Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 4, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 03:05:57

УДК 517.574

Р. С. Юлмухаметов

Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности

Доказывается теорема о возможности асимптотической аппроксимации плюрисубгармонической функции, имеющей конечный порядок роста, посредством логарифмирования модуля целой функции.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В данной работе рассматривается вопрос об асимптотическом приближении заданной плюрисубгармонической функции $u(z)$ в $\mathbb{C}^p$ посредством логарифма модуля целой функции. Для случая одной переменной этот вопрос подробно изучен в работах [1]–[5], и в конечном итоге доказано утверждение: для любой субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $u(z)$, удовлетворяющей условию

$$u(z) \leq C \cdot (1 + |z|)^\rho, \quad z \in \mathbb{C}, \quad C = \text{const},$$

существует целая функция f такая, что

$$|u(z) - \ln |f(z)|| \leq C \cdot \ln(1 + |z|), \quad z \notin E, \quad C = \text{const},$$

причем исключительное множество E может быть покрыто системой кругов с конечной суммой радиусов.

Для многих переменных общий результат об аппроксимации плюрисубгармонических функций конечного порядка роста ρ был получен Р. Сигурдсоном [6] и, независимо, автором [7]. Оба эти результата опубликованы в препринтах и являются малодоступными. В связи с этим в данной статье мы излагаем упрощенный вариант доказательства основного результата из работы [7].

Обозначения: $D_m(x, r)$ – шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$ радиуса r ; $d\lambda_m$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^m$; μ_u – мера, ассоциированная по Риссу с субгармонической функцией u .

§ 1. Приближение при дополнительных условиях

Основным содержанием этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi(z) \leq A(|z| + 1)^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad (2)$$

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq B(1 + |z|)^{\gamma-1}|z - w|, \quad \text{если } |z - w| \leq (1 + |z|)^{1-\frac{\gamma}{3}}. \quad (3)$$

Тогда существует целая функция F в $\mathbb{C}^p$, которая вне множества

$$S_F(\alpha, d) = \bigcup_{F(z)=0} D_{2p}(z, d(1 + |z|)^\alpha)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\varphi(z) - \ln |F(z)|| \leq C(|z| + 1)^{\frac{2}{3}\gamma} \ln(|z| + e).$$

При этом постоянная C зависит от постоянных $\rho, \gamma, A, B, \alpha, d$, $d > 0$, но не зависит от конкретного вида функции φ .

В ходе доказательства этой теоремы нам потребуется следующее утверждение (см. [8, с. 132]).

ЛЕММА 1. Пусть φ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq M, \quad \text{если } |z - w| \leq (1 + |z|)^\gamma, \quad (4)$$

где $\gamma < 0$ – некоторое число. Пусть Σ – комплексная плоскость в $\mathbb{C}^p$. Для всякой аналитической функции f на Σ такой, что

$$\ln |f(z)| \leq \varphi(z), \quad (5)$$

существует целая функция F в $\mathbb{C}^p$ такая, что $F = f$ на Σ и

$$\ln |F(z)| \leq \varphi(z) + N_p \ln(|z| + e + d_\Sigma), \quad z \in \mathbb{C}^p,$$

где d_Σ – расстояние от Σ до начала координат и постоянная N_p зависит лишь от M, γ и не зависит от функций φ, f и от Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что Σ – гиперплоскость $z_p = a$. При этом $d_\Sigma = |a|$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z_1, \dots, z_{p-1}, z_p + a).$$

В силу соотношения (4) с учетом отрицательности γ функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условию

$$|\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(w)| \leq M, \quad \text{если } |z - w| \leq (1 + |z| + |a|)^\gamma. \quad (6)$$

Функция

$$\tilde{f}(z) = f(z_1, \dots, z_{p-1}, z_p + a)$$

определена и голоморфна на гиперплоскости $z_p = 0$. Функция $\tilde{f}$ – голоморфная функция переменной $z' = (z_1, \dots, z_{p-1})$, и можно рассматривать $\tilde{f}$ как голоморфную функцию в $\mathbb{C}^p$, не зависящую от z_p . Положим

$$E = \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p : |z_p| \leq (1 + |z'| + |a|)^\gamma\}.$$

Согласно (5) и (6) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \int_E |\tilde{f}|^2 \exp\{-2\tilde{\varphi}(z) - 2(p - \gamma) \ln(|z'| + |a| + 1)\} d\lambda_{2p}(z) \\ & \leq \int_{\mathbb{C}^{p-1}} \exp\{2M - 2(p - \gamma) \ln(|z'| + |a| + 1)\} \pi(1 + |z'| + |a|)^{2\gamma} d\lambda_{2(p-1)}(z') \\ & \leq \pi e^{2M} \int_{\mathbb{C}^{p-1}} (1 + |z'|)^{-2p} d\lambda_{2(p-1)}(z') \leq \pi c_{p-1} e^{2M}, \end{aligned}$$

где c_{p-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{C}^{p-1}$. Пусть $\psi(z) = \psi(|z|)$ – гладкая функция в C , равная 1 в круге радиуса $1/2$ и 0 вне единичного круга с центром в нуле. Тогда

$$|\bar{\partial}(\psi(z_p(1 + |z'| + |a|)^{-\gamma}))| \leq (1 + (p - 1)|\gamma|) M_0 (1 + |z'| + |a|)^{-1}, \quad (7)$$

где

$$M_0 = \max_{r>0} |\psi'(r)|.$$

Полагая

$$\tilde{F}(w) = \psi(w_p(1 + |w'| + |a|)^{-\gamma}) \tilde{f}(w) - w_p v(w),$$

получаем, что $\tilde{F}(w) = \tilde{f}(w)$, когда $w_p = 0$; значит, остается только выбрать v так, чтобы она удовлетворяла подходящей оценке и чтобы $\bar{\partial}\tilde{F} = 0$, т.е.

$$\bar{\partial}v = z_p^{-1} \tilde{f}(z') \bar{\partial}\psi(z_p(1 + |z'| + |a|)^{-\gamma}) = g.$$

Ясно, что $\bar{\partial}g = 0$. Учитывая, что

$$\bar{\partial}\psi(z_p(1 + |z'| + |a|)^{-\gamma}) = 0$$

при

$$|z_p| < \frac{1}{2}(1 + |z'| + |a|)^\gamma$$

и $z \notin E$, мы из (7) получим

$$\begin{aligned} & \int |g|^2 \exp\{-2\tilde{\varphi}(z) - 2(p - 2\gamma + 1) \ln(1 + |z'| + |a|)\} d\lambda_{2p}(z) \\ & \leq 4\pi e^{2M} (1 + (p - 1)|\gamma|)^2 M_0^2 c_{p-1} = \sigma. \end{aligned}$$

Теперь теорема Л. Хермандера (см. [8, с. 132]) дает решение уравнения $\bar{\partial}v = g$, для которого справедлива оценка

$$\int \frac{|v|^2}{(1 + |z|^2)^2} \exp\{-2\tilde{\varphi}(z) - 2(p - 2\gamma + 1) \ln(1 + |z'| + |a|)\} d\lambda_{2p}(z) \leq \sigma.$$

Комбинируя эту оценку с оценкой для интеграла от $\tilde{f}$, получим

$$\int \frac{|\tilde{F}|^2}{(1+|z|^2)^2} \exp\{-2\tilde{\varphi}(z) - 2(p-2\gamma+1)\ln(1+|z'|+|a|)\} d\lambda_{2p}(z) \leq \sigma_1.$$

Функция

$$F(z) = \tilde{F}(z_1, \dots, z_{p-1}, z_p - a)$$

голоморфна в $\mathbb{C}^p$, равна f на гиперплоскости Σ и удовлетворяет соотношению

$$\int \frac{|F(z)|^2}{(1+|z|+|a|)^4} \exp\{-2\varphi(z) - 2(p-2\gamma+1)\ln(1+|z'|+|a|)\} d\lambda_{2p}(z) \leq \sigma_1.$$

Отсюда и из неравенства

$$|F(z)|^2 \leq \frac{1}{c_p r^{2p}} \int_{|w| \leq r} |F(z+w)|^2 d\lambda_{2p}(w)$$

с учетом условия (4) получим утверждение леммы 1.

Докажем теорему 1 при $p = 1$ в более сильном варианте.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть φ – субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad (1')$$

$$\varphi(z) \leq A'(1+|z|+R)^\rho \quad \text{для некоторого } R > 0, \quad (2')$$

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq B'(1+|z|+R)^\beta |z-w|, \quad \text{если } |z-w| \leq (1+|z|+R)^{-\beta}. \quad (3')$$

Тогда существует целая функция F , которая вне множества

$$S_F(\alpha, d, R) = \bigcup_{F(z)=0} D(z, d(1+|z|+R)^\alpha)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\varphi(z) - \ln |F(z)|| \leq C \cdot \ln(|z| + R + e). \quad (8)$$

Верхняя оценка

$$\ln |F(z)| \leq \varphi(z) + C \cdot \ln(|z| + R + e)$$

выполняется всюду в $\mathbb{C}$. При этом константа C зависит от параметров A' , B' , α , β , d , $d > 0$, но не зависит от функции φ и от параметра R .

Доказательство проведем на основании результатов работы [4]. Для неотрицательной борелевской меры μ через $\mu(z, t)$ обозначим μ -меру шара $D(z, t)$. Точку z назовем (b, s) -нормальной по мере μ , если выполнено условие

$$\mu(z, t) \leq bt, \quad t \in (0, s).$$

Из формулы Привалова и из условия (3') следует оценка для ассоциированной меры μ_φ функции φ :

$$\int_0^t \frac{\mu_\varphi(z, \tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + te^{i\theta}) d\theta - \varphi(z) \leq B'(1 + |z| + R)^\beta t,$$

когда $t \leq (1 + |z| + R)^{-\beta}$. Так как $\mu(z, t)$ — неубывающая функция переменной t , то имеем

$$\mu_\varphi(z, t) \leq \int_t^{et} \frac{\mu_\varphi(z, \tau)}{\tau} d\tau \leq B'e(1 + |z| + R)^\beta t,$$

когда $t \leq e^{-1}(1 + |z| + R)^{-\beta}$, т.е. точка z является $(B'e(1 + |z| + R)^\beta, e^{-1}(1 + |z| + R)^{-\beta})$ -нормальной по мере μ_φ .

Применим к функции φ теорему 4', затем теорему 4 из работы [4]. Из этих теорем вытекает существование целой функции $F(z)$, которая в точках, (b, s) -нормальных по мерам μ_φ и $\mu_{|\ln |F|}$, удовлетворяет оценке

$$|\varphi(z) - \ln |F(z)|| \leq A_0 |\ln s| + B_0 \ln(|z| + 1) + bs(|\ln s| + 1) + C_0, \quad (9)$$

где постоянные A_0, B_0, C_0 не зависят от функции φ .

Существует число $l > 0$ такое, что точка $z \notin S_F(\alpha, d, R)$ является $(0, l(1 + |z| + R)^\alpha)$ -нормальной по мере $\mu_{|\ln |F|}$. Если в соотношении (9) положим

$$b = eB'(1 + |z| + R)^\beta, \\ s = \min(e^{-1}(1 + |z| + R)^{-\beta}, l(1 + |z| + R)^\alpha),$$

то получим оценку (8). Верхняя оценка следует из замечания к лемме 3.1 из работы [4].

Следующая лемма непосредственно вытекает из теоремы 6 из работы [4].

ЛЕММА 2. Для любого $\gamma > 0$ существует целая функция $g(z)$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) все нули $(a_n)_{n=1}^\infty$ функции g простые и при некоторых $d > 0$ и α круги $D_2(a_n, d(1 + |a_n|)^\alpha)$ попарно не пересекаются;
- 2) вне кругов $D_2(a_n, d(1 + |a_n|)^\alpha)$ выполняется соотношение

$$|\ln |g(z)| - |z|^\gamma| \leq C \cdot \ln(|z| + e), \quad C - \text{const},$$

причем верхняя оценка

$$\ln |g(z)| \leq |z|^\gamma + \ln(|z| + e), \quad C - \text{const},$$

выполняется на всей плоскости.

Заметим, что из формулы Коши

$$\frac{1}{g'(a_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a_n|=d(1+|a_n|)^\alpha} \frac{d\zeta}{g(\zeta)}$$

вытекает оценка

$$|g'(a_n)| \geq d_1 \exp\{|a_n|^\gamma - C \cdot \ln(|a_n| + e)\}, \quad C - \text{const.} \quad (10)$$

Кроме того, можно считать, что для некоторого $x > 0$ имеет место равенство

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_2\left(a_n, x(1+|a_n|)^{1-\frac{2}{3}}\right) = \mathbb{C}. \quad (11)$$

Для положительного ρ через K_ρ обозначим класс положительных монотонных функций $q(x)$ на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} q(tx) &\leq t^\rho q(x), & t \geq 1, & \quad x > 0, \\ q(x+1) &\leq 2^\rho q(x), & x \in (0, 1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Существуют постоянные $A, B > 1$ такие, что для любой функции $q \in K_\rho$ и для любой субгармонической функции φ , удовлетворяющей условиям*

- (a) $\varphi(0) = 0$,
- (b) $\varphi(z) \leq q(|z|), \quad z \in \mathbb{C}$,

в точках z , (β, s) -нормальных по мере μ_φ , выполняется оценка снизу

$$\varphi(z) \geq -AB^\rho q(|z|) \left[\ln^+ \frac{3|z|}{s} + 1 \right] - \beta s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся представлением Рисса в круге $D_2(0, 2|z|)$:

$$\varphi(z) = H(z) - \int G(z, w) d\mu_\varphi(w).$$

Используя элементарные оценки ядра Пуассона и условие (b), получим

$$\begin{aligned} H(z) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4|z|^2 - |z|^2}{|z - 2|z|e^{i\theta}|^2} (\varphi(2|z|e^{i\theta}) - \varphi^+(2|z|e^{i\theta})) d\theta \\ &\geq \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(2|z|e^{i\theta}) d\theta - 3q(2|z|). \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (a) вытекает оценка

$$H(z) \geq -32^\rho q(|z|).$$

В силу формулы Привалова и условий (а), (b) имеем оценку

$$\mu_\varphi(0, t) \leq q(et) \leq e^\rho q(t), \quad t > 0.$$

Чтобы оценить потенциал Грина, заметим, что ядро Грина области увеличивается с увеличением области. Если $G_0(z, w)$ – ядро Грина круга $D_2(z, 3|z|)$, то для любых $\zeta, w \in D_2(0, 2|z|)$ выполняется неравенство

$$G(\zeta, w) \leq G_0(\zeta, w).$$

Применим это неравенство в точке $\zeta = z$:

$$\begin{aligned} \int G(z, w) d\mu_\varphi(w) &\leq \int_{D_2(0, 2|z|)} G_0(z, w) d\mu_\varphi(w) \\ &\leq \int_{D_2(0, 2|z|)} \ln \frac{3|z|}{|z-w|} d\mu_\varphi(w). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку

$$\int G(z, w) d\mu_\varphi(w) \leq \int_0^{3|z|} \ln \frac{3|z|}{t} d\tilde{\mu}(z, t) = \int_0^{3|z|} \frac{\tilde{\mu}(z, t)}{t} dt,$$

где через $\tilde{\mu}$ обозначено сужение меры μ_φ на круг $D_2(0, 2|z|)$. Пользуясь (β, s) -нормальностью точки z по мере $\tilde{\mu}$, получим

$$\int G(z, w) d\mu_\varphi(w) \leq \beta s + \mu_\varphi(0, 2|z|) \ln^+ \frac{3|z|}{s}.$$

Вместе с оценкой гармонической мажоранты и величины $\mu(0, 2|z|)$ это неравенство дает утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть φ – плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3') при $R = 0$. Тогда всюду в $\mathbb{C}^p$ имеет место неравенство

$$\varphi(z) \geq -C \cdot (1 + |z|)^\rho \ln(|z| + e),$$

где константа C зависит от A, B', ρ, β , но не зависит от функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение функции φ на любую плоскость, проходящую через точку $z = 0$, удовлетворяет условиям леммы 3 для $q(x) = A(x+1)^\rho$. Причем в силу условия (3') (при $R = 0$) все точки z плоскости являются $(B'e(1+|z|)^\beta, e^{-1}(1+|z|)^{-\beta})$ -нормальными по ассоциированной мере сужения. Применив лемму 3 к каждому сужению, получим утверждение леммы 4.

Изложим конструкцию функции F , удовлетворяющей условиям теоремы 1. По лемме 2 построим функцию g , удовлетворяющую соотношению

$$\left| \ln |g(z)| - |z|^{\frac{2}{3}\gamma} \right| \leq C \cdot \ln(|z| + e), \quad C - \text{const.} \quad (12)$$

Пусть S – множество нулей функции g . Через B_i , $i = 1, \dots, p$, обозначим $(p \times p)$ -матрицу, у которой все элементы i -го столбца равны 1, все элементы на главной диагонали, кроме i -го, равны $1/2$, а все остальные равны 0. Через b_{ij} обозначим j -ю вектор-строку матрицы B_i . При фиксированных i и $\zeta_j \in S$, $j \neq i$, через Σ_ζ^i обозначим плоскость, задаваемую уравнением

$$(z, b_{ij}) = \zeta_j, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \neq i.$$

На плоскости Σ_ζ^i введем параметризацию

$$w(\xi) = z_0 + \xi w_0, \quad |w_0| = 1, \quad (z_0, w_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{\zeta,i}(\xi) = \varphi(w(\xi)) - \varphi(z_0).$$

Функция $\varphi_{\zeta,i}$ удовлетворяет условиям теоремы 1' при $R = |z_0|$. В самом деле, условие (1') очевидно. По условию (2) теоремы 1 имеем оценку

$$\varphi(w(\xi)) \leq A(1 + |w(\xi)|)^\rho \leq A(1 + |\xi| + |z_0|)^\rho.$$

Из условия (3) теоремы 1 следует, что функция φ удовлетворяет условиям леммы 4 с $\beta = \gamma - 1$, поэтому по лемме 4 имеем оценку

$$\varphi(z_0) \geq -C \cdot (1 + |z_0|)^\rho \ln(|z_0| + e),$$

где константа C зависит от постоянных A , B , ρ и γ . Из последних двух оценок получим условие (2') теоремы 1':

$$\varphi_{\zeta,i}(\xi) \leq A'(1 + |\xi| + |z_0|)^{\rho+1}.$$

Условие (3') с $\beta = \gamma - 1$ вытекает из условия (3). По теореме 1' для каждого $\zeta = (\zeta_j)$, $\zeta_j \in S$, $j \neq i$, существует целая функция $\tilde{f}_{\zeta,i}$ в $\mathbb{C}$, которая вне множества

$$\tilde{S}_i(\alpha, d, \zeta) = \bigcup_{\tilde{f}_{\zeta,i}(\xi)=0} D(\xi, d(1 + |z_0| + |\xi|)^\alpha)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\varphi_{\zeta,i}(\xi) - \ln |\tilde{f}_{\zeta,i}(\xi)|| \leq C \cdot \ln(|\xi| + |z_0| + e),$$

и оценка сверху

$$\ln |\tilde{f}_{\zeta,i}(\xi)| \leq \varphi_{\zeta,i}(\xi) + C \cdot \ln(|\xi| + |z_0| + e)$$

выполняется для всех $\xi \in \mathbb{C}$. Причем, постоянная C не зависит от ζ , i .

Очевидно, функция $f_{\zeta,i}(w) = \tilde{f}_{\zeta,i}(\xi(w))e^{\varphi(z_0)}$, $w \in \Sigma_\zeta^i$, удовлетворяет неравенствам

$$|\varphi(w) - \ln |f_{\zeta,i}(w)|| \leq C \ln(|w| + e), \quad w \notin \bigcup_{f_{\zeta,i}(z)=0} D_2(z, d(1 + |z|)^\alpha), \quad (13)$$

$$\ln |f_{\zeta,i}(w)| \leq \varphi(w) + C \ln(|w| + e), \quad w \in \Sigma_\zeta^i. \quad (14)$$

Пусть $d_{\zeta,i}$ – расстояние от начала координат до плоскости $\Sigma_{\zeta,i}$. По лемме 1 функция $f_{\zeta,i}$ может быть продолжена с плоскости Σ_{ζ}^i до функции $F_{\zeta,i}$, голоморфной на всем $\mathbb{C}^p$ и имеющей оценку

$$\ln |F_{\zeta,i}(w)| \leq \varphi(w) + C \cdot \ln(|w| + e + d_{\zeta,i});$$

при этом постоянная C не зависит от ζ, i . Учитывая, что точка $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $z_i = 0$, $z_j = 2\zeta_j$, $j \neq i$, лежит на плоскости Σ_{ζ}^i , $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \dots, \zeta_p)$, получим

$$d_{\zeta,i} \leq 2|\zeta| \leq 2(|\zeta_1| + \dots + |\zeta_p|).$$

Поэтому для продолженной функции $F_{\zeta,i}$ верна оценка сверху

$$\ln |F_{\zeta,i}(w)| \leq \varphi(w) + C(\ln(|w| + e) + \sum_{j \neq i} \ln(1 + |\zeta_j|)). \quad (15)$$

При этом постоянная C не зависит от $\zeta \in S^{p-1}$ и i .

Рассмотрим функцию

$$\Phi_i(w) = \left(\prod_{k \neq i} g((b_{ki}, w)) \right) \sum_{\zeta \in S^{p-1}} F_{\zeta,i}(w) \prod_{j \neq i} \frac{g((w, b_{ij}))}{g'(\zeta_j)((w, b_{ij}) - \zeta_j)}.$$

В силу соотношений (12), (15) функция Φ_i целая и удовлетворяет верхней оценке

$$\ln |\Phi(w)| \leq \varphi(w) + C \cdot (1 + |w|)^{\frac{2}{3}\gamma}, \quad w \in \mathbb{C}^p.$$

Кроме того, если $w \in \Sigma_{\zeta}^l$ при некотором $l \neq i$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{l-1}, \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_p) \in S^{p-1}$, то

$$\Phi_i(w) = 0.$$

Если $w \in \Sigma_{\zeta}^i$, то

$$\Phi_i(w) = \left(\prod_{k \neq i} g\left(\frac{1}{2}w_i + w_k\right) \right) f_{\zeta,i}.$$

Отсюда в силу (13) и (12) получим, что для $w \in \Sigma_{\zeta}^i \setminus S_{\Phi_i}(\alpha, d)$ выполняется соотношение

$$|\ln |\Phi_i(w)| - \varphi(w)| \leq C \cdot (1 + |w|)^{\frac{2}{3}\gamma}, \quad C - \text{const}.$$

Положим

$$F(w) = \Phi_1(w) + \Phi_2(w) + \dots + \Phi_p(w).$$

Тогда целая функция $F(w)$ удовлетворяет верхней оценке

$$\ln |F(w)| \leq \varphi(w) + C \cdot (1 + |w|)^{\frac{2}{3}\gamma}, \quad C - \text{const}, \quad w \in \mathbb{C}^p, \quad (16)$$

и на плоскостях Σ_{ζ}^i вне множества $S_F(\alpha, d)$ имеет место соотношение

$$|\ln |F(w)| - \varphi(w)| \leq C \cdot (1 + |w|)^{\frac{2}{3}\gamma}, \quad C - \text{const}. \quad (17)$$

Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 5. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в круге $D_2(0, 2et)$, $f(0) = 1$. Положим $M = \max |f(\zeta)|$. Тогда в круге $D_2(0, t)$, но вне множества

$$S_f(r) = \bigcup_{f(z)=0} D_2(z, r)$$

верна оценка

$$\ln |f(z)| \geq - \left(\ln \frac{3e^2 t}{r} \right) \ln M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим функцию

$$v(z) = \frac{(-2t)^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \prod_{k=1}^n \frac{2t(z - a_k)}{(2t)^2 - \bar{a}_k z},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – корни функции f в круге $D_2(0, 2t)$. Имеем $v(0) = 1$ и $|v(2te^{i\theta})| = \frac{(2t)^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|}$. Функция $\psi(z) = \frac{f(z)}{v(z)}$ не имеет нулей в круге $D_2(0, 2t)$, и по лемме Гельмгольца (см. [12, с. 55]) в круге $D_2(0, t)$ выполняется нижняя оценка

$$\ln |\psi(z)| \geq -2 \ln M + 2 \ln \frac{(2t)^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|} \geq -2 \ln M. \quad (18)$$

Оценим $\ln |v(z)|$. При $z \in D_2(0, t)$ имеем

$$\prod_k |4t^2 - \bar{a}_k z| \leq (6t^2)^n.$$

Если $z \in D_2(0, t) \setminus S_f(r)$, то

$$\ln \prod_{k=1}^n |z - a_k| \geq n(2t) \ln r,$$

где $n(\tau)$ обозначает число нулей функции f в круге $D_2(0, \tau)$. Из последних двух неравенств вытекает, что

$$\ln |v(z)| \geq -n(2t) \ln \frac{3t}{r}.$$

Воспользовавшись неравенством $n(2t) \leq \ln M$, которое следует из формулы Привалова, имеем при $z \in D(0, t) \setminus S_f(r)$

$$\ln |v(z)| \geq - \ln \frac{(3t)}{r} \ln M.$$

Вместе с (18) это неравенство доказывает лемму 5.

ЛЕММА 6. Пусть в точке $w_0 \in \mathbb{C}^p$ выполняется соотношение (17), $\zeta_0 \in \mathbb{C}^p$, $|\zeta_0| = 1$ и

$$f(z) = \frac{F(w_0 + \zeta_0 z)}{F(w_0)}.$$

Тогда в круге $D_2(0, y(1 + |w_0|)^{1-\frac{\gamma}{3}})$, но для z таких, что $w_0 + \zeta_0 z \notin S_F(\alpha, d)$, выполняется неравенство

$$\ln |f(z)| \geq -K(y)(1 + |w_0|)^{\frac{2}{3}\gamma} \ln(|w_0| + e),$$

где постоянная $K(y)$ не зависит от w_0, ζ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3) при $z \in D_2(0, 2et)$, $t = y(1 + |w_0|)^{1-\frac{\gamma}{3}}$, учитывая неравенства (16), (17), имеем оценку

$$\ln |f(z)| \leq C \cdot (1 + |w_0|)^{\frac{2}{3}\gamma}, \quad C - \text{const.}$$

Положим

$$r = \min_{w \in D_2(w_0, 2et)} \min((1 + |w|)^{1-\frac{\gamma}{3}}, d(1 + |w|)^\alpha).$$

Заметим, что

$$\ln \frac{t}{r} \leq C \cdot \ln(|w_0| + e), \quad C - \text{const.}$$

По лемме 5 получим, что вне множества $S_f(r)$ выполняется оценка

$$\ln |f(z)| \geq -C \cdot (1 + |w_0|)^{\frac{2}{3}\gamma} \ln(|w_0| + e), \quad C - \text{const.}$$

Число r подобрано так, что если $z \in S_f(r)$, то $w_0 + z\zeta_0 \in S_F(\alpha, d)$. Поэтому в шаре $D_{2p}(w_0, y(1 + |w_0|)^{1-\frac{\gamma}{3}})$, за исключением множества $S_F(\alpha, d)$, выполняется оценка

$$\ln |F(w)| \geq \ln |F(w_0)| - C \cdot (1 + |w_0|)^{\frac{2}{3}\gamma} \ln(|w_0| + e), \quad C - \text{const.}$$

Снова используя условие (3), отсюда получим соотношение

$$\begin{aligned} |\ln |F(w)| - \varphi(w)| &\leq C \cdot (1 + |w|)^{\frac{2}{3}\gamma} \ln(|w| + e), \\ w &\in D_{2p}(w_0, (1 + |w_0|)y^{1-\frac{\gamma}{3}}) \setminus S_F(\alpha, d), \end{aligned}$$

где константа C зависит от $y > 0$ и не зависит от w_0 .

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, покажем, что объединение шаров $D_{2p}(w, y(1 + |w|)^{1-\frac{\gamma}{3}})$, где w пробегает плоскости Σ_ζ^i , $\zeta \in S^{p-1}$, $i = 1, \dots, p$, за исключением множеств $S_i(\alpha, d, \zeta)$, при некотором $y > 0$ покрывает все пространство $\mathbb{C}^p$.

Для определенности будем считать, что $1 - \frac{\gamma}{3} < 0$. Пусть $w \in \mathbb{C}^p$ и $|w_i| = \max_j |w_j|$. Тогда $|w_i| > \frac{1}{\sqrt{p}}|w|$. По соотношению (11) существуют $\zeta_j \in S$, $j \neq i$, такие, что

$$|(w, b_{ij}) - \zeta_j| \leq x(1 + |\zeta_j|)^{1-\frac{\gamma}{3}}, \quad (19)$$

где x зависит от типа функции g . Поскольку

$$|(w, b_{ij})| = \left| w_j + \frac{1}{2}w_j \right| \geq \frac{1}{2\sqrt{p}}|w|,$$

то из (19) получим

$$(1 + |\zeta_j|) \geq \frac{1}{4\sqrt{p}}(1 + |w|). \quad (20)$$

Пусть

$$w' = (w'_1, \dots, w'_p), \quad w'_i = w_i, \quad (w', b_{ij}) = \zeta_j, \quad j \neq i.$$

Тогда $w'_j = 2(\zeta_j - w_j)$ при $j \neq i$. Поэтому, учитывая неравенства (19), (20), имеем

$$|w' - w| \leq 2 \sqrt{\sum_{j \neq i} \left| \zeta_j - \left(w_i + \frac{1}{2}w_j \right) \right|^2} \leq 2xC \cdot (1 + |w|)^{1-\frac{\gamma}{3}}, \quad C - \text{const.}$$

Поскольку $w' = (w'_1, \dots, w'_p) \in \Sigma_\zeta^i$, то из последнего неравенства вытекает, что объединение шаров $D_{2p}(w, y(1 + |w|)^{1-\frac{\gamma}{3}})$ при некотором $y > 0$ покрывает все пространство $\mathbb{C}^p$, когда w пробегает плоскости Σ_ζ^i , $i = 1, \dots, p$, $\zeta \in S^{p-1}$.

По построению оценка (17) выполняется на плоскостях Σ_ζ^i , за исключением множества

$$\bigcup_{f_{\zeta,i}(z)=0} D_{2p}(z, d(1 + |z_0| + |z|)^\alpha).$$

Увеличивая $|\alpha|$, $\alpha < 0$, и уменьшая $d > 0$, можно это исключительное множество сколь угодно уменьшить. Тем самым шары $D_{2p}(w, y(1 + |w|)^{1-\frac{\gamma}{3}})$, когда w пробегает Σ_ζ^i вне исключительных множеств, покрывают все пространство $\mathbb{C}^p$. Теорема 1 доказана.

§2. Регуляризация плюрисубгармонических функций

В этом параграфе доказывается теорема о приближении произвольной плюрисубгармонической функции посредством функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Пусть $\beta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\beta(t) \geq 0$, $\beta(t) = 0$, когда $t \notin (0, 1)$, и

$$c_p \int \beta(t^2) t^{2p-1} dt = 1,$$

где c_p — площадь единичной сферы в $\mathbb{C}^p$.

Через $L(u; z, a)$ обозначим форму Леви функции u в точке z :

$$L(u; z, a) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j.$$

ЛЕММА 7. Пусть $\rho(z)$ – положительная гладкая функция и функция u плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^p$. Положим

$$\tilde{u}(z) = \int u(z + \rho(z)\zeta) \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta).$$

Тогда имеет место неравенство

$$L(u; z, a) \geq L(\ln \rho; z, a) \frac{2c_p(p-1)}{\rho(z)^{2p-2}} \int_0^\infty \mu_u(z, \rho(z)t) t \beta(t^2) dt.$$

Тем самым если $\ln \rho$ плюрисубгармонична в точке z , то функция $\tilde{u}$ также плюрисубгармонична в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $z_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_p^0) \in \mathbb{C}^p$ и определим функцию ρ_0 из равенства

$$\begin{aligned} \ln \rho_0(z) &= \ln \rho(z_0) + 2 \sum_{m=1}^p \frac{\partial \ln \rho}{\partial z_m}(z_0)(z_m - z_m^0) \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^p \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial z_m \partial z_n}(z_0)(z_m - z_m^0)(z_n - z_n^0). \end{aligned}$$

По определению имеют место равенства

$$\begin{aligned} \rho(z_0) &= \rho_0(z_0), \\ \frac{\partial \ln \rho}{\partial z_i}(z_0) &= \frac{\partial \ln |\rho_0|}{\partial z_i}(z_0), \quad i = 1, \dots, p, \\ \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial z_i \partial z_j}(z_0) &= \frac{\partial^2 \ln |\rho_0|}{\partial z_i \partial z_j}(z_0), \quad i, j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Определим вспомогательную функцию:

$$u_0(z) = \int u(z + \rho_0(z)\zeta) \beta(|\zeta|^2) d\lambda(\zeta).$$

Так как $\rho_0(z)$ голоморфна, то функция $u_0(z)$ плюрисубгармонична. Далее, применяя замену переменных $z + \rho_0(z)\zeta = w$, затем замену переменных $z + |\rho_0(z)|\zeta = w$, получим равенство

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \int u(w) \beta \left(\left| \frac{z - w}{\rho_0(z)} \right|^2 \right) |\rho_0(z)|^{-2p} d\lambda_{2p}(w) \\ &= \int u(z + |\rho_0(z)|\zeta) \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta). \end{aligned}$$

Учитывая равенство первых производных функций $\ln |\rho_0|$, $\ln \rho$, нетрудно получить формулу

$$\begin{aligned} L(\tilde{u} - u_0; z_0, a) &= L(\rho - |\rho_0|; z_0, a) \\ &\quad \times 2 \operatorname{Re} \int \sum_{m=1}^p \frac{\partial u(z_0 + \rho(z_0)\zeta)}{\partial w_m} \zeta_m \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta). \end{aligned} \quad (21)$$

Интегрируя по частям, последний интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \int \sum_{m=1}^p \frac{\partial u(z_0 + \rho(z_0)\zeta)}{\partial w_m} \zeta_m \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta) \\
&= \sum_{m=1}^p \frac{1}{\rho(z_0)} \int \frac{\partial u(z_0 + \rho(z_0)\zeta)}{\partial \zeta_m} \zeta_m \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta) \\
&= -\frac{1}{\rho(z_0)} \int u(z_0 + \rho(z_0)\zeta) (p\beta(|\zeta|^2) + |\zeta|^2 \beta'(|\zeta|^2)) d\lambda_{2p}(\zeta). \quad (22)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Привалова. Тогда

$$\begin{aligned}
& \int u(z_0 + \rho(z_0)\zeta) (p\beta(|\zeta|^2) + |\zeta|^2 \beta'(|\zeta|^2)) d\lambda_{2p}(\zeta) \\
&= c_p \int_0^\infty \left(\int_0^{\rho(z_0)t} \frac{\mu_u(z_0, \tau)}{\tau^{2p-1}} (2p-2) d\tau \right) (p\beta(t^2) + t^2 \beta'(t^2)) t^{2p-1} dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
& \int u(z_0 + \rho(z_0)\zeta) (p\beta(|\zeta|^2) + |\zeta|^2 \beta'(|\zeta|^2)) d\lambda_{2p}(\zeta) \\
&= -c_p(p-1) \int_0^\infty t^{2p} \beta(t^2) \frac{\mu_u(z_0, \rho(z_0)t)}{\rho(z_0)^{2p-2} t^{2p-1}} dt \\
&= -c_p(p-1) \int_0^\infty \frac{\mu_u(z_0, \rho(z_0)t)}{\rho(z_0)^{2p-2}} t \beta(t^2) dt.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (22), затем в (21), получим формулу

$$L(\tilde{u} - u_0; z_0, a) = L(\rho - |\rho_0|; z_0, a) \frac{2c_p(p-1)}{\rho(z_0)^{2p-1}} \int_0^\infty \mu_u(z_0, \rho(z_0)t) t \beta(t^2) dt.$$

По определению функции ρ_0 имеем

$$L(\rho - |\rho_0|; z_0, a) = L(\ln \rho; z_0, a) \rho(z_0).$$

Таким образом, доказана формула

$$L(\tilde{u}; z_0, a) = L(u_0; z_0, a) + L(\ln \rho; z_0, a) \frac{2c_p(p-1)}{\rho(z_0)^{2p-2}} \int_0^\infty \mu_u(z_0, \rho(z_0)t) t \beta(t^2) dt,$$

из которой следует утверждение леммы 7.

Для дальнейшего нам потребуется оценка интеграла от модуля плюрисубгармонической функции. При этом будет использовано следующее утверждение из работы [10] (см. также [11]).

ЛЕММА 8. Существует постоянная M_m такая, что для любой функции $q(x) \in K_\rho$ и для любой субгармонической функции u в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u(x) &\leq q(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

имеют место неравенства

$$\int_B |u(x)| d\lambda_m(x) \leq M_m (\lambda_m(B))^{\frac{2}{m}} 4^\rho q\left(\max_{x \in B} |x|\right) \left(\max_{x \in B} |x|\right)^{m-2}$$

при $m > 2$ и

$$\int_B |u(x)| d\lambda(x) \leq M_2 4^\rho \lambda(B) q\left(\max_{z \in B} |x|\right) \ln \frac{16\pi (\max |x|)^2}{e\lambda(B)}$$

при $m = 2$.

ЛЕММА 9. Существуют постоянные $A_p, B_p > 1$ такие, что для любой функции $q(x) \in K_\rho$ и для любой плюрисубгармонической функции φ в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(z) &\leq q(|z|), \quad z \in \mathbb{C}^p, \end{aligned}$$

имеет место неравенство

$$\int_{D^p(w, R)} |\varphi(z)| d\lambda_{2p}(z) \leq A_p B_p^\rho q(T) R^{2p} \ln^p \frac{T+1}{R_0} e,$$

где $T = |w| + R$, $R_0 = \min(1, R)$, $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p$, $D^p(w, R)$ – поликруг $D(w_1, R) \times \dots \times D(w_p, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции по размерности пространства $\mathbb{C}^p$. Для $p = 1$ утверждение леммы вытекает из леммы 8. Пусть лемма верна в $\mathbb{C}^{p-1}$. Для точки $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ через z' обозначим точку $(z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^{p-1}$. По условиям леммы функция

$$\psi(\zeta) = \varphi(\zeta, 0, \dots, 0), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

обладает свойствами

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, \\ \psi(\zeta) &\leq q(|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \beta &= q(0) \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^\alpha, \\ s &= s(\zeta) = \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\alpha-1} 3|\zeta|, \end{aligned}$$

где $\alpha = \rho + 2p^2$, $R_0 = \min(1, R)$. По лемме 3 в точках $\zeta \in \mathbb{C}$, являющихся (β, s) -нормальными по мере μ_ψ , имеет место оценка снизу

$$\psi(\zeta) \geq -AB^\rho q(|\zeta|) \ln \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{\alpha+1} - 2q(0).$$

Так как $q(0) \leq q(|\zeta|)$, то для некоторых постоянных A , $B \geq 1$ выполняется неравенство

$$\psi(\zeta) \geq -AB^\rho q(|\zeta|) \ln \frac{T+1}{R_0} e.$$

Множество точек $\zeta \in D(w_1, R)$, не являющихся $(\beta, s(\zeta))$ -нормальными по мере μ_ψ , обозначим через E_0 . Для $\zeta \notin E_0$ рассмотрим функцию

$$\varphi_\zeta(z') = \varphi(\zeta, z') - \psi(\zeta), \quad z' \in \mathbb{C}^{p-1}.$$

Эта функция плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^{p-1}$, и если $\zeta \notin E_0$, то

$$\begin{aligned} \varphi_\zeta(z') &\leq q(|\zeta| + |z'|) + AB^\rho q(|\zeta|) \ln \left(\frac{T+1}{R_0} e \right) \\ &\leq AB^\rho q(|\zeta| + |z'|) \ln \left(\frac{T+1}{R_0} e \right). \end{aligned}$$

Функция

$$q_1(x) = AB^\rho q(|\zeta| + x) \ln \frac{(T+1)e}{R_0},$$

как нетрудно проверить, принадлежит классу K_ρ . По допущению индукции имеет место оценка

$$\int_{D^{p-1}(w', R)} |\varphi_\zeta(z')| d\lambda_{2(p-1)}(z') \leq A_{p-1} B_{p-1}^\rho q_1(T') R^{2(p-1)} \ln^{p-1} \frac{(T'+1)e}{R_0},$$

где $T' = |w'| + R < T$. Отсюда, учитывая определение функции $q_1 \in K_\rho$, получим

$$\int_{D^{p-1}(w', R)} |\varphi_\zeta(z')| d\lambda_{2(p-1)}(z') \leq AB^\rho q(T) R^{2(p-1)} \ln^p \frac{(T+1)e}{R_0}.$$

Положим

$$E = \{z = (z_1, \dots, z_p) \in D^p(w, R) : z_1 \in E_0\}.$$

Тогда из последнего неравенства вытекает оценка

$$\int_{D^p(w, R) \setminus E} |\varphi(z)| d\lambda_{2p}(z) \leq \pi AB^\rho q(T) R^{2p} \ln^p \frac{(T+1)e}{R_0}. \quad (23)$$

Оценим $\lambda_{2p}(E)$. По определению E_0 для любой точки $\zeta \in E_0$ найдется число $r \leq s < 1$ такое, что

$$\mu_\psi(\zeta, r) \geq \beta r.$$

По лемме Хеймана [9] существует счетная система точек ζ_j такая, что

$$E_0 \subset \bigcup D(\zeta_j, r_j), \quad \mu_\psi(\zeta_j, r_j) \geq \beta r_j,$$

причем каждая точка плоскости попадает не более чем в шесть кругов $D(\zeta_j, r_j)$. Очевидно, справедливы неравенства

$$\beta \sum_j r_j \leq \sum_j \mu_\psi(\zeta_j, r_j) \leq 6\mu_\psi(w_1, R+1) \leq 6\mu_\psi(0, T+1).$$

Из формулы Привалова и из условий леммы следует, что

$$\mu_\psi(0, T+1) \leq e^\rho q(T+1) \leq e^\rho q(1)(T+1)^\rho.$$

Отсюда получим оценки

$$\sum_j r_j \leq 6e^\rho \frac{q(1)}{q(0)} (T+1)^\rho \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\alpha}.$$

Учитывая, что $r_j < 1$ и $q(1) \leq 2^\rho q(0)$, имеем неравенство

$$\lambda_2(E_0) \leq AB^\rho (T+1)^\rho \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\alpha}.$$

Поскольку $E \subset E_0 \times D^{p-1}(w', R)$, то

$$\lambda_{2p}(E) \leq AB^\rho (T+1)^\rho R^{2p-2} \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\alpha}.$$

Отсюда и из леммы 8 получим оценку

$$\begin{aligned} \int_E |\varphi(z)| d\lambda_{2p}(z) &\leq AB^\rho (T+1)^{\frac{\rho}{p}} R^{2-\frac{2}{p}} \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\frac{\alpha}{p}} q(T) T^{2p-2} \\ &\leq AB^\rho q(T) R^{2p} (T+1)^{\frac{\rho}{p}+2p-2} R^{2-\frac{2}{p}-2p} \left(\frac{T+1}{R_0} e \right)^{-\frac{\alpha}{p}}. \end{aligned}$$

По определению чисел α и R_0 окончательно получим

$$\int_E |\varphi(z)| d\lambda_{2p}(z) \leq AB^\rho q(T) R^{2p}.$$

Это неравенство вместе с (23) дает утверждение леммы 9.

ТЕОРЕМА 2. Для любой плюрисубгармонической функции φ , удовлетворяющей условию

$$\varphi(z) \leq C \cdot (1 + |z|)^p, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad C - \text{const},$$

существует гладкая плюрисубгармоническая функция $\tilde{\varphi}$, которая вне некоторого множества E удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$|\varphi(z) - \tilde{\varphi}(z)| \leq C \cdot (1 + |z|)^{\rho+\gamma-1} \ln(|z| + e),$$

где $\gamma = \max(1 - \frac{p}{5}, 0)$, $C - \text{const}$. Кроме того, функция $\tilde{\varphi}$ обладает свойством

$$|\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(w)| \leq (1 + |z|)^{\rho-\gamma} \ln^p(|z| + e) |z - w|, \quad (24)$$

если $|z - w| \leq 1$. Множество E может быть покрыто системой шаров $D_{2p}(z_j, r_j)$ так, что

$$\sum_{\frac{R}{2} \leq |z_j| \leq R} r_j^{2p-1} = O\left(\frac{R^{2p-1}}{\ln(R + e)}\right), \quad R \rightarrow \infty. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\beta(t) \geq 0$ (равна 0 при $t \notin (0, 1)$) бесконечно дифференцируема и

$$c_p \int_0^\infty \beta(t^2) t^{2p-1} dt = 1.$$

Положим

$$\tilde{\varphi}(z) = \int \varphi(z + (1 + |z|)^\gamma \zeta) \beta(|\zeta|^2) d\lambda_{2p}(\zeta),$$

где $\gamma = \max(1 - \frac{p}{5}, 0)$. При фиксированном z через R обозначим $(1 + |z|)^\gamma$. По формуле Привалова имеем

$$\tilde{\varphi}(z) - \varphi(z) = c_p d_p \int \left(\int_0^{Rt} \frac{\mu_\varphi(z, \tau)}{\tau^{2p-1}} d\tau \right) \beta(t^2) t^{2p-1} dt,$$

где $d_p = 2(p-1)$, $p > 1$, $d_1 = 1$ и c_p – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{C}^p$.

Пусть E – множество в $\mathbb{C}^p$ такое, что для любой точки $z \notin E$ выполняется неравенство

$$\mu_\varphi(z, \tau) \leq (1 + |z|)^{\rho-1} \ln(|z| + e) \tau^{2p-1}, \quad \tau \in \left(0, \frac{|z|}{2}\right). \quad (26)$$

Тогда для любой точки $z \notin E$ имеем оценку

$$0 \leq \tilde{\varphi}(z) - \varphi(z) \leq d_p (1 + |z|)^{\rho+\gamma-1} \ln(|z| + e).$$

Докажем оценку (26). Прямым вычислением получим, что имеет место неравенство

$$\left| \operatorname{grad}_z \left[\beta \left(\frac{|\zeta - z|^2}{(1 + |z|)^{2\gamma}} \right) (1 + |z|)^{-2p\gamma} \right] \right| \leq C \cdot (1 + |z|)^{-(2p+1)\gamma},$$

причем константа C не зависит от ζ . Поэтому из леммы 9 вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} \tilde{\varphi}(z)| &\leq C \cdot (1 + |z|)^{-(2p+1)\gamma} \int_{D^p(z, R)} |\varphi(\zeta)| d\lambda_{2p}(\zeta) \\ &\leq C \cdot (1 + |z|)^{p-\gamma} \ln^p(|z| + e). \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (24). Получим оценки множества E . В силу (26) для любой точки $z \in E$ найдется $\tau = \tau(z) < \frac{|z|}{2}$ такое, что

$$\mu_\varphi(z, \tau) \geq (1 + |z|)^{\rho-1} \ln(|z| + e) \tau^{2p-1}.$$

По лемме Хеймана [9] существует не более чем счетное множество точек $z_j \in E$ такое, что система шаров $D_{2p}(z_j, \tau_j)$, $\tau_j = \tau(z_j)$, покрывает все множество E , причем каждая точка пространства попадает не более чем в k_p шаров из этой системы. Очевидно, выполняется неравенство

$$\sum_{\frac{R}{2} \leq |z_j| \leq R} \tau_j^{2p-1} (1 + |z_j|)^{\rho-1} \ln(|z_j| + e) \leq k_p \mu_\varphi(0, 2R).$$

Тогда

$$\sum_{\frac{R}{2} \leq |z_j| \leq R} \tau_j^{2p-1} \leq C \frac{R^{2p-1}}{\ln(R + e)}, \quad C - \text{const.}$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Комбинируя теоремы 1 и 2, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Для любой плюрисубгармонической функции φ в $\mathbb{C}^p$ порядка роста ρ и для любого $\epsilon > 0$ существует целая функция f , для которой вне некоторого множества E , удовлетворяющего соотношению (25), выполнено неравенство

$$|\varphi(z) - \ln |f(z)|| \leq C \cdot (1 + |z|)^{\alpha+\epsilon},$$

где $\alpha = \max\left(\frac{4}{5}\rho, \rho - 1\right)$, $C - \text{const.}$

В заключение приведем теорему, являющуюся непосредственным следствием теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть K – компакт в $D_{2p}(0, 1)$ и

$$H_K(z) = \max_{\lambda \in K} \operatorname{Re}(\lambda, z)$$

– опорная функция этого компакта.

Тогда существует целая функция $F(z)$, которая вне множества

$$S_F(\alpha, d) = \bigcup_{F(z)=0} D(z, d(1 + |z|)^\alpha)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\ln |f(z)| - H_K(z)| \leq C \cdot (1 + |z|)^{\frac{2}{3}},$$

где константа C зависит от α , d , $d > 0$, и не зависит от K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z, w \in \mathbb{C}^p$ и $H_K(z) = \operatorname{Re}(\lambda, z)$. Тогда, очевидно,

$$H_K(z) - H_K(w) \leq \operatorname{Re}(\lambda, z - w) \leq |\lambda| |z - w|.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$|H_K(z) - H_K(w)| \leq \max_{\lambda \in K} |\lambda| |z - w|,$$

из которого по теореме 1 следует утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции // Матем. сб. 1969. Т. 79. № 4. С. 463–476.
2. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). С. 147–167.
3. Юлмухаметов Р. С. Приближение субгармонических функций // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 3. С. 393–416.
4. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11. № 3. С. 257–282.
5. Любарский Ю. И., Седин М. Л. Аналог функции типа синуса для выпуклых областей. Препринт ФТИНТ АН УССР. Т. 17, 1986.
6. Sigurdsson R. Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order. Lund university, 1984.
7. Юлмухаметов Р. С. Асимптотика плюрисубгармонических функций. Препринт БФАН СССР, 1986.
8. Хермандер П. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
9. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
10. Фаворов С. Ю. О сложении индикаторов целых и субгармонических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105. № 1. С. 128–139.
11. Азарин В. С. Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста внутри угла // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1966. Т. 2. С. 55–66.
12. Левин Б. Я. Целые функции. М.: Изд-во МГУ, 1971.

Башкирский государственный университет

Поступило в редакцию
20.VI.95