любого $x \in X - A_0$*

$$q(x, A_0) = 1, \quad (1.11)$$

где $X - A_0$ означает теоретико-множественную разность X и A_0 . Из условия (1.11), как нетрудно видеть, следует, что $q(x, A_0) = 1$ для всех $x \in A_0$. Функцию $q(x, B)$, $x \in A_0$, $B \in A_0 S$, можно рассматривать как переходную для некоторой цепи Маркова $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ с фазовым пространством A_0 . Будем обозначать переходную вероятность за n шагов для этой цепи через $q^{(n)}(x, \cdot)$. Если $\{Y_n\}$ имеет стационарное распределение $q_0(\cdot)$, то, как известно, мера

$$q(\cdot) = \int_{A_0} q(x, \cdot) q_0(dx) \quad (1.12)$$

является инвариантной относительно исходной переходной функции $p(\cdot, \cdot)$ (см., например, [16]).

Нетрудно видеть, что

$$q_n(x, X - A_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k(x, A_0). \quad (1.13)$$

Отсюда в силу (1.12) имеем

$$q(X - A_0) = \int_{A_0} q_0(dx) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k(x, A_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{A_0} q_k(x, A_0) q_0(dx) - 1,$$

если законна перестановка операций сложения и интегрирования. Это возможно, в частности, при условии $\sup_{x \in A_0} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x, A_0) < \infty$.

Обозначим

$$p_k^0 = \int_{A_0} q_k(x, A_0) q_0(dx), \quad \mu_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^0.$$

Очевидно, μ_0 – среднее время возвращения в A_0 . Если $\mu_0 < \infty$, то инвариантная мера $q(\cdot)$ конечна. В противном случае $q(X) = \infty$. Если $\mu_0 < \infty$, то мера $p_0(\cdot) := q(\cdot)/\mu_0$ является стационарным распределением для цепи X_n . Действительно, $\mu_0 p_0(X) = q(X - A_0) + 1 = \mu_0$. Следовательно, $p_0(X) = 1$.

Мы будем говорить, что *цепь X_n равномерно эргодична на A_0* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} \|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\|_{A_0} = 0, \quad (1.14)$$

где $\|\lambda(\cdot)\|_{A_0}$ – полная вариация сужения меры λ на A_0 .

Следующая теорема показывает, что равномерная эргодичность на A_0 влечет эргодичность на $X - A_0$, вообще говоря, неравномерную.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть распределение $p_0(\cdot)$ на (X, S) удовлетворяет уравнению

$$p_0(\cdot) = \int_{A_0} q(x, \cdot) p_0(dy). \quad (1.15)$$

Если при этом имеет место (1.14), то для любого $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\| = 0, \quad (1.16)$$

причем сходимость в (1.16) равномерна относительно $x \in A_0$.

Следующий пример иллюстрирует теорему 1.2.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим счетную цепь Маркова с переходными вероятностями

$$p_{11} = p_{22} = p, \quad p_{12} = p_{21} = q, \quad p + q = 1, \quad p_{k+1,k} = 1, \quad k \geq 2.$$

Очевидно, состояния с номерами $k > 2$ являются несущественными. Состояния 1 и 2 образуют замкнутый класс. Поэтому вероятности $p_{ik}^{(n)}$ для $i, k = 1, 2$ являются переходными для цепи, определяемой матрицей

$$P := \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 2p\lambda + p^2 = q^2$. Очевидно, это уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = p - q$. Характеристическому

корню λ_1 соответствует собственный вектор $(1, 1)$, а λ_2 – собственный вектор $(-q, q)$. Нетрудно видеть, что матрица

$$Q_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

есть проектор на подпространство в R_2 , порожденное вектором $(1, 1)$. Соответственно, матрица

$$Q_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

является проектором на подпространство, порожденное вектором $(-1, 1)$. Поэтому $P^n = Q_1 + \lambda_2^n Q_2$. Таким образом, имеем

$$p_{11}^{(n)} = p_{22}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 - (p - q)^n), \quad p_{12}^{(n)} = p_{21}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 + (p - q)^n). \quad (1.17)$$

Нетрудно видеть, что для $i > 2$ и $k < i$

$$p_{ik}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i > k \geq 2 \text{ и } n \neq i - k, \\ 1, & \text{если } i > k \geq 2 \text{ и } n = i - k, \\ p_{2k}^{(n-i+2)}, & \text{если } k \leq 2 \text{ и } n > i - 2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Из (1.17) и (1.18) следует, что при $n > i - 2$

$$p_{i1}^{(n)} = p_{21}^{(n-i+2)} = \frac{1}{2}(1 - (p - q)^{n-i+2}), \quad p_{i2}^{(n)} = p_{22}^{(n-i+2)} = \frac{1}{2}(1 + (p - q)^{n-i+2}).$$

Таким образом, для любого i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } k = 1, 2, \\ 0, & \text{если } k > 2, \end{cases}$$

однако эта сходимость не является равномерной по i . В данном случае множество A_0 состоит из двух элементов: 1 и 2.

Сформулируем теперь условия, обеспечивающие равномерную эргодичность цепи X_n на A_0 . Для этого нам понадобятся дополнительные определения и обозначения.

Очевидно, мера $q_n(x, \cdot)$ при любом n абсолютно непрерывна относительно $q(x, \cdot)$. Обозначим через $q_0(n; x, y)$ соответствующую плотность. Положим $\mathcal{N}(x, y) = \{n: q_0(n; x, y) > 0\}$. Пусть $d(x, y)$ – наибольший общий делитель разностей $n - m$ элементов множества $\mathcal{N}(x, y)$. Обозначим $D_0 = \{(x, y): d(x, y) = 1\}$. Разумеется, D_0 может быть пустым. Будем считать, что $D_0 \in S \times S$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть цепь Y_n равномерно эргодична,

$$M_0 := \sup_{x \in A_0} \sum_{n=1}^{\infty} n q_n(x, A_0) < \infty, \quad (1.19)$$

$$P((Y_0, Y_1) \in D_0) > 0, \quad (1.20)$$

если Y_0 имеет стационарное распределение. Тогда имеет место (1.14) и, следовательно, (1.16).

Заметим, что согласно теореме 1.1 цепь Y_n равномерно эргодична, если для любого $x_0 \in A_0$

$$\sup_{x \in A_0} \sup_{B \in A_0 S} |q(x, B) - q(x_0, B)| < \rho < 1. \quad (1.21)$$

Условие (1.19) имеет более ограничительный вид, чем $\mu_0 < \infty$. Тем не менее оно является необходимым для (1.14) (см. лемму 3.2). Здесь и далее через $A_0 S$ обозначена σ -алгебра, образованная множествами $A_0 B$, $B \in S$. Условие (1.20) обеспечивает аperiodичность цепи X_n .

К. Б. Атрейя и П. Ней [17], а также Е. Нуммелин [18] для доказательства эргодических теорем разработали так называемый метод расщепления. Достоинство этого метода заключается в том, что он позволяет выделить атом в расширенном фазовом пространстве цепи Маркова. При этом используется условие: *существуют множество $A_0 \in S$, неотрицательная мера ψ на $A_0 S$, $\psi(A_0) > 0$, и $k_0 \geq 1$ такие, что для всех $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$*

$$p^{(k_0)}(x, B) \geq \psi(B). \quad (1.22)$$

Кроме того, предполагается, что при любом начальном значении $X_0 = x$ цепь X_n с вероятностью 1 хотя бы один раз оказывается в A_0 , т. е. выполняется условие (1.11). Условие (1.22) было впервые сформулировано в [16].

Алгебраический метод, альтернативный методу расщепления, предложен в работе [19].

Если $k_0 = 1$, то условие (1.22) в комбинации с (1.11) обеспечивает эргодичность цепи X_n в смысле (1.16). Именно этот случай реально рассматривается в [17], [18]. Это относится и к монографии [20], в которой, в частности, излагается метод расщепления. Общий случай, в котором не исключена периодичность цепи X_n , изучается в [21]. Если неравенство (1.22) выполняется для всех $x \in X$, $B \in A_0 S$, то цепь X_n является геометрически эргодичной (см. [22, с. 180]). Такие цепи часто называют *деблиновскими*.

Нетрудно видеть, что из (1.22) при $k_0 = 1$ следует условие (1.21). Это обеспечивает равномерную эргодичность цепи Y_n . Поскольку (1.22) не влечет, вообще говоря, (1.20), мы не можем в данном случае использовать теорему 1.3. Тем не менее, спектральный метод применим, если выполнены условия (1.19) и (1.22). Этот вопрос изучается в § 5 настоящей работы.

Заметим, что комбинация условий (1.11) и (1.22) впервые появилась в заметке [23] автора настоящей статьи. Полное доказательство эргодических теорем, анонсированных в [23], содержится в [24], при этом используется обобщение метода Эрдеша–Феллера–Полларда [25]. Судя по отсутствию ссылок, работы [23], [24] оказались не замеченными авторами [17], [18].

Условие (1.22) налагается на переходную вероятность также в работе [26], однако в комбинации не с (1.11), а с двумя другими условиями, которые в наших обозначениях формулируются следующим образом. Для любых $x \in X$ и $0 < \varepsilon < 1$:

- а) существует $n_0(x)$ такое, что $p^{(n)}(x, A_0) > 1 - \varepsilon$ для $n > n_0(x)$;
- б) $p^{(n)}(x, B) < K\psi(B) + \varepsilon$, $B \in A_0 S$, где постоянная K не зависит от x .

В [24] показано, что первое из этих дополнительных условий влечет равенство (1.11). Таким образом, условие b) излишне.

Т. Е. Харрис [16] ввел следующее условие: *существует неотрицательная σ -конечная мера $m(\cdot)$ такая, что если $m(E) > 0$, то при любом начальном состоянии $X_0 = x$*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \in E\}\right) = 1. \quad (1.23)$$

Именно это условие Харриса использует для доказательства эргодических теорем С. Ори [27], [28].

Если выполнено условие Харриса и σ -алгебра S сепарабельна, то согласно [28, теорема 2.1] существует множество $A_0 \in S$, для которого имеет место условие (1.22) при $\psi(\cdot) = m(\cdot)$. Условие (1.11) выполняется автоматически.

С другой стороны, если выполняются условия (1.11) и (1.22) при $k_0 = 1$, то в силу леммы 5.1 для цепи Y_n справедливо (1.21) и, следовательно, Y_n равномерно эргодична. В свою очередь, это означает, что цепь X_n с вероятностью 1 хотя бы один раз оказывается в множестве $B \in A_0 S$, если $q_0(B) > 0$, независимо от начального состояния. Таким образом, пара условий (1.11) и (1.22) влечет условие Харриса с $m(\cdot) = q_0(\cdot)$. Отметим, что условия (1.11) и (1.21) проверяются легче, чем условие Харриса, поскольку они относятся только к одному множеству A_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. С самого начала в [28] неявно предполагается, что мера $p(x, \cdot)$ имеет невырожденную абсолютно непрерывную компоненту относительно $m(\cdot)$ для всех $x \in X$. Непонятно, как это допущение связано с условием Харриса, и в этой связи возникают вопросы прежде всего к упомянутой выше теореме 2.1 из [28].

Как в [17], [18], так и в [19] на заключительном этапе доказательства применяется классическая теорема восстановления для независимых целочисленных случайных величин. Это дает возможность использовать для оценки скорости сходимости в (1.16) готовые результаты из теории восстановления (см. по этому поводу [20, гл. 1]). Как известно, скорость сходимости в теоремах восстановления зависит от поведения на бесконечности распределения времени первого восстановления. В нашем случае это момент первого возвращения в A_0 .

В недавней работе [29] для оценки скорости сходимости к стационарному распределению применяется каплинг. Чтобы последний был осуществим, предполагается, что переходная вероятность $p(x, \cdot)$ дифференцируема по некоторой неотрицательной σ -конечной мере для всех $x \in X$. Отличие нашей работы от [29], помимо метода доказательства, заключается в том, что мы не предполагаем дифференцируемости переходной функции, за исключением § 5, где спектральный метод применяется в случае, когда выполняются условия (1.11) и (1.22). Полиномиальные оценки скорости сходимости к стационарному распределению для специального класса цепей Маркова выводятся в более ранней работе [30].

Оценки скорости сходимости к стационарному распределению используются в [29] при доказательстве центральной предельной теоремы для суммы случайных величин, заданных на цепи X_n (см. теоремы 3.1, 3.2). Первая из этих

теорем является частным случаем центральной предельной теоремы для цепей Маркова, удовлетворяющих условию (1.7), которая была доказана в [1]. Судя по всему, работа [1] осталась вне поля зрения авторов [29].

Заметим, что спектральный метод можно использовать и для вывода оценок скорости сходимости в эргодических теоремах. Для этого нужно заменить условие (1.19) более сильными ограничениями $\sup_{x \in A_0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} q_n(x, A_0) < \infty$, $\gamma > 1$, или $\sup_{x \in A_0} \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n q_n(x, A_0) < \infty$, $r_0 > 1$. В первом случае мы имеем полиномиальную скорость сходимости, а во втором – экспоненциальную.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Определим оператор P на пространстве знакопеременных мер $\mu(\cdot)$, заданных на (X, S) , $\|\mu\| < \infty$, формулой

$$P\mu(\cdot) = \int_X p(x, \cdot) \mu(dx).$$

Очевидно,

$$P\mu(\cdot) = \int_X (p(x, \cdot) - p(x_0, \cdot)) \mu(dx) + p(x_0, \cdot) \mu(X).$$

Поэтому если $\mu(X) = 0$, то $P\mu(X) = 0$.

Следующая лемма заимствована нами из [15]. Для удобства изложения мы приведем здесь ее доказательство, которое несколько изменено по сравнению с доказательством из [15].

ЛЕММА 2.1. *Если $\mu(X) = 0$, то*

$$\|P\mu\| \leq \rho \|\mu\|. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, мера μ представима в виде разности двух неотрицательных взаимно сингулярных мер μ_1 и μ_2 . Пусть A_i , $i = 1, 2$, – множество, на котором сосредоточена мера μ_i . Тогда для любого $B \in S$

$$P\mu(B) = \int_{A_1} p(x, B) d\mu_1(x) - \int_{A_2} p(x, B) d\mu_2(x). \quad (2.2)$$

Обозначим $\lambda(B) = \sup_{x \in A_1} p(x, B)$. Для любого $x_0 \in A_1$

$$\begin{aligned} \int_{A_2} p(x, B) d\mu_2(x) &= \int_{A_2} p(x_0, B) d\mu_2(x) \\ &+ \left(\int_{A_2} p(x, B) d\mu_2(x) - \int_{A_2} p(x_0, B) d\mu_2(x) \right) \geq (p(x_0, B) - \rho) \mu_2(A_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

С другой стороны, имеем

$$\int_{A_1} p(x, B) d\mu_1(x) \leq \lambda(B) \mu_1(A_1). \quad (2.4)$$

Комбинируя (2.2)–(2.4) и учитывая, что $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) = \|\mu\|/2$, получаем

$$2P\mu(B) \leq (\lambda(B) - p(x_0, B) + \rho)\|\mu\|.$$

Поскольку можно сделать разность $\lambda(B) - p(x_0, B)$ сколь угодно малой, то получаем $2P\mu(B) \leq \rho\|\mu\|$. Отсюда

$$\|P\mu\| = 2 \sup_{B \in S} P\mu(B) \leq \rho\|\mu\|,$$

что и требовалось доказать.

В силу (2.1)

$$\|P^n\mu\| \leq \rho^n\|\mu\|, \quad (2.5)$$

если $\mu(X) = 0$. Пусть оператор P_0 определяется равенством $P_0\mu(\cdot) = p(x_0, \cdot) \times \mu(X)$. Очевидно, для любой меры μ

$$P_0^2\mu(\cdot) = p(x_0, \cdot)p(x_0, X)\mu(X) = P_0\mu(\cdot),$$

т. е.

$$P_0^2 = P_0. \quad (2.6)$$

Далее,

$$P_0P\mu(\cdot) = p(x_0, \cdot) \int_X p(x, X)\mu(dx) = p(x_0, \cdot)\mu(X).$$

Таким образом, получаем

$$P_0P = P_0. \quad (2.7)$$

В силу (2.6) и (2.7) имеем

$$P_0(P - P_0) = 0. \quad (2.8)$$

Из тождества $P = (P - P_0) + P_0$ следует, что P^n представляется в виде суммы произведений вида

$$\prod_{k=1}^n (P - P_0)^{i_k} P_0^{j_k},$$

где

$$\sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n j_k = n.$$

Пусть $k^* = \min \{k: j_k > 0\}$. Тогда вследствие (2.8) имеем

$$\prod_{k=k^*}^n (P - P_0)^{i_k} P_0^{j_k} = 0,$$

если $\max\{i_k: k > k^*\} > 0$. Отсюда в силу (2.6) получаем

$$P^n = \sum_{k=0}^{n-1} (P - P_0)^k P_0 + (P - P_0)^n.$$

Впрочем, можно вывести это соотношение и индукцией по n . Нетрудно видеть, что

$$(P - P_0)^k P_0 \mu(\cdot) = \mu(X) \int_X w^{(k)}(x_0; x, \cdot) p(x_0, dx).$$

Следовательно, для любой вероятностной меры $p(\cdot)$

$$P^n p(\cdot) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_X w^{(k)}(x_0; x, \cdot) p(x_0, dx) + \int_X w^{(n)}(x_0; x, \cdot) p(dx). \quad (2.9)$$

Заметим, что $\|(P - P_0)P_0\mu\| \leq 2\rho$ и $(P - P_0)\mu(X) = 0$. Отсюда ввиду неравенства (2.5) имеем

$$\|(P - P_0)^k P_0\mu\| \leq 2\rho^k.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} w^{(k)}(x_0; x, \cdot) p(x_0, dx)$ абсолютно сходится с экспоненциальной скоростью.

Переходя теперь к пределу при $n \rightarrow \infty$ в обеих частях равенства (2.9), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n p(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X w^{(k)}(x_0; x, \cdot) p(x_0, dx). \quad (2.10)$$

Поскольку правая часть (2.10) не зависит от $p(\cdot)$, мера

$$p_0(\cdot) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_X w^{(k)}(x_0; x, \cdot) p(x_0, dx)$$

является стационарным распределением. Полагая $\mu(\cdot) = p(\cdot) - p_0(\cdot)$ в неравенстве (2.5), имеем

$$\|P^n p(\cdot) - p_0(\cdot)\| \leq 2\rho^n.$$

Итак, теорема 1.1 полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Нетрудно видеть, что для любых $x \in X$ и $B \in A_0 S$

$$p^{(n)}(x, B) = \sum_{k=1}^n \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) q_k(x, dy), \quad (3.1)$$

где

$$p^{(0)}(y, B) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B, \\ 0, & \text{если } x \in A_0 - B. \end{cases}$$

Для любых $x \in X$, $B \in A_0 S$ положим

$$r_n(x, B) = \sum_{j=n+1}^{\infty} q_j(x, B).$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $B \in A_0 S$. Тогда для любых $x \in A_0$ и $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) r_k(x, dy) = q(x, B). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $q_k(x, \cdot) = r_{k-1}(x, \cdot) - r_k(x, \cdot)$. Подставляя это выражение в (3.1), имеем

$$p^{(n)}(x, B) = \sum_{k=1}^n \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) (r_{k-1}(x, dy) - r_k(x, dy)).$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^n \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) r_k(x, dy) = \text{const}$$

относительно n . Чтобы завершить доказательство леммы, остается заметить, что

$$\int_{A_0} p^{(0)}(y, B) r_0(x, dy) = r_0(x, B) = q(x, B).$$

ЛЕММА 3.2. Если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in A_0} p^{(n)}(x, A_0) > 0, \quad (3.3)$$

то имеем

$$\sup_{x \in A_0} \sum_{k=0}^{\infty} r_k(x, A_0) < \infty. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (3.3) существуют $\lambda > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $\inf_{n \geq N} \inf_{x \in A_0} p^{(n)}(x, A_0) > \lambda$. Отсюда в силу (3.2) имеем

$$1 > \lambda \sum_{k=0}^{n-N} r_k(x, A_0).$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{k=0}^n r_k(x, A_0) < \lambda^{-1} + \sum_{k=n-N+1}^n r_k(x, A_0).$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=n-N+1}^n r_k(x, A_0) < N r_0(x, A_0) = N.$$

Из двух последних неравенств следует утверждение леммы.

Обозначим

$$q_n(\cdot) = \int_{A_0} q_n(y, \cdot) p_0(dy).$$

ЛЕММА 3.3. *Справедливо тождество*

$$p_0(X - A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(X - A_0). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (1.13) и (1.15) имеем

$$p_0(X - A_0) = \int_{A_0} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x, X - A_0) p(dx) = \int_{A_0} \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x, A_0) p_0(dx).$$

В силу (1.14) выполняются неравенства (3.3) и (3.4). Отсюда получаем

$$p_0(X - A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_0} r_n(x, A_0) p_0(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(X - A_0),$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что для любых $x \in X$ и $B \in S$

$$p^{(n)}(x, B) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_0} q_{n-k}(y, B) p^{(k)}(x, dy). \quad (3.6)$$

В частности,

$$p^{(n)}(x, X - A_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A_0} q_{n-k}(y, X - A_0) p^{(k)}(x, dy). \quad (3.7)$$

Ввиду (1.14) для любого фиксированного k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} \left| \int_{A_0} q_k(y, X - A_0) (p^{(n-k)}(x, dy) - p_0(dy)) \right| = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что для любого фиксированного N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-N}^n \int_{A_0} q_{n-k}(y, X - A_0) p^{(k)}(x, dy) = \sum_{k=0}^N q_j(X - A_0) \quad (3.9)$$

равномерно по $x \in A_0$.

С другой стороны, вследствие (1.14) равномерно по $x \in A_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, X - A_0) = 1 - p_0(A_0) = p_0(X - A_0). \quad (3.10)$$

Комбинируя (3.7), (3.9), (3.10) и учитывая лемму 3.3, равномерно по $x \in A_0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-N-1} \int_{A_0} q_{n-k}(y, X - A_0) p^{(k)}(x, dy) \\ = p_0(X - A_0) - \sum_{k=0}^N q_k(X - A_0) = \sum_{k=N+1}^{\infty} q_k(X - A_0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Точно так же, как (3.8), доказывается, что для любого $B \in (X - A_0)S$ равномерно по $x \in A_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n-N}^n \int_{A_0} q_{n-k}(x, B) p^{(k)}(x, dy) = \sum_{j=0}^N q_j(B). \quad (3.12)$$

С другой стороны, вследствие (3.11) имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} \sum_{k=0}^{n-N-1} \int_{A_0} q_{n-k}(x, B) p^{(k)}(x, dy) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} q_k(X - A_0). \quad (3.13)$$

Выбором N сумма в правой части (3.13) может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому из (3.6), (3.12) и (3.13) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in (X - A_0)S} |p^{(n)}(x, B) - p_0(B)| = 0. \quad (3.14)$$

Поскольку для любых $x \in A_0$, $B \in S$

$$\begin{aligned} & |p^{(n)}(x, B) - p_0(B)| \\ & < |p^{(n)}(x, A_0 B) - p_0(A_0 B)| + |p^{(n)}(x, (X - A_0)B) - p_0((X - A_0)B)|, \end{aligned}$$

из (1.14) и (3.14) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in S} |p^{(n)}(x, B) - p_0(B)| = 0 \quad (3.15)$$

равномерно относительно $x \in A_0$.

Остается рассмотреть случай $x \in X - A_0$. Нетрудно видеть, что для любых $x \in X - A_0$ и $B \in S$

$$p^{(n)}(x, B) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) q_k(x, dy) + q_n(x, B). \quad (3.16)$$

В силу (3.15) для любого фиксированного N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in S} \left| \sum_{k=1}^N \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) q_k(x, dy) - p_0(B) \sum_{k=1}^N q_k(x, dy) \right| = 0. \quad (3.17)$$

С другой стороны, имеем

$$\sup_{B \in S} \sum_{k=N+1}^{n-1} \int_{A_0} p^{(n-k)}(y, B) q_k(x, dy) < \sum_{k=N+1}^{\infty} q_k(x, A_0) \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

при $N \rightarrow \infty$. Далее,

$$q^{(n)}(x, B) < P\{v_0 \geq n \mid X_0 = x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.19)$$

Из (3.16)–(3.19) следует, что для любого $x \in X - A_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in S} |p^{(n)}(x, B) - p_0(B)| = 0. \quad (3.20)$$

Теорема 1.2 теперь полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

Равномерная эргодичность цепи Y_n означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{(n)}(x, B) = q_0(B)$$

равномерно относительно $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$, где $q_0(\cdot)$ – стационарное распределение для $q_0(x, \cdot)$. Отсюда в силу (1.2)

$$\sup_{x \in A_0 S} \|q^{(n)}(x, \cdot) - q_0(\cdot)\| \leq c\rho^n. \quad (4.1)$$

Введем производящие функции

$$q(z; \cdot, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\cdot, \cdot) z^n, \quad p(z; \cdot, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(\cdot, \cdot) z^n.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ – пространство всех ограниченных комплексных функций $g(x)$, $x \in A_0$, измеримых относительно $A_0 S$ с нормой $\|g(\cdot)\| = \sup_{x \in A_0} \|g(\cdot)\|$. Умножая обе части (3.1) на z^n и производя затем суммирование по n от 1 до ∞ , находим, что для любого фиксированного $B \in A_0 S$

$$p(z; \cdot, B) - p(\cdot, B) = Q(z)p(z; \cdot, B),$$

где оператор $Q(z)$ на $\mathfrak{M}$ определяется равенством

$$Q(z)g(\cdot) = \int_{A_0} g(x)q(z; \cdot, dx).$$

Отсюда

$$p(z; \cdot, B) = (I - Q(z))^{-1} p^{(0)}(\cdot, B). \quad (4.2)$$

Положим

$$R(u; z) = (Q(z) - uI)^{-1}.$$

Запишем теперь (4.2) в виде

$$p(z; \cdot, B) = -R(1; z)p^{(0)}(\cdot, B). \quad (4.3)$$

Наша ближайшая задача – изучить поведение резольвенты $R(u; z)$ в окрестности точки $z = 1$. Этой цели служат леммы 4.1–4.5, и мы используем тот факт, что оператор $Q(z)$ наследует спектральные свойства оператора $Q(1)$ для z , достаточно близких к 1.

Обозначим для краткости $Q = Q(1)$. Пусть Q_0 – оператор на $\mathfrak{M}$, определяемый стационарным распределением q_0 , т. е. для любого $x \in A_0$

$$Q_0 g(x) = \int_{A_0} g(y) q_0(dy).$$

Нетрудно видеть, что

$$QQ_0 = Q_0Q = Q_0 = Q_0^2. \quad (4.4)$$

Оператор Q_0 проектирует $\mathfrak{M}$ на одномерное подпространство $\mathfrak{M}_0$, порожденное функцией $\chi(x) \equiv 1$, $x \in A_0$. Нетрудно видеть, что спектр оператора Q равен сумме спектров операторов Q и $Q - Q_0$, рассматриваемых соответственно в $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1$ состоит из тех $g \in \mathfrak{M}$, для которых $Q_0 g = 0$. Из (4.4) следует, что для любого $n \geq 1$

$$(Q - Q_0)^n = Q^n - Q_0. \quad (4.5)$$

Действительно, если (4.5) справедливо для n , то в силу (4.4) имеем

$$(Q - Q_0)^{n+1} = (Q^n - Q_0)(Q - Q_0) = Q^{n+1} - Q^n Q_0.$$

Далее, вследствие (4.4)

$$Q^n Q_0 = Q^{n-1} Q_0 = \dots = Q_0.$$

Равенство (4.5) для $n = 1$ выполняется очевидным образом.

Поскольку резольвентному множеству оператора $Q - Q_0$ принадлежат все точки u , для которых

$$\|u\| > \lim_{n \rightarrow \infty} \|(Q - Q_0)^n\|^{1/n},$$

то из (4.1) и (4.5) вытекает, что спектр $Q - Q_0$ целиком содержится в круге с радиусом ρ и центром в точке 0. Спектр оператора Q , рассматриваемого как оператор в $\mathfrak{M}_0$, состоит из единственной точки $u = 1$.

Таким образом, область, внешняя к кругу с радиусом ρ и центром в точке 0, из которой удалена точка $u = 1$, лежит в резольвентном множестве оператора Q . Вследствие (4.4) имеем

$$(Q - Q_0)Q_0 = Q_0(Q - Q_0) = 0.$$

Поэтому $Q^n = Q_0 + (Q - Q_0)^n$. Отсюда в силу (4.5) получаем

$$R(u) := R(u; 1) = \frac{Q_0}{1 - u} + \sum_{n=0}^{\infty} (Q_0 - Q^n) u^{-n-1}. \quad (4.6)$$

Согласно (4.1) ряд в правой части (4.6) сходится при $u > \rho$. Если

$$\|Q(z) - Q\| < \frac{1}{\|R(u)\|},$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} R(u) ((Q - Q(z)) R(u))^k \quad (4.7)$$

сходится и определяет для $Q(z)$ резольвентный оператор $R(u; z)$.

Пусть J_1 и J_2 — окружности соответственно с центрами в точках 1 и 0 и радиусами $\rho_1 = \frac{1-\rho}{3}$ и $\rho_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho$. Далее, пусть $M_\delta = \sup \|R(u)\|$ в области, внешней по отношению к кругам с центрами в 0 и 1 и радиусами соответственно $\delta + \rho_1$ и δ , причем $\delta < \rho_1$ и $\delta + \rho < \rho_2$. Нетрудно видеть, что если

$$\|Q(z) - Q\| < \frac{1}{M_\delta}, \quad (4.8)$$

то J_1 и J_2 лежат в резольвентном множестве оператора $Q(z)$. Поскольку

$$\|Q(z) - Q\| < \sup_{x \in A_0} \sum_{n=1}^{\infty} n q_n(x, A_0) |z - 1|,$$

вследствие (1.19) неравенство (4.8) выполняется в единичном круге для z , достаточно близких к 1.

Рассмотрим проекторы

$$Q_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} R(u; z) du, \quad (4.9)$$

$$Q_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} R(u; z) du. \quad (4.10)$$

Пусть $\mathfrak{M}_0(z)$ – подпространство, на которое $Q_0(z)$ проектирует $\mathfrak{M}(z)$.

ЛЕММА 4.1. *Если*

$$\|Q_0(z) - Q_0\| < 1, \quad (4.11)$$

то подпространство $\mathfrak{M}_0(z)$ одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда в $\mathfrak{M}_0(z)$ найдутся два линейно независимых вектора h_1 и h_2 . Очевидно, $Q_0 h_1 = \gamma Q_0 h_2$, где γ – некоторое комплексное число. Если $h = h_1 - \gamma h_2$, то $Q_0 h = 0$. Отсюда $(Q_0(z) - Q_0)h = h$, что противоречит (4.11). Следовательно, $\mathfrak{M}_0(z)$ одномерно, что и требовалось доказать.

Пусть $h_0(z)$ – вектор, порождающий $\mathfrak{M}_0(z)$, $\lambda(z)$ – соответствующее собственное значение оператора $Q(z)$. Обозначим для краткости $h_0 = h_0(1)$.

Пусть $\mathfrak{M}^*$ – пространство комплекснозначных мер на $A_0 S$. В дальнейшем мы будем обозначать через (g, μ) , $g \in \mathfrak{M}$, $\mu \in \mathfrak{M}^*$, функционал $\int_{A_0 S} g(x) \mu(dx)$.

ЛЕММА 4.2. *Если выполнено условие (4.8), то*

$$\lambda(z) = \frac{(Q(z)Q_0(z)h_0, q_0)}{(Q_0(z)h_0, q_0)}. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $Q(z)h_0(z) = \lambda(z)h_0(z)$. Отсюда

$$\lambda(z) = \frac{(Q(z)h_0(z), q_0)}{(h_0(z), q_0)}. \quad (4.13)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$h_0(z) = Q_0(z)h_0. \quad (4.14)$$

Из (4.13) и (4.14) следует утверждение леммы.

Считая, что выполнено условие (4.8), положим

$$A(u; z) = (Q - Q(z))R(u), \quad (4.15)$$

$$B_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{J_1} u R(u) A^k(u; z) du h_0, q_0 \right), \quad (4.16)$$

$$C_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{J_1} R(u) A^k(u; z) du h_0, q_0 \right). \quad (4.17)$$

Вследствие (4.7) и (4.9) имеем

$$Q_0(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_1} R(u) A^k(u; z) du, \quad (4.18)$$

$$Q(z)Q_0(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_1} u R(u) A^k(u; z) du. \quad (4.19)$$

Мы использовали здесь равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} R(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} u R(u) du = -Q_0,$$

которые следуют из (4.6). В силу (4.13), (4.18) и (4.19) имеем

$$\lambda(z) = \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z)}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(z)}. \quad (4.20)$$

ЛЕММА 4.3. Если $z \rightarrow 1$ и $|z| \leq 1$, то

$$\lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^0 z^k + O(|z - 1|^2). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\frac{Q_0}{1-u}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (Q_0 - Q^n)u^{-n-1}$ соответственно через $R_1(u)$ и $R_2(u)$. Полагая $G(z) = Q(z) - Q$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{J_1} R(u)G(z)R(u) du &= \int_{J_1} R_1(u)G(z)R_1(u) du + \int_{J_1} R_1(u)G(z)R_2(u) du \\ &+ \int_{J_1} R_2(u)G(z)R_1(u) du + \int_{J_1} R_2(u)G(z)R_2(u) du \equiv \sum_{k=1}^4 I_k(z). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Очевидно,

$$I_1(z) = Q_0 G(z) Q_0 \int_{J_1} \frac{du}{(u-1)^2}.$$

Поскольку $\int_{J_1} \frac{du}{(u-1)^2} = 0$, то $I_1(z) = 0$ тождественно по z . Далее,

$$I_2(z) = Q_0 G(z) \int_{J_1} \frac{R_2(u)}{u-1} du = -2\pi i Q_0 G(z) R_2(1).$$

Аналогично,

$$I_3(z) = \int_{J_1} \frac{R_2(u)}{u-1} du G(z) Q_0 = -2\pi i R_2(1) G(z) Q_0.$$

Далее, так как функция $R_2(u)G(z)R_2(u)$ аналитична внутри контура J_1 , то $I_4(z) \equiv 0$. Возвращаясь теперь к (4.22), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} R(u)G(z)R(u) du = -Q_0 G(z) R_2(1) - R_2(1) G(z) Q_0. \quad (4.23)$$

Поскольку $R_2(1)h_0 = 0$, то

$$Q_0 G(z) R_2(1) h_0 = 0. \quad (4.24)$$

Здесь 0 означает нулевой вектор в $\mathfrak{M}$. Заметим, что $G(z)Q_0 = c(z)h_0$, где $c(z)$ – постоянная, зависящая от z . Поэтому

$$R_2(1)G(z)Q_0 = 0. \quad (4.25)$$

Из (4.23)–(4.25) следует

$$\int_{J_1} R(u)G(z)R(u) du = 0. \quad (4.26)$$

В силу (4.15) и (4.17) это означает, что

$$C_1(z) \equiv 0. \quad (4.27)$$

Рассмотрим теперь $B_1(z)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{J_1} uR(u)G(z)R(u) du &= \int_{J_1} uR_1(u)G(z)R_1(u) du + \int_{J_1} uR_1(u)G(z)R_2(u) du \\ &+ \int_{J_1} uR_2(u)G(z)R_1(u) du + \int_{J_1} uR_2(u)G(z)R_2(u) du \equiv \sum_{k=1}^4 I_k(z). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} I_1(z) &= Q_0 G(z) Q_0 \int_{J_1} \frac{u}{(u-1)^2} du = -2\pi i Q_0 G(z) Q_0, \\ I_2(z) &= Q_0 G(z) \int_{J_1} \frac{uR_2(u)}{u-1} du = -2\pi i Q_0 G(z) R_2(1), \\ I_3(z) &= \int_{J_1} \frac{uR_2(u)}{u-1} du G(z) Q_0 = -2\pi i R_2(1) G(z) Q_0, \\ I_4(z) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_1} uR(u)G(z)R(u) du = -Q_0 G(z) Q_0 - Q_0 G(z) R_2(1) - R_2(1) G(z) Q_0. \quad (4.29)$$

Очевидно, имеем

$$Q_0 G(z) Q_0 h_0 = Q_0 Q h_0 - Q_0 Q(z) h_0. \quad (4.30)$$

Нетрудно видеть, что

$$(Q_0 Q(z) h_0, q_0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^0 z^n, \quad (Q_0 Q h_0, q_0) = 1. \quad (4.31)$$

Комбинируя (4.16), (4.24), (4.25) и (4.29)–(4.31), мы заключаем, что

$$B_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^0 z^n - 1. \quad (4.32)$$

Далее, нетрудно видеть, что при $|z| \leq 1$

$$\|G(z)\| < M_0|z - 1|. \quad (4.33)$$

Поэтому если $|z| \leq 1$ и z достаточно близко к 1, то

$$\sup_{u \in J_1} \|G(z)R(u)\| < \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

Отсюда в силу (4.16) и (4.17) имеем

$$|B_k(z)| < 2^{-k}(1 + \rho_1) \sup_{u \in J_1} \|R(u)\|, \quad |C_k(z)| < 2^{-k} \sup_{u \in J_1} \|R(u)\|. \quad (4.35)$$

Из (4.27) и (4.35) следует существование $\varepsilon > 0$ такого, что при $|z - 1| < \varepsilon$, $|z| \leq 1$

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} B_k(z) \right| < c_1|z - 1|^2, \quad \left| \sum_{k=2}^{\infty} C_k(z) \right| < c_2|z - 1|^2 < \frac{1}{2}, \quad (4.36)$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные. Комбинируя (4.20), (4.27), (4.32) и (4.36), мы приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 4.4. *Для $|z| \leq 1$ имеем*

$$\|Q_0(z) - Q_0\| = O(|z - 1|). \quad (4.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (4.7) и (4.9) имеем

$$Q_0(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_1} R(u) A^k(u; z) du.$$

Отсюда в силу (4.33) и (4.34) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|z| \leq 1$, $|z - 1| < \varepsilon$

$$\|Q_0(z) - Q_0\| < \sup_{u \in J_1} \|R(u)\|^2 M_0|z - 1|,$$

что эквивалентно утверждению леммы.

ЛЕММА 4.5. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|z - 1| < \varepsilon$, $|z| \leq 1$*

$$R(u; z) = \frac{Q_0(z)}{\lambda(z) - u} + \Omega(u; z), \quad (4.38)$$

где оператор $\Omega(u; z)$ равномерно ограничен в области $\{u, z: u \geq \delta, |z - 1| < \varepsilon, |z| \leq 1\}$ для любого $\delta > \rho_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$Q^n(z) = Q^n(z)Q_0(z) + Q^n(z)Q_1(z).$$

Далее, имеем

$$Q^n(z)Q_0(z) = \lambda^n(z)Q_0(z), \quad Q^n(z)Q_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} v^n R(v; z) dv.$$

Следовательно, получаем

$$R(u; z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(z) u^{-n-1} Q_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} (u-v)^{-1} R(v; z) dv.$$

Полагая $\Omega(u; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{J_2} (v-u)^{-1} R(v; z) dv$ и используя (4.7), мы без особого труда приходим к утверждению леммы.

Итак, мы исследовали резольвенту $R(u; z)$ для z , близких к 1. Теперь нам нужно оценить $\|R(1; e^{i\varphi})\|$ для $|\varphi| > \varepsilon > 0$. Делаем это, используя лемму 4.10. Леммы 4.6–4.9 являются подготовительными для доказательства леммы 4.10.

ЛЕММА 4.6. Пусть общий наибольший делитель целых чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ равен 1. Тогда $\sum_{j=1}^k \sin^2(n_j \varphi) > 0$ для $0 < \varphi < \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n_1 = 1$ утверждение леммы тривиально. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $n_1 > 1$. Предположим, что $\sum_{j=1}^k \sin^2(n_j \varphi) = 0$ для некоторого $0 < \varphi < \pi$. Тогда для любого j найдется $0 < m_j < n_j$ такое, что $n_j \varphi = m_j \pi$, т.е. $\varphi = m_j \pi / n_j$. Отсюда $n_j = n_1 m_j / m_1$ для всех $2 \leq j \leq k$. Если n_1 и m_1 взаимно просты, то m_j / m_1 – целые числа и, следовательно, $n_1 > 1$ является общим делителем для n_j , $1 \leq j \leq k$, что противоречит условию леммы. Если n_1 и m_1 имеют наибольший общий делитель $d > 1$, то $n_1/d > 1$ является общим делителем для n_j , $1 \leq j \leq k$, что также невозможно. Следовательно, $\sin^2(n_j \varphi) > 0$ хотя бы для одного $1 \leq j \leq k$, что равносильно утверждению леммы.

ЛЕММА 4.7. Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ – последовательность целых чисел и наибольший общий делитель разностей $n_i - n_j$, $i \neq j$, равен 1. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \pi$ и любых $p_m > 0$, $1 \leq m \leq k$, имеем

$$\sup_{\varepsilon \leq \varphi \leq \pi} \left| \sum_{m=1}^k p_m e^{in_m \varphi} \right| < \sum_{m=1}^k p_m. \quad (4.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^k p_m e^{in_m \varphi} \right|^2 &= \sum_{m,j=1}^k p_m p_j \cos((n_j - n_m) \varphi) \\ &= \left(\sum_{m=1}^k p_m \right)^2 - 2 \sum_{m,j=1}^k p_m p_j \sin^2 \left(\frac{n_j - n_m}{2} \varphi \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Очевидно, выполнено неравенство

$$\sum_{m,j=1}^k p_m p_j \sin^2 \left(\frac{n_j - n_m}{2} \varphi \right) > p_k \inf_{1 \leq j \leq k} p_j \sum_{m=1}^{k-1} \sin^2 \left(\frac{n_k - n_m}{2} \varphi \right). \quad (4.41)$$

В силу леммы 4.6 для любого $0 < \varphi < 2\pi$ имеем

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sin^2 \left(\frac{n_k - n_j}{2} \varphi \right) > 0.$$

Следовательно, для любого $0 < \varepsilon \leq \pi$ получаем

$$\sup_{\varepsilon \leq \varphi \leq \pi} \sum_{j=1}^{k-1} \sin^2 \left(\frac{n_k - n_j}{2} \varphi \right) > 0.$$

Возвращаясь теперь к (4.41) и (4.40), мы получаем (4.39). Лемма доказана.

Пусть $g(x, y)$ – индикатор D_0 и $\xi_n = g(Y_{n-1}, Y_n)$. Положим $N_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $p = \int_{A_0} E(\xi_1 | Y_0 = y) q_0(dy)$.

ЛЕММА 4.8. *Пусть выполнено условие (1.20). Тогда для любого начального значения $Y_0 = x$*

$$\text{Var } N_n < c(\rho)n. \quad (4.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, выполнено равенство

$$\text{Var } N_n = \sum_{i=1}^n E\eta_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} E\eta_i \eta_k, \quad (4.43)$$

где $\eta_i = \xi_i - E\xi_i$. Для простоты ограничимся случаем, когда c_0 в (4.1) не превосходит 1. Тогда при любом начальном значении $Y_0 = x$ имеем

$$E\xi_n = \int_{A_0} E(\xi_n | Y_{n-1} = y) q^{(n-1)}(x, dy) = \int_{A_0} E(\xi_n | Y_{n-1} = y) q_0(dy) + \theta \rho^n.$$

Здесь и далее θ – величина, не превосходящая по модулю 1. Поскольку

$$\int_{A_0} E(\xi_n | Y_{n-1} = y) q_0(dy) = \int_{A_0} E(\xi_1 | Y_0 = y) q_0(dy) := p,$$

при любом начальном значении Y_0 выполнено

$$E\xi_n = p + \theta \rho^n. \quad (4.44)$$

Отсюда при $i < k$ имеем $E(\xi_k | \xi_i) = p + \theta \rho^{k-i}$. Следовательно,

$$E\xi_i \xi_k = E\xi_i E(\xi_k | \xi_i) = E\xi_i (p + \theta \rho^{k-i}).$$

Еще раз используя (4.44), имеем

$$E\xi_i \xi_k = p^2 + \theta(\rho^i + \rho^k + \rho^{k-i}).$$

С другой стороны, в силу (4.44) получаем

$$E\xi_i E\xi_k = p^2 + \theta(\rho^i + \rho^k + \rho^{k+i}).$$

Следовательно,

$$E\eta_i \eta_k = 2\theta(\rho^i + \rho^k + \rho^{k-i}).$$

Отсюда после несложных вычислений получаем

$$\sum_{k=i+1}^n \eta_i \eta_k = 2\theta \left((n-i)\rho^i + \frac{1+\rho^{i+1}}{1-\rho} \right).$$

Производя суммирование по i в обеих частях последнего равенства, имеем

$$\left| \sum_{1 \leq i < k \leq n} \eta_i \eta_k \right| < \frac{12n}{1 - \rho}. \quad (4.45)$$

Остается оценить $\sum_{k=1}^n \eta_k^2$. Заметим, что $E\xi_k^2 = E\xi_k$. Поэтому из (4.44) следует, что $E\eta_k^2 = p(1 - p) + 4\theta\rho^k$. Отсюда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n E\eta_k^2 < np(1 - p) + \frac{4}{1 - \rho}. \quad (4.46)$$

Из (4.43), (4.45) и (4.46) следует желаемый результат. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.9. *При любом начальном Y_0 справедливо неравенство*

$$EN_n > np - \frac{1}{1 - \rho}. \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (4.47) является очевидным следствием соотношения (4.44).

Пусть итерации комплексной переходной функции $q(z; x, \cdot)$ определяются рекуррентным соотношением

$$q^{(n)}(z; x, \cdot) = \int_{A_0} q(z; y, \cdot) q^{(n-1)}(z; x, dy).$$

ЛЕММА 4.10. *Если выполняется условие (1.20), то для любого $0 < \varepsilon \leq \pi$ существуют $0 < d(\varepsilon) < 1$ и c_0 такие, что для всех $x \in A_0$*

$$\sup_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} \|q^{(n)}(e^{i\varphi}; x, \cdot)\| < c_0(1 - d(\varepsilon))^n. \quad (4.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(x, y) \in D_0$, то существует последовательность чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ из $\mathcal{N}(x, y)$ такая, что наибольший общий делитель разностей $n_k - n_j$ равен 1. Пусть $\bar{q}_0(z; x, \cdot)$ — плотность $q(z; x, \cdot)$ относительно $q(x, \cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$\bar{q}_0(z; x, y) = \sum' q_0(n; x, y) z^n + \sum_{m=1}^k q_0(n_m; x, y) z^{n_m},$$

в сумме $\sum'$ суммирование проводится по $n \neq n_m, 1 \leq m \leq k$. Согласно лемме 4.7 имеем

$$\sup_{\varepsilon < \varphi \leq \pi} \left| \sum_{m=1}^k q_0(n_m; x, y) e^{i\varphi n_m} \right| < \sum_{m=1}^k q_0(n_m; x, y).$$

Следовательно, для любой пары $(x, y) \in D_0$ выполнено неравенство

$$\sup_{\varepsilon \leq \varphi \leq \pi} |\bar{q}_0(e^{i\varphi}; x, y)| < \sum_{n=1}^{\infty} q_0(n; x, y) = 1.$$

Пусть $D_\eta = D_0 \cap \{(x, y) : \sup_{\varepsilon \leq \varphi \leq \pi} |\bar{q}_0(e^{i\varphi}; x, y)| < 1 - \eta\}$. Существует η такое, что $p_\eta := P((Y_0, Y_1) \in D_\eta) > 0$ при условии, что $P(Y_0 \in A) = q_0(A)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n q(z; x_{k-1}, dx_k) &= \prod_{k=1}^n \bar{q}_0(z; x_{k-1}, x_k) q(x_{k-1}, dx_k) \\ &= \prod_{k=1}^n \bar{q}_0(z; x_{k-1}, x_k) \prod_{k=1}^n q(x_{k-1}, dx_k). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Нетрудно видеть, что

$$\prod_{k=1}^n |\bar{q}_0(e^{i\varphi}; x_{k-1}, x_k)| < (1 - \eta)^{N_n}, \quad (4.50)$$

где N_n — число векторов (x_{k-1}, x_k) , попавших в D_η . Пусть случайная величина ξ_k определяется равенством

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{если } (Y_{k-1}, Y_k) \in D_\eta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, $N_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. К случайной величине N_n применимы лемма 4.8 и лемма 4.9. По неравенству Чебышева для любого $\delta > 0$

$$P(N_n > EN_n - \delta n) > 1 - \frac{\text{Var } N_n}{\delta^2 n^2}. \quad (4.51)$$

Из (4.42), (4.47), (4.51) следует, что существуют $0 < \gamma < 1$ и $0 < \delta < 1$ такие, что

$$P(N_n > \gamma n) > 1 - \frac{c(\rho)}{\delta^2 n}.$$

Возвращаясь теперь к (4.50), для $\varepsilon < |\varphi| \leq \pi$ имеем

$$\prod_{k=1}^n |\bar{q}_0(e^{i\varphi}; x_{k-1}, x_k)| < (1 - \eta)^{n\gamma} + \frac{c(\rho)}{\delta^2 n}.$$

Ввиду (4.49) это означает, что

$$\sup_{x \in A_0} \|q^{(n_0)}(e^{i\varphi}; x, \cdot)\| < 1,$$

если $\varepsilon < |\varphi| \leq \pi$. Значит, существуют $0 < d(\varepsilon) < 1$ и c_0 такие, что

$$\sup_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} \sup_{x \in A_0} \|q^{(n)}(e^{i\varphi}; x, \cdot)\| < c_0(1 - d(\varepsilon))^n, \quad (4.52)$$

это и требовалось доказать.

ЛЕММА 4.11. *Для любых $n \geq 0$ и $0 < r < 1$*

$$\int_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}}{1-z} dz = 2\pi i. \quad (4.53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}}{1-z} dz = C_n \left(\frac{1}{1-z} \right),$$

где $C_n \left(\frac{1}{1-z} \right)$ – коэффициент при z^n в разложении

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Приступим теперь к заключительному этапу доказательства теоремы 1.3. Вследствие (4.3) для любого $0 < r < 1$ имеем

$$\begin{aligned} p^{(n)}(\cdot, B) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} R(1; z) p^{(0)}(\cdot, B) z^{-n-1} dz \\ &= -\frac{r^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.54)$$

В силу леммы 4.5 при достаточно малых ε и $r < 1$, достаточно близких к 1,

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{Q_0(re^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B)}{\lambda(re^{i\varphi}) - 1} e^{-in\varphi} d\varphi \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Omega(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Согласно лемме 4.4 имеем

$$Q_0(z) p^{(0)}(\cdot, B) = q_0(B) + O(|1-z|) \quad (4.56)$$

равномерно по $x \in A_0$. С другой стороны, в силу леммы 4.3 получаем

$$1 - \lambda(z) = \mu_0(1-z) + O(|1-z|^2). \quad (4.57)$$

Из (4.56) и (4.57) следует, что если $z \rightarrow 1$, оставаясь при этом внутри единичного круга, то равномерно по $B \in A_0 S$

$$\frac{Q_0(z) p^{(0)}(\cdot, B)}{1 - \lambda(z)} = \frac{q_0(B)}{\mu_0(1-z)} + q_0(B) O(1). \quad (4.58)$$

Очевидно, имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{-in\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi - \int_{\varepsilon \leq |\varphi| \leq \pi} \frac{e^{-in\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi = I_1(n, r) - I_2(n, r).$$

Согласно лемме 4.11 для любых $n \geq 0$ и $0 < r < 1$ получаем $I_1(n, r) = 2\pi$. Далее, как нетрудно видеть, выполнено

$$\lim_{r \uparrow 1} I_2(n, r) = \int_{\varepsilon \leq |\varphi| \leq \pi} \frac{e^{-in\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В результате получаем предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{-in\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi. \quad (4.59)$$

Из (4.58) и (4.59) следует, что для любого $0 < \varepsilon < \pi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{Q_0 p^{(0)}(x, B)}{1 - \lambda(re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi = 2\pi \mu_0^{-1} q_0(B) \quad (4.60)$$

равномерно по $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$. Нетрудно показать, используя лемму 4.4, что

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(Q_0(re^{i\varphi}) - Q_0)p^{(0)}(x, B)}{1 - \lambda(re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi = O(\varepsilon) \quad (4.61)$$

равномерно по n , $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$. Согласно лемме 4.5 существует число r_0 такое, что оператор $\Omega(1; z)$ равномерно ограничен по z в области $\{z: |z| \leq 1, |z - 1| \leq r_0\}$. Поэтому при $\varepsilon < 2r_0/\pi$

$$\limsup_{r \uparrow 1} \sup_{n > 0} \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Omega(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi \right| = O(\varepsilon) \quad (4.62)$$

равномерно относительно $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$. Комбинируя равенство (4.55) и соотношения (4.60)–(4.62), для достаточно больших n_ε имеем

$$\limsup_{r \uparrow 1} \sup_{n > n_\varepsilon} \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi - 2\pi \mu_0^{-1} q_0(B) \right| = O(\varepsilon) \quad (4.63)$$

равномерно относительно $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$.

Оценим теперь

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Полагая для краткости $R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) = g(\varphi)$ и интегрируя по частям в предыдущем равенстве, имеем

$$J(\varepsilon) = in^{-1} \int_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} g'(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi + in^{-1} (g(-\varepsilon) e^{in\varepsilon} - g(\varepsilon) e^{-in\varepsilon}). \quad (4.64)$$

Нетрудно видеть, что если $\|Q(z)\| < 1$, то

$$\left\| \frac{d}{dz} R(1; z) \right\| \leq \|Q'(z)\| \sum_{k=1}^{\infty} k \|Q(z)\|^{k-1}. \quad (4.65)$$

Согласно условию (1.19) при $|z| \leq 1$ получаем

$$\|Q'(z)\| \leq \sup_{x \in A_0} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{(k)}(x, A_0) \equiv M_0. \quad (4.66)$$

Вследствие (4.52) выполнено неравенство

$$\|Q^n(e^{i\varphi})\| < c_0(1 - d(\varepsilon))^n. \quad (4.67)$$

Отсюда получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} k Q^{k-1}(e^{i\varphi}) \right\| < \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - d(\varepsilon))^{k-1} = c_0 d^{-2}(\varepsilon). \quad (4.68)$$

Комбинируя (4.65)–(4.68), имеем

$$\sup_{x \in A_0} \sup_{B \in A_0 S} \left| \int_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} g'(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right| < 2\pi c_0 M_0 d^{-2}(\varepsilon). \quad (4.69)$$

В силу (4.52) получаем

$$\sup_{x \in A_0} \sup_{B \in A_0 S} \sup_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} |g(\varphi)| < \sum_{n=0}^{\infty} (1 - d(\varepsilon))^n = c_0 d^{-1}(\varepsilon). \quad (4.70)$$

Из (4.64), (4.69), (4.70) следует, что

$$\sup_{x \in A_0} \sup_{B \in A_0 S} |J(\varepsilon)| < \frac{c(\varepsilon)}{n}. \quad (4.71)$$

Заметим, что

$$R(1; re^{i\varphi}) = R(1; e^{i\varphi}) \sum_{k=0}^{\infty} (Q(e^{i\varphi}) - Q(re^{i\varphi})R(1; e^{i\varphi}))^k.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|Q(e^{i\varphi}) - Q(re^{i\varphi})\| < M_0(1 - r).$$

Из двух последних соотношений следует, что $\lim_{r \uparrow 1} \|R(1; re^{i\varphi}) - R(1; e^{i\varphi})\| = 0$ равномерно по тем φ , для которых $|\varphi| > \varepsilon$. Отсюда для любого n

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{|\varphi| > \varepsilon} R(1; re^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi = \int_{|\varphi| > \varepsilon} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi \quad (4.72)$$

равномерно относительно $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$.

Комбинируя (4.54), (4.63), (4.71), (4.72), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} \sup_{B \in A_0 S} \left| p^{(n)}(x, B) - \frac{q_0(B)}{\mu_0} \right| = 0. \quad (4.73)$$

Поскольку $q_0(B) = \mu_0 p_0(B)$, предельное равенство (4.73) влечет (1.14). Отсюда согласно теореме 1.2 следует (1.16). На этом доказательство теоремы 1.3 завершается.

§ 5. Дополнение

В этом параграфе мы выведем (1.14) в предположении, что выполнены условия (1.19) и (1.22). Прежде всего покажем, что из условия (1.22) следует (1.21). Будем считать для простоты, что k_0 в условии (1.22) равно 1. Это исключает периодичность цепи X_n .

ЛЕММА 5.1. *Если выполнено условие (1.22), то для любых $x, x_0 \in A_0$ имеем*

$$\sup_{B \in A_0 S} |q(x, B) - q(x_0, B)| \leq 1 - \psi(A_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу (1.22) имеем $q(x, B) \geq p(x, B) \geq \psi(B)$ для любых $x \in A_0, B \in A_0 S$. Очевидно, $q(x, \cdot) = q_1(x, \cdot) + \psi(\cdot)$, где $q_1(x, \cdot) = q(x, \cdot) - \psi(\cdot)$. Далее, для любого $x \in A_0$ справедливо равенство

$$\sup_{B \in A_0 S} q_1(x, B) = 1 - \psi(A_0).$$

Следовательно, имеем

$$\sup_{B \in A_0 S} |q_1(x, B) - q_1(x_0, B)| \leq 1 - \psi(A_0).$$

Очевидно,

$$q_1(x, \cdot) - q_1(x_0, \cdot) = q(x, \cdot) - q(x_0, \cdot).$$

Из двух последних соотношений следует утверждение леммы.

Основная задача, которую нам предстоит решить, – это получение оценки интеграла

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon < |\varphi| \leq \pi} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi$$

в отсутствие условия (1.20). Обозначим

$$q^{(2)}(z; x, \cdot) = \int_{A_0} q(z; y, \cdot) q(z; x, dy).$$

Нетрудно видеть, что

$$q^{(2)}(z; x, \cdot) = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{q}_n^{(2)}(x, \cdot) z^n,$$

где

$$\bar{q}_n^{(2)}(x, \cdot) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{A_0} q_k(y, \cdot) q_{n-k}(x, dy).$$

Нам понадобится тождество

$$\begin{aligned} q^{(2)}(z; x, \cdot) &= \sum_{k=2}^{\infty} z^k \int_{A_0} p(y, \cdot) q_k(x, dy) \\ &+ \left(q^{(2)}(z; x, \cdot) - \sum_{k=2}^{\infty} z^k \int_{A_0} p(y, \cdot) q_{k-1}(x, dy) \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{A_0} p(y, \cdot) p(x, dy) \geq \psi(A_0) \psi(\cdot), \quad \int_{A_0} p(y, \cdot) q_k(x, dy) \geq q_k(x, A_0) \psi(\cdot). \quad (5.2)$$

Если $p_k^0 > 0$, то существует $\varepsilon_k > 0$ такое, что $q_k(x, A_0) > \varepsilon_k$ на множестве $D_k \in A_0 S$ положительной меры q_0 . Обозначим

$$c(\varepsilon) = \frac{\psi(A_0)}{\psi(A_0) + \varepsilon}. \quad (5.3)$$

Определим комплекснозначную переходную функцию $\omega_k(z; x, \cdot)$ на A_0 равенствами

$$\omega_k(z; x, \cdot) = \begin{cases} c(\varepsilon_k)(\psi(A_0) + z^k \varepsilon_k) \psi(\cdot), & \text{если } x \in D_k, \\ \psi(A_0) \psi(\cdot), & \text{если } x \in A_0 - D_k. \end{cases}$$

В силу (5.3) тождественно по $x \in A_0$ имеем

$$\omega_k(1; x, \cdot) = \psi(A_0) \psi(\cdot). \quad (5.4)$$

Запишем $q^{(2)}(z; x, \cdot)$ в виде

$$q^{(2)}(z; x, \cdot) = z^2 \omega_k(z; x, \cdot) + \bar{\omega}_k(z; x, \cdot).$$

В операторных терминах $Q^2(z) = \Omega_k(z) + \bar{\Omega}_k(z)$. Отсюда получаем

$$Q^{2n}(z) = \sum_{m=0}^n C_n^m \Omega_k^m(z) \bar{\Omega}_k^{n-m}(z). \quad (5.5)$$

Вследствие (5.1) имеем $\bar{\omega}_k(1; x, \cdot) \geq 0$. Поэтому

$$\|\bar{\Omega}_k(z)\| \leq \sup_{x \in A_0} \bar{\omega}_k(1; x, A_0) \leq 1 - \psi^2(A_0). \quad (5.6)$$

Чтобы оценить $\|\Omega_k^n(z)\|$, нам понадобится

ЛЕММА 5.2. Пусть субстохастическая переходная функция $p(x, \cdot)$ на (X, S) определяется равенством $p(x, \cdot) = a(x)p(\cdot)$, где $p(\cdot)$ – распределение на (X, S) , $0 < a(x) \leq 1$. Тогда

$$p^{(n)}(x, X) = a(x) \left(\int_X a(x) p(dx) \right)^{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & p(x_0, dx_1) p(x_1, dx_2) \cdots p(x_{n-1}, dx_n) \\ &= a(x_0) p(dx_1) a(x_1) p(dx_2) \cdots a(x_{n-1}) p(dx_n) = \prod_{j=0}^{n-1} a(x_j) \prod_{j=1}^n p(dx_j). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Очевидно, $a(x)$ – случайная величина на вероятностном пространстве (X, S, p) . Следовательно, $\prod_{j=1}^{n-1} a(x_j) = \exp\{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j\}$, где случайные величины $\xi_j = \ln a(x_j)$ независимы и одинаково распределены. Отсюда в силу (5.7) имеем

$$p^{(n)}(x, X) = a(x) \mathbb{E} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j\right\} = a(x) (\mathbb{E} e^{\xi_1})^{n-1}.$$

Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что

$$\mathbb{E} e^{\xi_1} = \int_X a(x) p(dx).$$

Для любых действительных $a > 0$ и $b > 0$ имеем

$$|a + e^{i\varphi} b|^2 = (a + b)^2 - 4ab \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда следует, что для $x \in D_k$ выполнено неравенство

$$|\omega_k(e^{i\varphi}; x, \cdot)| < \delta_k(\varphi) \psi(A_0) \psi(\cdot),$$

где функция $0 < \delta_k(\varphi) < 1$ задана на открытом множестве $\{\varphi: 0 < \varphi < 2\pi, \varphi \neq \frac{2\pi j}{k}, 0 < j < k\}$ и непрерывна на нем. Применяя теперь лемму 4.2 при $p(\cdot) = \psi(\cdot)/\psi(A_0)$ и

$$a(x) = \begin{cases} \delta_k(\varphi) \psi^2(A_0), & \text{если } x \in D_k, \\ \psi^2(A_0), & \text{если } x \in A_0 - D_k, \end{cases}$$

находим, что

$$\|\Omega_k^n(e^{i\varphi})\| < \rho_k^{n-1}(\varphi) \psi^{2(n-1)}(A_0), \quad (5.8)$$

где $\rho_k(\varphi) = (\delta_k(\varphi) \psi(D_k) + \psi(A_0 - D_k)) \psi^{-1}(A_0)$. Подставляя (5.6) и (5.8) в соотношение (5.5), мы заключаем, что для $\varphi \neq \frac{2\pi j}{k}$

$$\|Q^{2n}(e^{i\varphi})\| < \rho_k^{-1}(\varphi) \psi^{-2}(A_0) (1 + (\rho_k(\varphi) - 1) \psi^2(A_0))^n, \quad (5.9)$$

если $p_{k+1}^0 > 0$. Положим $\mathcal{N} = \{k: k > 0, p_{k+1}^0 > 0\}$. Элементы множества $\mathcal{N}$ образуют возрастающую последовательность $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$. Обозначим через d общий наибольший делитель чисел $k \in \mathcal{N}$. Предположим сначала, что $d = 1$. Выберем N так, чтобы наибольший общий делитель чисел k_m , $1 \leq m \leq N$, был равен 1. Покажем, что в этом случае для любого $0 < \varphi < 2\pi$ обязательно найдется m такое, что $k_m \varphi$ не сравнимо с нулем по mod 2π . Допустим, что существует последовательность $0 < j_m < k_m$ такая, что $\varphi = 2\pi j_m / k_m$ для всех $1 \leq m \leq N$. Тогда $j_m / k_m = r/q$ для любого $1 \leq m \leq N$, где r/q , $1 \leq r < q$, – несократимая дробь. Отсюда $k_m = j_m q / r$. Очевидно, j_m делится на r . Это означает, что все k_m делятся на q , что противоречит условию $d = 1$. Следовательно, существует m такое, что $\varphi \neq 2\pi j_m / k_m$. Обозначим $\|\varphi\| = \sup_{1 \leq m \leq N} \sin^2(k_m \varphi / (2\pi))$. Условие $\|\varphi\| = 0$ равносильно $k_m \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ для всех $1 \leq m \leq N$.

Если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|\varphi_n\| \rightarrow \|\varphi\|$. Как было показано выше, $\|\varphi\| > 0$ для любого $0 < \varphi < 2\pi$. Если $\inf_{\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon} \|\varphi\| = 0$, то существует

последовательность $\varepsilon \leq \varphi_n \leq 2\pi - \varepsilon$ такая, что $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\|\varphi_n\| \rightarrow 0$. Отсюда $\|\varphi_0\| = 0$, что невозможно. Следовательно, $\inf_{\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon} \|\varphi\| > 0$. Это означает в силу (5.9), что для всех $\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon$

$$\|Q^n(e^{i\varphi})\| < c(\varepsilon)(1 - \eta(\varepsilon))^n. \quad (5.10)$$

Здесь $c(\varepsilon) > 0$ и $0 < \eta < 1$ – некоторые постоянные, зависящие от ε .

Повторяя теперь рассуждения, приведшие к (4.71), мы убеждаемся в том, что оценка (5.10) остается справедливой и при замене (1.20) на (1.22). Это относится и к оценке (4.63), поскольку при ее выводе используются только условие (1.19) и равномерная эргодичность цепи Y_n . Последняя, в свою очередь, следует из леммы 5.1 и теоремы 1.1. Комбинируя (4.54), (4.63), (4.71), мы видим, что (4.73) имеет место и в рассматриваемом случае, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай $d > 1$. Очевидно, $k_m = dk'_m$, $m = \overline{1, \infty}$, где наибольший общий делитель чисел k'_m равен 1. Пусть N таково, что наибольший общий делитель чисел k'_m , $m = \overline{1, N}$, равен 1. Если $\varphi = 2\pi j/d$, $0 < j < d$, то $k_m \varphi = 2\pi j k'_m$ для $m = \overline{1, N}$ и, следовательно, $\|\varphi\| = 0$. Покажем теперь, что равенство $k_m \varphi = 2\pi j_m$, $0 < j_m < k_m$, может выполняться одновременно для всех $m = \overline{1, N}$ только при условии, что $\varphi = 2\pi j/d$. В самом деле, пусть $j_m/k_m = r/q$ для всех $m = \overline{1, N}$, где r/q – несократимая дробь. Отсюда $k'_m d = l_m q$, где $l_m = j_m/r$. Если l_m делится на d для любого $m = \overline{1, N}$, то k'_m делится на $q > 1$, что невозможно. Следовательно, l_m не делится на d хотя бы для одного $m = m_0$. Тогда $l_{m_0}/d = l'/d'$, где l'/d' – несократимая дробь. Очевидно, q делится на $d' > 1$. Если $q/d' > 1$, то k'_m имеют общий множитель q/d' , что опять-таки невозможно. Следовательно, $q = d'$, т.е. $\varphi = 2\pi r/d' = 2\pi rl/d$, где $l = d/d'$. Поскольку $1 \leq r < d'$, то $d/d' \leq rl < d$.

Итак, мы показали, что $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \varphi_j := j/d$, $1 \leq j \leq d-1$. Очевидно, $\|0\| = \|2\pi\| = 0$. Следовательно, $\|\varphi\| > 0$, если $\varphi \neq \varphi_j$ при $0 \leq j \leq d$. Точно так же, как (5.10), доказывается, что

$$\sup_{\varphi \in V(\varepsilon)} \|Q^n(e^{i\varphi})\| < c(\varepsilon)(1 - \eta(\varepsilon))^n, \quad (5.11)$$

где $V(\varepsilon)$ – дополнение до $[0, 2\pi]$ любой ε -окрестности множества $\{\varphi: \varphi = j/d, j = \overline{0, d}\}$, содержащейся в $[0, 2\pi]$. Как и в случае $d = 1$, из (5.11) следует, что резольвента $R(1; e^{i\varphi})$ определена для $\varphi \in V(\varepsilon)$ и для любого фиксированного ε имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V(\varepsilon)} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi = 0 \quad (5.12)$$

равномерно относительно $x \in A_0$ и $B \in A_0 S$. Исследуем теперь интеграл

$$I_n(\varepsilon) = \int_{\varphi \in U(\varepsilon)} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(\cdot, B) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

где $U(\varepsilon)$ – ε -окрестность множества $\{\varphi: \varphi = \varphi_j, j = \overline{1, d-1}\}$. Обозначим $Q_2(z) = Q(z)/z$.

Предположим сначала для простоты, что выполнено условие

$$p_k^0 = 0 \implies q_k(x, A_0) = 0 \quad (5.13)$$

для всех $x \in A_0$. Тогда $Q_2(e^{i\varphi_j}) = Q$ для любого $0 < j < d$. Поэтому

$$R(1; e^{i\varphi_j}) = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\varphi_j n} Q^n = \frac{Q_0}{e^{i\varphi_j} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_0 - Q^n) e^{in\varphi_j}.$$

Таким образом, 1 принадлежит резольвентному множеству оператора $Q(e^{i\varphi_j})$. Для z , близких к $e^{i\varphi_j}$, спектр оператора $Q_2(z)$ устроен так же, как спектр $Q(z)$ в окрестности 1. Поэтому

$$Q_2^n(z) = \lambda_2^n(e^{i\varphi}) Q_3(z) + O(\rho_2^n),$$

где $Q_3(z)$ – проектор, $\lambda_2(z)$ – соответствующее собственное значение. Здесь $O(\rho_2^n)$ – оператор с нормой, не превосходящей $c\rho_2^n$. Поэтому при достаточно малых ε для всех $\varphi \in U(\varepsilon)$ имеем

$$R(1; e^{i\varphi}) = \frac{Q_3(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} \lambda_2(e^{i\varphi}) - 1} + O(1).$$

Здесь $O(1)$ – оператор, равномерно ограниченный на $U(\varepsilon)$. В результате мы заключаем, что при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$I_n < C\varepsilon, \quad (5.14)$$

где постоянная C не зависит от ε и n . Из (5.12) и (5.14) следует, что при любом фиксированном ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon} R(1; e^{i\varphi}) p^{(0)}(x, B) e^{-in\varphi} d\varphi = 0,$$

если выполнено условие (5.13). Этот факт в комбинации с (4.63) приводит нас к утверждению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} \|p^{(n)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\|_{A_0} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда условие (5.13) не выполняется. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 5.3. Пусть цепь Маркова X_n имеет стационарное распределение $p_0(\cdot)$, E – любое множество из S с $p_0(E) = 0$, $B_0 = \{x: \sup_{n \geq 1} p^{(n)}(x, E) > 0\}$. Тогда $p_0(B_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $B_k = \{x: p^{(k)}(x, E) > 0\}$. Очевидно, для любого $k > 0$

$$\int_X p^{(k)}(x, E) p_0(dx) = p_0(E) = 0.$$

Следовательно, $p_0(B_k) = 0$. Отсюда имеем

$$p_0(B_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_0(B_k) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Положим

$$E_k = \{x: x \in A_0, q_k(x, A_0) > 0\}, \quad k \geq 1, \quad E_0 = \bigcup_{k \notin \mathcal{N}} E_k.$$

Как уже отмечалось выше, $q_0(E_k) = 0$ для любого $k \notin \mathcal{N}$. Следовательно, имеем $q_0(E_0) = 0$.

Применяя теперь лемму 5.3 для цепи Маркова Y_n , мы заключаем, что множество B_0 состояний $x \in A_0$, из которых с положительной вероятностью достижимо E_0 , имеет q_0 -меру нуль. Из леммы 5.1 и теоремы 1.1 следует, что

$$q^{(n)}(x, E_0 \cup B_0) < (1 - \psi(A_0))^n.$$

Пусть $\tilde{q}(x, B)$ – ограничение $q(x, B)$ на $E_0 \cup B_0$. Нетрудно видеть, что $\tilde{q}(x, B)$ есть вероятность события, заключающегося в том, что Y_n возвратится в $B \in E_0 \cup B_0$, минуя при этом $A'_0 := A_0 - (E_0 \cup B_0)$. Обозначим через $\tilde{q}^{(n)}(x, B)$ n -ю итерацию субстохастической переходной функции $\tilde{q}(\cdot, \cdot)$. Очевидно,

$$\tilde{q}^{(n)}(x, E_0 \cup B) \leq q^{(n)}(x, E_0 \cup B) \leq (1 - \psi(A_0))^n.$$

Отсюда следует, что при любом начальном $X_0 = x \in X - A'_0$ с вероятностью 1 цепь X_n лишь конечное число раз попадает в $E_0 \cup B_0$, ни разу при этом не посетив A'_0 . Это означает, что с вероятностью 1 цепь X_n рано или поздно окажется в A'_0 , т.е. выполнено условие (1.11) с заменой A_0 на A'_0 . Поэтому вместо Y_n мы можем рассмотреть цепь Y'_n , построенную по моментам возвращения X_n в A'_0 . Цепь Y'_n , очевидно, удовлетворяет условию (1.22).

Пусть $q'(x, B)$ – переходная функция для цепи Y'_n . Нетрудно видеть, что $q'(x, B) \equiv q(x, B)$, $x \in A'_0$, $B \in A'_0 S$. Отсюда вытекает, что цепь Y'_n равномерно эргодична, а ее стационарное распределение является сужением q_0 на $A'_0 S$. Следовательно, цепь Y'_n удовлетворяет условиям (1.22) и (5.13). Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что цепь Y_n удовлетворяет условию (5.13).

§ 6. Приложение

В этом параграфе мы докажем эквивалентность (1.1) и (1.2). Для этого достаточно показать, что (1.1) влечет (1.2).

Пусть операторы P и P_0 на пространстве мер $\mu(\cdot)$ с ограниченной вариацией, заданных на S , определяются формулами

$$P\mu(\cdot) = \int_X P(y, \cdot) \mu(dy), \quad P_0\mu(\cdot) = \mu(X) p_0(\cdot).$$

Поскольку $p_0(\cdot)$, как нетрудно видеть, является стационарным распределением для цепи X_n , то

$$PP_0\mu(\cdot) = \mu(X) \int_X p(y, \cdot) p_0(dy) = \mu(X) p_0(\cdot). \quad (6.1)$$

Кроме того, имеем

$$P_0P\mu(\cdot) = P_0 \int_X p(y, \cdot) \mu(dy) = \int_X P_0p(y, \cdot) \mu(dy) = \mu(X) p_0(\cdot), \quad (6.2)$$

$$P_0^2\mu(\cdot) = \mu(X) p_0(\cdot). \quad (6.3)$$

Из (6.1)–(6.3) следует, что

$$P_0(P - P_0) = (P - P_0)P_0 = 0. \quad (6.4)$$

Пусть для некоторого $n \geq 1$

$$P^n = (P - P_0)^n + P_0. \quad (6.5)$$

Тогда в силу (6.4) выполнено

$$P^{n+1} = ((P - P_0)^n + P_0)((P - P_0) + P_0) = (P - P_0)^{n+1} + P_0,$$

т. е. (6.5) выполняется для $n + 1$. Очевидно, равенство (6.5) справедливо для $n = 1$ и, следовательно, для любого $n \geq 1$.

Если выполнено (1.1), то существует $k_0 \geq 1$ такое, что

$$\sup_{x \in X} \|p^{(k_0)}(x, \cdot) - p_0(\cdot)\| < \rho < 1.$$

Рассмотрим простейший случай $k_0 = 1$. Тогда для любой вероятностной меры $\mu(\cdot)$ имеем

$$\|(P - P_0)^n \mu(\cdot)\| < \rho^n.$$

Отсюда, учитывая (6.5), получаем $\|P^n \mu(\cdot) - p_0(\cdot)\| < \rho^n$. В общем случае имеем

$$\|P^{nk_0} \mu(\cdot) - p_0(\cdot)\| < \rho^n,$$

т. е.

$$\|P^n \mu(\cdot) - p_0(\cdot)\| < c\rho_1^n,$$

где $\rho_1^{n_0} = \rho$, $c = \rho_1^{-1}$. Полученное неравенство, очевидно, эквивалентно (1.2).

Автор выражает благодарность рецензентам за полезные замечания и внимательное отношение к работе, благодаря чему были устранены погрешности в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

1. С. В. Нагаев, “О некоторых предельных теоремах для однородных цепей Маркова”, *ТВП*, **2:4** (1957), 389–416; англ. пер.: S. V. Nagaev, “Some limit theorems for stationary Markov chains”, *Theory Probab. Appl.*, **2:4** (1957), 378–406.
2. С. В. Нагаев, “Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова”, *ТВП*, **6:1** (1961), 67–86; англ. пер.: S. V. Nagaev, “More exact statement of limit theorems for homogeneous Markov chains”, *Theory Probab. Appl.*, **6:1** (1961), 62–81.
3. É. Le Page, “Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires”, *Probability measures on groups* (Oberwolfach, 1981), *Lecture Notes in Math.*, **928**, Springer, Berlin–New York, 1982, 258–303.
4. J. Rousseau-Egele, “Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux”, *Ann. Probab.*, **11:3** (1983), 772–788.
5. Y. Guivarc’h, “Application d’un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov”, *Théorie du potentiel* (Orsay, 1983), *Lecture Notes in Math.*, **1096**, Springer, Berlin, 1984, 301–332.

6. Y. Guivarc'h, J. Hardy, "Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov", *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **24**:1 (1988), 73–98.
7. X. Milhaud, A. Raugi, "Étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus auto-régressif: convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence", *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **25**:4 (1989), 383–428.
8. H. Hennion, "Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs", *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **27**:1 (1991), 27–59.
9. H. Hennion, "Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:2 (1993), 627–634.
10. H. Hennion, L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture Notes in Math., **1766**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, viii+145 pp.
11. H. Hennion, L. Hervé, "Central limit theorems for iterated random Lipschitz mappings", *Ann. Probab.*, **32**:3 (2004), 1934–1984.
12. F. Pène, "Rate of convergence in the multidimensional central limit theorem for stationary processes. Application to the Knudsen gas and to the Sinai billiard", *Ann. Appl. Probab.*, **15**:4 (2005), 2331–2392.
13. Y. Guivarc'h, E. Le Page, "On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:2 (2008), 423–446.
14. L. Hervé, F. Pène, "The Nagaev–Guivarc'h method via the Keller–Liverani theorem", *Bull. Soc. Math. France*, **138**:3 (2010), 415–489.
15. Р. Л. Добрушин, "Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова", I, *ТВИ*, **1**:1 (1956), 72–89; II, **1**:4 (1956), 365–425; англ. пер.: R. L. Dobrushin, "Central limit theorem for nonstationary Markov chains", I, *Theory Probab. Appl.*, **1**:1 (1956), 65–80; II, **1**:4 (1956), 329–383.
16. T. E. Harris, "The existence of stationary measures for certain Markov processes", *Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, v. 2 (1954–1955), Univ. of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1956, 113–124.
17. K. B. Athreya, P. Ney, "A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **245** (1978), 493–501.
18. E. Nummelin, "A splitting technique for Harris recurrent Markov chains", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **43**:4 (1978), 309–318.
19. С. В. Нагаев, "Об эргодической теореме для однородных цепей Маркова", *Докл. АН СССР*, **263**:1 (1982), 27–30; англ. пер.: S. V. Nagaev, "On an ergodic theorem for homogeneous Markov chains", *Soviet Math. Dokl.*, **25** (1982), 281–284.
20. А. А. Боровков, *Эргодичность и устойчивость случайных процессов*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 440 с.; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Ergodicity and stability of stochastic processes*, Wiley Ser. Probab. Statist. Probab. Statist., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1998, xxiv+585 pp.
21. С. В. Нагаев, "Эргодические теоремы для однородных цепей Маркова", *Докл. АН СССР*, **306**:2 (1989), 283–286; англ. пер.: S. V. Nagaev, "Ergodic theorems for homogeneous Markov chains", *Soviet Math. Dokl.*, **39**:3 (1989), 483–486.
22. Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, ИЛ, М., 1956, 608 с.; пер. с англ.: J. L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1953, viii+654 pp.
23. С. В. Нагаев, "Некоторые вопросы теории однородных марковских процессов с дискретным временем", *Докл. АН СССР*, **139**:1 (1961), 34–36; англ. пер.: S. V. Nagaev, "Some questions on the theory of homogeneous Markov process with discrete time", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 867–869.

24. С. В. Нагаев, “Эргодические теоремы для марковских процессов с дискретным временем”, *Сиб. матем. журн.*, **6**:2 (1965), 413–432.
25. P. Erdős, W. Feller, H. Pollard, “A property of power series with positive coefficients”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**:2 (1949), 201–204.
26. Б. А. Севастьянов, “Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами”, *ТВП*, **2**:1 (1957), 106–116; англ. пер.: B. A. Sevast’yanov, “An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals”, *Theory Probab. Appl.*, **2**:1 (1957), 104–112.
27. S. Orey, “Recurrent Markov chains”, *Pacific J. Math.*, **9**:3 (1959), 805–827.
28. S. Orey, *Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, **34**, Van Nostrand Reinhold Co., London–New York–Toronto, Ont., 1971, viii+108 pp.
29. O. A. Butkovsky, A. Yu. Veretennikov, “On asymptotics for Vaserstein coupling of Markov chains”, *Stochastic Process. Appl.*, **123**:9 (2013), 3518–3541.
30. А. Ю. Веретенников, “О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений”, *ТВП*, **44**:2 (1999), 312–327; англ. пер.: A. Yu. Veretennikov, “On polynomial mixing and convergence rate for stochastic difference and differential equations”, *Theory Probab. Appl.*, **44**:2 (2000), 361–374.

СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ НАГАЕВ

(SERGEY V. NAGAEV)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: nagaev@math.nsc.ru

Поступило в редакцию

16.12.2013

20.10.2014