Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова,
Описание ядра обобщенного преобразования Минковского на сфере, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 43–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:05:58

УДК 517.5

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова

Описание ядра обобщенного преобразования Минковского на сфере

Исследуется обобщенное преобразование Минковского, ставящее в соответствие функциям на сфере их интегралы с заданным весом по замкнутому геодезическим. Для этого преобразования решается проблема описания его ядра и некоторых связанных с ним классов функций. В качестве приложений получены новые теоремы единственности, которые носят окончательный характер, для функций на сфере с нулевыми взвешенными средними по большим окружностям.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: сферические средние, преобразование Минковского, функции Лежандра.

DOI: 10.4213/im8200

§ 1. Введение

Основным объектом изучения в интегральной геометрии являются преобразования, ставящие в соответствие функциям из заданного класса $\mathcal{F}$ на многообразии X их интегралы по подмногообразиям в X из заданного множества Υ . Для всякого такого преобразования I возникают следующие задачи.

1. Выяснить, является ли I инъективным, и если не является, то найти его ядро.

2. Если I инъективно, то найти обратное к I преобразование на его области определения.

Задача 1 впервые была рассмотрена Г. Минковским в 1904 г. [1] для следующего случая: $X = \mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3: |\xi| = 1\}$, $\mathcal{F} = C(\mathbb{S}^2)$, Υ – семейство всех замкнутых геодезических (больших окружностей) на $\mathbb{S}^2$, а

$$(If)(\gamma) = \int_{\gamma} f(\xi) dl(\xi), \quad \gamma \in \Upsilon, \quad (1)$$

где dl – элемент длины дуги. Г. Минковский установил, что ядро преобразования (1) совпадает с классом нечетных непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$, и применил этот результат для решения некоторых проблем в теории выпуклых тел (см., например, [2], [3, ч. 3, § 17]).

В дальнейшем задачи 1, 2 для различных случаев исследовались многими авторами (см. [4]–[8] и библиографию к этим работам). Наиболее изученными примерами преобразований I являются преобразование Радона (см. [4]–[6]) и преобразование Помпейю (см. [6]–[8]).

В современных исследованиях особое внимание уделяется различным обобщениям интегрально-геометрических преобразований, в которых рассматривается интегрирование функций с некоторым весом (см. [8]–[11]). Аналоги сформулированных выше задач для таких преобразований имеют важное значение для многочисленных приложений в ряде вопросов анализа (см. [6]–[8]). Как правило, при их исследовании возникают дополнительные трудности, преодоление которых требует новых идей и методов. Например, при изучении преобразования Радона с весом потребовалось, в отличие от классической ситуации, привлечение техники микролокального анализа (см. [9], [10]).

Начиная с середины 60-х годов прошлого века во многих работах изучался вопрос о точных условиях, при выполнении которых функция из ядра преобразования I обязана быть нулевой (см. [4]–[8]). В частности, для преобразования Минковского была получена следующая теорема единственности (см. [5, гл. 3, теорема 1.25], [12], [13]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $\delta < \frac{\pi}{2}$ и

$$K_\delta = \{\xi \in \mathbb{S}^2: \delta < d(o, \xi) < \pi - \delta\},$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – внутренняя метрика на $\mathbb{S}^2$, $o = (0, 0, 1)$. Пусть также f – непрерывная четная функция на K_δ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i) f имеет нулевые интегралы по всем замкнутым геодезическим, лежащим в K_δ ;

(ii) $f \in C^\infty$ в некоторой окрестности экватора $E_o = \{\xi \in \mathbb{S}^2: d(o, \xi) = \frac{\pi}{2}\}$, и все производные от f равны нулю на E_o .

Тогда $f = 0$.

Отметим, что при $\delta < 0$ множество K_δ совпадает с $\mathbb{S}^2$ и теорема А вытекает из результата Г. Минковского. В этом случае требование, налагаемое на функцию f из п. (ii), является лишним. Если $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$, то условие (ii) в теореме А не может быть опущено (см. замечание после теоремы 1.25 в [5, гл. 3]). Вопрос об описании функций $f \in C(K_\delta)$, удовлетворяющих условию (i), оставался открытым до настоящего времени. В данной работе получено решение этой задачи и некоторых ее обобщений, связанных с рассмотрением преобразования Минковского с весом специального вида (см. далее теоремы 1–3). В качестве следствий получены новые теоремы единственности, которые носят окончательный характер (см. теоремы 4–6).

Точные формулировки и обсуждение основных результатов работы приводятся в § 2. В § 3 содержатся некоторые вспомогательные результаты о свойствах специальных функций, представляющие самостоятельный интерес. В § 4 доказываются теоремы 1, 2 с использованием гармонического анализа на $\mathbb{S}^2$. Технику, применяемую в § 4, нельзя использовать для классов функций, не инвариантных относительно ортогональной группы в $\mathbb{R}^3$. Для преодоления этого препятствия в § 5 детально исследуются различные подпространства ядра обобщенного преобразования Минковского. Доказательства теорем 3–6 приводятся в § 6.

§ 2. Формулировки основных результатов

Как обычно, через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ обозначаем соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ – целая часть числа x ,

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{sign } x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{P}_M(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^M$, $M \in \mathbb{Z}_+$, $O(3)$ – ортогональная группа в $\mathbb{R}^3$. Введем следующие классы функций:

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \left\{ f \in C(K_\delta) : \int_{E_o} f(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\ell(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) : \tau E_o \subset K_\delta \right\},$$

$$\mathfrak{M}_M^s(K_\delta) = \mathfrak{M}_M(K_\delta) \cap C^s(K_\delta), \quad s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

При $\delta < 0$ имеем

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2) = \left\{ f \in C(\mathbb{S}^2) : \int_{E_o} f(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\ell(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) \right\}.$$

Кроме того, по теореме Минковского

$$\mathfrak{M}_0(\mathbb{S}^2) = \{ f \in C(\mathbb{S}^2) : f(-\xi) = -f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^2 \}.$$

Отметим также, что выбор веса $\mathcal{P}_M$ в интегралах мотивирован естественными обобщениями уравнений свертки на $\mathbb{S}^2$ с радиальными распределениями, теория которых активно развивается в последнее время (см. [6]–[8]).

Определим

$$C_M(K_\delta) = \{ f \in C(K_\delta) : f(-\xi) = (-1)^M f(\xi) \quad \forall \xi \in K_\delta \},$$

$$\mathfrak{H}_M = \sum_{0 \leq n \leq [M/2]-1} \mathcal{H}_{2n+2\{M/2\}},$$

где $\mathcal{H}_l$ – пространство сферических гармоник степени l на $\mathbb{S}^2$ (см. [14, гл. 9, § 5]). Здесь и далее сумма считается равной нулю, если множество индексов суммирования является пустым. Отметим, что

$$\mathfrak{H}_{2m} = \sum_{0 \leq n \leq m-1} \mathcal{H}_{2n}, \quad \mathfrak{H}_{2m+1} = \sum_{0 \leq n \leq m-1} \mathcal{H}_{2n+1},$$

$$\mathcal{H}_l = \{ f \in C^\infty(\mathbb{S}^2) : \Delta_0 f = -l(l+1)f \}, \quad (2)$$

где Δ_0 – оператор Лапласа на $\mathbb{S}^2$. Следующий результат обобщает упомянутую выше теорему Минковского.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство $\mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2) = C_{M+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_M$.*

Теорему 1 нетрудно получить из соответствующего локального результата, приведенного ниже (см. (5)). Однако в § 4 мы приведем более простое ее

доказательство, опирающееся на инвариантность класса $\mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2)$ относительно группы $O(3)$.

Одним из следствий теоремы 1 является следующее описание класса $\mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$, $M_1 < M_2$. Тогда:

(i) если $M_1 + M_2$ чётно, то

$$\mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2) = C_{M_1+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_{M_1};$$

(ii) если $M_1 + M_2$ нечётно, то

$$\mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{H}_{M_1} + \mathfrak{H}_{M_2}.$$

Теорема 2 является сферическим аналогом одного из результатов В. В. Волчкова (см. [15, теорема 4]).

Рассмотрим теперь случай $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$. Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi_3 = \cos \theta, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi).$$

Всякой функции $f \in C(K_\delta)$ поставим в соответствие ряд Фурье:

$$f(\xi) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\theta) e^{ik\varphi}, \quad \delta < \theta < \pi - \delta, \quad (3)$$

где

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\circ(\varphi, \theta) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad f^\circ(\varphi, \theta) = f(\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta). \quad (4)$$

Положим

$$\mathfrak{S}_M(K_\delta) = \left\{ f \in C(K_\delta) : f_k(\theta) = \sum_{j=0}^{[(|k|-M)/2]-1} \gamma_{j,k} \frac{(\cos \theta)^{2j+2\{(M+k)/2\}}}{(\sin \theta)^{|k|}}, \right. \\ \left. \gamma_{j,k} \in \mathbb{C}, |k| \geq M+2, f_k(\theta) = 0, |k| \leq M+1 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = C_{M+1}(K_\delta) + \mathfrak{H}_M|_{K_\delta} + \mathfrak{S}_M(K_\delta), \quad (5)$$

где $\mathfrak{H}_M|_{K_\delta}$ – сужение $\mathfrak{H}_M$ на K_δ .

Разложение (5) позволяет получить различные точные теоремы единственности для класса $\mathfrak{M}_M(K_\delta)$. Обозначим через S_r окружность на $\mathbb{S}^2$ радиуса r с центром в точке o , т. е. $S_r = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(o, \xi) = r\}$. Отметим, что точка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) сферы $\mathbb{S}^2$ принадлежит S_r тогда и только тогда, когда $\xi_3 = \cos r$. Следующий результат уточняет и обобщает теорему А.

ТЕОРЕМА 4. Справедливы следующие утверждения:

(i) если $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$, $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$ и для некоторой окружности $S_r \subset K_\delta$ функция $f(\xi)(\xi_3 - \cos r)^{-m}$ принадлежит классу L^∞ в некоторой окрестности S_r при любом $m \in \mathbb{N}$, то $f = 0$;

(ii) для любых $m \in \mathbb{N}$ и $r \in (0, \pi)$ существуют ненулевые функции $f \in (\mathfrak{M}_M^\infty \cap C_M)(K_0)$ и $g \in C^\infty(K_0)$ такие, что

$$f(\xi) = (\xi_3 - \cos r)^m g(\xi) \quad \forall \xi \in K_0.$$

Сравнивая этот результат с теоремой А, отметим, что условие ограниченности в теореме 4, (i) выполнено, например, если $f \in C^\infty$ в некоторой окрестности окружности S_r и все производные функции f равны нулю на S_r . Из теоремы 4, (ii) следует, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $S_r \subset K_0$ существует ненулевая функция $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_0)$, имеющая на S_r все нулевые производные до порядка $m - 1$ включительно. Отметим также, что известные ранее доказательства теоремы А были основаны на теореме о носителе для евклидовой плоскости (см. [5, гл. 1, теорема 2.6]), но они были не применимы в случае $S_r \neq E_o$.

Еще одним следствием теоремы 3 является

ТЕОРЕМА 5. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) пусть $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ и E – бесконечное множество точек на интервале $(\delta, \pi - \delta)$; тогда если $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$ и $f(\xi) = 0$ при $d(o, \xi) \in E$, то $f = 0$ в K_δ ;

(ii) для любого конечного множества $E \subset (0, \pi)$ существует ненулевая функция $f \in (\mathfrak{M}_M^\infty \cap C_M)(K_0)$ такая, что $f(\xi) = 0$ при $d(o, \xi) \in E$.

Следующий результат указывает характер допустимого роста (или убывания) ненулевых функций класса $(\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_0)$ при $\xi \rightarrow o$.

ТЕОРЕМА 6. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) если $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_0)$ и

$$f(\xi) = o((1 - \xi_3)^{\frac{M}{2} \operatorname{sign}(M - \frac{3}{2}) - 1}) \quad \text{при } \xi \rightarrow o,$$

то $f \equiv 0$;

(ii) существует ненулевая функция $f \in (\mathfrak{M}_M^\infty \cap C_M)(K_0)$ такая, что

$$f(\xi) = O((1 - \xi_3)^{\frac{M}{2} \operatorname{sign}(M - \frac{3}{2}) - 1}) \quad \text{при } \xi \rightarrow o.$$

Отметим, что результаты такого типа для функций с нулевыми сферическими средними в евклидовом пространстве восходят к работе [16]. Дальнейшие уточнения и обобщения для некомпактных симметрических пространств были получены во многих работах (см. [6]–[8] и имеющуюся в этих работах библиографию). В компактном случае, к которому относится теорема 6, подобные исследования ранее не проводились.

§ 3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы приведем свойства некоторых специальных функций, которые потребуются в дальнейшем.

Будем использовать следующие стандартные обозначения (см., например, [17]): $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, Γ – гамма-функция, ψ – логарифмическая производная гамма-функции, $(z)_k = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)}$ – символ Похгаммера,

$F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая функция порядка (p, q) .

ЛЕММА 1. Пусть $m, p \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq p+1$, $a \neq p, p-1, p-2, \dots$, $|\arg(1-z)| < \pi$. Тогда

$$F(a, m-p; a-p; z) = \frac{1}{(1-z)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j (a-m)_j (-p)_j}{(1-m)_j (a-p)_j} \binom{m-1}{j} z^j. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $A, B \neq 0, -1, -2, \dots$ и $N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая формула для аналитического продолжения гипергеометрического ряда (см. [17, гл. 2, п. 2.10, (11)]):

$$\begin{aligned} \frac{F(A, B; A+B-N; z)}{\Gamma(A+B-N)} &= \frac{\Gamma(N)(1-z)^{-N}}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(A-N)_n (B-N)_n}{(1-N)_n n!} (1-z)^n \\ &+ \frac{(-1)^N}{\Gamma(A-N)\Gamma(B-N)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{(n+N)! n!} (1-z)^n \\ &\times (\psi(1+n) + \psi(1+n+N) - \psi(A+n) - \psi(B+n) - \ln(1-z)), \\ &|\arg(1-z)| < \pi, \quad |1-z| < 1. \end{aligned}$$

Полагая здесь $A = a$, $B = m-p$, $N = m$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{F(a, m-p; a-p; z)}{\Gamma(a-p)} &= \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} (1-z)^n \\ &= \frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} \right) (-1)^j z^j. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $(\zeta)_{n+j} = (\zeta)_j (\zeta+j)_n$, внутренняя сумма в (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{m-1} \frac{(a-m)_n (-p)_n}{(1-m)_n n!} \binom{n}{j} &= \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m)_{n+j} (-p)_{n+j}}{(1-m)_{n+j} j! n!} \\ &= \frac{(a-m)_j (-p)_j}{(1-m)_j j!} \sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n (-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n (B_1)_n}{(C_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} A_1, B_1, C_1+N_1+1 \\ C_1, A_1+B_1+N_1+1 \end{matrix}; 1 \right)$$

(см. [17, гл. 4, п. 4.5]).

В частности,

$$\sum_{n=0}^{N_1} \frac{(A_1)_n (B_1)_n}{(-N_1)_n n!} = \frac{\Gamma(A_1 + N_1 + 1) \Gamma(B_1 + N_1 + 1)}{(N_1)! \Gamma(A_1 + B_1 + N_1 + 1)},$$

$$\sum_{n=0}^{m-j-1} \frac{(a-m+j)_n (-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!} = \frac{\Gamma(a) \Gamma(m-p)}{(m-j-1)! \Gamma(a-p+j)}. \quad (9)$$

Комбинируя (7)–(9), приходим к (6). Лемма доказана.

Для $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$, положим

$$\Phi_{\lambda, \alpha, \beta}(\theta) = F\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + \lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - \lambda}{2}; \alpha + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (10)$$

Введем дифференциальные операторы $\mathcal{D}_{\alpha, \beta}$ и $\mathcal{D}_\alpha$, действующие по правилам

$$(\mathcal{D}_{\alpha, \beta} f)(\theta) = \frac{df}{d\theta} + \frac{(\alpha - \beta) \cos \theta + \alpha + \beta}{2 \sin \theta} f(\theta), \quad \mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_{-\alpha, \alpha}. \quad (11)$$

ЛЕММА 2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{D}_{\alpha, \beta} \left(\left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^\beta \right) \Phi_{\lambda, \alpha, \beta}(\theta) = \alpha \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha-1} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta+1} \Phi_{\lambda, \alpha-1, \beta+1}(\theta). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z)$$

(см. [17, гл. 2, п. 2.8, (20)]), получаем

$$\frac{d}{d\theta} \Phi_{\lambda, \alpha, \beta}(\theta) = \frac{(\alpha + \beta + 1)^2 - \lambda^2}{8(\alpha + 1)} (\sin \theta) \Phi_{\lambda, \alpha+1, \beta+1}(\theta).$$

Теперь (12) следует из соотношения

$$F(a, b; c; z) - F(a, b; c-1; z) + \frac{abz}{c(c-1)} F(a+1, b+1; c+1; z) = 0$$

(см. [14, гл. 7, § 5, п. 2, (18)]). Лемма доказана.

При $\beta = \pm \alpha$ функции $\Phi_{\lambda, \alpha, \beta}(\theta)$ выражаются через функции Лежандра первого рода на интервале $(-1, 1)$, т. е.

$$P_\lambda^{-\alpha}(\cos \theta) = \frac{(\sin \theta)^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \Phi_{2\lambda+1, \alpha, \alpha}(\theta) = \frac{(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \Phi_{2\lambda+1, \alpha, -\alpha}(\theta) \quad (13)$$

(см. [17, гл. 3, п. 3.4, (6), п. 3.5, (8)]). Из [17, гл. 3, п. 3.4, (11)] нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu(x) \cos(\pi(\nu + \mu)) - P_\nu^\mu(-x) \\ = \frac{2^{\mu+2} \sqrt{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu + \mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)} \frac{x F\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{\nu-\mu}{2} + 1; \frac{3}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}} \\ - \frac{2^{\mu+1} \sqrt{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu + \mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu-\mu}{2}\right)} \frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

ЛЕММА 3. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\{c_l\}_{l=M}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{l=M}^{\infty} |c_l| l^M < \infty. \quad (15)$$

Пусть также

$$u(x) = \sum_{l=M}^{\infty} c_l P_l^{-M}(x), \quad v(x) = \sum_{l=M}^{\infty} c_l P_l^M(x), \quad |x| < \varepsilon.$$

Тогда из четности функции u следует четность функции v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в силу условия (15) и оценок

$$|P_l^{-M}(\cos \theta)| \leq \sqrt{\frac{(l-M)!}{(l+M)!}}, \quad |P_l^M(\cos \theta)| \leq \sqrt{\frac{(l+M)!}{(l-M)!}} \quad (16)$$

(см. [14, гл. 3, § 3, п. 10]) функции u и v определены корректно. По той же причине ряд для функции u можно дифференцировать $2M$ раз, поскольку

$$\mathcal{D}_\alpha(P_\lambda^\alpha(\cos \theta)) = P_\lambda^{\alpha+1}(\cos \theta) \quad (17)$$

(см. (11)–(13)). Применим теперь к обеим частям равенства

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_l P_l^{-M}(\cos \theta) = \sum_{l=M}^{\infty} c_l P_l^{-M}(-\cos \theta), \quad \arccos \varepsilon < \theta < \arccos(-\varepsilon),$$

оператор $\mathcal{D}_{M-1} \mathcal{D}_{M-2} \cdots \mathcal{D}_{-M}$. Учитывая, что

$$\mathcal{D}_\alpha(f(\pi - \theta)) = -(\mathcal{D}_\alpha f)(\pi - \theta), \quad (18)$$

из (17) получаем требуемое. Лемма доказана.

Как известно, через функции Лежандра выражаются многочлены Гегенбауэра $C_l^p(x)$ и многочлены Чебышева $T_l(x)$ (см. [14, гл. 9, § 4, п. 8, (6'), (11')]).

ЛЕММА 4. Пусть $a > 0$, $h \in C^M(-a, a)$. Тогда для того, чтобы функция h была решением уравнения

$$\int_{-1}^1 h(xy) T_M(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad 0 < y < a, \quad (19)$$

необходимо и достаточно, чтобы h имела вид

$$h(x) = H(x) + \sum_{0 \leq n \leq [M/2]-1} c_n x^{2\{M/2\}+2n}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

где функция H удовлетворяет условию $H(-x) = (-1)^{M+1} H(x)$, $|x| < a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя левую часть в (19) по частям M раз с использованием формул

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(C_l^1(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}) &= -(l+1)T_{l+1}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{d}{dx}(C_l^{\frac{n}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}) &= \frac{(l+1)(l+n-1)}{2-n} C_{l+1}^{\frac{n-2}{2}}(x)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}, \quad n=3,4,\dots \end{aligned}$$

(см. [14, гл. 9, § 3, п. 2, (4), (5) и § 4, п. 8, (11')]), получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h(xy) T_M(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \gamma_M y^M \int_{-1}^1 h^{(M)}(xy) (1-x^2)^{M-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{\gamma_M}{y^M} \int_{-y}^y h^{(M)}(t) (y^2 - t^2)^{M-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\gamma_M = \begin{cases} \frac{(2M-2)!!}{M} \prod_{j=1}^{M-1} \frac{1}{M^2 - j^2}, & M \geq 2, \\ 1, & M = 0, 1. \end{cases}$$

Решением уравнения

$$\int_0^y u(t) (y^2 - t^2)^{M-\frac{1}{2}} dt = 0, \quad y \in (0, a), \quad u \in C[0, a],$$

является только нулевая функция (см. [4, гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6]). Поэтому если h удовлетворяет (19), то $h^{(M)}$ нечетна. При $0 \leq M \leq 2$ отсюда легко следует (20). Пусть $M \geq 3$. Поскольку $(h^{(M-2)})'' = h^{(M)}$, то для некоторого числа $c \in \mathbb{C}$ функция $(h(x) - cx^{M-2})^{(M-2)}$ является нечетной. Учитывая теперь вид многочлена в (20), с помощью индукционного перехода получаем (20) в общем случае. Достаточность в лемме вытекает из нечетности функции $H(x)T_M(x)$ и соотношения (21). Лемма доказана.

Еще один частный случай определения (10) приводит к функциям P_{mn}^l , которые были введены и детально изучены И.М. Гельфандом и З.Я. Шапиро в связи с теорией представлений группы вращений трехмерного пространства (см. [14, гл. 3]). Нас будет интересовать случай, когда $l \in \mathbb{Z}_+$, а m и n пробегает значения $-l, -l+1, \dots, l-1, l$. В терминах функций (10) имеем

$$\begin{aligned} P_{mn}^l(\cos \theta) &= \frac{i^{m-n}}{(m-n)!} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l+n)!(l-m)!}} \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{m-n} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{m+n} \Phi_{2l+1, m-n, m+n}(\theta), \quad m \geq n, \end{aligned} \quad (22)$$

$$P_{mn}^l = P_{nm}^l, \quad m < n.$$

Если $m = n = 0$, то $P_{mn}^l(\cos \theta)$ совпадают с зональными сферическими функциями $P_l(\cos \theta)$ на $\mathbb{S}^2$. Кроме того,

$$P_{m0}^l(x) = \frac{1}{i^m} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x). \quad (23)$$

При фиксированном l матрица с элементами $P_{mn}^l(\cos \theta)$ унитарна. В частности,

$$|P_{mn}^l(\cos \theta)| \leq 1. \quad (24)$$

Имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^\pi P_{mn}^l(\cos \theta) \overline{P_{mn}^s(\cos \theta)} \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & l \neq s, \\ \frac{2}{2l+1}, & l = s. \end{cases} \quad (25)$$

Далее, для функций P_{mn}^l справедлива следующая формула умножения:

$$P_{mk}^l(\cos \theta_1) P_{kn}^l(\cos \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i(k\alpha - m\varphi - n\psi)} P_{mn}^l(\cos \theta) d\alpha, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha, \\ e^{i\varphi} \sin \theta &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \alpha + i \sin \theta_2 \sin \alpha, \\ e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} \cos \frac{\theta}{2} &= \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{-i\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Она позволяет вычислять интегралы по окружностям на $\mathbb{S}^2$ от сферических функций и их обобщений. Мы приведем соответствующие формулы для больших окружностей сферы. Положим

$$S_{\lambda,k}(\xi) = P_\lambda^{-|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через τ_α , $\varkappa_\beta$, a_t ортогональные преобразования в $\mathbb{R}^3$, определяемые равенствами

$$\tau_\alpha \xi = (\xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha, \xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha, \xi_3), \quad (27)$$

$$\varkappa_\beta \xi = (\xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta, \xi_1 \sin \beta - \xi_2 \cos \beta, \xi_3), \quad (28)$$

$$a_t \xi = (\xi_1, \xi_2 \cos t + \xi_3 \sin t, -\xi_2 \sin t + \xi_3 \cos t). \quad (29)$$

ЛЕММА 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \geq M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $|t| < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\tau_\beta a_t \tau_\alpha \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2^{1-M} \sqrt{\pi}}{(k-M)!} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - M)\right) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda-M}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda+M}{2}\right)} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k-M} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{k+M} \Phi_{2\lambda+1,k-M,k+M}(t), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\varkappa_\beta a_t \tau_\alpha \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2^{1+M} \sqrt{\pi}}{(k+M)!} (-1)^k i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + M)\right) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+M}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda-M}{2}\right)} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k+M} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{k-M} \Phi_{2\lambda+1,k+M,k-M}(t). \end{aligned} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \geq k$, из (26), (23) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_o} S_{\lambda,k}(\tau_\beta a_t \tau_\alpha \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \frac{2\pi}{(k-M)!} i^M e^{-iM\alpha} e^{-ik\beta} P_\lambda^{-M}(0) \\ &\times \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{k-M} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{k+M} \Phi_{2\lambda+1,k-M,k+M}(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Обе части в (32) являются целыми функциями переменной λ экспоненциального типа $|t| + \frac{\pi}{2}$ (см. [17, гл. 3, п. 3.7, (27)] и [7, гл. 7, § 4, следствие 7.2]). Поскольку $|t| < \frac{\pi}{2}$, теорема Карлсона о единственности аналитической функции с заданными значениями в целых точках (см., например, [18, гл. 5]) влечет справедливость (32) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Учитывая теперь, что

$$P_\lambda^{-M}(0) = \frac{2^{-M}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - M)\right) \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda-M}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\lambda+M}{2})} \quad (33)$$

(см. [17, гл. 3, п. 3.4, (20)]), получаем (30). Равенство (31) доказывается аналогично. Лемма доказана.

§ 4. Случай всей сферы

Здесь мы докажем теоремы 1, 2, применяя гармонический анализ на $\mathbb{S}^2$. Напомним (см. [14, гл. 3, § 3, п. 10]), что произвольная функция из $\mathcal{H}_l$ имеет вид

$$\sum_{k=-l}^l c_k P_l^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

а функции

$$Y_k^{(l)}(\xi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{(l+k)!}} P_l^k(\cos \theta) e^{-ik\varphi}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad -l \leq k \leq l,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{S}^2; d\xi)$, где

$$d\xi = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку $\mathcal{H}_l$ инвариантно относительно группы $O(3)$, то $\mathfrak{H}_M \subset \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2)$ в силу ортогональности тригонометрической системы $\{e^{in\varphi}\}_{n=-\infty}^\infty$ в $L^2[0, 2\pi]$. Учитывая теперь, что для любой $f \in C_{M+1}(\mathbb{S}^2)$ функция $f(\xi) \mathcal{P}_M(\xi)$ является нечетной, получаем

$$C_{M+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_M \subset \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2).$$

Для доказательства обратного включения предположим сначала, что $f \in \mathfrak{M}_M^\infty(\mathbb{S}^2)$. Разложим f в ряд Фурье:

$$f(\xi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=-l}^l c_{k,l} P_l^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad (34)$$

где

$$c_{k,l} = \frac{(2l+1)}{4\pi} (-1)^k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^\circ(\varphi, \theta) P_l^k(\cos \theta) e^{-ik\varphi} d\theta d\varphi$$

(см. [14, гл. 3, § 6, п. 5]). Из (2) и симметричности оператора Δ_0 следует, что при $p \in \mathbb{Z}_+$, $l \geq 1$

$$c_{k,l} = \frac{(-1)^{k+p}}{(l^2 + l)^p} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}} \int_{\mathbb{S}^2} (\Delta_0^p f)(\xi) Y_k^{(l)}(\xi) d\xi.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$|c_{k,l}| \leq \sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}} \frac{\|\Delta_0^p f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}}{(l^2 + l)^p}, \quad (35)$$

т. е.

$$|c_{k,l} P_l^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi}| \leq \frac{\sqrt{2l+1}}{(l^2 + l)^p} \|\Delta_0^p f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$$

(см. (16)). Эта оценка показывает, в частности, что ряд (34) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{S}^2$. Пусть $\alpha \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, \pi]$ и τ_α , a_t определяются равенствами (27), (29). Тогда по условию

$$\begin{aligned} \int_{E_o} f(\tau_\alpha a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{c_{k,l}}{\sqrt{2l+1}} \sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}} \int_{E_o} Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Как и выше, при $l \leq M-1$, $-l \leq k \leq l$

$$\int_{E_o} Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) = 0$$

ввиду ортогональности системы $\{e^{in\varphi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в $L^2[0, 2\pi]$. Если $l \geq M$, то по формуле умножения (26) (см. также (23)) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_o} Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}} i^M e^{-ik\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{P_l^{-k}(-\sin t \cos \varphi)}{(1 - \sin^2 t \cos^2 \varphi)^{k/2}} \\ &\quad \times (\cos t \cos \varphi - i \sin \varphi)^k e^{iM\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(2l+1)(l+M)!}{(l-M)!}} i^{2M-k} e^{-ik\alpha} P_l^{-M}(0) P_{kM}^l(\cos t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{l=M}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{c_{k,l}}{i^k} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} P_l^{-M}(0) P_{kM}^l(\cos t) e^{-ik\alpha} = 0.$$

После перемены порядка суммирования (см. (24), (35)) видим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=|k|+(M-|k|)_+}^{\infty} \frac{c_{k,l}}{i^k} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} P_l^{-M}(0) P_{kM}^l(\cos t) \right) e^{-ik\alpha} = 0.$$

Поскольку $\alpha \in [0, 2\pi]$ является произвольным, имеем

$$\sum_{l=|k|+(M-|k|)_+}^{\infty} c_{k,l} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} P_l^{-M}(0) P_{kM}^l(\cos t) = 0, \quad t \in [0, \pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь соотношения (25) влекут равенства

$$c_{k,l} P_l^{-M}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad l \geq |k| + (M - |k|)_+.$$

Следовательно (см. (33)), $c_{k,l} = 0$ при $l \in M + 2\mathbb{Z}_+$, $-l \leq k \leq l$ и

$$f(\xi) = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=-l}^l c_{k,l} P_l^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-(M+2n+1)}^{M+2n+1} c_{k,M+2n+1} P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi}.$$

На основании этого заключаем, что

$$f(\xi) \in \mathfrak{H}_M + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{2\{(M+1)/2\}+2n},$$

а значит,

$$\mathfrak{M}_M^{\infty}(\mathbb{S}^2) \subset C_{M+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_M. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $f \in \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2)$, $h \in C^{\infty}(O(3))$. Положим

$$F(\xi) = \int_{O(3)} h(g) f(g^{-1}\xi) dg, \quad (37)$$

где dg – мера Хаара на $O(3)$. Тогда для любого $\tau \in O(3)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_o} F(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \int_{O(3)} h(g) \int_{E_o} f(g^{-1}\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) dg = 0, \\ F(\tau o) &= \int_{O(3)} h(g) f(g^{-1}\tau o) dg = \int_{O(3)} h(\tau g^{-1}) f(g o) dg. \end{aligned}$$

Используя (36) и произвольность функции h , делаем вывод, что $f \in C_{M+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_M$. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2) \subset C_{M+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_M,$$

и теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (i) В силу условий для M_1 и M_2 имеем

$$C_{M_1+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_{M_1} = C_{M_2+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_{M_1} \subset C_{M_2+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_{M_2}.$$

Тогда по теореме 1

$$\mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) = C_{M_1+1}(\mathbb{S}^2) + \mathfrak{H}_{M_1},$$

что и требовалось показать.

(ii) Пусть $f \in \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2)$. Представим f в виде $f = f_1 + F_1 = f_2 + F_2$, где $f_i \in C_{M_i+1}(\mathbb{S}^2)$, $F_i \in \mathfrak{H}_{M_i}$, $i = 1, 2$ (см. теорему 1). Поскольку $M_1 + M_2$ нечетно, функции $f_1 - F_2$ и $f_2 - F_1$ имеют разную четность. Тогда $f_1 = F_2$, $f_2 = F_1$ и $f \in \mathfrak{H}_{M_1} + \mathfrak{H}_{M_2}$. Поэтому $\mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2) \subset \mathfrak{H}_{M_1} + \mathfrak{H}_{M_2}$.

Обратно,

$$\mathfrak{H}_{M_1} \subset \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap C_{M_1}(\mathbb{S}^2) = \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap C_{M_2+1}(\mathbb{S}^2) \subset \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2).$$

Аналогично, $\mathfrak{H}_{M_2} \subset \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2)$. Отсюда $\mathfrak{H}_{M_1} + \mathfrak{H}_{M_2} \subset \mathfrak{M}_{M_1}(\mathbb{S}^2) \cap \mathfrak{M}_{M_2}(\mathbb{S}^2)$, что завершает доказательство утверждения (ii).

§ 5. Свойства классов $\mathfrak{M}_M^s(K_\delta)$

Технику, применяемую в § 4, нельзя использовать для классов $\mathfrak{M}_M^s(K_\delta)$, $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$, поскольку они не являются инвариантными относительно группы $O(3)$. Соответственно, для доказательства теоремы 3 потребуется более детальное изучение этих классов.

Пусть $f \in C(K_\delta)$, $f_k(\theta)$ – коэффициенты Фурье функции f (см. (4)). Для краткости положим

$$f^k(\xi) = f_k(\theta)e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В следующем утверждении используется оператор $\mathcal{D}_k$ из (11), а также оператор

$$\ell_k = \frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \operatorname{Id},$$

где Id – тождественное преобразование.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in \mathfrak{M}_M^s(K_\delta)$. Тогда:

- (i) $\bar{f} \in \mathfrak{M}_M^s(K_\delta)$;
- (ii) $f^k \in \mathfrak{M}_M^s(K_\delta)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$;
- (iii) если $s \geq 1$ и $f(\xi) = u(\theta)e^{ik\varphi}$, то функции $(\mathcal{D}_k u)(\theta)e^{i(k+1)\varphi}$ и $(\mathcal{D}_{-k} u)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ принадлежат классу $\mathfrak{M}_M^{s-1}(K_\delta)$;
- (iv) если $s \geq 2$, то $\Delta_0 f \in \mathfrak{M}_M^{s-2}(K_\delta)$;
- (v) если $f(\xi) = u(\theta)e^{iM\varphi}$, то $(\ell_M^j u)(\frac{\pi}{2}) = 0$ при $0 \leq j \leq [\frac{s}{2}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На протяжении доказательства будем считать, что τ – элемент группы $O(3)$ такой, что $\tau E_o \subset K_\delta$. Кроме того, как и выше, τ_α , $\varkappa_\beta$, a_t – ортогональные преобразования, определяемые равенствами (27)–(29).

Для доказательства (i) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \int_{E_o} \bar{f}(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) &= \int_{E_o} \bar{f}(\tau\varkappa_0\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) \\ &= \int_{E_o} \bar{f}(\tau\varkappa_0\xi) \overline{\mathcal{P}_M(\xi)} dl(\xi) = \overline{\int_{E_o} f(\tau\varkappa_0\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi)}. \end{aligned}$$

Докажем (ii). Из (3) следует формула

$$f^k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_\alpha\xi) e^{ik\alpha} d\alpha. \quad (38)$$

Тогда

$$\int_{E_o} f^k(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{E_o} f(\tau_\alpha\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) e^{ik\alpha} d\alpha.$$

Учитывая, что $\tau_\alpha\tau E_o \subset K_\delta$ для любого $\alpha \in [0, 2\pi]$, откуда получаем утверждение (ii).

Перейдем к доказательству (iii). При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int_{\tau E_0} F(a_t \xi) \mathcal{P}_M(\tau^{-1} \xi) dl(\xi) = 0,$$

где $F(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Дифференцируя это равенство по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int_{\tau E_0} h(\xi) \mathcal{P}_M(\tau^{-1} \xi) dl(\xi) = 0,$$

где $h(\xi) = \xi_3 \frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi) - \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_3}(\xi)$. Теперь утверждение (iii) следует из (ii), поскольку

$$h^\circ(\varphi, \theta) = \cos \varphi \frac{\partial f^\circ}{\partial \theta} - \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial f^\circ}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_k u)(\theta) e^{i(k+1)\varphi} + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_{-k} u)(\theta) e^{i(k-1)\varphi}.$$

Теперь докажем (iv). Лапласиан Δ_0 действует на функцию f^k по правилу

$$(\Delta_0 f^k)(\xi) = (\ell_k f_k)(\theta) e^{ik\varphi}. \quad (39)$$

Оператор ℓ_k можно представить в виде

$$\ell_k = \mathcal{D}_{-k-1} \mathcal{D}_k - k(k+1) \operatorname{Id}.$$

Эти соотношения и утверждения (ii), (iii) показывают, что $\Delta_0(f^k) \in \mathfrak{M}_M^{s-2}(K_\delta)$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако

$$\Delta_0(f^k)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_0(f(\tau_\alpha \xi)) e^{ik\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta_0 f)(\tau_\alpha \xi) e^{ik\alpha} d\alpha = (\Delta_0 f)^k(\xi)$$

(см. (38)). Таким образом, $(\Delta_0 f)^k(\xi) \in \mathfrak{M}_M^{s-2}(K_\delta)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, а значит, $\Delta_0 f \in \mathfrak{M}_M^{s-2}(K_\delta)$.

Докажем (v). Ввиду (39) утверждение (iv) влечет, что $(\Delta_0^j f)(\xi) = (\ell_M^j u)(\theta) e^{iM\varphi} \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$ при $0 \leq j \leq [\frac{s}{2}]$. Используя определение класса $\mathfrak{M}_M(K_\delta)$, имеем

$$\int_{E_0} (\Delta_0^j f)(\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) = 0.$$

Вычисляя интеграл в левой части, получаем требуемое. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство леммы 6, (ii) показывает, что

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \{f \in C(K_\delta) : f^k \in \mathfrak{M}_M(K_\delta) \ \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

ЛЕММА 7. Пусть $f \in (\mathfrak{M}_M^{2M+2} \cap C_M)(K_\delta)$ и f имеет вид $f(\xi) = u(\theta) e^{iM\varphi}$. Тогда $f = 0$ в K_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2} - \delta)$ рассмотрим функцию w_ε со следующими свойствами: 1) $w_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$; 2) $w_\varepsilon = 1$ на $[\delta + \varepsilon, \pi - \delta - \varepsilon]$ и $w_\varepsilon = 0$ вне $[\delta + \frac{\varepsilon}{2}, \pi - \delta - \frac{\varepsilon}{2}]$. Положим $f_\varepsilon(\xi) = u(\theta) w_\varepsilon(\theta) e^{iM\varphi}$, $\xi \in \mathbb{S}^2$, где $u = 0$ вне интервала $(\delta, \pi - \delta)$. Функция f_ε принадлежит $C^{2M+2}(\mathbb{S}^2)$ и может быть представлена в виде ряда:

$$f_\varepsilon(\xi) = \sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} S_{l,M}(\xi), \quad (40)$$

где $c_{M,l} = O(l^{-M-3/2})$ при $l \rightarrow \infty$ (см. (34), (35)). При этом равенство $f(-\xi) = (-1)^M f(\xi)$ влечет соотношение

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l^{-M}(x) = \sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l^{-M}(-x), \quad |x| < \cos(\delta + \varepsilon). \quad (41)$$

Пусть $0 < t < \frac{\pi}{2} - \delta - \varepsilon$. Поскольку $f \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$, имеем

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} \int_{E_o} S_{l,M}(\varkappa_0 a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\xi = \int_{E_o} f_\varepsilon(\varkappa_0 a_t \xi) \mathcal{P}_M(\xi) d\xi = 0.$$

Тогда из (31) и (33) получаем

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l^M(0) \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2M} \Phi_{2l+1,2M,0}(t) = 0.$$

Применяя к последнему равенству дифференциальный оператор $\mathcal{D}_{M+1,M-1} \times \mathcal{D}_{M+2,M-2} \cdots \mathcal{D}_{2M,0}$ и учитывая (12), (13), (22), (24), видим, что

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l^M(0) P_l^{-M}(\cos t) = 0.$$

Теперь, используя формулу

$$P_l^M(0) P_l^{-M}(\cos t) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2-t}^{\pi/2+t} P_l(\cos \theta) T_M \left(\frac{-\cos \theta}{\sin t} \right) \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 t - \cos^2 \theta}}$$

(см. [14, гл. 3, § 4, п. 3, (7)]), приходим к уравнению

$$\int_{-1}^1 h(xy) T_M(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad 0 < y < \cos(\delta + \varepsilon),$$

где

$$h(x) = \sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l(x).$$

Отсюда по лемме 4 имеем, что $h^{(M)}$ – нечетная функция, определенная на интервале $(-\cos(\delta + \varepsilon), \cos(\delta + \varepsilon))$. С другой стороны, лемма 3, равенство (41) и соотношение

$$P_l^M(x) = (-1)^M (1-x^2)^{\frac{M}{2}} \frac{d^M P_l(x)}{dx^M}$$

(см. [14, гл. 3, п. 3.6.1, (6)]) показывают, что $h^{(M)}$ является четной функцией. Это означает, что

$$\sum_{l=M}^{\infty} c_{M,l} P_l^M(\cos \theta) = 0, \quad \theta \in (\delta + \varepsilon, \pi - \delta - \varepsilon),$$

т. е. (см. (17), (40)) $\mathcal{D}_{M-1} \mathcal{D}_{M-2} \cdots \mathcal{D}_{-M} u = 0$ на $(\delta + \varepsilon, \pi - \delta - \varepsilon)$. Общее решение указанного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию

$u(\pi - \theta) = u(\theta)$, имеет вид

$$u(\theta) = \frac{1}{(\sin \theta)^M} \sum_{n=0}^{M-1} c_n (\cos \theta)^{2n}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $(\ell_M^j u)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ при $0 \leq j \leq M+1$ (см. лемму 6, (v)), заключаем, что $u = 0$ на $(\delta + \varepsilon, \pi - \delta - \varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2} - \delta)$ имеем $f = 0$ в K_δ . Лемма доказана.

ЛЕММА 8. (i) Пусть $k \geq M+2$, $k+M$ четно и $0 \leq j \leq \frac{k-M-2}{2}$. Тогда

$$\frac{(\cos \theta)^{2j}}{(\sin \theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathfrak{M}_M(K_0). \quad (42)$$

(ii) Пусть $k \geq M+3$, $k+M$ нечетно и $0 \leq j \leq \frac{k-M-3}{2}$. Тогда

$$\frac{(\cos \theta)^{2j+1}}{(\sin \theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathfrak{M}_M(K_0). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) При $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем (см. (14) и лемму 1)

$$\begin{aligned} P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta) + P_{M+2n+1}^{-k}(-\cos \theta) &= \frac{2^{1-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin \theta)^k \\ &\quad \times F\left(\frac{k-M-2n-1}{2}, \frac{k+M+2n+2}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2 \theta\right) \\ &= \frac{2^{1-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin \theta)^{-k} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \left(-\frac{k+M+2n+1}{2}\right)_j \left(\frac{M+2n-k+2}{2}\right)_j}{(1-k)_j \left(\frac{1}{2}\right)_j} \binom{k-1}{j} (\cos \theta)^{2j}. \end{aligned} \quad (44)$$

По лемме 5 функция $P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta) e^{ik\varphi}$, а поэтому и левая часть в (44), умноженная на $e^{ik\varphi}$, принадлежат классу $\mathfrak{M}_M(K_0)$. Полагая в (44)

$$n = \frac{k-M-2}{2}, \frac{k-M-2}{2} - 1, \dots, 0,$$

получаем (42).

(ii) В этом случае

$$\begin{aligned} P_{M+2n+1}^{-k}(\cos \theta) - P_{M+2n+1}^{-k}(-\cos \theta) &= \frac{2^{2-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n-1}{2}\right)} \cos \theta (\sin \theta)^k \\ &\quad \times F\left(\frac{k-M-2n}{2}, \frac{k+M+2n+3}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2 \theta\right) \\ &= \frac{2^{2-k} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-M-2n-1}{2}\right)} (\sin \theta)^{-k} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \left(-\frac{k+M+2n}{2}\right)_j \left(\frac{M+2n-k+3}{2}\right)_j}{(1-k)_j \left(\frac{3}{2}\right)_j} \binom{k-1}{j} (\cos \theta)^{2j+1}. \end{aligned}$$

и (43) получается аналогично. Лемма доказана.

Леммы 7, 8 позволяют получить следующее описание класса $(\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$.

ЛЕММА 9. Пусть $f \in C(K_\delta)$. Тогда $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$ в том и только в том случае, если коэффициенты Фурье функции f имеют вид

$$f_k(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{(\sin \theta)^{|k|}} \sum_{j=0}^{[(|k|-M)/2]-1} \gamma_{j,k} (\cos \theta)^{2j+2\{(M+k)/2\}}, & |k| \geq M, \\ (\sin \theta)^{|k|} \sum_{j=0}^{[(M-|k|)/2]-1} \gamma_{j,k} (\cos \theta)^{2j+2\{(M+k)/2\}}, & |k| < M, \end{cases} \quad (45)$$

где $\theta \in (\delta, \pi - \delta)$, а $\gamma_{j,k}$ – комплексные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $f \in C^\infty(K_\delta)$. Если $f \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$, то $f^k \in (\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ (см. лемму 6, (ii) и формулу (38)). Кроме того, лемма 6, (iii) и равенство (18) показывают, что $(\mathcal{D}_{-k} f_k)(\theta) e^{i(k-1)\varphi}$ и $(\mathcal{D}_k f_k)(\theta) e^{i(k+1)\varphi}$ также принадлежат $(\mathfrak{M}_M \cap C_M)(K_\delta)$. Используя тогда лемму 7 и лемму 6, (i), индукцией получаем (45). Обратное утверждение следует из леммы 8, замечания 1 и соотношения

$$f_k(\pi - \theta) = (-1)^{2\{(M+k)/2\}} f_k(\theta) = (-1)^{M+k} f_k(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для $f \in C^\infty(K_\delta)$ лемма доказана. Общий случай получается отсюда с помощью сглаживания f функциями вида (37), где в качестве h выбирается последовательность Дирака на группе $O(3)$ (см. [19, гл. 1, § 1]). Лемма доказана.

§ 6. Доказательство теорем 3–6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$. Представим f в виде $f = \Phi + \Psi$, где $\Phi \in C_M(K_\delta)$, $\Psi \in C_{M+1}(K_\delta)$. Положим

$$U = \Phi - \sum_{|k| \leq M+1} \Phi^k, \quad V = \sum_{|k| \leq M-2} \Phi^k.$$

Поскольку $\Phi \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$, на основании леммы 9 делаем вывод, что $U \in \mathfrak{S}_M(K_\delta)$, $\Phi = U + V$ и

$$V(\xi) = \sum_{|k| \leq M-2} \sum_{j=0}^{[(M-|k|)/2]-1} \gamma_{j,k} (\xi_2 + i\xi_1 \operatorname{sign} k)^{|k|} \xi_3^{2j+2\{(M+k)/2\}},$$

где $\gamma_{j,k} \in \mathbb{C}$. При этом $V \in C_M(K_\delta)$. Используя теперь [20, гл. 4, теорема 2.1], получаем, что $V \in \mathfrak{H}_M|_{K_\delta}$. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) \subset C_{M+1}(K_\delta) + \mathfrak{H}_M|_{K_\delta} + \mathfrak{S}_M(K_\delta).$$

Обратное включение следует из теоремы 1, замечания 1 и леммы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть f удовлетворяет условию из п. (i) теоремы. Тогда тем же свойством обладает каждое слагаемое ряда (3) (см. формулу (38)). Кроме того, по лемме 9 функции f_k имеют вид (45). Отсюда следует, что все f^k равны нулю в K_δ , а значит, f – нулевая функция.

Для доказательства (ii) достаточно рассмотреть функцию

$$f(\xi) = (\xi_3^2 - \cos^2 r)^{m+1} (\xi_2 - i\xi_1)^{-(M+2m+4)}$$

(см. лемму 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 5, 6. Утверждения (i) в указанных теоремах получаются тем же способом, что и в теореме 4. Наконец, по лемме 8 всем требованиям утверждения (ii) удовлетворяют соответственно следующие функции:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow (\xi_2 - i\xi_1)^{-(M+2n+2)} \prod_{j=1}^n (\xi_3^2 - \cos^2 r_j), & E = \{r_1, \dots, r_n\}, \\ \xi &\rightarrow \left(\xi_2 + i\xi_1 \operatorname{sign} \left(M - \frac{3}{2} \right) \right)^{M \operatorname{sign} \left(M - \frac{3}{2} \right) - 2}. \end{aligned}$$

Теоремы доказаны.

Список литературы

1. Г. Минковский, “О тѣлахъ постоянной ширины”, *Матем. сб.*, **25**:3 (1905), 505–508.
2. В. П. Паламонов, *Интегральная геометрия и компьютерная томография*, Изд-во МК НМУ, М., 1997, 68 с.
3. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, 2-е изд., Наука, М., 1978, 343 с.; англ. пер. 1-го изд.: А. А. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Grundlehren Math. Wiss., **220**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, xi+315 pp.
4. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987, 736 с.; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984, xix+654 pp.
5. S. Helgason, *Integral geometry and Radon transforms*, Springer, New York, 2011, xiv+301 pp.
6. V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, xii+454 pp.
7. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009, xii+671 pp.
8. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013, x+592 pp.
9. E. T. Quinto, “Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds”, *Israel J. Math.*, **84**:3 (1993), 353–363.
10. E. T. Quinto, “Radon transforms on curves in the plane”, *Tomography, impedance imaging, and integral geometry*, Lectures in Appl. Math., **30**, eds. E. T. Quinto, M. Cheney, P. Kuchment, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 231–244.
11. Yiyang Zhou, “Two radius support theorem for the sphere transform”, *J. Math. Anal. Appl.*, **254**:1 (2001), 120–137.

12. E. T. Quinto, "The invertibility of rotation invariant Radon transforms", *J. Math. Anal. Appl.*, **91**:2 (1983), 510–522; "Erratum", *J. Math. Anal. Appl.*, **94**:2 (1983), 602–603.
13. Á. Kurusa, "Support theorems for the totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:2 (1994), 429–435.
14. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991, 576 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. Ja. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968, x+613 pp.
15. В. В. Волчков, "Теоремы о среднем для одного класса полиномов", *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 737–745; англ. пер.: V. V. Volchkov, "Mean value theorems for a class of polynomials", *Siberian Math. J.*, **35**:4 (1994), 656–663.
16. Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958, 158 с.; пер. с англ.: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publishers, New York–London, 1955, viii+172 pp.
17. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, 2-е изд., Наука, М., 1973, 294 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. I, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xxvi+302 pp.
18. Е. К. Титчмарш, *Теория функций*, ГИТТЛ, М., 1951, 506 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1939, x+454 pp.
19. С. Ленг, $SL_2(R)$, Мир, М., 1977, 430 с.; пер. с англ.: S. Lang, $SL_2(R)$, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.–London–Amsterdam, 1975, xvi+428 pp.
20. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974, 336 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, x+297 pp.

ВАЛЕРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ВОЛЧКОВ
(VALERIY V. VOLCHKOV)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступило в редакцию
16.12.2013

ВИТАЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ВОЛЧКОВ
(VITALY V. VOLCHKOV)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: v.volchkov@mail.donnu.edu.ua

ИРИНА МИХАЙЛОВНА САВОСТЬЯНОВА
(IRINA M. SAVOSTYANOVA)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: cavost@mail.ru