Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, О топологии устойчивых лагранже-
вых отображений с особенностями типов A и D , *Изв.*
РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 3, 159–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 04:19:11

УДК 515.16

В. Д. Седых

О топологии устойчивых лагранжевых отображений с особенностями типов A и D

Изучается топология примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с особенностями типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$. Доказано, в частности, что каждая связная компонента многообразия мультиособенностей любого фиксированного типа $A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ у ростка образа лагранжева отображения с моноособенностью типа $D_\mu^\pm$ либо стягиваема, либо гомотопически эквивалентна окружности. Для всех типов мультиособенностей вычислено количество связных компонент каждого вида. В качестве следствия получены новые условия сосуществования лагранжевых особенностей.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: устойчивые лагранжевы отображения, мультиособенности, индекс примыкания, эйлерова характеристика.

DOI: 10.4213/im8202

§ 1. Введение

Лагранжевым отображением является, например, отображение Гаусса гладкой¹ трансверсально ориентированной гиперповерхности евклидова пространства в единичную сферу. Согласно теореме Арнольда простые особенности устойчивого лагранжева отображения исчерпываются списком $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . Все возможные примыкания мультиособенностей в образе такого отображения хорошо известны (см., например, [1], [2]). Естественная задача изучения топологии этих примыканий неоднократно ставилась В. И. Арнольдом (см., в частности, [3, проблемы 1987-5 и 1987-8]). Однако ее полное решение не получено до сих пор. В настоящей работе описан гомотопический тип примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения, имеющего лишь особенности типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$.

Топология примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения определяется топологией примыканий моноособенностей к мультиособенностям. Лагранжевы моноособенности типов $A_\mu^\pm$ могут примыкать только к мультиособенностям типов $A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ (коранга 1). При этом мультиособенности любого фиксированного типа у ростка образа лагранжева отображения с моноособенностью типа $A_\mu^\pm$ образуют гладкое многообразие со стягиваемыми связными компонентами. Мы вычисляем количество этих компонент.

¹Здесь и далее термин “гладкий” означает “класса C^∞ ”.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-5138.2014.1).

Лагранжевы моноособенности типов $D_\mu^\pm$ могут примыкать только к мультиособенностям типов $D_\nu^\pm A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ и $A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$. Мы доказываем, что мультиособенности любого фиксированного типа $D_\nu^\pm A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ у ростка образа лагранжева отображения с моноособенностью типа $D_\mu^\pm$ образуют гладкое многообразие со стягиваемыми связными компонентами. Многообразие мультиособенностей любого фиксированного типа $A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ у ростка образа лагранжева отображения с моноособенностью типа $D_\mu^\pm$ имеет связные компоненты двух видов: стягиваемые компоненты и компоненты, гомотопически эквивалентные окружности. Во всех случаях мы вычисляем количество связных компонент каждого вида.

Эти результаты позволили найти новые условия сосуществования особенностей устойчивого лагранжева отображения. В частности, если каустика устойчивого лагранжева отображения гладкого замкнутого ² трехмерного многообразия не имеет особенностей типа A_4 (ласточкин хвост), то число точек трансверсального пересечения трех ее гладких ветвей четно. Множество критических точек устойчивого лагранжева отображения гладкого замкнутого многообразия в гладкое замкнутое трехмерное многообразие имеет четную эйлерову характеристику. Эйлерова характеристика множества критических точек устойчивого лагранжева отображения гладкого замкнутого четырехмерного многообразия равна нулю.

Часть результатов настоящей работы анонсирована в кратком сообщении [4]. Автор благодарен М. Э. Казаряну за полезные обсуждения и замечания.

§ 2. Лагранжевы отображения и их особенности

Сначала мы напомним основные понятия и факты теории особенностей лагранжевых отображений (подробности см. в [5] или [6]).

Пусть E – гладкое $2n$ -мерное многообразие. *Симплектической структурой* на E называется замкнутая невырожденная 2-форма ω . Гладкое n -мерное подмногообразие L в E называется *лагранжевым*, если $\omega|_L = 0$.

Зафиксируем симплектическую структуру на многообразии E . Гладкое расслоение

$$\varrho: E \rightarrow V$$

над гладким n -мерным многообразием V называется *лагранжевым*, если все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями в E .

Пусть ϱ – лагранжево расслоение и L – лагранжево подмногообразие в E . Тогда отображение

$$f = \varrho \circ i: L \rightarrow V,$$

где $i: L \hookrightarrow E$ – тождественное вложение, называется *лагранжевым*. Множество критических значений лагранжева отображения называется *каустикой*. Далее мы будем рассматривать лишь собственные лагранжевы отображения.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, где

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \quad \mathbf{p} = (p_{k+1}, \dots, p_n), \quad \mathbf{q} = (q_{k+1}, \dots, q_n).$$

²Многообразие называется *замкнутым*, если оно компактно и не имеет края.

Форма $d\mathbf{t} \wedge d\mathbf{x} + d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ определяет симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2n}$. Отображение

$$\varrho: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varrho: (\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{q}),$$

является лагранжевым расслоением над пространством $\mathbb{R}^n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{q})\}$.

Пусть $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ – семейство гладких функций от $\mathbf{t}$, гладко зависящих от $\mathbf{q}$. Тогда система уравнений

$$\mathbf{x} = -\frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

определяет гладкое лагранжево подмногообразие $\mathbb{R}^n = \{(\mathbf{t}, \mathbf{q})\} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n}$. Формула

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto \left(-\frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{q} \right), \quad (2.1)$$

задает лагранжево отображение $\mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\varrho} \mathbb{R}^n$.

Снабдим пространство W всех вложений $i: L \hookrightarrow E$ тонкой C^∞ -топологией Уитни. Утверждение, касающееся лагранжевых отображений, справедливо для отображения $f = \varrho \circ i$ *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset W$ такое, что это утверждение имеет место для любого $i \in U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Два лагранжевых отображения

$$L_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\varrho_1} V_1, \quad L_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\varrho_2} V_2$$

называются *лагранжево эквивалентными*, если существуют диффеоморфизмы

$$\Phi: E_1 \rightarrow E_2, \quad \varphi: V_1 \rightarrow V_2, \quad \varepsilon: L_1 \rightarrow L_2$$

такие, что Φ переводит симплектическую структуру на E_1 в симплектическую структуру на E_2 , а диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\varrho_1} & V_1 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi \\ L_2 & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\varrho_2} & V_2 \end{array}$$

коммутативна.

Класс эквивалентности ростка лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ относительно лагранжевой эквивалентности называется (*лагранжевой*) *особенностью*. Особенность отображения f в точке $x \in L$ называется (*лагранжево*) *устойчивой*, если для любого лагранжева отображения $\tilde{f}$, близкого к f , найдется точка $\tilde{x} \in L$, близкая к x , такая, что росток $\tilde{f}$ в $\tilde{x}$ лагранжево эквивалентен ростку f в x . Особенность лагранжева отображения f в точке x называется *простой*, если особенности всех близких лагранжевых отображений во всех близких точках принадлежат конечному числу классов лагранжевой эквивалентности.

Лагранжево отображение f называется (*лагранжево*) *устойчивым*, если всякое лагранжево отображение, близкое к f , лагранжево эквивалентно f . Устойчивые лагранжевы отображения образуют открытое подмножество в пространстве всех лагранжевых отображений.

ТЕОРЕМА 2.3 (В. И. Арнольд [6]). *Простые лагранжево устойчивые особенности лагранжевых отображений в гладкое n -мерное многообразие лагранжево эквивалентны особенностям отображения (2.1) в нуле, где $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ – функция одного из следующих типов ($\mu \leq n + 1$ целое):*

$$\begin{aligned} A_{\mu}^{\pm}: S &= \pm t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \cdots + q_2 t_1^2, & \mu \geq 1; \\ D_{\mu}^{\pm}: S &= t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \cdots + q_3 t_2^2, & \mu \geq 4; \\ E_6^{\pm}: S &= t_1^3 \pm t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 6; \\ E_7: S &= t_1^3 + t_1 t_2^3 + q_6 t_1^2 t_2 + q_5 t_1^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 7; \\ E_8: S &= t_1^3 + t_2^5 + q_7 t_1 t_2^3 + q_6 t_1 t_2^2 + q_5 t_2^3 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 8. \end{aligned}$$

Лагранжевы отображения общего положения в многообразии размерности $n \leq 5$ устойчивы и могут иметь особенности только типов $A_{\mu}^{\pm}$, $D_{\mu}^{\pm}$, $E_{\mu}^{\pm}$.

Здесь число μ называется *степенью* особенности, а число $\mu - 1$ – ее *коразмерностью*. Если μ четное или $\mu = 1$, то особенности типов A_{μ}^{+} и A_{μ}^{-} лагранжево эквивалентны и называются особенностями *типа* A_{μ} . В остальных случаях особенности перечисленных типов попарно лагранжево не эквивалентны.

Классифицировать особенности лагранжева отображения удобно в терминах производящих семейств. А именно, для ростка лагранжева многообразия L существуют гладкие локальные координаты v и w соответственно на базе V и в слое лагранжева расслоения ϱ такие, что локально

$$L = \left\{ (w, v) \mid \exists t: \frac{\partial F(t, v)}{\partial t} = 0, w = \frac{\partial F(t, v)}{\partial v} \right\},$$

где $F(t, v)$ – семейство гладких функций от переменных $t \in \mathbb{R}^k$ с параметрами v . При этом предполагается, что уравнение $\frac{\partial F(t, v)}{\partial t} = 0$ удовлетворяет условию теоремы о неявной функции.

Семейство F называется *производящим семейством* ростка L или соответствующей особенности лагранжева отображения f . Например, производящие семейства особенностей, перечисленных в теореме 2.3, имеют вид $F(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) + \mathbf{x}\mathbf{t}$.

Два производящих семейства называются R^+ -эквивалентными, если одно из них переходит в другое после гладкой замены переменных (гладко зависящей от параметров), гладкой замены параметров и прибавления гладкой функции от параметров. Два производящих семейства называются *стабильно R^+ -эквивалентными*, если они становятся R^+ -эквивалентными после прибавления к ним невырожденных квадратичных форм от новых переменных.

Оказывается (см. [5]), что все производящие семейства лагранжево эквивалентных особенностей локально стабильно R^+ -эквивалентны. Стабильно R^+ -эквивалентные производящие семейства определяют лагранжево эквивалентные отображения.

Ростки производящих семейств простых устойчивых лагранжевых особенностей классифицируются по типам простых ростков гладких функций относительно стабильной R^+ -эквивалентности. Последние исчерпываются ростками в нуле функций

$$A_\mu^\pm: \pm t_1^{\mu+1}, \quad D_\mu^\pm: t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1}, \quad E_6^\pm: t_1^3 \pm t_2^4, \quad E_7: t_1^3 + t_1 t_2^3, \quad E_8: t_1^3 + t_2^5.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Лагранжево отображение общего положения в пространство размерности $n > 5$ может быть неустойчивым. Действительно, рассмотрим семейство

$$F(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + a(\mathbf{q})t_1 t_2 t_3 + q_6 t_2 t_3 + q_5 t_1 t_3 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_3 + q_2 t_2 + q_1 t_1$$

функций от $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, зависящих от шести параметров $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6) \in \mathbb{R}^6$, где $a = a(\mathbf{q})$ – произвольная гладкая функция, $a(0) \neq -3$. Росток этого семейства в нуле является ростком производящего семейства лагранжевой особенности, называемой особенностью *типа* P_8 .

Хорошо известно (см. [5]), что особенности типа P_8 , отвечающие разным функциям a , лагранжево не эквивалентны. С другой стороны, если лагранжево отображение имеет особенность типа P_8 , то любое близкое лагранжево отображение также имеет особенность типа P_8 в некоторой близкой точке.

§ 3. Лагранжевы мультиособенности

Мультиособенностью лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ в точке $y \in V$ называется неупорядоченный набор особенностей f в попарно различных точках $x \in f^{-1}(y)$.

Пусть $\mathbb{S}^+$ – свободная абелева мультипликативная полугруппа, образующими которой служат символы

$$A_1, A_{2k}, A_{2k+1}^+, A_{2k+1}^- \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D_\mu^+, D_\mu^- \quad (\mu = 4, 5, \dots), \quad E_6^+, E_6^-, E_7, E_8.$$

Единичный элемент этой полугруппы обозначим через $\mathbf{1}$.

Элементы полугруппы $\mathbb{S}^+$ нумеруют типы мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с простыми особенностями. А именно, рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = X_1 \cdots X_p \in \mathbb{S}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$, где $X_1, \dots, X_p$ – любой набор образующих полугруппы $\mathbb{S}^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$ имеет *мультиособенность типа* $\mathcal{A}$ в точке $y \in V$, если:

- 1) $f^{-1}(y)$ состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $X_1, \dots, X_p$ соответственно.

Будем говорить, что отображение f имеет мультиособенность *типа* $\mathbf{1}$ во всех точках дополнения $V \setminus f(L)$. Мультиособенности типов $A_{\mu_1}^\pm \cdots A_{\mu_p}^\pm$ называются *мультиособенностями коранга* 1.

Сумма степеней особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется *степенью* мультиособенности типа $\mathcal{A}$ и обозначается $\deg \mathcal{A}$. Сумма коразмерностей особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется *коразмерностью* мультиособенности типа $\mathcal{A}$

и обозначается $\text{codim } \mathcal{A}$. Мультиособенности в образе лагранжева отображения общего положения в пространство размерности $n \leq 5$ являются мультиособенностями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ таких, что $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$.

В дальнейшем через $\#(\mathcal{A})$ обозначено число p сомножителей в разложении $\mathcal{A} = X_1 \cdots X_p$ элемента $\mathcal{A}$ в произведение образующих полугруппы $\mathbb{S}^+$. Число сомножителей, равных данной образующей X , обозначается через $\#(X|\mathcal{A})$. Если $\#(\mathcal{A}) = 1$, то мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в образе устойчивого лагранжева отображения называется *моноособенностью*. На рис. 1 изображена лагранжева моноособенность типа A_2 .

Рис. 1. Лагранжева моноособенность типа A_2

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Мы будем говорить, что элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ делится на элемент $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$, если существует элемент $\mathcal{C} \in \mathbb{S}^+$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. В этом случае элемент $\mathcal{C}$ единственный, и он обозначается $\mathcal{C} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$.

§ 4. Примыкания лагранжевых мультиособенностей

Пусть $f: L \rightarrow V$ – устойчивое лагранжево отображение. Тогда множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in V$ таких, что f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ в y , является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V . Множество $\mathcal{A}^f = f^{-1}(\mathcal{A}_f)$ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в L . Сужение отображения f на $\mathcal{A}^f$ является конечным накрытием над многообразием $\mathcal{A}_f$. Кратность этого накрытия равна $\#(\mathcal{A})$.

Предположим, что отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$ в точке $y \in V$, где $\text{codim } \mathcal{B} = c$. Выберем окрестность U начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и рассмотрим гладкое вложение $h: U \rightarrow V$ такое, что $h(0) = y$ и подмногообразие $h(U) \subset V$ трансверсально многообразию $\mathcal{B}_f$ в y . Через $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$ обозначим открытый c -мерный шар с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в 0 . Тогда существует положительное число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y, h)$ такое, что для любых $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ множество $h(D_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ является гладким многообразием, класс эквивалентности которого относительно диффеоморфизмов зависит только от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Зафиксируем произвольную систему гладких многообразий $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$, таких, что $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ диффеоморфно многообразию $h(D_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ для

любого $\varepsilon < \varepsilon_0$. Эйлерову характеристику многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ обозначим через $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Мультиособенность типа $\mathcal{B}$ в образе устойчивого лагранжева отображения *примыкает* к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ и $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Число $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ называется *индексом* примыкания. Примыкание называется *простым*, если все связные компоненты многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ стягиваемы. В противном случае примыкание называется *сложным*.

Хорошо известно (см., например, [6]), что лагранжевы мультиособенности коранга 1 имеют только простые примыкания.

Рис. 2. Лагранжева моноособенность типа A_3^+

ПРИМЕР 4.2. Моноособенность типа A_1 в образе устойчивого лагранжева отображения не примыкает ни к каким другим лагранжевым мультиособенностям. Моноособенность типа A_2 примыкает только к мультиособенностям типов **1** и A_1^2 (см. рис. 1). Эти примыкания простые, причем $J_1(A_2) = J_{A_1^2}(A_2) = 1$.

ПРИМЕР 4.3. Росток лагранжева отображения с особенностью типа A_3^+ на плоскость является ростком сужения проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(t_1, x_1, q_2) \mapsto (x_1, q_2)$,

Рис. 5. Росток каустики с особенностью типа D_4^-

ПРИМЕР 4.4. На рис. 3–5 изображены ростки каустик устойчивых лагранжевых отображений с моноособностями типов A_4 , D_4^+ и D_4^- соответственно (ласточкин хвост, кошелек и пирамида; см. [6]).

Индексы примыканий лагранжевых моноособностей указанных типов приведены в следующих таблицах:

$\mathcal{A}$	1	A_1^2	A_1^4	A_2	$A_2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	A_2^2
$J_{\mathcal{A}}(A_4)$	1	1	1	1	3	1	1	1

$\mathcal{A}$	1	A_1^2	A_1^4	A_2	$A_2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	A_2^2
$J_{\mathcal{A}}(D_4^+)$	1	2	1	2	4	1	1	2

$\mathcal{A}$	A_1^2	A_1^4	$A_2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$
$J_{\mathcal{A}}(D_4^-)$	0	2	6	3	3

Все примыкания, кроме одного, являются простыми. Примыкание лагранжевой моноособности типа D_4^- к мультиособности типа A_1^2 является сложным: многообразие $\Xi_{A_1^2}(D_4^-)$ гомотопически эквивалентно окружности.

§ 5. Универсальные соотношения между индексами примыканий

Следующее утверждение показывает, что топология примыканий мультиособностей в образе устойчивого лагранжева отображения с простыми особенностями полностью определяется топологией примыканий моноособностей к мультиособностям.

ТЕОРЕМА 5.1. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{S}^+$ многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{BC})$ диффеоморфно несвязному объединению многообразий вида $\Xi_X(\mathcal{B}) \times \Xi_Y(\mathcal{C})$ по всем парам

$(X, Y) \in \mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^+$ таким, что $XY = \mathcal{A}$. В частности,

$$J_{\mathcal{A}}(\mathcal{BC}) = \sum_{(X, Y) \in \mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^+ : XY = \mathcal{A}} J_X(\mathcal{B}) J_Y(\mathcal{C}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{codim}(\mathcal{BC}) = n$ и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – устойчивое лагранжево отображение с мультиособенностью типа $\mathcal{BC}$ в нуле пространства-образа. Рассмотрим открытый n -мерный шар $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Если ε достаточно мало, то $f^{-1}(D_\varepsilon)$ является объединением непересекающихся открытых областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}^n$ таких, что:

- 1) лагранжевы отображения $\varphi = f|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow D_\varepsilon$ и $\psi = f|_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow D_\varepsilon$ имеют мультиособенности соответственно типов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в нуле;
- 2) подмногообразия $\mathcal{B}_\varphi, \mathcal{C}_\psi \subseteq D_\varepsilon$ трансверсально пересекаются по нулю;
- 3) пересечение $X_\varphi \cap Y_\psi$ диффеоморфно $(X_\varphi \cap T_0 \mathcal{C}_\psi) \times (Y_\psi \cap T_0 \mathcal{B}_\varphi)$ для любых $X, Y \in \mathbb{S}^+$, где $T_0 \mathcal{B}_\varphi, T_0 \mathcal{C}_\psi \subseteq \mathbb{R}^n$ – касательные пространства к $\mathcal{B}_\varphi$ и $\mathcal{C}_\psi$ в нуле.

Теорема следует теперь из того, что

$$\bigcup_{(X, Y) \in \mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^+ : XY = \mathcal{A}} (X_\varphi \cap Y_\psi) = \mathcal{A}_f \cap D_\varepsilon.$$

Индексы примыкания лагранжевых мультиособенностей удовлетворяют также следующим соотношениям.

ТЕОРЕМА 5.2. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$ имеем:

- 1) $\sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(\mathcal{B}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \\ (-1)^{\text{codim } \mathcal{A}}, & \text{если } \mathcal{A} = \mathcal{B}; \end{cases}$
- 2) $\sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} J_X(\mathcal{A}) = 1;$
- 3) $\sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} \#(X) J_X(\mathcal{A}) = \#(\mathcal{A}).$

Теорема 5.2 следует из аддитивности эйлеровой характеристики и общих свойств стратификаций, удовлетворяющих условиям Уитни (см. [7]). Доказательство формул 1) и 2) дословно повторяет вывод аналогичных соотношений между индексами примыканий лежандровых мультиособенностей (см. [8, предложения 3.1–3.3]). Доказательство формулы 3) имеет некоторые отличия (в лежандровом случае в правой части соотношения стоит знак минус). Поэтому мы приведем здесь подробное доказательство.

Сначала напомним формулу для вычисления эйлеровой характеристики стратифицированного многообразия. Пусть Σ – компактное подмножество гладкого многообразия. Предположим, что это множество допускает конечную C^∞ -стратификацию $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$, удовлетворяющую первому и второму условиям Уитни. Тогда определены эйлеровы характеристики $\chi(\Sigma)$ и $\chi(\Sigma_i)$ множеств Σ и Σ_i , $i = 1, \dots, k$, соответственно, причем

$$\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim \Sigma_i} \chi(\Sigma_i). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ 3) ТЕОРЕМЫ 5.2. Пусть $\text{codim } \mathcal{A} = n \geq 1$ (случай $n = 0$ очевиден). Выберем устойчивое лагранжево отображение

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с мультиособенностью типа $\mathcal{A}$ в нуле пространства-образа. Рассмотрим $(n-1)$ -мерную сферу $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Если ε достаточно мало, то подмножество $f^{-1}(S_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ вложено диффеоморфно объединению $\#(\mathcal{A})$ попарно непересекающихся гладких $(n-1)$ -мерных сфер. Эйлерова характеристика этого объединения имеет вид

$$\chi(f^{-1}(S_\varepsilon)) = \#(\mathcal{A})(1 - (-1)^n).$$

С другой стороны,

$$\chi(f^{-1}(S_\varepsilon)) = \sum_{X \in \mathbb{S}^+ \setminus \{\mathcal{A}\}} (-1)^{\dim(f^{-1}(S_\varepsilon \cap X_f))} \chi(f^{-1}(S_\varepsilon \cap X_f))$$

по формуле (5.1), где $\dim(f^{-1}(S_\varepsilon \cap X_f)) = n - 1 - \text{codim } X$ и

$$\chi(f^{-1}(S_\varepsilon \cap X_f)) = \#(X)J_X(\mathcal{A}).$$

Отсюда и следует формула 3) теоремы.

Формулы из теорем 5.1, 5.2 выражают свойства одного естественного гомоморфизма, связанного с индексами примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с простыми особенностями.

А именно, рассмотрим полугрупповую алгебру $\mathbb{Z}[\mathbb{S}^+]$ полугруппы $\mathbb{S}^+$. Это алгебра свободных многочленов с целыми коэффициентами, образующие которой соответствуют всевозможным типам моноособенностей. Типы мультиособенностей, т. е. элементы полугруппы $\mathbb{S}^+$, это мономы в данной алгебре многочленов.

Определим аддитивный гомоморфизм J алгебры $\mathbb{Z}[\mathbb{S}^+]$ в себя, заданный на мономах формулой

$$J(\mathcal{A}) = \sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} J_X(\mathcal{A})X.$$

Выражение $J(\mathcal{A})$ можно рассматривать как производящий многочлен для индексов примыканий $J_X(\mathcal{A})$ мультиособенности типа $\mathcal{A}$.

Из теорем 5.1, 5.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Гомоморфизм J является кольцевым и обратен самому себе, т. е.

$$J(\mathcal{A}\mathcal{B}) = J(\mathcal{A})J(\mathcal{B}), \quad J(J(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$$

для всех $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{Z}[\mathbb{S}^+]$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Кольцевой гомоморфизм $\ell: \mathbb{Z}[\mathbb{S}^+] \rightarrow \mathbb{Z}$, переводящий всякий моном в 1, и аддитивный гомоморфизм $\#: \mathbb{Z}[\mathbb{S}^+] \rightarrow \mathbb{Z}$, переводящий всякий моном в количество сомножителей в этом мономе, являются инвариантами гомоморфизма J , т. е.

$$\ell(J(\mathcal{A})) = \ell(\mathcal{A}), \quad \#(J(\mathcal{A})) = \#(\mathcal{A})$$

для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}[\mathbb{S}^+]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Свойства гомоморфизма J , указанные в следствии 5.3, а также инвариантность гомоморфизма ℓ относительно J справедливы для индексов примыканий мультиособенностей в образе любого гладкого отображения общего положения независимо от отношения эквивалентности, классифицирующей его особенности. Необходимо лишь, чтобы разбиение пространства-образа отображения на связные компоненты многообразий мультиособенностей было C^∞ -стратификацией, удовлетворяющей условиям Уитни.

Гомоморфизм $\#$ инвариантен относительно J , если разность с размерностей пространств образа и прообраза отображения является четным числом. В общем случае $\#(J(\mathcal{A})) = (-1)^c \#(\mathcal{A})$.

§ 6. Множества $S^\delta(\mathcal{A})$ и $S_\pm^\delta(\mathcal{A})$

В данном параграфе определены множества, комбинаторные свойства которых используются в дальнейшем при описании топологии примыканий лагранжевых моноособенностей типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$.

Зафиксируем число $\delta = \pm 1$ и элемент

$$\mathcal{A} = A_1^k A_{\mu_1}^{m_1} \cdots A_{\mu_p}^{m_p} (A_{\mu_1}^+)^{m_1^+} \cdots (A_{\mu_q}^+)^{m_q^+} (A_{\mu_1}^-)^{m_1^-} \cdots (A_{\mu_r}^-)^{m_r^-} \in \mathbb{S}^+, \quad (6.1)$$

где $\mu_1, \dots, \mu_p$ – попарно различные целые положительные четные числа, а каждый из двух наборов $\mu_1^+, \dots, \mu_q^+$ и $\mu_1^-, \dots, \mu_r^-$ состоит из попарно различных целых положительных нечетных чисел, больших 1.

Пусть

$$n = \#(\mathcal{A}), \quad d = k + m_1^+ + \cdots + m_q^+ + m_1^- + \cdots + m_r^-.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Через $S^\delta(\mathcal{A})$ обозначается множество целочисленных последовательностей длины $n + 1$, в каждой из которых:

1) $k + 1$ членов равно 1 по абсолютной величине; m_i членов равно $2i$, $i = 1, \dots, p$; m_i^+ членов равно $2i + 1$, $i = 1, \dots, q$; m_i^- членов равно $-(2i + 1)$, $i = 1, \dots, r$;

2) положительные и отрицательные нечетные члены чередуются; последний член равен $-\delta$.

ЛЕММА 6.2. Среди первых n членов любой последовательности из множества $S^\delta(\mathcal{A})$ имеется ³

$$k_+^\delta = \left\lfloor \frac{2d + \delta + 1}{4} \right\rfloor - m_1^+ - \cdots - m_q^+$$

членов, равных 1, и

$$k_-^\delta = \left\lfloor \frac{2d - \delta + 1}{4} \right\rfloor - m_1^- - \cdots - m_r^-$$

членов, равных -1 .

³Здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x .

Данное утверждение следует из того, что

$$m_1^+ + \dots + m_q^+ + k_+^\delta = m_1^- + \dots + m_r^- + k_-^\delta,$$

если d четное, и

$$m_1^+ + \dots + m_q^+ + k_+^\delta = m_1^- + \dots + m_r^- + k_-^\delta + \delta,$$

если d нечетное.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Множество $S^\delta(\mathcal{A})$ не пусто тогда и только тогда, когда

$$0 \leq k_+^\delta \leq k.$$

Пусть

$$\langle k_1, \dots, k_l \rangle = \frac{(k_1 + \dots + k_l)!}{k_1! \dots k_l!}$$

для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_l$ и $\langle k_1, \dots, k_l \rangle = 0$ в остальных случаях.

ЛЕММА 6.4. Множество $S^\delta(\mathcal{A})$ состоит из

$$N^\delta(\mathcal{A}) = \langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle \langle m_1, \dots, m_p, d \rangle$$

последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Две последовательности из $S^\delta(\mathcal{A})$ отличаются друг от друга перестановкой σ первых n членов. Число перестановок σ , меняющих лишь положительные нечетные члены последовательности, равно

$$\langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle.$$

Число перестановок σ , меняющих лишь отрицательные члены, равно

$$\langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle.$$

Положительные нечетные члены последовательности нельзя переставлять с ее отрицательными членами. Четные члены последовательности могут располагаться между нечетными произвольным образом. Число таких расположений равно

$$\langle m_1, \dots, m_p, d \rangle.$$

Следовательно, общее число возможных перестановок σ равно произведению указанных трех чисел. Лемма доказана.

Каждая последовательность $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \in S^\delta(\mathcal{A})$ определяет $n + 1$ последовательностей вида

$$\{a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots, a_{n+1}\},$$

где $i = 0, \dots, n$. Рассмотрим множество $S_{\text{ext}}^\delta(\mathcal{A})$ всех последовательностей, полученных таким способом из последовательностей множества $S^\delta(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Множество $S_{\text{ext}}^\delta(\mathcal{A})$ содержит два подмножества:

- 1) $S_+^\delta(\mathcal{A})$ – множество последовательностей, у которых первый нечетный член после 0 отрицателен;
- 2) $S_-^\delta(\mathcal{A})$ – множество последовательностей, у которых первый нечетный член после 0 положителен.

Очевидно, что $S_+^\delta(\mathcal{A}) \cap S_-^\delta(\mathcal{A}) = \emptyset$ и $S_+^\delta(\mathcal{A}) \cup S_-^\delta(\mathcal{A}) = S_{\text{ext}}^\delta(\mathcal{A})$.

ЛЕММА 6.6. Множество $S_+^\delta(\mathcal{A})$ состоит из

$$N_+^\delta(\mathcal{A}) = \left\lfloor \frac{2d + \delta + 3}{4} \right\rfloor \frac{n+1}{d+1} N^\delta(\mathcal{A})$$

последовательностей. Множество $S_-^\delta(\mathcal{A})$ состоит из

$$N_-^\delta(\mathcal{A}) = \left\lfloor \frac{2d - \delta + 3}{4} \right\rfloor \frac{n+1}{d+1} N^\delta(\mathcal{A})$$

последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число перестановок нечетных членов последовательности $a \in S_\pm^\delta(\mathcal{A})$, сохраняющих ее последний член, равно

$$\langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle.$$

Поскольку знаки этих членов чередуются, число возможных расположений нуля между ними равно $[(2d + \delta + 3)/4]$, если $a \in S_+^\delta(\mathcal{A})$, и $[(2d - \delta + 3)/4]$, если $a \in S_-^\delta(\mathcal{A})$.

Ненулевые четные члены последовательности a могут располагаться между остальными членами произвольным образом. Число таких расположений равно

$$\langle m_1, \dots, m_p, d+1 \rangle.$$

Следовательно, общее число перестановок членов последовательности a равно

$$\left\lfloor \frac{2d + \delta + 3}{4} \right\rfloor \langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle \langle m_1, \dots, m_p, d+1 \rangle,$$

если $a \in S_+^\delta(\mathcal{A})$, и равно

$$\left\lfloor \frac{2d - \delta + 3}{4} \right\rfloor \langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle \langle m_1, \dots, m_p, d+1 \rangle,$$

если $a \in S_-^\delta(\mathcal{A})$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Последовательность $\{a_1, \dots, a_{n+2}\} \in S_+^\delta(\mathcal{A})$ называется:

- 1) *элементарной*, если либо $a_1 = 0$, либо $a_{n+1} = 0$;
- 2) *сложной*, если существует $i = 2, \dots, n$ такое, что $a_{i-1} = 1$, $a_i = 0$, $a_{i+1} = -1$.

Если множество $S_+^\delta(\mathcal{A})$ содержит сложные последовательности, то $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 . Сложные последовательности не являются элементарными.

ЛЕММА 6.8. Множество $S_+^\delta(\mathcal{A})$ содержит

$$\left(1 + \frac{1 + (-1)^d}{2}\delta\right)N^\delta(\mathcal{A})$$

элементарных последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если d четное и $\delta > 0$, то каждая последовательность $a \in S^\delta(\mathcal{A})$ определяет две элементарные последовательности в множестве $S_+^\delta(\mathcal{A})$. А именно, 0 можно поставить как перед первым, так и перед последним членом последовательности a . Если d нечетное, то a определяет одну элементарную последовательность: 0 можно поставить перед первым членом, если $\delta < 0$, и перед последним членом, если $\delta > 0$. Если d четное и $\delta < 0$, то 0 нельзя поставить ни перед первым, ни перед последним членом последовательности a . Лемма доказана.

ЛЕММА 6.9. Если $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 , то $S_+^\delta(\mathcal{A})$ содержит $N_-^\delta\left(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}\right)$ сложных последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 , то каждой сложной последовательности

$$\{a_1, \dots, a_{i-2}, 1, 0, -1, a_{i+2}, \dots, a_{n+2}\} \in S_+^\delta(\mathcal{A})$$

соответствует последовательность

$$\{a_1, \dots, a_{i-2}, 0, a_{i+2}, \dots, a_{n+2}\} \in S_-^\delta\left(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}\right).$$

Это соответствие взаимно однозначное. Лемма доказана.

Легко проверяется также следующее утверждение.

ЛЕММА 6.10. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ имеет вид (6.1) и

$$\mathcal{A}^- = A_1^k A_{\mu_1}^{m_1} \dots A_{\mu_p}^{m_p} (A_{\mu_1}^-)^{m_1^+} \dots (A_{\mu_q}^-)^{m_q^+} (A_{\mu_1}^+)^{m_1^-} \dots (A_{\mu_r}^+)^{m_r^-}. \quad (6.2)$$

Тогда

$$N^{-\delta}(\mathcal{A}) = N^\delta(\mathcal{A}^-), \quad N_+^{-\delta}(\mathcal{A}) = N_-^\delta(\mathcal{A}^-).$$

Если d четное, то $N^{-\delta}(\mathcal{A}) = N^\delta(\mathcal{A})$. Если d нечетное, то $N_-^\delta(\mathcal{A}) = N_+^\delta(\mathcal{A})$.

§ 7. Индексы примыканий лагранжевых моноособенностей типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$

Моноособенности типов $A_\mu^\pm$ в образе устойчивого лагранжева отображения могут примыкать лишь к мультиособенностям типов $A_{\mu_1}^\pm \dots A_{\mu_p}^\pm$. Лагранжевы моноособенности типов $D_\mu^\pm$ могут примыкать только к мультиособенностям типов $A_{\mu_1}^\pm \dots A_{\mu_p}^\pm$ и $D_\nu^\pm A_{\mu_1}^\pm \dots A_{\mu_p}^\pm$ (см. [1]).

Зафиксируем число $\delta = \pm 1$. В дальнейшем A_μ^δ обозначает A_μ^+ , если $\delta = +1$, и A_μ^- , если $\delta = -1$. Аналогичное соглашение действует и относительно D_μ^δ .

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\mu \geq 1$ целое и элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда:

1) моноособенность типа A_μ^δ в образе устойчивого лагранжеева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - 1$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}$ и множество $S^\delta(\mathcal{A})$ не пусто;

2) примыкание моноособенности типа A_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является простым; индекс $J_{\mathcal{A}}(A_\mu^\delta)$ равен числу элементов множества $S^\delta(\mathcal{A})$.

Теорема 7.1 доказана в § 9. Из этой теоремы и лемм 6.4, 6.10 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть $\mu \geq 1$ целое и элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда:

1) моноособенность типа A_μ^δ в образе устойчивого лагранжеева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если

$$\text{codim } \mathcal{A} < \mu - 1, \quad \deg \mathcal{A} \leq \mu, \quad \deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}, \quad N^\delta(\mathcal{A}) \neq 0;$$

$$2) J_{\mathcal{A}}(A_\mu^\delta) = N^\delta(\mathcal{A});$$

$$3) J_{\mathcal{A}}(A_\mu^-) = J_{\mathcal{A}^-}(A_\mu^+), \text{ где } \mathcal{A}^- \text{ определяется формулой (6.2).}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Следствие 7.2 является вариацией аналогичных утверждений об индексах примыканий лежандровых мультиособенностей коранга 1 (см. теорему 2 в [9] и ее доказательство в [8], а также [10, теорема 2.4] для координатированных волновых фронтов). В частности, для любого $X = \prod_{i=1}^l A_{\mu_i}^\pm \in \mathbb{S}^+$ такого, что $\mu_i > 1$ при всех i , сумма чисел $J_Y(A_\mu^+)$ по всем $Y \in \mathbb{S}^+$, отличающимся от X лишь знаками в верхних индексах типов мультиособенностей и количеством образующих A_1 , равна индексу примыкания особенности типа $A_{\mu-1}$ к особенности типа $\prod_{i=1}^l A_{\mu_i-1}$ устойчивого (некоординатированного) волнового фронта.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Индексы примыканий моноособенности типа A_5^+ в образе устойчивого лагранжеева отображения указаны в следующей таблице:

X	A_1	A_1^3	A_1^5	$A_2 A_1$	$A_2 A_1^3$	A_3^+	$A_3^+ A_1^2$	$A_3^- A_1^2$	$A_2^2 A_1$	$A_4 A_1$	$A_3^+ A_2$
$J_X(A_5^+)$	1	1	1	2	4	1	2	1	3	2	2

Таблица индексов примыканий лагранжеевой моноособенности типа A_5^- получается из таблицы индексов $J_X(A_5^+)$ одновременным изменением всех знаков в верхних индексах типов мультиособенностей на противоположные.

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Индексы примыканий моноособенности типа A_6 в образе устойчивого лагранжеева отображения указаны в следующей таблице:

X	1	A_1^2	A_1^4	A_1^6	A_2	$A_2 A_1^2$	$A_2 A_1^4$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	$A_3^+ A_1^3$	$A_3^- A_1^3$	A_2^2
$J_X(A_6)$	1	1	1	1	1	3	5	1	1	2	2	1
	$A_2^2 A_1^2$	A_4	$A_4 A_1^2$	$A_3^+ A_2 A_1$	$A_3^- A_2 A_1$	A_2^3	$A_5^+ A_1$	$A_5^- A_1$	$A_4 A_2$	$A_3^+ A_3^-$		
	6	1	3	3	3	1	1	1	2	1		

Следующие утверждения являются принципиально новыми.

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть $\mu \geq 4$ целое и элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда:

1) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжеева отображения примыкает к мультиособенности типа $AD_\nu^\pm$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - \nu$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu - \nu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu - \nu \pmod{2}$ и $S_\pm^\delta(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ при четном ν , $S^\delta(\mathcal{A}A_\nu^\pm) \neq \emptyset$ при нечетном ν ;

2) примыкание лагранжеевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $AD_\nu^\pm$ является простым; индекс $J_{AD_\nu^\pm}(D_\mu^\delta)$ равен числу элементов множества $S_\pm^\delta(\mathcal{A})$, если ν четное, и числу элементов несвязного объединения $\#(A_\nu^\pm | \mathcal{A}) + 1$ копий множества $S^\delta(\mathcal{A}A_\nu^\pm)$, если ν нечетное.

Теорема 7.6 доказана в § 11. Из этой теоремы и лемм 6.6, 6.10 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Пусть $\mu \geq 4$ целое и элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда:

1) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжеева отображения примыкает к мультиособенности типа $AD_\nu^\pm$, если и только если

$$\text{codim } \mathcal{A} < \mu - \nu, \quad \deg \mathcal{A} \leq \mu - \nu, \quad \deg \mathcal{A} \equiv \mu - \nu \pmod{2}$$

и $N_\pm^\delta(\mathcal{A}) \neq 0$ при четном ν , $N^\delta(\mathcal{A}A_\nu^\pm) \neq 0$ при нечетном ν ;

$$2) \quad J_{AD_\nu^\pm}(D_\mu^\delta) = \begin{cases} N_\pm^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \nu \text{ четное,} \\ (\#(A_\nu^\pm | \mathcal{A}) + 1)N^\delta(\mathcal{A}A_\nu^\pm), & \text{если } \nu \text{ нечетное;} \end{cases}$$

3) $J_{AD_\nu^\pm}(D_\mu^-) = J_{\mathcal{A}^- D_\nu^\mp}(D_\mu^+)$, где $\mathcal{A}^-$ определяется формулой (6.2);

4) если μ нечетное, то $J_{AD_\nu^+}(D_\mu^\delta) = J_{AD_\nu^-}(D_\mu^\delta)$ при четном ν и $J_{AD_\nu^\pm}(D_\mu^+) = J_{AD_\nu^\pm}(D_\mu^-)$ при нечетном ν .

ТЕОРЕМА 7.8. Пусть $\mu \geq 4$ целое и элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда:

1) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжеева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - 1$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}$ и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

(i) $S_+^\delta(\mathcal{A})$ содержит неэлементарные последовательности, если $\deg \mathcal{A} = \mu$, и $S_+^\delta(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$;

(ii) $S^\delta(A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^-}) \neq \emptyset$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^- ;

(iii) $S^\delta(A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+}) \neq \emptyset$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^+ ;

2) если $\deg \mathcal{A} = \mu$, то примыкание лагранжеевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является простым; индекс $J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$ равен сумме следующих четырех слагаемых:

(a) числа сложных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$;

(b) удвоенного числа неэлементарных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$, не являющихся сложными;

(c) числа элементов несвязного объединения $\#(A_3^+ | \mathcal{A}) + 1$ копий множества $S^\delta(A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^-})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^- ;

(d) числа элементов несвязного объединения $\#(A_3^-|\mathcal{A}) + 1$ копий множества $S^\delta(A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^+ ;

3) если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, то примыкание лагранжевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является сложным лишь в случае, когда множество $S_+^\delta(\mathcal{A})$ содержит сложные последовательности; каждая нестягиваемая связная компонента многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$ гомотопически эквивалентна окружности; число нестягиваемых компонент равно числу сложных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$; индекс $J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$ равен сумме следующих трех слагаемых:

(a) числа несложных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$;

(b) числа элементов несвязного объединения $\#(A_3^+|\mathcal{A}) + 1$ копий множества $S^\delta(A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^-})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^- ;

(c) числа элементов несвязного объединения $\#(A_3^-|\mathcal{A}) + 1$ копий множества $S^\delta(A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^+ .

Теорема 7.8 доказана в § 13. Из этой теоремы и лемм 6.6–6.10 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.9. Пусть $\mu \geq 4$ целое, элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1),

$$N_0^\delta(\mathcal{A}) = \left(1 + \frac{1 + (-1)^{\deg \mathcal{A}}}{2} \delta\right) N^\delta(\mathcal{A}), \quad N_*^\delta(\mathcal{A}) = N_{*,+}^\delta(\mathcal{A}) + N_{*,-}^\delta(\mathcal{A}),$$

где

$$N_{*,\pm}^\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_3^\pm, \\ (\#(A_3^\mp|\mathcal{A}) + 1) N^\delta\left(A_3^\mp \frac{\mathcal{A}}{A_3^\pm}\right), & \text{если } \mathcal{A} \text{ делится на } A_3^\pm. \end{cases}$$

Тогда:

1) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если

$$\operatorname{codim} \mathcal{A} < \mu - 1, \quad \deg \mathcal{A} \leq \mu, \quad \deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}$$

и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$N_+^\delta(\mathcal{A}) \neq \begin{cases} N_0^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \deg \mathcal{A} = \mu, \\ 0, & \text{если } \deg \mathcal{A} \leq \mu - 2, \end{cases} \quad N_*^\delta(\mathcal{A}) \neq 0;$$

2) если $\deg \mathcal{A} = \mu$, то

$$J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta) = \begin{cases} 2(N_+^\delta(\mathcal{A}) - N_0^\delta(\mathcal{A})) + N_*^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_1^2, \\ 2(N_+^\delta(\mathcal{A}) - N_0^\delta(\mathcal{A})) + N_*^\delta(\mathcal{A}) - N_-^\delta\left(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}\right), & \text{если } \mathcal{A} \text{ делится на } A_1^2; \end{cases}$$

3) если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, то

$$J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta) = \begin{cases} N_+^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_1^2, \\ N_+^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A}) - N_-^\delta\left(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}\right), & \text{если } \mathcal{A} \text{ делится на } A_1^2; \end{cases}$$

4) если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 и $N_-^\delta(\frac{A}{A_1^2}) \neq 0$, то число связных компонент многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$, гомотопически эквивалентных окружности, равно $N_-^\delta(\frac{A}{A_1^2})$;

5) если μ нечетное, то многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^-)$ гомотопически эквивалентно $\Xi_{\mathcal{A}^-}(D_\mu^+)$, где $\mathcal{A}^-$ определяется формулой (6.2).

СЛЕДСТВИЕ 7.10. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (6.1). Тогда для любого целого $l \geq 0$ справедливы следующие равенства:

- 1) $J_{\mathcal{A}}(A_\mu^\pm) = J_{\mathcal{A}}(A_{\mu+2l}^\pm)$ для всех целых $\mu \geq \max\{\text{codim } \mathcal{A} + 2, \deg \mathcal{A}\}$;
- 2) $J_{AD_\nu^+}(D_\mu^\pm) = J_{AD_\nu^+}(D_{\mu+2l}^\pm)$, $J_{AD_\nu^-}(D_\mu^\pm) = J_{AD_\nu^-}(D_{\mu+2l}^\pm)$ для всех целых $\nu \geq 4$ и $\mu \geq \nu + \max\{\text{codim } \mathcal{A} + 1, \deg \mathcal{A}\}$;
- 3) многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\pm)$ гомотопически эквивалентно $\Xi_{\mathcal{A}}(D_{\mu+2l}^\pm)$ для всех целых $\mu \geq \max\{4, \deg \mathcal{A} + 2\}$.

СЛЕДСТВИЕ 7.11. Индексы примыканий моноособенности типа D_5^+ в образе устойчивого лагранжеева отображения указаны в следующей таблице:

X	A_1	A_1^3	A_1^5	$A_2 A_1$	$A_2 A_1^3$	$A_2^2 A_1$	A_3^+	A_3^-	$A_3^+ A_1^2$	$A_3^- A_1^2$	$A_3^+ A_2$	$A_3^- A_2$
$J_X(D_5^+)$	1	1	2	3	9	6	1	1	4	4	2	2

$A_4 A_1$	$D_4^+ A_1$	$D_4^- A_1$
2	1	1

Таблица индексов примыканий лагранжеевой моноособенности типа D_5^- совпадает с таблицей индексов $J_X(D_5^+)$.

Все примыкания лагранжеевых моноособенностей типов $D_5^\pm$, кроме примыканий к мультиособенности типа A_1^3 , являются простыми. Примыкания к мультиособенности типа A_1^3 являются сложными. А именно, каждое из многообразий $\Xi_{A_1^3}(D_5^+)$, $\Xi_{A_1^3}(D_5^-)$ имеет две связные компоненты, одна из которых стягиваема, а другая гомотопически эквивалентна окружности.

СЛЕДСТВИЕ 7.12. Индексы примыканий моноособенности типа D_6^+ в образе устойчивого лагранжеева отображения указаны в следующей таблице:

X	1	A_1^2	A_1^4	A_1^6	A_2	$A_2 A_1^2$	$A_2 A_1^4$	A_2^2	$A_2^2 A_1^2$	A_3^2	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$
$J_X(D_6^+)$	1	2	2	2	2	8	12	3	16	4	3	3

$A_3^+ A_1^3$	$A_3^- A_1^3$	$A_3^+ A_2 A_1$	$A_3^- A_2 A_1$	$(A_3^+)^2$	$(A_3^-)^2$	A_4	$A_4 A_1^2$
5	5	7	7	1	1	2	4

$A_4 A_2$	D_4^+	$D_4^+ A_1^2$	$D_4^- A_1^2$	$D_4^+ A_2$	$D_5^+ A_1$	$D_5^- A_1$
4	1	2	1	2	1	1

Все примыкания лагранжеевой моноособенности типа D_6^+ , кроме примыкания к мультиособенности типа A_1^4 , являются простыми. Примыкание к мультиособенности типа A_1^4 является сложным. А именно, многообразие $\Xi_{A_1^4}(D_6^+)$ имеет три связные компоненты, две из которых стягиваемы, а одна гомотопически эквивалентна окружности.

СЛЕДСТВИЕ 7.13. Индексы примыканий моноособности типа D_6^- в образе устойчивого лагранжева отображения указаны в следующей таблице:

X	A_1^2	A_1^4	A_1^6	$A_2 A_1^2$	$A_2 A_1^4$	$A_2^2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	$A_3^+ A_1^3$	$A_3^- A_1^3$	$A_3^+ A_2 A_1$
$J_X(D_6^-)$	0	0	3	2	16	17	2	2	8	8	11
	$A_3^- A_2 A_1$	$(A_3^+)^2$	$A_3^+ A_3^-$	$(A_3^-)^2$	$A_4 A_1^2$	$A_5^+ A_1$	$A_5^- A_1$	D_4^-	$D_4^+ A_1^2$		
	11	1	2	1	6	2	2	1	1		
	$D_4^- A_1^2$	$D_4^- A_2$	$D_5^+ A_1$	$D_5^- A_1$							
	2	2	1	1							

Все примыкания лагранжевой моноособности типа D_6^- , кроме примыканий к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$, являются простыми. Примыкания к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$ являются сложными. А именно, многообразие $\Xi_{A_1^2}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно окружности. Многообразие $\Xi_{A_1^4}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению двух окружностей. Многообразие $\Xi_{A_2 A_1^2}(D_6^-)$ имеет четыре связанные компоненты, две из которых стягиваемы, а две гомотопически эквивалентны окружности.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.14. Автору неизвестны пока аналоги результатов, приведенных в данном параграфе для лагранжевых особенностей типов $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . Это предмет будущих исследований.

§ 8. Вещественные многочлены одной переменной

Доказательство теорем 7.1, 7.6 сводится к изучению топологии некоторых подмножеств в пространстве вещественных многочленов от одной переменной. Мы определяем здесь эти множества и описываем их топологические свойства.

Пусть $\mu \geq 1$ целое, $\delta = \pm 1$ и $\mathbb{R}^\mu = \{(b_1, \dots, b_\mu)\}$ – пространство многочленов вида

$$P(t) = \delta t^\mu + b_\mu t^{\mu-1} + \dots + b_2 t + b_1$$

от одной вещественной переменной t . Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ вида (6.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Через $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ обозначается подмножество в $\mathbb{R}^\mu$, состоящее из многочленов P таких, что:

- 1) P имеет k простых вещественных корней;
- 2) для каждого $i = 1, \dots, p$ многочлен P имеет m_i геометрически различных вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i ;
- 3) для каждого $i = 1, \dots, q$ многочлен P имеет m_i^+ геометрически различных вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i^+ , причем производная от P порядка μ_i^+ во всех этих точках положительна;
- 4) для каждого $i = 1, \dots, r$ многочлен P имеет m_i^- геометрически различных вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i^- , причем производная от P порядка μ_i^- во всех этих точках отрицательна;
- 5) число n всех геометрически различных вещественных корней многочлена P равно $\#(\mathcal{A})$.

Если множество $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ не пусто, то оно является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^\mu$. При этом

$$\deg \mathcal{A} \leq \mu, \quad \deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}.$$

Действительно, каждый многочлен $P \in \Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ единственным образом представляется в виде

$$P(t) = \delta \prod_{i=1}^n (t - \tau_i)^{\alpha_i} Q(t),$$

где $\tau_1 < \dots < \tau_n$ – все его вещественные корни, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – кратности этих корней, а $Q(t)$ – всюду положительный многочлен степени $\mu - \deg \mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1. Поэтому упорядоченный набор

$$(\tau_1, \dots, \tau_n, Q(0), Q'(0), \dots, Q^{(\mu - \deg \mathcal{A} - 1)}(0)) \in \mathbb{R}^{\mu - \text{codim } \mathcal{A}} \quad (8.1)$$

определяет систему гладких локальных координат на $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Многообразие $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ содержит следующие подмножества:

- 1) $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$ – множество многочленов, у которых $b_\mu = 0$;
- 2) $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A})$ – множество многочленов, у которых $b_1 = \dots = b_{\nu-1} = 0$, $\pm b_\nu > 0$, где $\nu > 1$ – нечетное целое число;
- 3) $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ – множество многочленов, у которых $b_1 > 0$;
- 4) $\Pi_{\mu,-}^\delta(\mathcal{A})$ – множество многочленов, у которых $b_1 < 0$;
- 5) $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ – множество многочленов, у которых $b_1 > 0$, $b_2 = 0$.

Множества $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ и $\Pi_{\mu,-}^\delta(\mathcal{A})$ являются открытыми подмножествами в $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$. Множества $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$, $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A})$ и $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ – гладкие гиперповерхности в $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ (если не пусты).

В координатах (8.1) гиперповерхность $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$ задается уравнением

$$Q^{(\mu - \deg \mathcal{A} - 1)}(0) = (\mu - \deg \mathcal{A} - 1)! \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_i.$$

Гиперповерхность $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A})$ определяется локально уравнением $\tau_j = 0$, где $\alpha_j = \nu$ и

$$\pm \delta \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (\tau_j - \tau_i)^{\alpha_i} > 0.$$

Гиперповерхность $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ задается условиями

$$Q'(0) = Q(0) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\tau_i}, \quad \delta Q(0) \prod_{i=1}^n (-\tau_i)^{\alpha_i} > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Через Θ , Θ_+ , Θ_- обозначаются следующие отображения:

$$\begin{aligned} \Theta: \Pi_\mu^\delta(\mathcal{A}) &\rightarrow S^\delta(\mathcal{A}), & \Theta: P &\mapsto \{a_1, \dots, a_n, -\delta\}, \\ \Theta_\pm: \Pi_{\mu,\pm}^\delta(\mathcal{A}) &\rightarrow S_\pm^\delta(\mathcal{A}), & \Theta_\pm: P &\mapsto \{a_1, \dots, a_l, 0, a_{l+1}, \dots, a_n, -\delta\}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i = 1 \text{ и } P'(\tau_i) > 0, \\ -1, & \text{если } \alpha_i = 1 \text{ и } P'(\tau_i) < 0, \\ 2j + 1, & \text{если } \alpha_i = \mu_j^+ \text{ и } P^{(\alpha_i)}(\tau_i) > 0, \\ -(2j + 1), & \text{если } \alpha_i = \mu_j^- \text{ и } P^{(\alpha_i)}(\tau_i) < 0, \\ 2j, & \text{если } \alpha_i = \mu_j, \end{cases}$$

а $l \in \{0, \dots, n\}$ такое, что $\tau_l < 0 < \tau_{l+1}$.

Каждое из отображений Θ , Θ_+ , Θ_- сюръективно и обладает следующим свойством: прообразы разных точек принадлежат различным связным компонентам многообразия-прообраза.

ЛЕММА 8.4. 1) Все связные компоненты каждого из многообразий $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$, $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$, $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm|\mathcal{A})$, $\Pi_{\mu,\pm}^\delta(\mathcal{A})$, $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ стягиваемы.

2) Многообразия $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ и $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$ имеют одинаковое количество связных компонент, равное числу элементов множества $S^\delta(\mathcal{A})$.

3) Число связных компонент многообразия $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm|\mathcal{A})$ равно числу элементов несвязного объединения $\#(A_\nu^\pm|\mathcal{A})$ копий множества $S^\delta(\mathcal{A})$.

4) Число связных компонент многообразия $\Pi_{\mu,\pm}^\delta(\mathcal{A})$ равно числу элементов множества $S_\pm^\delta(\mathcal{A})$.

5) Число связных компонент многообразия $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ равно числу элементов множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$, если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, и числу неэлементарных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$, если $\deg \mathcal{A} = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $a \in S^\delta(\mathcal{A})$ и рассмотрим любые два многочлена

$$P_j(t) = \delta \prod_{i=1}^n (t - \tau_{i,j})^{\alpha_i} Q_j(t) \in \Pi_\mu^\delta(\mathcal{A}), \quad j = 0, 1,$$

такие, что $\Theta(P_0) = \Theta(P_1) = a$. Многочлен P_0 соединяется с P_1 кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\mu$,

$$\gamma: s \mapsto \delta \prod_{i=1}^n (t - \tau_{i,0} - s(\tau_{i,1} - \tau_{i,0}))^{\alpha_i} (Q_0(t) + s(Q_1(t) - Q_0(t))).$$

Поскольку множество всюду положительных многочленов выпукло, кривая γ лежит в $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ и состоит из многочленов P таких, что $\Theta(P) = a$. Следовательно, $\Theta^{-1}(a)$ – связная компонента многообразия $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$.

Набор (8.1) определяет систему гладких глобальных координат на компоненте $\Theta^{-1}(a)$. Кривая γ в этих координатах является отрезком. Поэтому компонента $\Theta^{-1}(a)$ стягиваема по себе в точку P_0 .

1) Если многочлены P_0 и P_1 лежат в гиперплоскости $b_\mu = 0$ пространства многочленов $\mathbb{R}^\mu$, то и вся кривая γ лежит в этой гиперплоскости. Если $P(t) \in \Theta^{-1}(a)$, то $P(t - \frac{P^{(\mu-1)}(0)}{\delta \mu!}) \in \Theta^{-1}(a) \cap \{b_\mu = 0\}$. Следовательно, пересечение каждой связной компоненты многообразия $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ с гиперплоскостью $b_\mu = 0$ не пусто и является стягиваемой связной компонентой многообразия $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$.

2) Если j -й вещественный корень многочленов P_0, P_1 равен нулю, то j -й вещественный корень каждого многочлена кривой γ также равен нулю. Следовательно, каждая компонента многообразия $\Pi_\mu^\delta(\mathcal{A})$ содержит ровно $\#(A_\nu^+|\mathcal{A})$ связных компонент многообразия $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^+|\mathcal{A})$ и $\#(A_\nu^-|\mathcal{A})$ связных компонент многообразия $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^-|\mathcal{A})$. Все они, очевидно, стягиваемы.

3) Если $P_0, P_1 \in \Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ и $\Theta_+(P_0) = \Theta_+(P_1) = a_+ \in S_+^\delta(\mathcal{A})$, то вся кривая γ лежит в $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ и состоит из многочленов P таких, что $\Theta_+(P) = a_+$. Следовательно, $\Theta_+^{-1}(a_+)$ – стягиваемая связная компонента многообразия $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$. Аналогичное рассуждение справедливо и для многообразия $\Pi_{\mu,-}^\delta(\mathcal{A})$.

4) Рассмотрим диффеоморфизм

$$\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A}) \rightarrow \Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A}), \quad P(t) \mapsto \frac{\delta t^\mu}{b_1} P\left(\frac{1}{t}\right).$$

Он отображает многообразие $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ в пересечение $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A}) \cap \{b_\mu = 0\}$. Пересечение связной компоненты многообразия $\Pi_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$ с гиперплоскостью $b_\mu = 0$ пусто тогда и только тогда, когда эта компонента состоит из многочленов, у которых все корни вещественные и имеют одинаковый знак. Если пересечение не пусто, то оно связно и стягиваемо, как и в случае многообразия $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$.

Лемма доказана.

§ 9. Доказательство теоремы 7.1

Пусть $\mu \geq 1$ целое, $\delta = \pm 1$, $t \in \mathbb{R}$ и $(q_1, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$. Тогда особенность типа A_μ^δ устойчивого лагранжева отображения в $\mathbb{R}^{\mu-1}$ лагранжево эквивалентна особенности отображения

$$(t, q_2, \dots, q_{\mu-1}) \mapsto (q_1, q_2, \dots, q_{\mu-1}), \quad q_1 = -\frac{\partial S}{\partial t}(t, q_2, \dots, q_{\mu-1}), \quad (9.1)$$

в нуле, где $S(t, q_2, \dots, q_{\mu-1}) = \delta t^{\mu+1} + q_{\mu-1} t^{\mu-1} + \dots + q_2 t^2$.

Рассмотрим семейство многочленов

$$P(t, q_1, \dots, q_{\mu-1}) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, q_2, \dots, q_{\mu-1}) + q_1$$

от t , зависящих от параметров $q_1, \dots, q_{\mu-1}$.

ЛЕММА 9.1. *Лагранжево отображение (9.1) имеет лишь особенности типов $A_\nu^\pm$, где $1 \leq \nu \leq \mu$. А именно, оно имеет особенность типа $A_\nu^\pm$ в точке $(t, q_2, \dots, q_{\mu-1})$, если t – корень кратности ν многочлена P и*

$$\pm \frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu}(t, q_1, \dots, q_{\mu-1}) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производящее семейство особенности отображения (9.1) в нуле имеет вид

$$F(t, q_1, \dots, q_{\mu-1}) = S(t, q_2, \dots, q_{\mu-1}) + q_1 t.$$

При любых фиксированных значениях параметров $q_1, \dots, q_{\mu-1}$ семейство F определяет многочлен F_0 переменной t с конечнократными критическими точками. Особенность функции F_0 в критической точке t^* относительно R^+ -эквивалентности и особенность отображения (9.1) в точке $(t^*, q_2, \dots, q_{\mu-1})$ относительно лагранжевой эквивалентности имеют один и тот же тип (см. [5]).

Остается заметить, что многочлен F_0 имеет особенность типа $A_\nu^\pm$ в точке t^* , если t^* – корень кратности ν производной

$$\frac{dF_0}{dt} = P(t, q_1, \dots, q_{\mu-1}),$$

причем

$$\pm \frac{d^{\nu+1}F_0}{dt^{\nu+1}}(t^*) = \pm \frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu}(t_2^*, q_1, \dots, q_{\mu-1}) > 0.$$

Лемма доказана.

Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ вида (6.1). В силу леммы 9.1 отображение (9.1) имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в точке $(q_1, q_2, \dots, q_{\mu-1})$, если и только если многочлен

$$\frac{1}{\mu+1} P(t, q_1, \dots, q_{\mu-1})$$

принадлежит многообразию $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$.

Отсюда следует, что многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(A_\mu^\delta)$ диффеоморфно многообразию $\Pi_\mu^{\delta,0}(\mathcal{A})$. Топология последнего описана в утверждениях 1) и 2) леммы 8.4.

§ 10. Примыкания лагранжевых особенностей типов $D_\mu^\pm$

Пусть $\mu \geq 4$ целое, $\delta = \pm 1$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ и $(q_1, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$. Тогда особенность типа D_μ^δ устойчивого лагранжево отображения в $\mathbb{R}^{\mu-1}$ лагранжево эквивалентна особенности отображения

$$\begin{aligned} (t_1, t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}) &\mapsto (q_1, \dots, q_{\mu-1}), \\ q_1 &= -2t_1t_2, \quad q_2 = -t_1^2 - \frac{\partial S_0}{\partial t}(t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}), \end{aligned} \quad (10.1)$$

в нуле, где $S_0(t, q_3, \dots, q_{\mu-1}) = \delta t^{\mu-1} + q_{\mu-1}t^{\mu-2} + \dots + q_3t^2$.

Рассмотрим семейство многочленов

$$P(t, q_1, \dots, q_{\mu-1}) = t^2 \left(\frac{\partial S_0(t, q_3, \dots, q_{\mu-1})}{\partial t} + q_2 \right) + \frac{q_1^2}{4} \quad (10.2)$$

от $t \in \mathbb{R}$, зависящих от параметров $q_1, \dots, q_{\mu-1}$.

ЛЕММА 10.1. *Лагранжево отображение (10.1) имеет в точках $(t_1, t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}) \neq 0$ особенности следующих типов:*

1) $A_\nu^\pm$, $1 \leq \nu \leq \mu-1$, если t_2 – ненулевой корень кратности ν многочлена P ,

$$\pm \frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu}(t_2, q_1, \dots, q_{\mu-1}) > 0, \quad t_1 = -\frac{q_1}{2t_2};$$

2) A_1 , если $t_2 = 0$, $t_1 \neq 0$;

3) $A_3^\pm$, если $t_1 = t_2 = 0$ и $\mp q_3 > 0$;

4) $D_\nu^\pm$, $4 \leq \nu \leq \mu-1$, если $t_1 = t_2 = 0$, $q_3 = \dots = q_{\nu-1} = 0$ и $\pm q_\nu > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производящее семейство особенности лагранжева отображения (10.1) в нуле имеет вид

$$F(t_1, t_2, q_1, \dots, q_{\mu-1}) = S_0(t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}) + t_1^2 t_2 + q_2 t_2 + q_1 t_1.$$

При любых фиксированных значениях параметров $q_1, \dots, q_{\mu-1}$ семейство F определяет многочлен F_0 переменных t_1, t_2 , имеющий лишь простые критические точки. Особенность функции F_0 в критической точке (t_1^*, t_2^*) относительно стабильной R^+ -эквивалентности и особенность отображения (10.1) в точке $x = (t_1^*, t_2^*, q_3, \dots, q_{\mu-1})$ относительно лагранжевой эквивалентности имеют один и тот же тип (см. [5]).

Если $t_2^* \neq 0$, то

$$F_0 = S_0(t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}) + q_2 t_2 + \left(\sqrt{|t_2|} \left(t_1 + \frac{q_1}{2t_2} \right) \right)^2 \operatorname{sign} t_2 - \frac{q_1^2}{4t_2}$$

в окрестности точки (t_1^*, t_2^*) . Следовательно, росток F_0 в (t_1^*, t_2^*) стабильно R^+ -эквивалентен ростку в точке t_2^* функции

$$\tilde{F}_0(t) = S_0(t, q_3, \dots, q_{\mu-1}) + q_2 t - \frac{q_1^2}{4t}$$

одной переменной $t \in \mathbb{R}$. Этот росток имеет особенность типа $A_\nu^\pm$, если t_2^* — нуль кратности ν производной

$$\frac{d\tilde{F}_0}{dt} = \frac{P(t, q_1, \dots, q_{\mu-1})}{t^2},$$

причем

$$\pm \frac{d^{\nu+1}\tilde{F}_0}{dt^{\nu+1}}(t_2^*) = \pm \frac{1}{(t_2^*)^2} \frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu}(t_2^*, q_1, \dots, q_{\mu-1}) > 0.$$

Если $t_2^* = 0$, но $t_1^* \neq 0$, то росток отображения (10.1) в точке x является ростком диффеоморфизма, т. е. имеет особенность типа A_1 .

Если $t_1^* = t_2^* = 0$, но $q_3 \neq 0$, то $q_1 = q_2 = 0$ и

$$F_0 = \left(\sqrt{|q_3|} \left(t_2 + \frac{t_1^2}{2q_3} \right) \right)^2 \operatorname{sign} q_3 - \frac{t_1^4}{4q_3} + q_4 t_2^3 + \dots + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \delta t_2^{\mu-1}.$$

Росток F_0 в нуле стабильно R^+ -эквивалентен ростку в нуле функции $-\frac{t^4}{4q_3}$ одной переменной $t \in \mathbb{R}$. Этот росток имеет особенность типа $A_3^\pm$, если $\mp q_3 > 0$.

Наконец, если $t_1^* = t_2^* = 0$, $q_3 = \dots = q_{\nu-1} = 0$ и $q_\nu \neq 0$, где $4 \leq \nu \leq \mu - 1$, то

$$F_0 = t_1^2 t_2 + q_\nu t_2^{\nu-1} + \dots + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \delta t_2^{\mu-1}.$$

Росток F_0 в нуле R^+ -эквивалентен ростку в нуле функции $t_1^2 t_2 + t_2^{\nu-1} \operatorname{sign} q_\nu$, т. е. имеет особенность типа $D_\nu^\pm$, если $\pm q_\nu > 0$ (см. [5]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Утверждение 1) леммы 10.1 эквивалентно следующему: лагранжево отображение (10.1) имеет в точке $(t_1, t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1})$ особенность типа $A_\nu^\pm$, $1 \leq \nu \leq \mu - 1$, если $t_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} t_2^{i-1} \frac{\partial^i S_0}{\partial t^i}(t_2, q_1, \dots, q_{\mu-1}) &= (-1)^i i! t_1^2, \quad i = 2, \dots, \nu, \\ \pm \frac{\partial^{\nu+1} S_0}{\partial t^{\nu+1}}(t_2, q_1, \dots, q_{\mu-1}) &> \pm (-1)^{\nu+1} (\nu + 1)! \frac{t_1^2}{t_2^\nu}. \end{aligned}$$

§ 11. Доказательство теоремы 7.6

Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ вида (6.1) и целое $\nu \geq 4$. Тогда в силу леммы 10.1 лагранжево отображение (10.1) имеет мультиособенность типа $\mathcal{AD}_\nu^\pm$ в точке $y = (q_1, q_2, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$, если и только если выполнены следующие три условия:

- 1) $q_1 = q_2 = \dots = q_{\nu-1} = 0, \pm q_\nu > 0$;
- 2) у каждого прообраза $x = (t_1, t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1})$ точки y при отображении (10.1) координата t_1 равна нулю, а t_2 – вещественный корень уравнения

$$(\mu - 1)\delta t_2^{\mu-2} + (\mu - 2)q_{\mu-1}t_2^{\mu-3} + \dots + (\nu - 1)q_\nu t_2^{\nu-2} = 0;$$

- 3) при четном ν многочлен

$$\delta t^{\mu-\nu} + \frac{(\mu - 2)q_{\mu-1}}{\mu - 1} t^{\mu-\nu-1} + \dots + \frac{(\nu - 1)q_\nu}{\mu - 1}$$

принадлежит многообразию $\Pi_{\mu-\nu, \pm}^\delta(\mathcal{A})$; при нечетном ν многочлен

$$\delta t^\mu + \frac{(\mu - 2)q_{\mu-1}}{\mu - 1} t^{\mu-1} + \dots + \frac{(\nu - 1)q_\nu}{\mu - 1} t^\nu$$

принадлежит многообразию $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A}A_\nu^\pm)$.

Отсюда следует, что многообразие $\Xi_{\mathcal{AD}_\nu^\pm}(D_\mu^\delta)$ диффеоморфно $\Pi_{\mu-\nu, \pm}^\delta(\mathcal{A})$, если ν четное, и $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A}A_\nu^\pm)$, если ν нечетное. Топология многообразий $\Pi_{\mu-\nu, \pm}^\delta(\mathcal{A})$ и $\Pi_\mu^\delta(A_\nu^\pm | \mathcal{A}A_\nu^\pm)$ описана в утверждениях 1), 3) и 4) леммы 8.4.

§ 12. Пары вещественных многочленов двух переменных

Для доказательства теоремы 7.8 необходимо более детально изучить отображение (10.1). Оно определяется парой многочленов $2t_1t_2 + q_1$ и $t_1^2 + \frac{\partial S_0}{\partial t}(t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1}) + q_2$. В этом параграфе мы описываем топологические свойства некоторых подмногообразий в пространстве таких пар.

Пусть $\mu \geq 4$ целое и $\mathbb{R}^{\mu-1} = \{(c_1, \dots, c_{\mu-1})\}$ – пространство пар многочленов вида

$$(X, Y) = (t_1t_2 + c_1, t_1^2 + \delta t_2^{\mu-2} + c_{\mu-1}t_2^{\mu-3} + \dots + c_3t_2 + c_2)$$

двух вещественных переменных t_1, t_2 . Каждая пара (X, Y) определяет две кривые $X = 0$ и $Y = 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим сужение многочлена Y на кривую $\{X = 0\} \setminus \{t_2 = 0\}$. Оно является рациональной функцией $\frac{P(t_2)}{t_2^2}$ переменной t_2 , где

$$P(t) = \delta t^\mu + c_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1^2.$$

Многочлен P называется *разрешающим* многочленом пары (X, Y) (ср. с (10.2)).

Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ вида (6.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Через $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ обозначается подмножество в $\mathbb{R}^{\mu-1}$, образованное парами (X, Y) такими, что:

- 1) $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$;

2) кривые $X = 0$ и $Y = 0$ пересекаются трансверсально ровно в k точках; число n всех геометрически различных точек пересечения этих кривых равно $\#(\mathcal{A})$;

3) для каждого $i = 1, \dots, p$ разрешающий многочлен P имеет m_i геометрически различных ненулевых вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i ;

4) для каждого $i = 1, \dots, q$ разрешающий многочлен P имеет m_i^+ геометрически различных (ненулевых) вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i^+ , причем производная от P порядка μ_i^+ во всех этих точках положительна;

5) для каждого $i = 1, \dots, r$ разрешающий многочлен P имеет m_i^- геометрически различных (ненулевых) вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны μ_i^- , причем производная от P порядка μ_i^- во всех этих точках отрицательна.

Если множество $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ не пусто, то оно является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^{\mu-1}$. При этом

$$\deg \mathcal{A} \leq \mu, \quad \deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}.$$

Действительно, множество $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ состоит из пар (X, Y) следующих трех типов.

1) $(X, Y) \in \Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A}) \setminus \{c_1 = 0\}$. Разрешающий многочлен $P(t)$ такой пары единственным образом представляется в виде

$$P(t) = \delta \prod_{i=1}^n (t - \tau_i)^{\alpha_i} Q(t), \quad (12.1)$$

где $\tau_1 < \dots < \tau_n$ – все его вещественные корни (они ненулевые), $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – кратности этих корней, а $Q(t)$ – всюду положительный многочлен степени $\mu - \deg \mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1. Поскольку $P(0) = c_1^2$, $\frac{dP}{dt}(0) = 0$, то

$$\delta Q(0) \prod_{i=1}^n (-\tau_i)^{\alpha_i} = c_1^2, \quad (12.2)$$

$$Q(0) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\tau_i} = Q'(0). \quad (12.3)$$

Отсюда следует, что множество $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A}) \setminus \{c_1 = 0\}$ является двулистной накрывающей многообразия $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$.

2) $(X, Y) \in \Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A}) \cap \{c_1 = 0, c_2 > 0\}$. В этом случае $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$ и разрешающий многочлен P любой пары из $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$, достаточно близкой к (X, Y) , единственным образом представляется в виде (12.1), где $\tau_1 < \dots < \tau_n$ – все его ненулевые вещественные корни, а $Q(t)$ – многочлен степени $\mu - \deg \mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1, положительный при всех $t \neq 0$. При этом справедливы равенства (12.2) и (12.3). Из них следует, что упорядоченный набор

$$(\tau_1, \dots, \tau_n, c_1, Q''(0), \dots, Q^{(\mu-\deg \mathcal{A}-1)}(0)) \quad (12.4)$$

определяет систему гладких координат на $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ в окрестности точки (X, Y) .

3) $(X, Y) \in \Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A}) \cap \{c_1 = 0, c_2 < 0\}$. В этом случае $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 и существует $l = 1, \dots, n-1$ такое, что разрешающий многочлен $P(t)$ любой пары из $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$, достаточно близкой к (X, Y) , единственным образом представляется в виде

$$P = \delta(t - \tau_l)(t - \tau_{l+1}) \prod_{i \in I} (t - \tau_i)^{\alpha_i} Q(t), \quad (12.5)$$

где $I = \{1, \dots, n\} \setminus \{l, l+1\}$,

$$\tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < 0 < \tau_{l+2} < \dots < \tau_n, \quad \tau_{l-1} < \tau_l, \tau_{l+1} < \tau_{l+2},$$

числа τ_l, τ_{l+1} имеют противоположные знаки или одновременно равны нулю, а $Q(t)$ – всюду положительный многочлен степени $\mu - \deg \mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1. При этом

$$\delta Q(0) \tau_l \tau_{l+1} \prod_{i \in I} (-\tau_i)^{\alpha_i} = c_1^2, \quad (12.6)$$

$$Q(0) \left(\tau_l + \tau_{l+1} + \tau_l \tau_{l+1} \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \right) = Q'(0) \tau_l \tau_{l+1}. \quad (12.7)$$

Отсюда следует, что τ_l и τ_{l+1} являются гладкими функциями переменных $\tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \tau_{l+2}, \dots, \tau_n, c_1, Q(0), Q'(0)$. Поэтому упорядоченный набор

$$(\tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \tau_{l+2}, \dots, \tau_n, c_1, Q(0), Q'(0), \dots, Q^{(\mu - \deg \mathcal{A} - 1)}(0)) \quad (12.8)$$

определяет систему гладких координат на $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ в окрестности точки (X, Y) .

ЗАМЕЧАНИЕ 12.2. Поскольку $\frac{d^2 P}{dt^2}(0) = 2c_2$, то

$$\delta(TQ(0) - 2(\tau_l + \tau_{l+1})Q'(0) + \tau_l \tau_{l+1}Q''(0)) \prod_{i \in I} (-\tau_i)^{\alpha_i} = 2c_2, \quad (12.9)$$

где

$$T = 2 - \tau_l \tau_{l+1} \left(\left(\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \right)^2 + \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tau_i^2} \right).$$

Из формул (12.6), (12.7), (12.9) следует, что функции τ_l и τ_{l+1} являются бесконечно малыми при $c_1 \rightarrow 0$ равномерно по остальным координатам в окрестности точки (X, Y) , причем имеют место следующие эквивалентности:

$$|\tau_l| \sim |\tau_{l+1}| \sim \frac{|c_1|}{\sqrt{-c_2}}. \quad (12.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. Пара (X, Y) называется *сложной*, если кривые $X = 0$ и $Y = 0$ пересекаются трансверсально в точках (t_1^-, t_2^-) , (t_1^+, t_2^+) таких, что:

1) $(t_1^-)^2 + (t_2^-)^2 \neq 0$, $(t_1^+)^2 + (t_2^+)^2 \neq 0$;

2) $t_2^- \leq 0 \leq t_2^+$;

3) множество $\{(t_1, t_2) \mid t_2^- \leq t_2 \leq t_2^+\}$ не содержит других точек пересечения кривых $X = 0$ и $Y = 0$.

Все остальные пары называются *простыми*.

ЛЕММА 12.4. *Каждая связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ состоит либо только из простых пар, либо только из сложных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякая непрерывная кривая γ в $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ определяет непрерывную деформацию разрешающего многочлена в пространстве всех многочленов степени μ с вещественными коэффициентами. Если γ не пересекает множество $\{c_1 = 0, c_2 < 0\}$, то все соответствующие разрешающие многочлены имеют одинаковый порядок следования кратностей своих ненулевых вещественных корней и одинаковое количество отрицательных корней.

Множество $\{c_1 = 0, c_2 < 0\}$ состоит из сложных пар. Если кривая γ трансверсально пересекает это множество, то в момент пересечения происходит перестройка системы вещественных корней разрешающего многочлена. А именно, отрицательный τ_- и положительный τ_+ простые корни такие, что интервал (τ_-, τ_+) не содержит других корней многочлена, одновременно проходят через нуль с ненулевой скоростью. При этом порядок следования кратностей других вещественных корней многочлена и их знаки не меняются. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.5. Связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$, состоящая из простых (сложных) пар, называется *простой* (*сложной*, соответственно).

Если множество $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ имеет сложные связные компоненты, то $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 .

ЛЕММА 12.6. *Пусть $\deg \mathcal{A} = \mu$. Тогда все связные компоненты многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ стягиваемы. Число простых компонент равно удвоенному числу последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$, не являющихся элементарными или сложными. Число сложных компонент равно числу сложных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\deg \mathcal{A} = \mu$ простые связные компоненты многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ не пересекаются с гиперплоскостью $c_1 = 0$. Следовательно, эти компоненты диффеоморфны и соответствуют как 2 : 1 связным компонентам многообразия $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$, состоящим из многочленов P таких, что последовательность $\Theta_+(P)$ не является сложной.

Пусть σ – сложная связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$. Тогда существует $l = 1, \dots, n-1$ такое, что набор (12.8) при $Q(t) \equiv 1$ определяет систему гладких координат $(\tau_1, \dots, \tau_{l-1}, \tau_{l+2}, \dots, \tau_n, c_1)$ на σ .

Рассмотрим отображение многообразия σ в себя, при котором c_1 переходит в нуль, а остальные координаты не меняются. Оно является деформационной ретракцией σ на $\sigma \cap \{c_1 = 0, c_2 < 0\}$. Это следует из того, что числа $|\tau_l|$ и $|\tau_{l+1}|$ уменьшаются при гомотопии $c_1 \mapsto (1-s)c_1, s \in [0, 1]$ (в силу (12.6) и (12.7)). Таким образом, компонента σ гомотопически эквивалентна многообразию $\sigma \cap \{c_1 > 0\}$.

Остается заметить, что пересечение $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A}) \cap \{c_1 > 0\}$ диффеоморфно $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$. Поэтому сложные связные компоненты многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ гомотопически эквивалентны и взаимно однозначно соответствуют связным компонентам многообразия $\tilde{\Pi}_{\mu,+}^\delta(\mathcal{A})$, состоящим из многочленов P таких, что $\Theta_+(P)$ – сложная последовательность.

Теперь лемма следует из утверждений 1) и 5) леммы 8.4.

ЛЕММА 12.7. Пусть $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$. Тогда все простые связные компоненты многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ стягиваемы. Число простых компонент равно числу последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$, не являющихся сложными. Число сложных компонент равно числу сложных последовательностей множества $S_+^\delta(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ и $\sigma_+ = \sigma \setminus \{c_1 = 0, c_2 < 0\}$. Тогда $\sigma_+ \cap \{c_1 = 0, c_2 > 0\} \neq \emptyset$ и набор (12.4) определяет систему гладких координат $(\tau_1, \dots, \tau_n, c_1, Q''(0), \dots, Q^{(\mu-\deg \mathcal{A}-1)}(0))$ на σ_+ .

Рассмотрим отображение многообразия σ_+ в себя, при котором c_1 переходит в нуль, многочлен $Q(t)$ – в $t^2\tilde{Q}(t)$, где $\tilde{Q}(t) = 1 + t^2 + \dots + t^{\mu-\deg \mathcal{A}-2}$, а остальные координаты не изменяются. Оно включается в гомотопию $c_1 \mapsto c_1\sqrt{1-s}, Q(t) \mapsto (1-s)Q(t) + st^2\tilde{Q}(t), s \in [0, 1]$, и поэтому является деформационной ретракцией многообразия σ_+ на подмногообразие в $\sigma \cap \{c_1 = 0, c_2 > 0\}$, состоящее из пар вида $(t_1t_2, t_1^2 + \delta \prod_{i=1}^n (t_2 - \tau_i)^{\alpha_i} \tilde{Q}(t))$.

Следовательно, связные компоненты многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ взаимно однозначно соответствуют связным компонентам многообразия $\Pi_{\mu-2,+}^\delta(\mathcal{A})$. При этом каждая простая связная компонента $\sigma = \sigma_+$ гомотопически эквивалентна связной компоненте многообразия $\Pi_{\mu-2,+}^\delta(\mathcal{A})$, состоящей из многочленов P таких, что последовательность $\Theta_+(P)$ не является сложной.

Теперь лемма следует из утверждений 1) и 4) леммы 8.4.

ЛЕММА 12.8. Пусть $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$. Тогда каждая сложная связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ гомотопически эквивалентна окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – сложная связная компонента многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$. Тогда существует $l = 1, \dots, n-1$ такое, что разрешающий многочлен P любой пары $(X, Y) \in \sigma$ единственным образом представляется в виде (12.5), где

$$\tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < 0 < \tau_{l+2} < \dots < \tau_n, \quad \tau_{l-1} < \tau_l, \tau_{l+1} < \tau_{l+2},$$

числа τ_l, τ_{l+1} имеют противоположные знаки или одновременно равны нулю, а $Q(t)$ – многочлен степени $\mu - \deg \mathcal{A}$ со старшим коэффициентом 1, положительный при всех $t \neq 0$. При этом $\tau_l^2 \tau_{l+1}^2 + Q^2(0) \neq 0$ и выполняются соотношения (12.6), (12.7).

Пусть

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \neq 0\}.$$

Зафиксируем произвольную точку $(u, v) \in \Omega$ и рассмотрим многочлен

$$P_{u,v}(t) = \delta(t^2 + v)(t - \tilde{\tau}_l)(t - \tilde{\tau}_{l+1}) \prod_{i \in I} (t - \tilde{\tau}_i)^{\alpha_i} \tilde{Q}(t),$$

где $I = \{1, \dots, n\} \setminus \{l, l+1\}$, $\tilde{Q}(t) = 1 + t^2 + \dots + t^{\mu-\deg \mathcal{A}-2}$,

$$\tilde{\tau}_i = \begin{cases} -\tau_0 - i, & i = 1, \dots, l-1, \\ \tau_0 + i - l - 1, & i = l+2, \dots, n, \end{cases} \quad \tau_0 = |u| \sum_{i \in I} \alpha_i + \sqrt{|u|},$$

$$\tilde{\tau}_l \tilde{\tau}_{l+1} = u, \quad \tilde{\tau}_l + \tilde{\tau}_{l+1} = -u \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tilde{\tau}_i}.$$

Легко видеть, что $t = 0$ – критическая точка многочлена $P_{u,v}$ и

$$\tilde{\tau}_1 < \dots < \tilde{\tau}_{l-1} < 0 < \tilde{\tau}_{l+2} < \dots < \tilde{\tau}_n.$$

Более того, $\tilde{\tau}_{l-1} < \tilde{\tau}_l, \tilde{\tau}_{l+1} < \tilde{\tau}_{l+2}$.

Действительно, $|\tilde{\tau}_i| > \tau_0$ для каждого $i \in I$. С другой стороны, $|\tilde{\tau}_i| \geq 1$ для всех $i \in I$, и выполнено неравенство

$$\left| u \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tilde{\tau}_i} \right| \leq |u| \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Поэтому

$$\max\{|\tilde{\tau}_l|, |\tilde{\tau}_{l+1}|\} \leq \frac{1}{2} \left(\left| u \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tilde{\tau}_i} \right| + \sqrt{\left(u \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\tilde{\tau}_i} \right)^2 - 4u} \right) \leq \tau_0.$$

Пусть

$$X_{u,v}^\pm = t_1 t_2 \pm \sqrt{\delta \prod_{i \in I} (-\tilde{\tau}_i)^{\alpha_i} uv}, \quad Y_{u,v} = t_1^2 + \left(P_{u,v}(t_2) - \delta \prod_{i \in I} (-\tilde{\tau}_i)^{\alpha_i} uv \right) \frac{1}{t_2^2}.$$

Тогда $(X_{u,v}^\pm, Y_{u,v}) \in \sigma$, причем $P_{u,v}$ – разрешающий многочлен каждой из пар $(X_{u,v}^\pm, Y_{u,v})$.

Рассмотрим отображение ϕ многообразия σ в себя, при котором произвольная пара (X, Y) с разрешающим многочленом P вида (12.5) переходит в пару $(X_{u,v}^+, Y_{u,v})$, если $c_1 \geq 0$, и в пару $(X_{u,v}^-, Y_{u,v})$, если $c_1 \leq 0$, где

$$u = \tau_l \tau_{l+1}, \quad v = Q(0), \quad \text{sign } \tilde{\tau}_l = \text{sign } \tau_l, \quad \text{sign } \tilde{\tau}_{l+1} = \text{sign } \tau_{l+1}.$$

Отображение ϕ включается в семейство $\phi_s: (X, Y) \mapsto (X_s, Y_s)$, $s \in [0, 1]$, отображений многообразия σ в себя, где

$$\begin{aligned} X_s &= t_1 t_2 + \text{sign } c_1 \sqrt{\delta Q_s(0) \tau_{l,s} \tau_{l+1,s} \prod_{i \in I} (-\tau_{i,s})^{\alpha_i}}, \\ Y_s &= t_1^2 + \left(P_s(t_2) - \delta Q_s(0) \tau_{l,s} \tau_{l+1,s} \prod_{i \in I} (-\tau_{i,s})^{\alpha_i} \right) \frac{1}{t_2^2}, \\ Q_s(t) &= (1-s)Q(t) + s(t^2 + v)\tilde{Q}(t), \\ P_s(t) &= \delta(t - \tau_{l,s})(t - \tau_{l+1,s}) \prod_{i \in I} (t - \tau_{i,s})^{\alpha_i} Q_s(t), \\ \tau_{i,s} &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \{l, l+1\}, c_1 = 0, c_2 < 0, \\ \frac{\tilde{\tau}_i \tau_i}{s \tau_i + (1-s)\tilde{\tau}_i} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Семейство ϕ_s является гомотопией. Его непрерывность в точках $c_1 = 0$, $c_2 < 0$ следует из эквивалентностей (12.10). Таким образом, отображение ϕ является деформационной ретракцией многообразия σ на множество

$$\tilde{\sigma} = \{(X_{u,v}^\pm, Y_{u,v}) \mid (u, v) \in \Omega\} \subseteq \sigma.$$

В силу соотношения (12.6) множество $\tilde{\sigma}$ диффеоморфно поверхности

$$\delta uv \prod_{i \in I} (-\tilde{\tau}_i)^{\alpha_i} = c_1^2, \quad (u, v) \in \Omega,$$

в $\mathbb{R}^3 = \{(u, v, c_1)\}$. Эта поверхность является полостью конуса 2-го порядка без вершины. Следовательно, $\tilde{\sigma}$ гомотопически эквивалентно окружности. Лемма доказана.

§ 13. Доказательство теоремы 7.8

Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ вида (6.1). Тогда в силу леммы 10.1 лагранжево отображение (10.1) имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в точке $y = (q_1, q_2, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$, если и только если:

- 1) либо $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 \neq 0$, либо $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$;
- 2) в случае $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 \neq 0$ у каждого прообраза $x = (t_1, t_2, q_3, \dots, q_{\mu-1})$ точки y при отображении (10.1) координата t_1 равна нулю, а t_2 – вещественный корень уравнения

$$(\mu - 1)\delta t_2^{\mu-2} + (\mu - 2)q_{\mu-1}t_2^{\mu-3} + \dots + 2q_3t_2 = 0,$$

при этом многочлен

$$\delta t^\mu + \frac{(\mu - 2)q_{\mu-1}}{\mu - 1} t^{\mu-1} + \dots + \frac{2q_3}{\mu - 1} t^3$$

принадлежит многообразию $\Pi_\mu^\delta(A_3^+ | A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $q_3 > 0$ (а значит, $\mathcal{A}$ делится на A_3^-), и многообразию $\Pi_\mu^\delta(A_3^- | A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $q_3 < 0$ (а значит, $\mathcal{A}$ делится на A_3^+);

- 3) в случае $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ пара

$$\left(\tilde{t}_1 t_2 + \frac{q_1}{2\sqrt{\mu-1}}, \tilde{t}_1^2 + \delta t_2^{\mu-2} + \frac{(\mu-2)q_{\mu-1}}{\mu-1} t_2^{\mu-3} + \dots + \frac{2q_3}{\mu-1} t_2 + \frac{q_2}{\mu-1} \right),$$

где $\tilde{t}_1 = t_1/\sqrt{\mu-1}$, принадлежит многообразию $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$.

Таким образом, многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$ диффеоморфно несвязному объединению трех многообразий: $\Pi_\mu^\delta(A_3^+ | A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^- , $\Pi_\mu^\delta(A_3^- | A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$, если $\mathcal{A}$ делится на A_3^+ , и $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$.

Топология многообразий $\Pi_\mu^\delta(A_3^+ | A_3^+ \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$ и $\Pi_\mu^\delta(A_3^- | A_3^- \frac{\mathcal{A}}{A_3^+})$ описана в утверждениях 1) и 3) леммы 8.4. Топология многообразия $\Delta_{\mu-1}^\delta(\mathcal{A})$ описана в лемме 12.6 при $\deg \mathcal{A} = \mu$ и в леммах 12.7, 12.8 при $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$.

§ 14. Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий лагранжевых мультиособенностей

Рассмотрим устойчивое лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое n -мерное многообразие V . Для любого

$\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+ \setminus \{1\}$ замыкание $\overline{\mathcal{A}_f} \subset V$ многообразия $\mathcal{A}_f$ мультиособенностей отображения f компактно и является объединением многообразий вида X_f , где $X \in \mathbb{S}^+$. Разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_f}$ на связные компоненты этих многообразий является конечной C^∞ -стратификацией, удовлетворяющей первому и второму условиям Уитни.

Пусть $\chi_f(X)$ – эйлерова характеристика многообразия X_f . Тогда

$$\chi_f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathbb{S}^+ \setminus \{1\}} (-1)^{n - \text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi_f(X), \quad (14.1)$$

если $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n - 1 \pmod{2}$. Формула (14.1) выводится из формулы (5.1) так же, как и аналогичная формула для мультиособенностей устойчивых лежандровых отображений (см. [8, доказательство предложения 3.2]).

Выпишем соотношения вида (14.1) для всех возможных элементов $\mathcal{A}$ полугруппы $\mathbb{S}^+$. Тогда получится однородная система линейных уравнений, неизвестными в которой являются эйлеровы характеристики многообразий мультиособенностей отображения f . Эта система представляется в треугольном виде относительно эйлеровых характеристик нечетномерных многообразий мультиособенностей. Следовательно, эйлеровы характеристики нечетномерных многообразий мультиособенностей отображения f линейно выражаются через эйлеровы характеристики четномерных многообразий его мультиособенностей.

В случаях $n = 3$ и $n = 4$ эти выражения приведены в теоремах 14.1, 14.3. Они получены путем решения указанной системы уравнений на компьютере с использованием пакета программ “Mathematica”. В формулах используется следующее соглашение: если элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ не содержит образующих типа A_1 , то $\chi_f(A_1^k \mathcal{A}) = 0$ для любого целого $k < 0$.

ТЕОРЕМА 14.1. Пусть $f: L \rightarrow V$ – устойчивое лагранжево отображение гладкого замкнутого многообразия L в гладкое трехмерное многообразие V . Тогда для любого целого неотрицательного k имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \chi_f(A_1^k A_2^3) &= \frac{1}{2} (3\chi_f(A_1^{k-2} A_2^3) + 3\chi_f(A_1^k A_2^3) + \chi_f(A_1^k A_4)) + \chi_f(A_1^{k-1} A_2 A_3^-) \\ &\quad + \chi_f(A_1^{k-1} A_2 A_3^+) + \chi_f(A_1^k D_4^+), \\ \chi_f(A_1^k A_3^-) &= \frac{1}{2} (\chi_f(A_1^{k-1} A_4) + \chi_f(A_1^{k-2} A_2 A_3^-) + \chi_f(A_1^k A_2 A_3^-) \\ &\quad + 3\chi_f(A_1^{k-1} D_4^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_4^+)), \\ \chi_f(A_1^k A_3^+) &= \frac{1}{2} (\chi_f(A_1^{k-1} A_4) + \chi_f(A_1^{k-2} A_2 A_3^+) + \chi_f(A_1^k A_2 A_3^+) \\ &\quad + 3\chi_f(A_1^{k-1} D_4^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_4^+)). \end{aligned}$$

Если $k > 0$, то

$$\begin{aligned} \chi_f(A_1^k) &= \frac{1}{4} (2\chi_f(A_1^{k-2} A_2) + 2\chi_f(A_1^k A_2) - \chi_f(A_1^{k-6} A_2^3) - 3\chi_f(A_1^{k-4} A_2^3) \\ &\quad - 3\chi_f(A_1^{k-2} A_2^3) - \chi_f(A_1^k A_2^3) - \chi_f(A_1^{k-4} A_4) - 2\chi_f(A_1^{k-2} A_4) + \chi_f(A_1^k A_4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\chi_f(A_1^{k-5}A_2A_3^-) - 2\chi_f(A_1^{k-3}A_2A_3^-) - \chi_f(A_1^{k-1}A_2A_3^-) - \chi_f(A_1^{k-5}A_2A_3^+) \\
& - 2\chi_f(A_1^{k-3}A_2A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-1}A_2A_3^+) - 2\chi_f(A_1^{k-4}D_4^-) \\
& - 6\chi_f(A_1^{k-2}D_4^-) - 2\chi_f(A_1^{k-4}D_4^+) - 2\chi_f(A_1^{k-2}D_4^+)).
\end{aligned}$$

Если многообразие V замкнуто, то последняя формула справедлива и для $k = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 14.2. Пусть $f: L \rightarrow V$ – устойчивое лагранжево отображение гладкого замкнутого многообразия L в гладкое трехмерное многообразие V . Тогда для любого целого неотрицательного k имеют место следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}
& \chi_f(A_1^kA_2^3) + \chi_f(A_1^{k-2}A_2^3) \equiv \chi_f(A_1^kA_4), \\
& \chi_f(A_1^kA_2A_3^+) + \chi_f(A_1^{k-2}A_2A_3^+) \equiv \chi_f(A_1^{k-1}A_4) + \chi_f(A_1^{k-1}D_4^-) + \chi_f(A_1^{k-1}D_4^+), \\
& \chi_f(A_1^kA_2A_3^-) \equiv \chi_f(A_1^kA_2A_3^+).
\end{aligned}$$

Если $k > 0$, то

$$\begin{aligned}
& \chi_f(A_1^kA_2) + \chi_f(A_1^{k-2}A_2) \equiv \frac{1}{2}(\chi_f(A_1^{k-6}A_2^3) - \chi_f(A_1^{k-4}A_2^3) - \chi_f(A_1^{k-2}A_2^3) \\
& + \chi_f(A_1^kA_2^3) - \chi_f(A_1^{k-4}A_4) - \chi_f(A_1^kA_4) - \chi_f(A_1^{k-5}A_2A_3^-) + \chi_f(A_1^{k-1}A_2A_3^-) \\
& + \chi_f(A_1^{k-5}A_2A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-1}A_2A_3^+)).
\end{aligned}$$

Если многообразие V замкнуто, то последнее сравнение справедливо и для $k = 0$.

ТЕОРЕМА 14.3. Пусть $f: L \rightarrow V$ – устойчивое лагранжево отображение гладкого замкнутого многообразия L в гладкое четырехмерное многообразие V . Тогда для любого целого неотрицательного k имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
& \chi_f(A_1^kA_2^3) = 2\chi_f(A_1^{k-2}A_2^4) + 2\chi_f(A_1^kA_2^4) + \frac{1}{2}\chi_f(A_1^kA_2A_4) \\
& + \chi_f(A_1^{k-1}A_2^2A_3^-) + \chi_f(A_1^{k-1}A_2^2A_3^+) + \chi_f(A_1^kA_2D_4^+), \\
& \chi_f(A_1^kA_2A_3^-) = \frac{1}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2A_4) + \chi_f(A_1^{k-2}A_2^2A_3^-) + \chi_f(A_1^kA_2^2A_3^-) \\
& + \chi_f(A_1^{k-1}A_3^-A_3^+) + \chi_f(A_1^kA_5^-) + 2\chi_f(A_1^{k-1}(A_3^-)^2) + \frac{3}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2D_4^-) \\
& + \frac{1}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2D_4^+) + \chi_f(A_1^kD_5^-) + \chi_f(A_1^kD_5^+), \\
& \chi_f(A_1^kA_2A_3^+) = \frac{1}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2A_4) + \chi_f(A_1^{k-2}A_2^2A_3^+) + \chi_f(A_1^kA_2^2A_3^+) \\
& + \chi_f(A_1^{k-1}A_3^-A_3^+) + \chi_f(A_1^kA_5^+) + 2\chi_f(A_1^{k-1}(A_3^+)^2) + \frac{3}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2D_4^-) \\
& + \frac{1}{2}\chi_f(A_1^{k-1}A_2D_4^+) + \chi_f(A_1^kD_5^-) + \chi_f(A_1^kD_5^+), \\
& \chi_f(A_1^kA_4) = \frac{1}{2}\chi_f(A_1^{k-2}A_2A_4) + \frac{1}{2}\chi_f(A_1^kA_2A_4) + \chi_f(A_1^{k-1}A_5^-) + \chi_f(A_1^{k-1}A_5^+) \\
& + \chi_f(A_1^{k-1}D_5^-) + \chi_f(A_1^{k-1}D_5^+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_f(A_1^k D_4^-) &= \frac{1}{2}(\chi_f(A_1^{k-2} A_2 D_4^-) + \chi_f(A_1^k A_2 D_4^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_5^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_5^+)), \\
\chi_f(A_1^k D_4^+) &= \frac{1}{2}(\chi_f(A_1^{k-2} A_2 D_4^+) + \chi_f(A_1^k A_2 D_4^+) + \chi_f(A_1^{k-1} D_5^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_5^+)), \\
\chi_f(A_1^k A_2) &= \chi_f(A_1^{k-2} A_2^2) + \chi_f(A_1^k A_2^2) - \chi_f(A_1^{k-6} A_2^4) - 3\chi_f(A_1^{k-4} A_2^4) \\
&\quad - 3\chi_f(A_1^{k-2} A_2^4) - \chi_f(A_1^k A_2^4) - \chi_f(A_1^{k-4} A_2 A_4) - \frac{3}{2}\chi_f(A_1^{k-2} A_2 A_4) \\
&\quad + \chi_f(A_1^{k-1} A_3^-) - \chi_f(A_1^{k-5} A_2^2 A_3^-) - 2\chi_f(A_1^{k-3} A_2^2 A_3^-) - \chi_f(A_1^{k-1} A_2^2 A_3^-) \\
&\quad - \chi_f(A_1^{k-4} (A_3^-)^2) - \chi_f(A_1^{k-2} (A_3^-)^2) - \chi_f(A_1^{k-3} A_5^-) - \chi_f(A_1^{k-1} A_5^-) \\
&\quad + \chi_f(A_1^{k-1} A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-5} A_2^2 A_3^+) - 2\chi_f(A_1^{k-3} A_2^2 A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-1} A_2^2 A_3^+) \\
&\quad - \chi_f(A_1^{k-4} A_3^- A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-2} A_3^- A_3^+) - \chi_f(A_1^{k-3} A_5^+) - \chi_f(A_1^{k-1} A_5^+) \\
&\quad - \chi_f(A_1^{k-4} (A_3^+)^2) - \chi_f(A_1^{k-2} (A_3^+)^2) - 2\chi_f(A_1^{k-4} A_2 D_4^-) - 3\chi_f(A_1^{k-2} A_2 D_4^-) \\
&\quad - \frac{5}{2}\chi_f(A_1^{k-3} D_5^-) - \frac{5}{2}\chi_f(A_1^{k-1} D_5^-) - \frac{3}{2}\chi_f(A_1^{k-4} A_2 D_4^+) \\
&\quad - 2\chi_f(A_1^{k-2} A_2 D_4^+) - \frac{1}{2}\chi_f(A_1^k A_2 D_4^+) - \frac{5}{2}\chi_f(A_1^{k-3} D_5^+) - \frac{5}{2}\chi_f(A_1^{k-1} D_5^+).
\end{aligned}$$

Эйлерова характеристика $\chi(L)$ многообразия L вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\chi(L) &= \sum_{k \geq 1} k \chi_f(A_1^k) + \sum_{k \geq 0} (-(k+2)\chi_f(A_1^k A_2^2) + (5k+20)\chi_f(A_1^k A_2^4) \\
&\quad + (k+5)\chi_f(A_1^k A_2 A_4) - \chi_f(A_1^k A_3^-) - \chi_f(A_1^k A_3^+) + (2k+9)\chi_f(A_1^k A_2^2 A_3^-) \\
&\quad + (2k+9)\chi_f(A_1^k A_2^2 A_3^+) + (k+4)\chi_f(A_1^k (A_3^-)^2) + (k+4)\chi_f(A_1^k A_3^- A_3^+) \\
&\quad + (k+4)\chi_f(A_1^k (A_3^+)^2) + (2k+10)\chi_f(A_1^k A_2 D_4^-) + (2k+8)\chi_f(A_1^k A_2 D_4^+) \\
&\quad + (k+3)\chi_f(A_1^k A_5^-) + (k+3)\chi_f(A_1^k A_5^+) + (2k+8)\chi_f(A_1^k D_5^-) \\
&\quad + (2k+8)\chi_f(A_1^k D_5^+)).
\end{aligned}$$

Если многообразие V замкнуто, то его эйлерова характеристика $\chi(V)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\chi(V) &= \sum_{k \geq 0} (\chi_f(A_1^k) - \chi_f(A_1^k A_2^2) + 5\chi_f(A_1^k A_2^4) + \chi_f(A_1^k A_2 A_4) + 2\chi_f(A_1^k A_2^2 A_3^-) \\
&\quad + 2\chi_f(A_1^k A_2^2 A_3^+) + \chi_f(A_1^k (A_3^-)^2) + \chi_f(A_1^k A_3^- A_3^+) + \chi_f(A_1^k (A_3^+)^2) \\
&\quad + \chi_f(A_1^k A_5^-) + \chi_f(A_1^k A_5^+) + 2\chi_f(A_1^k A_2 D_4^-) + 2\chi_f(A_1^k A_2 D_4^+) \\
&\quad + 2\chi_f(A_1^k D_5^-) + 2\chi_f(A_1^k D_5^+)).
\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 14.4. Пусть $f: L \rightarrow V$ — устойчивое лагранжево отображение гладкого замкнутого многообразия L в гладкое четырехмерное многообразие V . Тогда для любого целого неотрицательного k справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}
\chi_f(A_1^k A_2 A_4) &\equiv 0, \\
\chi_f(A_1^k A_2 D_4^+) + \chi_f(A_1^{k-2} A_2 D_4^+) &\equiv \chi_f(A_1^{k-1} D_5^-) + \chi_f(A_1^{k-1} D_5^+), \\
\chi_f(A_1^k A_2 D_4^-) &\equiv \chi_f(A_1^k A_2 D_4^+).
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14.5. Формулы в теоремах 14.1, 14.3 для устойчивых лагранжевых отображений, имеющих лишь особенности коранга 1, легко получить из [11, формулы теоремы 3.1.5] для произвольных устойчивых отображений с особенностями коранга 1 многообразий одинаковой размерности путем переобозначения типов особенностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.6. Теоремы 14.1, 14.3 описывают полные (в смысле [12]) системы линейных соотношений с вещественными коэффициентами между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивых лагранжевых отображений в пространства размерности $n \leq 4$.

§ 15. Индексы примыканий особенностей каустик

Рассмотрим устойчивое лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$ гладкого многообразия L в гладкое n -мерное многообразие V . Множество C критических точек отображения f является гиперповерхностью в L . Росток C в любой точке, где f имеет особенность типа $A_\mu^\pm$, является ростком гладкой гиперповерхности. Ростки C во всех точках, в которых отображение f имеет особенности любого из типов $D_\mu^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 , E_8 , вложено диффеоморфны ростку в нуле прямого произведения пространства $\mathbb{R}^{n-3}$ и конуса 2-го порядка в $\mathbb{R}^3$ с вершиной в нуле.

Каустика Σ отображения f является гиперповерхностью с особенностями в V . Эти особенности классифицируются по не содержащим образующих типа A_1 элементам подполугруппы S_0^+ в S^+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. *Каустика Σ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in S_0^+$ в точке $y \in V$, если существует целое $k \geq 0$ такое, что f имеет мультиособенность типа $A_1^k \mathcal{A}$ в y .*

Ростки каустики с особенностями одного и того же типа вложено диффеоморфны. Более того, если элементы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in S_0^+$ отличаются лишь верхними индексами у образующих типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$ с нечетными индексами μ , то ростки каустики с особенностями типов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ также вложено диффеоморфны. Ростки каустики с особенностями других типов попарно не диффеоморфны. Множество $\mathcal{A}_\Sigma$ точек $y \in V$, в которых каустика Σ имеет особенность типа $\mathcal{A}$, является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V .

Предположим, что каустика Σ имеет особенность типа $\mathcal{B} \in S_0^+$ в точке $y \in V$, где $\text{codim } \mathcal{B} = c$. Выберем окрестность U начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и рассмотрим гладкое вложение $h: U \rightarrow V$ такое, что $h(0) = y$ и подмногообразие $h(U) \subset V$ трансверсально многообразию $\mathcal{B}_\Sigma$ в y . Через $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$ обозначим открытый c -мерный шар с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в 0 . Тогда существует положительное число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y, h)$ такое, что для любых $\mathcal{A} \in S_0^+$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ множество $h(D_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_\Sigma$ является гладким многообразием, диффеоморфным несвязному объединению

$$\Xi_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B}) = \bigcup_{k \geq 0} \Xi_{A_1^k \mathcal{A}}(\mathcal{B})$$

(где k принимает лишь конечное число значений для каждого фиксированного f). Эйлерова характеристика $J_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B})$ многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B})$ вычисляется по

формуле

$$J_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 0} J_{A_1^k \mathcal{A}}(\mathcal{B}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.2. Особенность типа $\mathcal{B}$ каустики устойчивого лагранжева отображения *примыкает* к особенности типа $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ и $\Xi_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Число $J_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B})$ называется *индексом* примыкания. Примыкание называется *простым*, если все связные компоненты многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}^{\text{ca}}(\mathcal{B})$ стягиваемы. В противном случае примыкание называется *сложным*.

Особенности каустик коранга 1 имеют только простые примыкания. Примыкания особенностей других типов могут быть сложными. Топология примыканий особенностей типов $A_{\mu}^{\pm}$ и $D_{\mu}^{\pm}$ легко описывается при помощи результатов из § 7. В частности, имеем

СЛЕДСТВИЕ 15.3. Индексы примыканий особенности типа A_5^+ каустики устойчивого лагранжева отображения указаны в следующей таблице:

X	1	A_2	A_3^+	A_3^-	A_2^2	A_4	$A_3^+ A_2$
$J_X^{\text{ca}}(A_5^+)$	3	6	3	1	3	2	2

Таблица индексов примыканий особенности типа A_5^- получается из таблицы индексов $J_X^{\text{ca}}(A_5^+)$ одновременным изменением всех знаков в верхних индексах типов особенностей на противоположные.

СЛЕДСТВИЕ 15.4. Индексы примыканий особенности типа A_6 каустики устойчивого лагранжева отображения указаны в следующей таблице:

X	1	A_2	A_3^+	A_3^-	A_2^2	A_4	$A_3^+ A_2$	$A_3^- A_2$	A_2^3	A_5^+	A_5^-	$A_4 A_2$	$A_3^+ A_3^-$
$J_X^{\text{ca}}(A_6)$	4	9	3	3	7	4	3	3	1	1	1	2	1

СЛЕДСТВИЕ 15.5. Индексы примыканий особенности типа D_5^+ каустики устойчивого лагранжева отображения указаны в следующей таблице:

X	1	A_2	A_2^2	A_3^+	A_3^-	$A_3^+ A_2$	$A_3^- A_2$	A_4	D_4^+	D_4^-
$J_X^{\text{ca}}(D_5^+)$	4	12	6	5	5	2	2	2	1	1

Таблица индексов примыканий особенности типа D_5^- совпадает с таблицей индексов $J_X^{\text{ca}}(D_5^+)$. Все примыкания особенностей типов $D_5^{\pm}$, кроме примыканий к особенности типа **1**, являются простыми. Примыкания к особенности типа **1** являются сложными. А именно, каждое из многообразий $\Xi_1^{\text{ca}}(D_5^+)$, $\Xi_1^{\text{ca}}(D_5^-)$ имеет пять связных компонент, четыре из которых стягиваемы, а одна гомотопически эквивалентна окружности.

СЛЕДСТВИЕ 15.6. Индексы примыканий особенности типа D_6^+ каустики устойчивого лагранжева отображения указаны в следующей таблице:

X	$\mathbf{1}$	A_2	A_2^2	A_2^3	A_3^+	A_3^-	$A_3^+ A_2$	$A_3^- A_2$	$(A_3^+)^2$	$(A_3^-)^2$	A_4	$A_4 A_2$
$J_X^{\text{ca}}(D_6^+)$	7	22	19	4	8	8	7	7	1	1	6	4
	D_4^+	D_4^-	$D_4^+ A_2$	D_5^+	D_5^-							
	3	1	2	1	1							

Все примыкания особенности типа D_6^+ , кроме примыкания к особенности типа $\mathbf{1}$, являются простыми. Примыкание к особенности типа $\mathbf{1}$ является сложным. А именно, многообразие $\Xi_1^{\text{ca}}(D_6^+)$ имеет восемь связанных компонент, семь из которых стягиваемы, а одна гомотопически эквивалентна окружности.

СЛЕДСТВИЕ 15.7. Индексы примыканий особенности типа D_6^- каустики устойчивого лагранжеева отображения указаны в следующей таблице:

X	$\mathbf{1}$	A_2	A_2^2	A_3^+	A_3^-	$A_3^+ A_2$	$A_3^- A_2$	$(A_3^+)^2$	$A_3^+ A_3^-$	$(A_3^-)^2$	A_4	A_5^+	A_5^-
$J_X^{\text{ca}}(D_6^-)$	3	18	17	10	10	11	11	1	2	1	6	2	2
	D_4^+	D_4^-	$D_4^- A_2$	D_5^+	D_5^-								
	1	3	2	1	1								

Все примыкания особенности типа D_6^- , кроме примыканий к особенностям типов $\mathbf{1}$ и A_2 , являются простыми. Примыкания к особенностям типов $\mathbf{1}$ и A_2 являются сложными. А именно, многообразие $\Xi_1^{\text{ca}}(D_6^-)$ имеет шесть связанных компонент, три из которых стягиваемы, а три гомотопически эквивалентны окружности. Многообразие $\Xi_{A_2}^{\text{ca}}(D_6^-)$ имеет двадцать связанных компонент, восемнадцать из которых стягиваемы, а две гомотопически эквивалентны окружности.

Из теоремы 5.1 имеем

СЛЕДСТВИЕ 15.8. Для любых $A, B, C \in \mathbb{S}_0^+$ многообразие $\Xi_A^{\text{ca}}(BC)$ диффеоморфно несвязному объединению многообразий вида $\Xi_X^{\text{ca}}(B) \times \Xi_Y^{\text{ca}}(C)$ по всем парам $(X, Y) \in \mathbb{S}_0^+ \times \mathbb{S}_0^+$ таким, что $XY = A$. В частности,

$$J_A^{\text{ca}}(BC) = \sum_{(X, Y) \in \mathbb{S}_0^+ \times \mathbb{S}_0^+ : XY = A} J_X^{\text{ca}}(B) J_Y^{\text{ca}}(C).$$

Индексы примыканий особенностей каустик удовлетворяют также следующим трем соотношениям.

СЛЕДСТВИЕ 15.9. Для любых $A, B \in \mathbb{S}_0^+$ имеем:

- 1) $\sum_{X \in \mathbb{S}_0^+} (-1)^{\text{codim } X} J_A^{\text{ca}}(X) J_X^{\text{ca}}(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \neq B, \\ (-1)^{\text{codim } A}, & \text{если } A = B; \end{cases}$
- 2) $\sum_{X \in \mathbb{S}_0^+} (-1)^{\text{codim } X} J_X^{\text{ca}}(B) = 1;$
- 3) $\sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} \#(X) J_X^{\text{ca}}(B) = -\#(B).$

Формулы 1), 2) следствия 15.9 легко следуют из формул 1) и 2) теоремы 5.2. Для доказательства формулы 3) достаточно изменить очевидным образом доказательство формулы 3) теоремы 5.2 в соответствии со следующим утверждением.

ЛЕММА 15.10. Пусть Σ – каустика устойчивого лагранжева отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Предположим, что Σ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}_0^+$ в нуле. Рассмотрим $(n-1)$ -мерную сферу $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле. Тогда для любого достаточно малого ε подмножество $f^{-1}(S_\varepsilon \cap \Sigma) \subset \mathbb{R}^n$:

- 1) диффеоморфно $(n-2)$ -мерной сфере, если $\mathcal{A} = A_\mu^\pm$;
- 2) гомеоморфно $(n-3)$ -кратной надстройке над несвязным объединением $S^1 \sqcup S^1$ двух окружностей, если $\mathcal{A} = D_\mu^\pm, E_6^\pm, E_7, E_8$.

В частности, эйлерова характеристика множества $f^{-1}(S_\varepsilon \cap \Sigma)$ равна $\#(\mathcal{A})(1 + (-1)^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество C критических точек отображения f . Если ε достаточно мало, то множество $f^{-1}(S_\varepsilon)$:

- 1) вложено диффеоморфно $(n-1)$ -мерной сфере;
- 2) является границей открытого n -мерного диска, содержащего нуль;
- 3) трансверсально гладкой части гиперповерхности C ;
- 4) трансверсально многообразию особых точек гиперповерхности C .

Следовательно, $f^{-1}(S_\varepsilon \cap \Sigma)$ вложено диффеоморфно пересечению множества C со сферой $S_r \subset \mathbb{R}^n$ с малым радиусом $r > 0$ и центром в нуле.

В случае $\mathcal{A} = A_\mu^\pm$ росток C в нуле является ростком гладкой гиперповерхности. Поэтому $S_r \cap C$ диффеоморфно $(n-2)$ -мерной сфере.

Пусть $\mathcal{A} = D_\mu^\pm, E_6^\pm, E_7, E_8$. Если $n = 3$, то $S_r \cap C$ диффеоморфно $S^1 \sqcup S^1$. При $n = 4$ рассмотрим линейную функцию $\lambda: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda: x \mapsto \lambda(x)$, такую, что гиперплоскость $\lambda(x) = 0$ трансверсальна многообразию особых точек гиперповерхности C , а гиперплоскости $\lambda(x) = \pm r$ касаются сферы S_r . Для любого $t \in (-r, r)$ пересечение гиперплоскости $\lambda(x) = t$ с множеством $S_r \cap C$ диффеоморфно $S^1 \sqcup S^1$ и непрерывно зависит от t . При $t \rightarrow \pm r$ это пересечение стягивается в точку. Следовательно, $S_r \cap C$ гомеоморфно надстройке над $S^1 \sqcup S^1$.

Повторяя описанную конструкцию, получим индукцией по n , что $S_r \cap C$ гомеоморфно $(n-3)$ -кратной надстройке над $S^1 \sqcup S^1$. Остается заметить, что эйлерова характеристика $(n-3)$ -кратной надстройки над $S^1 \sqcup S^1$ равна эйлеровой характеристике $(n-2)$ -мерной сферы, т. е. $1 + (-1)^n$. Лемма доказана.

Рассмотрим полугрупповую алгебру $\mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+]$ полугруппы $\mathbb{S}_0^+$. Это алгебра свободных многочленов с целыми коэффициентами, образующие которой соответствуют всевозможным типам простых особенностей каустик устойчивых лагранжевых отображений. Типы особенностей, т. е. элементы полугруппы $\mathbb{S}_0^+$, это мономы в этой алгебре многочленов.

Определим аддитивный гомоморфизм J^{ca} алгебры $\mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+]$ в себя, заданный на мономах формулой

$$J^{\text{ca}}(\mathcal{A}) = \sum_{X \in \mathbb{S}_0^+} (-1)^{\text{codim } X} J_X^{\text{ca}}(\mathcal{A})X.$$

Выражение $J^{\text{ca}}(\mathcal{A})$ можно рассматривать как производящий многочлен для индексов примыканий $J_X^{\text{ca}}(\mathcal{A})$ особенности типа $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 15.11. *Гомоморфизм J^{ca} является кольцевым и обратен самому себе, т. е.*

$$J^{\text{ca}}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = J^{\text{ca}}(\mathcal{A})J^{\text{ca}}(\mathcal{B}), \quad J^{\text{ca}}(J^{\text{ca}}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$$

для всех $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+]$.

СЛЕДСТВИЕ 15.12. *Кольцевой гомоморфизм $\ell: \mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+] \rightarrow \mathbb{Z}$, переводящий всякий моном в 1, является инвариантом гомоморфизма J^{ca} ; аддитивный гомоморфизм $\#: \mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+] \rightarrow \mathbb{Z}$, переводящий всякий моном в количество сомножителей в этом мономе, антиинвариантен относительно J^{ca} , т. е.*

$$\ell(J^{\text{ca}}(\mathcal{A})) = \ell(\mathcal{A}), \quad \#(J^{\text{ca}}(\mathcal{A})) = -\#(\mathcal{A})$$

для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}[\mathbb{S}_0^+]$.

§ 16. Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей каустик

Рассмотрим устойчивое лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое n -мерное многообразие V . Множество критических точек C и каустика Σ этого отображения компактны. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{S}_0^+$ эйлерова характеристика $\chi_\Sigma(\mathcal{A})$ многообразия $\mathcal{A}_\Sigma$ вычисляется по формуле

$$\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = \sum_{k \geq 0} \chi_f(A_1^k \mathcal{A})$$

(где k принимает лишь конечное число значений для каждого фиксированного f).

Из теоремы 14.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 16.1. *Пусть Σ и C – соответственно каустика и множество критических точек устойчивого лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое трехмерное многообразие V . Тогда*

$$\begin{aligned} \chi_\Sigma(A_2^2) &= 3\chi_\Sigma(A_2^3) + \chi_\Sigma(A_2A_3^-) + \chi_\Sigma(A_2A_3^+) + \frac{1}{2}\chi_\Sigma(A_4) + \chi_\Sigma(D_4^+), \\ \chi_\Sigma(A_3^-) &= \chi_\Sigma(A_2A_3^-) + \frac{1}{2}(\chi_\Sigma(A_4) + 3\chi_\Sigma(D_4^-) + \chi_\Sigma(D_4^+)), \\ \chi_\Sigma(A_3^+) &= \chi_\Sigma(A_2A_3^+) + \frac{1}{2}(\chi_\Sigma(A_4) + 3\chi_\Sigma(D_4^-) + \chi_\Sigma(D_4^+)). \end{aligned}$$

В частности, справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\chi_\Sigma(A_4) \equiv \chi_\Sigma(D_4^-) + \chi_\Sigma(D_4^+) \equiv 0.$$

Эйлеровы характеристики поверхностей Σ и C вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= \chi_{\Sigma}(A_2) - 2\chi_{\Sigma}(A_2^3) - \chi_{\Sigma}(A_2A_3^-) - \chi_{\Sigma}(A_2A_3^+) - \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_4) \\ &\quad - 2\chi_{\Sigma}(D_4^-) - \chi_{\Sigma}(D_4^+), \\ \chi(C) &= \chi_{\Sigma}(A_2) - 3\chi_{\Sigma}(A_2^3) - \chi_{\Sigma}(A_2A_3^-) - \chi_{\Sigma}(A_2A_3^+) - \chi_{\Sigma}(A_4) \\ &\quad - 2\chi_{\Sigma}(D_4^-) - 2\chi_{\Sigma}(D_4^+).\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 16.2. Следствие 16.1 хорошо известно. Первые три из указанных формул представляют собой соотношения инцидентности в графе, образованном мультиособенностями коразмерностей 3 и 2 отображения f .

Из теоремы 14.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 16.3. Пусть Σ и C – соответственно каустика и множество критических точек устойчивого лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое четырехмерное многообразие V . Тогда

$$\begin{aligned}\chi_{\Sigma}(A_2^3) &= 4\chi_{\Sigma}(A_2^4) + \chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^-) + \chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^+) + \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_2A_4) + \chi_{\Sigma}(A_2D_4^+), \\ \chi_{\Sigma}(A_2A_3^-) &= \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_2A_4) + 2\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^-) + 2\chi_{\Sigma}((A_3^-)^2) + \chi_{\Sigma}(A_3^-A_3^+) \\ &\quad + \frac{3}{2}\chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) + \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) + \chi_{\Sigma}(A_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+), \\ \chi_{\Sigma}(A_2A_3^+) &= \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_2A_4) + 2\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^+) + 2\chi_{\Sigma}((A_3^+)^2) + \chi_{\Sigma}(A_3^-A_3^+) \\ &\quad + \frac{3}{2}\chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) + \frac{1}{2}\chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) + \chi_{\Sigma}(A_5^+) + \chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+), \\ \chi_{\Sigma}(A_4) &= \chi_{\Sigma}(A_2A_4) + \chi_{\Sigma}(A_5^-) + \chi_{\Sigma}(A_5^+) + \chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+), \\ \chi_{\Sigma}(D_4^-) &= \chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) + \frac{1}{2}(\chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+)), \\ \chi_{\Sigma}(D_4^+) &= \chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) + \frac{1}{2}(\chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+)), \\ \chi_{\Sigma}(A_2) &= 2\chi_{\Sigma}(A_2^2) - 8\chi_{\Sigma}(A_2^4) - \frac{5}{2}\chi_{\Sigma}(A_2A_4) + \chi_{\Sigma}(A_3^-) + \chi_{\Sigma}(A_3^+) - 4\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^-) \\ &\quad - 4\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^+) - 2\chi_{\Sigma}((A_3^-)^2) - 2\chi_{\Sigma}(A_3^-A_3^+) - 2\chi_{\Sigma}((A_3^+)^2) - 5\chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) \\ &\quad - 4\chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) - 2\chi_{\Sigma}(A_5^-) - 2\chi_{\Sigma}(A_5^+) - 5\chi_{\Sigma}(D_5^-) - 5\chi_{\Sigma}(D_5^+).\end{aligned}$$

В частности, справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}\chi_{\Sigma}(A_2A_4) &\equiv \chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) + \chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) \equiv 0, \\ \chi_{\Sigma}(D_5^-) + \chi_{\Sigma}(D_5^+) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Эйлерова характеристика гиперповерхности Σ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= -\chi_{\Sigma}(A_2^2) + 5\chi_{\Sigma}(A_2^4) + \chi_{\Sigma}(A_2A_4) + 2\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^-) + 2\chi_{\Sigma}(A_2^2A_3^+) \\ &\quad + \chi_{\Sigma}((A_3^-)^2) + \chi_{\Sigma}(A_3^-A_3^+) + \chi_{\Sigma}((A_3^+)^2) + \chi_{\Sigma}(A_5^-) + \chi_{\Sigma}(A_5^+) + 2\chi_{\Sigma}(A_2D_4^-) \\ &\quad + 2\chi_{\Sigma}(A_2D_4^+) + 2\chi_{\Sigma}(D_5^-) + 2\chi_{\Sigma}(D_5^+).\end{aligned}$$

Эйлерова характеристика гиперповерхности C равна нулю.

Предположим теперь, что многообразие V связно. Через d_f обозначим максимум числа точек в $f^{-1}(y)$ по всем $y \in V$. Тогда степени всех мультиособенностей отображения f имеют одинаковую четность, равную четности числа d_f . Заметим, что d_f сравнимо по модулю 2 с $\mathbb{Z}_2$ -индексом пересечения многообразия L со слоем лагранжева расслоения $\varrho: E \rightarrow V$ такого, что $f = \varrho|_L$.

Пусть

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_f(\mathcal{A}) &= \sum_{k \geq 0} \chi_f(\mathcal{A}A_1^k), & k &\equiv \deg \mathcal{A} + d_f \pmod{4}, \\ \widetilde{\chi}_f(\mathcal{A}) &= \sum_{k \geq 0} \chi_f(\mathcal{A}A_1^k), & k &\equiv \deg \mathcal{A} + d_f + 2 \pmod{4}.\end{aligned}$$

Тогда из теоремы 14.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 16.4. Пусть Σ – каустика устойчивого лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое связное трехмерное многообразие V . Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_f(A_2^2) &= \frac{1}{2}(3\chi_\Sigma(A_2^3) + \widehat{\chi}_f(A_4)) + \widehat{\chi}_f(A_2A_3^-) + \widehat{\chi}_f(A_2A_3^+) + \widehat{\chi}_f(D_4^+), \\ \widehat{\chi}_f(A_3^-) &= \frac{1}{2}(\widehat{\chi}_f(A_4) + \chi_\Sigma(A_2A_3^-) + 3\widehat{\chi}_f(D_4^-) + \widehat{\chi}_f(D_4^+)), \\ \widehat{\chi}_f(A_3^+) &= \frac{1}{2}(\widehat{\chi}_f(A_4) + \chi_\Sigma(A_2A_3^+) + 3\widehat{\chi}_f(D_4^-) + \widehat{\chi}_f(D_4^+)).\end{aligned}$$

В частности, справедливы следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}\chi_\Sigma(A_2^3) &\equiv \widehat{\chi}_f(A_4), \\ \chi_\Sigma(A_2A_3^-) &\equiv \chi_\Sigma(A_2A_3^+) \equiv \widehat{\chi}_f(A_4) + \widehat{\chi}_f(D_4^-) + \widehat{\chi}_f(D_4^+).\end{aligned}$$

Если многообразие V замкнуто, то

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_f(1) &= \frac{1}{2}(\chi_\Sigma(A_2) - \widehat{\chi}_f(A_4) - \chi_\Sigma(A_2A_3^-) - \chi_\Sigma(A_2A_3^+) - \chi_\Sigma(D_4^-) \\ &\quad - \chi_\Sigma(D_4^+)) - \chi_\Sigma(A_2^3) - \widehat{\chi}_f(D_4^-), \\ \chi_\Sigma(A_2) &\equiv \widehat{\chi}_f(A_4) \pmod{2}.\end{aligned}$$

Все указанные формулы останутся верными, если $\widehat{\chi}$ всюду заменить на $\widetilde{\chi}$.

Из следствий 16.1, 16.4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 16.5. Множество критических точек устойчивого лагранжева отображения гладкого замкнутого многообразия в гладкое замкнутое трехмерное многообразие имеет четную эйлерову характеристику.

СЛЕДСТВИЕ 16.6. Пусть Σ – каустика устойчивого лагранжева отображения $f: L \rightarrow V$ гладкого замкнутого многообразия L в гладкое связное трехмерное многообразие V . Обозначим через N общее количество неособых образов в $f^{-1}(y)$ по всем точкам $y \in \Sigma$, в которых Σ имеет особенность типа A_4 . Тогда

$$\chi_\Sigma(A_2^3) \equiv \frac{N + \chi_\Sigma(A_4)d_f}{2} \pmod{2}. \quad (16.1)$$

В частности, если каустика Σ не имеет особенностей типа A_4 (ласточкин хвост), то число точек трансверсального пересечения трех ее гладких ветвей четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_f(A_4) &\equiv \sum_{k \geq 0: \frac{k-d_f}{2} \equiv 1 \pmod{2}} \chi_f(A_4 A_1^k) \frac{k-d_f}{2} \equiv \sum_{k \geq 0: k \equiv d_f \pmod{2}} \chi_f(A_4 A_1^k) \frac{k-d_f}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 0: k \equiv d_f \pmod{2}} k \chi_f(A_4 A_1^k) - d_f \sum_{k \geq 0: k \equiv d_f \pmod{2}} \chi_f(A_4 A_1^k) \right) \\ &= \frac{1}{2} (N - \chi_\Sigma(A_4) d_f).\end{aligned}$$

Утверждение следует теперь из того, что $\chi_\Sigma(A_2^3) \equiv \tilde{\chi}_f(A_4) \pmod{2}$, а число $\chi_\Sigma(A_4)$ четное.

ЗАМЕЧАНИЕ 16.7. Формула (16.1) является симплектическим обобщением следующего факта контактной геометрии пространственных кривых, доказанного в [13]. Пусть гладкая замкнутая кривая γ , вложенная в $\mathbb{R}P^3$, имеет θ нестягиваемых компонент. Тогда для кривой γ общего положения

$$T \equiv \frac{N + \theta C}{2} \pmod{2},$$

где T – число ее тройных касательных плоскостей (касающихся кривой в трех точках), C – число точек уплощения, а N – общее число точек, в которых γ трансверсально пересекает свои соприкасающиеся плоскости в точках уплощения. В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число ее тройных касательных плоскостей четно.

Список литературы

1. В. А. Васильев, *Лагранжесвы и лезандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000, 312 с.
2. Ю. С. Численко, “Распадения простых особенностей вещественных функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 52–67; англ. пер.: Yu. S. Chislenko, “Decompositions of simple singularities of real functions”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 297–310.
3. В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, М., Фазис, 2000, x+452 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg; PHASIS, Moscow, 2004, xvi+639 pp.
4. В. Д. Седых, “Топология примыканий лагранжесвых особенностей типов A и D ”, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:4 (2014), 83–88; англ. пер.: V. D. Sedykh, “The topology of adjacencies of type A and D Lagrangian singularities”, *Funct. Anal. Appl.*, **48**:4 (2014), 304–308.
5. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, Наука, М., 1982, 304 с.; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, v. I: *The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, xi+382 pp.

6. В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996, x+334 с.; англ. пер.: V. I. Arnol'd, *Singularities of caustics and wave fronts*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **62**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990, xiv+259 pp.
7. C. McCrory, A. Parusiński, “Algebraically constructible functions”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **30**:4 (1997), 527–552.
8. В. Д. Седых, “О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:2 (2012), 171–214; англ. пер.: V. D. Sedykh, “On the topology of wave fronts in spaces of low dimension”, *Izv. Math.*, **76**:2 (2012), 375–418.
9. В. Д. Седых, “Индексы примыкания особенностей волновых фронтов в пространствах небольших размерностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 88–91; англ. пер.: V. D. Sedykh, “Adjacency indices for singularities of wave fronts in low dimensional spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 234–236.
10. V. D. Sedykh, “On the topology of cooriented wave fronts in spaces of small dimensions”, *Mosc. Math. J.*, **11**:3 (2011), 583–598.
11. В. Д. Седых, “О сосуществовании мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения многообразий одинаковой размерности”, *Анализ и особенности. Часть 1*, Сб. статей: К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **258**, Наука, М., 2007, 201–226; англ. пер.: V. D. Sedykh, “On the coexistence of corank 1 multisingularities of a stable smooth mapping of equidimensional manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **258** (2007), 194–217.
12. В. Д. Седых, “Полная система линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 73–78; англ. пер.: V. D. Sedykh, “A complete system of linear relations between the Euler characteristics of manifolds of corank 1 singularities of a generic front”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:4 (2004), 298–301.
13. В. Д. Седых, “Особенности коранга 1 устойчивых гладких отображений и особые касательные гиперплоскости пространственной кривой”, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 413–427; англ. пер.: V. D. Sedykh, “Corank 1 singularities of stable smooth maps and special tangent hyperplanes to a space curve”, *Math. Notes*, **78**:3 (2005), 378–390.

Вячеслав Дмитриевич Седых
(VYACHESLAV D. SEDYKH)

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва
E-mail: vdsedykh@gmail.com

Поступило в редакцию
19.12.2013