Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Богаевский, Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 5–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 09:50:43

УДК 517.922+517.956.6

И. А. Богаевский

Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности

Получена формальная классификация типичных локальных перестроек неявного обыкновенного дифференциального уравнения в его особых точках при изменении одного внешнего параметра. Она состоит из четырех нормальных форм, каждая из которых содержит функциональный инвариант. Доказано, что любую деформацию квадратичного по производной роста уравнения в классе контактной эквивалентности, при которой он остается квадратичным по производной, можно получить с помощью деформации независимой и зависимой переменных. На обобщении этого результата для семейств уравнений основана наша классификация. В качестве ее приложения получена формальная классификация типичных локальных перестроек на плоскости линейного уравнения смешанного типа с частными производными второго порядка в точках, где области эллиптичности и гиперболичности испытывают морсовские перестройки.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: неявное обыкновенное дифференциальное уравнение, формальная замена переменных, нормальная форма, линейное уравнение смешанного типа, характеристика, перестройка, контактная эквивалентность, производящая функция контактного векторного поля.

DOI: 10.4213/im8203

Введение

Неявное обыкновенное дифференциальное уравнение¹ – это поверхность нулевого уровня функции на трехмерном пространстве, образованном значениями независимой переменной, зависимой переменной и ее производной. Для функции общего положения эта поверхность гладкая, однако в типичном однопараметрическом семействе она может становиться особой при изолированных значениях параметра, испытывая с изменением параметра одну из двух возможных морсовских перестроек, изображенных на рис. 1. В настоящей статье получена формальная классификация таких перестроек в типичном однопараметрическом семействе неявных уравнений с точностью до замен обеих переменных, зависящих от параметра, и замены самого параметра.

Наша формальная классификация состоит из четырех нормальных форм, содержащих по одному функциональному инварианту и приведенных в теореме 1. Дискретная топологическая классификация, состоящая также из четырех нормальных форм, но без инвариантов, получена в статье [1]. Перестройки решений во всех четырех топологически различных случаях изображены

¹ Кроме поверхностей, все объекты (многообразия, функции, уравнения, диффеоморфизмы, семейства, замены, векторные поля) предполагаются бесконечно гладкими. Поверхности могут быть особыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00960-а) и Программы Президента РФ «Поддержка ведущих научных школ России» (грант НШ-5138.2014.1).

Рис. 1. Морсовские перестройки

на рис. 2–5, впервые опубликованных в [1]. Бесконечно гладкая и аналитическая классификации по всей видимости необозримы по причинам, изложенным далее.

Рис. 2. Возникновение пары сложенных фокусов при перестройке $(y')^2 + x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, $z = y - \frac{1}{2}xy'$

С современной точки зрения, восходящей к Пуанкаре, неявное обыкновенное дифференциальное уравнение задает поверхность в трехмерном пространстве касательных направлений, приложенных к точкам данного двумерного многообразия, называемого *фазовым*. Эта поверхность проектируется на фазовое многообразие при естественном отображении забывания производной, переводящем направление в точку его приложения. Простейшие типичные критические точки этого проектирования называются *складками* и образуют на поверхности гладкую линию складок. Кроме того, рассматриваемое пространство направлений снабжено естественным полем контактных плоскостей, строящихся по правилу: сдвигать точку приложения можно только в указанном направлении. Контактные плоскости высекают на нашей поверхности поле направлений, интегральные кривые которого при забывании производной проектируются в решения исходного дифференциального уравнения, в типичном случае имеющие полукубические точки возврата на проекции линии складки. Это явление описывается нормальной формой Чибрарио [2]. Вообще, в некоторых точках на линии складок поле направлений не определено, поскольку контактная плоскость касается поверхности уравнения. Именно так в теории неявного дифференциального уравнения появляются сложенные седла, узлы и фокусы – лежащие на линии складок одноименные особые точки поля направлений. Гладкие нормальные формы типичных сложенных седел, узлов и фокусов, содержащие по одному числовому инварианту, получены А. А. Давыдовым в [3].

На рис. 2–5 сплошные линии изображают решения неявного уравнения, а двойные – проекции линий складок. Перестройки на рис. 2, 3 описывают воз-

Рис. 3. Возникновение пары сложенных фокусов при перестройке $-(y')^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, $z = y - \frac{1}{2}xy'$

никновение или исчезновение пары сложенных фокусов, а на рис. 4, 5 – пары сложенных сёдел. Пары числовых инвариантов сложенных особых точек являются причиной появления функциональных инвариантов в нормальных формах. Это связано с тем, что в последних инвариантна уже *зависимость* одного числового инварианта от другого в двух появляющихся или исчезающих сложенных сёдах или фокусах.

Рис. 4. Возникновение пары сложенных сёдел при перестройке $(y')^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, $z = y - \frac{1}{2}xy'$

Бесконечно гладкая и аналитическая классификации описанных перестроек представляются крайне сложными, во всяком случае наша классификация является только формальной по следующей причине: среди сложенных сёдел встречаются резонансные, которые имеют более сложные нормальные формы, полученные в [4]. Такие сёдла появляются как угодно близко к перестройке, однако порядки возможных резонансов растут при приближении к ней. Это накопление резонансов препятствует бесконечно гладкой и аналитической классификациям, в отличие от формальной.

Диффеоморфизмы трехмерного пространства направлений, которые сохраняют естественное поле контактных плоскостей, называются *контактными*. Два неявных уравнения называются *контактно эквивалентными*, если они

Рис. 5. Возникновение пары сложенных седел при перестройке $-(y')^2 + x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, $z = y - \frac{1}{2}xy'$

переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом, и *сильно эквивалентными*, если они переводятся друг в друга диффеоморфизмом фазового многообразия. Контактная эквивалентность слабее сильной, а для приложений нужна именно последняя. С другой стороны, контактную эквивалентность обычно получить проще, поскольку по относительной теореме Дарбу [5] она равносильна орбитальной эквивалентности полей направлений, высекаемых контактными плоскостями на поверхностях, определяемых уравнениями.

Рис. 6. Возникновение пары фокусов при эллиптической перестройке В. И. Арнольда $-p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$

Оказывается, что для уравнений, квадратичных по производной, сильная классификация сводится к контактной в следующем смысле. А именно, согласно теореме 3 настоящей статьи деформация квадратичного по производной уравнения в классе его контактной эквивалентности приводит к уравнению, локально сильно эквивалентному исходному. Другими словами, при локальной классификации относительно сильной эквивалентности какого-то типа уравнений, квадратичных по производной, не может появиться новых непрерывных инвариантов по сравнению с локальной классификацией относительно контактной эквивалентности (хотя новые дискретные инварианты вполне могут возникнуть). Аналогичная теорема 4 справедлива и для семейств уравнений.

Рис. 7. Возникновение пары седел при гиперболической перестройке В. И. Арнольда $p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$

Несмотря на то, что еще в 1988 г. аналогичная теорема для многомерных лежандровых подмногообразий была доказана А. Б. Гивенталем [6], ее вариант для поверхности в трехмерном контактном пространстве до сих пор не был ни сформулирован, ни доказан. Это тем более странно, что вышеописанное отсутствие новых непрерывных инвариантов по сравнению с контактной эквивалентностью наблюдается при классификации квадратичных по производной уравнений во всех решенных задачах и имеет несколько загадочный вид. В частности, наша теорема 3 дает новое более простое доказательство теоремы о нормальных формах сложенных особых точек, первоначально полученной в статье [3] совсем другим методом.

В. И. Арнольду принадлежит следующая формальная классификация перестроек неявных дифференциальных уравнений в типичных однопараметрических семействах с точностью до контактной эквивалентности, зависящей от параметра, и замены самого параметра [7]. А именно, если дифференциальное уравнение испытывает морсовскую перестройку, изображенную на рис. 1 снизу, то она приводится либо к эллиптической (рис. 6), либо к гиперболической (рис. 7) нормальной форме. Морсовскую перестройку, изображенную на рис. 1 сверху, В. И. Арнольд при этом не рассматривал, но его теорема легко переносится на этот случай и дает только одну нормальную форму (рис. 8). Все три упомянутые нормальные формы содержат по одному функциональному инварианту и приведены в теореме 2 настоящей статьи.

Рис. 8. Возникновение пары фокусов при перестройке $p^2 + x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$

Наша классификация перестроек неявных дифференциальных уравнений получается соединением формальной контактной классификации В. И. Арнольда и теоремы 4 о сведении сильной классификации к контактной. При этом в гиперболическом случае получается не одна, а две нормальные формы относительно сильной эквивалентности (см. рис. 4, 5), что демонстрирует вышеупомянутую возможность появления новых дискретных инвариантов при сведении сильной эквивалентности к контактной.

Связь неявных обыкновенных дифференциальных уравнений с уравнениями смешанного типа на плоскости вкратце изложена в §4 настоящей статьи, где также приведена теорема 5 о перестройках уравнения смешанного типа, являющаяся следствием основной теоремы 1 о перестройках неявного дифференциального уравнения. В §3 наши нормальные формы перестроек неявного обыкновенного дифференциального уравнения явно проинтегрированы при нулевом значении входящего в них функционального инварианта.

Список литературы, приведенный в конце статьи, ни в коем случае не претендует на полноту, работ по этой тематике очень много. Более полная библиография и более подробное описание полученных результатов даны в обзоре [8], где, например, описана связь неявных дифференциальных уравнений с релаксационными колебаниями и быстро-медленными системами, которую мы в настоящей работе не рассматриваем.

Автор благодарен А. А. Давыдову и А. О. Ремизову, помощь которых – в различной форме – была очень полезна.

§ 1. Формулировки результатов

Кроме поверхностей, все объекты (многообразия, функции, уравнения, диффеоморфизмы, семейства, замены, векторные поля) предполагаются бесконечно гладкими. Поверхности могут быть особыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неявное обыкновенное дифференциальное уравнение – это поверхность вида $f = 0$, где вещественнозначная функция f определена на открытом подмножестве пространства направлений PTM^2 , приложенных к двумерному многообразию M , называемому *фазовым*. Если вместо функции f берется ее росток в точке, где она обращается в нуль, то запись вида $f = 0$ называется *ростком* неявного обыкновенного дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два неявных обыкновенных дифференциальных уравнения $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$ (или их ростки) называются *сильно эквивалентными*, если функции f_0 и f_1 (или их ростки) переводятся друг в друга диффеоморфизмом (или его ростком) фазового многообразия M и умножением на всюду ненулевую функцию (или ее росток). Если же они переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом PTM^2 (или его ростком), сохраняющим естественное поле контактных плоскостей в PTM^2 , и умножением на всюду ненулевую функцию (или ее росток), то уравнения называются *контактно эквивалентными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сильная эквивалентность уравнений и ростков – это их контактная эквивалентность, сохраняющая естественное расслоение $PTM^2 \rightarrow M^2$ забывания производной.

В локальных координатах (x, y) на фазовом многообразии M в окрестности не параллельного оси y направления любое уравнение записывается в обычной форме $f(x, y, p) = 0$, где $p = dy/dx$. В этих координатах контактные плоскости записываются в хорошо известной канонической форме $dy = p dx$, а расслоение забывания производной принимает вид $(x, y, p) \mapsto (x, y)$. Имея в виду локальную природу всех последующих теорем, в дальнейшем мы используем этот координатный подход.

Основным результатом настоящей статьи является следующая формальная классификация локальных перестроек неявных дифференциальных уравнений в типичных однопараметрических семействах с точностью до сильной эквивалентности, зависящей от параметра, и замены самого параметра. Как обычно, *типичность* объекта означает его принадлежность к некоторому подмножеству, открытому всюду плотному в тонкой топологии Уитни (см., например, [9, гл. I, § 2, с. 33]).

ТЕОРЕМА 1. *Формальный ряд Тейлора типичного семейства неявных обыкновенных дифференциальных уравнений $F(x, y, y', \varepsilon) = 0$, зависящих от одного параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$, в каждой точке A_0 , удовлетворяющей условию $F(A_0) = \partial_x F(A_0) = \partial_y F(A_0) = \partial_{y'} F(A_0) = 0$, приводится к одной из четырех нормальных форм*

$$\pm(y')^2 \pm x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3, \quad \text{где } z = y - \frac{1}{2}xy',$$

формальными заменами переменных (x, y) и параметра ε :

$$x \mapsto X(x, y, \varepsilon), \quad y \mapsto Y(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \mapsto E(\varepsilon),$$

переводящими точку A_0 в начало координат. При замене $y \mapsto -y$ формальный ряд с меняет знак, но его квадрат c^2 является функциональным инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для аналитического семейства F ряд s сходится, а ряды X , Y и E , как правило, не сходятся.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 останется верной, если в ее нормальных формах z заменить на y . Тогда получатся нормальные формы топологической классификации из статьи [1]. Нормальные формы с z хотя и несколько сложнее, чем с y , но зато легче интегрируются в силу наличия у них однопараметрических групп симметрий (см. § 3 настоящей статьи).

В следующей теореме, принадлежащей В. И. Арнольду (см. [7, теорема 2, замечание 3]), приведена формальная классификация перестроек неявных дифференциальных уравнений в типичных однопараметрических семействах с точностью до контактной эквивалентности, зависящей от параметра, и замены самого параметра.

ТЕОРЕМА 2. *Формальный ряд Тейлора типичного семейства уравнений $F(p, x, z, \varepsilon) = 0$, зависящих от одного параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$, в каждой точке B_0 , удовлетворяющей условию $F(B_0) = \partial_p F(B_0) = \partial_x F(B_0) = \partial_z F(B_0) = 0$, приводится к одной из трех нормальных форм*

$$p^2 + x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3, \quad \pm p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$$

формальными заменами переменных (p, x, z) и параметра ε :

$$p \mapsto P(p, x, z, \varepsilon), \quad x \mapsto X(p, x, z, \varepsilon), \quad z \mapsto Z(p, x, z, \varepsilon), \quad \varepsilon \mapsto E(\varepsilon),$$

сохраняющими поле контактных плоскостей

$$dz = \frac{1}{2}p dx - \frac{1}{2}x dp$$

и переводящими точку B_0 в начало координат. При замене $(p, x, z, \varepsilon) \mapsto (-p, x, -z, \varepsilon)$ формальный ряд s меняет знак, но его квадрат s^2 является функциональным инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для аналитического семейства F ряд s сходится, а ряды P , X , Z и E , как правило, не сходятся.

В настоящей статье доказывается, что при деформации в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка уравнения (и семейства уравнений) получаются ростки, сильно эквивалентные исходному. Отсюда с помощью теоремы 2 вытекает наша основная классификационная теорема 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Росток неявного дифференциального уравнения $f(x, y, p) = 0$ называется *квадратичным по производной*, если его ограничение на слой отображения забывания производной $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ имеет порядок 2 в его точке приложения a_0 : $f(a_0) = \partial_p f(a_0) = 0$ и $\partial_p^2 f(a_0) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Деформация объекта* – это семейство объектов, зависящих от одного дополнительного вещественного параметра, обозначаемого далее через t и принимающего значения на содержащем нуль интервале; при $t = 0$ соответствующий объект семейства совпадает с исходным.

ТЕОРЕМА 3. *Любая деформация в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка неявного дифференциального уравнения, при которой он остается квадратичным по производной, оставляет его в том же классе сильной эквивалентности.*

Имеется аналогичная теория для семейств неявных уравнений $F(x, y, y', \varepsilon) = 0$, в которой уравнения и их эквивалентности предполагаются зависящими от l параметров $\varepsilon \in \mathbb{R}^l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Два семейства неявных обыкновенных дифференциальных уравнений $F_0(x, y, p, \varepsilon) = 0$ и $F_1(x, y, p, \varepsilon) = 0$ (или их ростки) называются *сильно эквивалентными*, если функции F_0 и F_1 (или их ростки) переводятся друг в друга заменами переменных $x \mapsto X(x, y, \varepsilon)$, $y \mapsto Y(x, y, \varepsilon)$, зависящими от параметров, и умножением на всюду ненулевую функцию (или ее росток). Если же они переводятся друг в друга зависящими от параметров заменами переменных $x \mapsto X(x, y, p, \varepsilon)$, $y \mapsto Y(x, y, p, \varepsilon)$, $p \mapsto P(x, y, p, \varepsilon)$, сохраняющими поле контактных плоскостей, и умножением на всюду ненулевую функцию (или ее росток), то семейства $F_0(x, y, p, \varepsilon) = 0$ и $F_1(x, y, p, \varepsilon) = 0$ (или их ростки) называются *контактно эквивалентными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Сильная эквивалентность семейств уравнений и ростков – это их контактная эквивалентность, сохраняющая расслоение $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ забывания производной.

ТЕОРЕМА 4. *Любая деформация в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка семейства неявных дифференциальных уравнений, при которой он остается квадратичным по производной, оставляет его в том же классе сильной эквивалентности.*

§ 2. Доказательства

Основная теорема 1 настоящей статьи доказывается с помощью теоремы 2 и теоремы 4 следующим образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Росток типичного однопараметрического семейства неявных уравнений в точке перестройки с точностью до замены параметра принадлежит классу контактной эквивалентности одного из трех типов, описанных в теореме 2. В каждом из этих трех случаев заменим контактную эквивалентность на сильную с помощью теоремы 4 так, как это описано далее. Для этого нам понадобится следующее наблюдение. А именно, группа ростков в нуле диффеоморфизмов, сохраняющих поле контактных плоскостей и точку приложения ростка, состоит из двух связных компонент. Одна из них – это связная компонента Γ_0 тождественного диффеоморфизма, а вторая – связная компонента преобразования $(p, x, z, \varepsilon) \mapsto (-p, x, -z, \varepsilon)$ в координатах теоремы 2, которое меняет знак функционального инварианта c .

Рассмотрим класс контактной эквивалентности относительно группы Γ_0 ростка любого семейства неявных уравнений, формальный ряд Тейлора которого приводится к виду $p^2 + x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$ из теоремы 2. Этот класс связан и состоит только из квадратичных по производной ростков, поскольку каждый из них описывает возникновение или исчезновения сферы. Согласно теореме 4 все ростки этого класса сильно эквивалентны друг другу.

Аналогично, связный класс контактной Γ_0 -эквивалентности ростка любого семейства, формальный ряд Тейлора которого приводится к виду $-p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, также состоит только из квадратичных по производной ростков, поскольку отображение забывания производной хотя и меняется при контактной эквивалентности, но его ядро в нуле обязательно лежит в контактной плоскости $dz = 0$, расположенной по отношению к конусу $-p^2 - x^2 + z^2 = c(0)z^3$ так, как показано на рис. 9, а. Итак, согласно теореме 4 все ростки этого класса сильно эквивалентны друг другу.

Рис. 9. Конус, контактная плоскость и ядро забывания производной в момент перестройки

Наконец, связный класс контактной Γ_0 -эквивалентности ростка любого семейства, формальный ряд Тейлора которого в нуле приводится к виду $p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, состоит уже не только из квадратичных по производной ростков, поскольку ядро в нуле отображения забывания производной может касаться конуса $p^2 - x^2 + z^2 = c(0)z^3$, хотя и лежит в контактной плоскости $dz = 0$, расположенной, как показано на рис. 9, b и рис. 9, c, где изображены два возможных случая расположения ядра и конуса при условии, что они не касаются друг друга. Согласно рис. 9, b и 9, c квадратичные по производной ростки из нашего класса образуют две связные компоненты, в каждой из которых все ростки сильно эквивалентны согласно теореме 4. Эти две компоненты переводятся друг в друга контактным преобразованием $(p, x, z) \mapsto (x, -p, z)$ из группы Γ_0 . Поэтому в данном случае одна Γ_0 -нормальная форма расщепляется на две $\pm(p^2 - x^2) + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$, не сильно эквивалентные друг другу. Теорема доказана.

Теорема 2 доказана в [7, теорема 2, замечание 3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим квадратичный по производной росток в точке a_0 неявного дифференциального уравнения $f(x, y, p) = 0$, т.е. $f(a_0) = \partial_p f(a) = 0$ и $\partial_p^2 f(a_0) \neq 0$, и деформацию ростка тождественного отображения $g_0: (x, y, p) \mapsto (x, y, p)$, состоящую из ростков в точке a_0 диффеоморфизмов g_t , сохраняющих поле контактных плоскостей $dy = p dx$. Ростки с точками приложения $g_t a_0$ неявных дифференциальных уравнений $f_t = 0$, где $f_t = f \circ g_t^{-1}$, контактно эквивалентны друг другу по определению. Пусть, кроме того, все они квадратичны по производной p ; достаточно доказать, что тогда все ростки уравнений $f_t = 0$ сильно эквивалентны друг другу при достаточно малых t . Сильная эквивалентность ростков $f_t = 0$ при всех t следует из последнего факта благодаря связности интервала, на котором определена деформация: отношение сильной эквивалентности ростков $f_t = 0$ разбивает значения t на непересекающиеся открытые множества.

Без ограничения общности можно считать, что точка $g_t a_0$ находится в начале координат (x, y, p) при всех t , поскольку этого всегда можно добиться сильной эквивалентностью, зависящей от t . Пусть $v_t(g_t a) = \frac{d}{dt} g_t a$, $a = (x, y, p)$, – контактное векторное поле, вообще, зависящее от t , по которому однозначно восстанавливается деформация g_t . Векторное поле v_t , в свою очередь, однозначно восстанавливается по своей производящей функции $k_t(a) = \alpha(v_t(a))$, где $\alpha = p dx - dy$ – контактная 1-форма, по следующим известным формулам:

$$\dot{x} = \partial_p k_t, \quad \dot{y} = p \partial_p k_t - k_t, \quad \dot{p} = -p \partial_y k_t - \partial_x k_t. \quad (1)$$

Рассмотрим гомологическое уравнение

$$k_t = \varphi_t + p\psi_t + \theta_t f_t, \quad \varphi_t, \psi_t \in \mathcal{E}_{t,x,y}, \quad \theta_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p}, \quad (2)$$

относительно неизвестных ростков φ_t , ψ_t и θ_t , где через $\mathcal{E}_*$ обозначены алгебры ростков функций в нуле от указанных вместо знака $*$ переменных. Оно разрешимо согласно подготовительной теореме Мальгранжа–Вейерштрасса, примененной к отображению $\pi: (t, x, y, p) \mapsto (t, x, y)$ и к факторалгебре $\mathfrak{f} = \mathcal{E}_{t,x,y,p}/(f_t)$, где (f_t) – идеал, порожденный ростком $f_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p}$. В самом деле, факторалгебра $\mathfrak{f}$ конечно порождена (классом [1]) как модуль над $\mathcal{E}_{t,x,y,p}$ и является также $\mathcal{E}_{t,x,y}$ -модулем в силу естественного гомоморфизма $\pi^*: \mathcal{E}_{t,x,y} \rightarrow \mathcal{E}_{t,x,y,p}$. Пусть $\mathfrak{m}_{t,x,y}$ – максимальный идеал в $\mathcal{E}_{t,x,y}$. Тогда

векторное пространство $\mathfrak{f}/\mathfrak{m}_{t,x,y}\mathfrak{f} = \mathcal{E}_p/(f(0,0,p))$ над $\mathbb{R} \cong \mathcal{E}_{t,x,y}/\mathfrak{m}_{t,x,y}$ порождено классами [1] и $[p]$ вследствие условия квадратичности исходного ростка f по p . Следовательно, по вышеупомянутой теореме Мальгранжа–Вейерштрасса ростки 1 и p порождают $\mathfrak{f}$ как $\mathcal{E}_{t,x,y}$ -модуль, откуда и следует разрешимость нашего гомологического уравнения (2).

Пусть теперь w_t – росток контактного векторного поля с производящей функцией $\varphi_t + p\psi_t$. Докажем, что при любых t в начале координат поле w_t обращается в нуль. Обозначим через $\mathfrak{e}$ идеал в $\mathcal{E}_{t,x,y,p}$, порожденный ростками p^2 , px , x^2 , y и состоящий из ростков. Согласно формулам (1) росток контактного векторного поля обращается в нуль в начале координат тогда и только тогда, когда росток его производящей функции принадлежит идеалу $\mathfrak{e}$. Предположим от противного, что $\varphi_t + p\psi_t \notin \mathfrak{e}$. Тогда и $\theta_t f_t \notin \mathfrak{e}$, что следует из гомологического уравнения (2), поскольку $k_t \in \mathfrak{e}$, так как $v_t(0) = 0$. Разлагая теперь ростки, входящие в гомологическое уравнение (2), в ряды Тейлора по x , y и p с коэффициентами из $\mathcal{E}_t$, получаем следующее. Свободный член и коэффициент при p в разложении f_t обращаются в нуль, поскольку росток f_t квадратичен по p . Поэтому ни коэффициент при x в разложении f_t , ни свободный член в разложении θ_t не обращаются в нуль, иначе $\theta_t f_t \in \mathfrak{e}$. Далее, согласно гомологическому уравнению (2) коэффициент при p^2 в разложении k_t не равен нулю, поскольку росток f_t квадратичен по p , а свободный член в разложении θ_t не обращается в нуль по только что доказанному. Итак, $k_t \in \mathfrak{e}$, причем коэффициент при p^2 не равен нулю, а $f_t \in \phi_t x + \mathfrak{e}$, где $\phi_t \in \mathcal{E}_t$ – ненулевой росток. Однако согласно формулам (1) имеем

$$v_t(f_t) \in \varphi_t \dot{x} + v_t(\mathfrak{e}) = \varphi_t \partial_p k_t + v_t(\mathfrak{e}) \subseteq \varphi_t \partial_p k_t + \mathfrak{e},$$

откуда немедленно следует, что коэффициент при p в разложении производной $v_t(f_t)$ (ростка f_t вдоль контактного векторного поля v_t с производящей функцией k_t) не обращается в нуль. Однако росток f_t квадратичен по p , значит, коэффициент при p в разложении $\partial_t f_t$ равен нулю, откуда следует обращение в нуль коэффициента при p в разложении производной $v_t(f_t)$, так как $\partial_t f_t + v_t(f_t) = 0$, поскольку $f_t \circ g_t$ не зависит от t по условию. Полученное противоречие доказывает требуемое обращение в нуль: $w_t(0) = 0$.

Итак, контактное векторное поле w_t задает деформацию h_t тождественного диффеоморфизма $h_0: (x, y, p) \mapsto (x, y, p)$ окрестности нуля в классе диффеоморфизмов, оставляющих нуль на месте и сохраняющих поле контактных плоскостей. Кроме того, диффеоморфизмы h_t сохраняют расслоение $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ забывания производной в силу линейности производящей функции $\varphi_t + p\psi_t$ по p .

Для завершения доказательства покажем, что при любом t построенный диффеоморфизм h_t переводит росток $f = f_0$ в росток $f_t = f \circ g_t^{-1}$, умноженный на росток ненулевой функции ω_t : $(f_t \omega_t) \circ h_t = f$. Геометрически это означает, что росток поверхности $f = 0$ переводится при действии диффеоморфизма h_t в тот же самый росток поверхности $f_t = 0$, что и при действии диффеоморфизма g_t . Это действительно так, поскольку разность векторных полей v_t и w_t , задающих деформации g_t и h_t соответственно, касается поверхности $f_t = 0$ при любом t . В самом деле, согласно гомологическому уравнению (2) производящая функция этой разности равна $\theta_t f_t$ и обращается в нуль на поверхности $f_t = 0$.

Повторим последнее рассуждение более формально. Согласно формулам (1) имеем $v_t(f_t) - w_t(f_t) = \varrho_t f_t$, где ϱ_t – производная f_t вдоль контактного векторного поля с производящей функцией θ_t , поскольку $\theta_t f_t$ – производящая функция контактного векторного поля $v_t - w_t$ в силу гомологического уравнения (2). Кроме того, $\partial_t f_t + v_t(f_t) = 0$, поскольку $f_t \circ g_t$ не зависит от t по условию. Соединяя эти два равенства, получаем $\partial_t f_t + w_t(f_t) + \varrho_t f_t = 0$.

Найдем росток функции ω_t из дифференциального уравнения с частными производными $\partial_t(\ln \omega_t) + w_t(\ln \omega_t) = \varrho_t$ и начального условия $\omega_0 \equiv 1$. Тогда $\partial_t(\omega_t f_t) + w_t(\omega_t f_t) = 0$, где слева записана полная производная ростка $\omega_t f_t$ вдоль траекторий поля w_t . Поэтому $(\omega_t f_t) \circ h_t$ не зависит от t , откуда следует, что $(\omega_t f_t) \circ h_t = (\omega_0 f_0) \circ h_0 = f$.

Итак, при каждом t построенный диффеоморфизм h_t осуществляет сильную эквивалентность между ростками уравнений $f = 0$ и $f_t = 0$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 получается из предыдущего формальным добавлением новых переменных ε .

Рассмотрим квадратичный по производной p росток в точке A_0 семейства неявных дифференциальных уравнений $F(x, y, p, \varepsilon) = 0$, т. е. $F(A_0) = \partial_p F(A_0) = 0$ и $\partial_p^2 F(A_0) \neq 0$, и деформацию тождественного отображения $G_0: (x, y, p, \varepsilon) \mapsto (x, y, p, \varepsilon)$, состоящую из диффеоморфизмов вида

$$G_t: (x, y, p, \varepsilon) \mapsto (X_t(x, y, p, \varepsilon), Y_t(x, y, p, \varepsilon), P_t(x, y, p, \varepsilon), \varepsilon),$$

сохраняющих поле плоскостей $dy = p dx$ и не меняющих параметров ε . Ростки с точками приложения $G_t A_0$ семейств неявных дифференциальных уравнений $F_t = 0$, где $F_t = F \circ G_t^{-1}$, контактно эквивалентны друг другу по определению. Как и в доказательстве теоремы 3, достаточно доказать, что они еще и сильно эквивалентны друг другу при достаточно малых значениях t . Опять-таки сильная эквивалентность ростков $F_t = 0$ при всех t следует из последнего факта благодаря связности интервала, на котором определена деформация: отношение сильной эквивалентности ростков $F_t = 0$ разбивает значения t на непересекающиеся открытые множества.

Без ограничения общности можно считать, что точка $G_t A_0$ находится в начале координат (x, y, p, ε) при всех t , поскольку этого всегда можно добиться сдвигом параметров и сильной эквивалентностью, зависящей от t и ε . Пусть $V_t(G_t A) = \frac{d}{dt} G_t A$, $A = (x, y, p, \varepsilon)$, – векторное поле, которое восстанавливается по своей производящей функции K_t по формулам $\dot{x} = \partial_p K_t$, $\dot{y} = p \partial_p K_t - K_t$, $\dot{p} = -p \partial_y K_t - \partial_x K_t$, $\dot{\varepsilon} = 0$.

Рассмотрим гомологическое уравнение

$$K_t = \Phi_t + p \Psi_t + \Theta_t F_t, \quad \Phi_t, \Psi_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,\varepsilon}, \quad \Theta_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p,\varepsilon}, \quad (3)$$

относительно неизвестных ростков Φ_t , Ψ_t и Θ_t . Оно разрешимо согласно подготовительной теореме Мальгранжа–Вейерштрасса, примененной к отображению $(t, x, y, p, \varepsilon) \mapsto (t, x, y, \varepsilon)$ и факторалгебре $\mathcal{E}_{t,x,y,p,\varepsilon}/(F_t)$.

Пусть теперь W_t – векторное поле с производящей функцией $\Phi_t + p \Psi_t$. Равенство $W_t(0) = 0$ следует из равенства $w_t(0) = 0$, полученного в доказательстве теоремы 3, если положить $\varepsilon = 0$ в гомологическом уравнении (3), сведя его к прежнему гомологическому уравнению (2). Поэтому векторное поле W_t задает деформацию H_t тождественного диффеоморфизма $H_0: (x, y, p, \varepsilon) \mapsto$

(x, y, p, ε) окрестности нуля в классе диффеоморфизмов, оставляющих нуль на месте и сохраняющих поле плоскостей $dy = p dx$. Кроме того, диффеоморфизмы H_t не меняют параметров и сохраняют расслоение $(x, y, p, \varepsilon) \mapsto (x, y, \varepsilon)$ в силу линейности производящей функции $\Phi_t + p\Psi_t$ по p .

Доказательство того факта, что при любом t построенный диффеоморфизм H_t переводит росток $F = F_0$ в росток $F_t = F \circ G_t^{-1}$, умноженный на росток ненулевой функции, повторяет соответствующий фрагмент предыдущего доказательства. А именно, геометрически это означает, что росток поверхности $F = 0$ переводится при действии диффеоморфизма H_t в тот же самый росток поверхности $F_t = 0$, что и при действии диффеоморфизма G_t . Это действительно так, поскольку разность векторных полей V_t и W_t , задающих деформации G_t и H_t соответственно, касается поверхности $F_t = 0$ при любом t . В самом деле, согласно гомологическому уравнению (3) производящая функция этой разности равна $\Theta_t F_t$ и обращается в нуль на поверхности $F_t = 0$.

Итак, при каждом t построенный диффеоморфизм H_t осуществляет сильную эквивалентность между ростками семейств уравнений $F = 0$ и $F_t = 0$. Теорема доказана.

§ 3. Явное интегрирование при $c \equiv 0$

Поля направлений, отсекаемых контактными плоскостями в нормальных формах В.И. Арнольда из теоремы 2, при $c \equiv 0$ интегрируются явно в силу инвариантности относительно поворотов или квазиповоротов вокруг оси z . А именно, поле контактных плоскостей и нормальные формы $\pm(p^2 + x^2) + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$ инвариантны относительно преобразований $(p, x, z) \mapsto (p \cos \beta - x \sin \beta, p \sin \beta + x \cos \beta, z)$, а поле контактных плоскостей и нормальная форма $p^2 - x^2 + z^2 = \varepsilon + c(\varepsilon)z^3$ — относительно преобразований $(p, x, z) \mapsto (p \operatorname{ch} \beta + x \operatorname{sh} \beta, p \operatorname{sh} \beta + x \operatorname{ch} \beta, z)$. Выпишем все решения (как функции параметра τ) при $c \equiv 0$ в зависимости от знака параметра ε :

1) $p^2 + x^2 + z^2 = \lambda^2$:

$$(p, x, z) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\cos(\tau + \beta), \sin(\tau + \beta), \operatorname{sh} \frac{\lambda\tau}{2} \right);$$

2) $-p^2 - x^2 + z^2 = -\lambda^2$:

$$(p, x, z) = \frac{\lambda}{\cos \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\cos(\tau + \beta), \sin(\tau + \beta), \sin \frac{\lambda\tau}{2} \right);$$

3) $-p^2 - x^2 + z^2 = 0$:

$$(p, x, z) = \frac{2}{\tau} (\cos(\tau + \beta), \sin(\tau + \beta), -1);$$

4) $-p^2 - x^2 + z^2 = \lambda^2$:

$$(p, x, z) = \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\cos(\tau + \beta), \sin(\tau + \beta), -\operatorname{ch} \frac{\lambda\tau}{2} \right);$$

$$5) p^2 - x^2 + z^2 = -\lambda^2:$$

$$(p, x, z) = \frac{\lambda}{\cos \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\operatorname{sh}(\tau + \beta), \operatorname{ch}(\tau + \beta), -\sin \frac{\lambda\tau}{2} \right);$$

$$6) p^2 - x^2 + z^2 = 0:$$

$$(p, x, z) = (\pm x, x, 0) \quad \text{или} \quad \frac{2}{\tau} (\operatorname{sh}(\tau + \beta), \operatorname{ch}(\tau + \beta), 1);$$

$$7) p^2 - x^2 + z^2 = \lambda^2: (p, x, z) = (\pm x, x, \pm \lambda), \text{ или}$$

$$\frac{\lambda}{\operatorname{ch} \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\operatorname{ch}(\tau + \beta), \operatorname{sh}(\tau + \beta), \operatorname{sh} \frac{\lambda\tau}{2} \right), \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{\operatorname{sh} \frac{\lambda\tau}{2}} \left(\operatorname{sh}(\tau + \beta), \operatorname{ch}(\tau + \beta), \operatorname{ch} \frac{\lambda\tau}{2} \right).$$

§ 4. Уравнения смешанного типа на плоскости

Результаты о нормальной форме неявного дифференциального уравнения находят естественное применение в теории линейного уравнения второго порядка с частными производными на плоскости. В настоящем параграфе мы кратко опишем эту связь.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными на плоскости с координатами x и y и неизвестной функцией $u(x, y)$:

$$\alpha(x, y)u_{xx} + 2\beta(x, y)u_{xy} + \gamma(x, y)u_{yy} = \sigma(x, y, u, u_x, u_y).$$

Задача состоит в том, чтобы упростить левую часть уравнения, называемую *главной*, с помощью гладкой замены координат $x \mapsto X(x, y)$, $y \mapsto Y(x, y)$, не обращая внимания на его правую часть σ . Согласно общей теории для решения этой задачи нужно приводить не само уравнение, а уравнение характеристик

$$\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2 = 0,$$

которое можно переписать в наших предыдущих обозначениях в виде неявного обыкновенного дифференциального уравнения $\alpha p^2 - 2\beta p + \gamma = 0$.

Хорошо известно, что в окрестности точки, где левая часть уравнения характеристик знакоопределена ($\alpha\gamma - \beta^2 > 0$), исходное уравнение с частными производными приводится к виду $u_{xx} + u_{yy} = \tilde{\sigma}$ и называется *эллиптическим* (имеет *эллиптический тип*). В окрестности точки, где левая часть уравнения характеристик не вырождена и не знакоопределена ($\alpha\gamma - \beta^2 < 0$), исходное уравнение с частными производными приводится к виду $u_{xx} - u_{yy} = \tilde{\sigma}$ и называется *гиперболическим* (имеет *гиперболический тип*). Исходное уравнение имеет в точке *смешанный тип*, если в любой ее окрестности оно имеет точки как эллиптического, так и гиперболического типов.

Если уравнение характеристик приводится к нормальной форме Чибрио $p^2 + x = 0$, то исходное уравнение приводится к уравнению Трикоми $u_{xx} + xu_{yy} = \tilde{\sigma}$ вообще с нетривиальной правой частью $\tilde{\sigma}$. Классическое уравнение Трикоми $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ – это простейшее уравнение смешанного типа. Нормальные формы сложенных особых точек $p^2 + kp^2 + y = 0$, содержащие вещественный инвариант k и полученные в [3], дают более сложные нормальные

формы линейного уравнения смешанного типа $u_{xx} + (kx^2 + y)u_{yy} = \tilde{\sigma}$. Однако при некоторых значениях k , называемых *резонансными* и образующих счетное множество, нормальные формы еще сложнее – они найдены в [4]. Локальная классификация линейного уравнения с типичными коэффициентами на этом заканчивается, любая его точка является одной из следующих: эллиптической, гиперболической, Чибрарио–Трикоми, сложенным узлом, сложенным фокусом или сложенным седлом, при этом сложенные узлы и седла могут содержать резонансы.

В типичных однопараметрических семействах линейных уравнений возможны более сложные вырождения. Бесконечно гладкие нормальные формы некоторых из них исследованы в статье [10]. Теорема 1 (см. замечание 1) настоящей статьи влечет следующий результат о формальной нормальной форме типичного однопараметрического семейства линейных уравнений на плоскости в точке, где области эллиптичности и гиперболичности испытывают морсовские перестройки.

ТЕОРЕМА 5. *Семейство дифференциальных уравнений с частными производными*

$$\alpha(x, y, \varepsilon)u_{xx} + 2\beta(x, y, \varepsilon)u_{xy} + \gamma(x, y, \varepsilon)u_{yy} = \sigma(x, y, \varepsilon, u, u_x, u_y),$$

коэффициенты α , β и γ которых – типичные гладкие функции точки плоскости (x, y) и одномерного вещественного параметра ε , в точке $O = (x_0, y_0, \varepsilon_0)$, где определитель $\det = \alpha\gamma - \beta^2$ принимает нулевое критическое значение, т.е. $\det(O) = \det_x(O) = \det_y(O) = 0$, приводится к одной из 4-х формальных нормальных форм

$$u_{xx} + (\varepsilon \pm x^2 \pm y^2 + c(\varepsilon)y^3)u_{yy} = \tilde{\sigma}, \quad \det = \varepsilon \pm x^2 \pm y^2 + c(\varepsilon)y^3$$

формальными заменами переменных (x, y) и параметра ε :

$$x \mapsto X(x, y, \varepsilon), \quad y \mapsto Y(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \mapsto E(\varepsilon),$$

переводящими точку O в начало координат. При замене $y \mapsto -y$ формальный ряд с меняет знак, но его квадрат c^2 является функциональным инвариантом. Явные условия типичности таковы:

- 1) хотя бы один из коэффициентов α , β , γ в точке O не обращается в нуль;
- 2) второй дифференциал определителя в точке O – невырожденная квадратичная форма

$$Q = \frac{1}{2}\det_{xx}(O)dx^2 + \det_{xy}(O)dx dy + \frac{1}{2}\det_{yy}(O)dy^2;$$

3) если Q положительно определена, то исходное семейство уравнений приводится к нормальной форме с $\det = \varepsilon + x^2 + y^2 + c(\varepsilon)y^3$;

4) если Q отрицательно определена, то исходное семейство уравнений приводится к нормальной форме с $\det = \varepsilon - x^2 - y^2 + c(\varepsilon)y^3$;

5) если Q не знакоопределена, но ее ограничение на (одномерное) ядро формы $\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2$ в точке O положительно определено, то исходное семейство уравнений приводится к нормальной форме с $\det = \varepsilon + x^2 - y^2 + c(\varepsilon)y^3$;

6) если Q не знакоопределена, но ее ограничение на (одномерное) ядро формы $\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2$ в точке O отрицательно определено, то исходное семейство уравнений приводится к нормальной форме с $\det = \varepsilon - x^2 + y^2 + c(\varepsilon)y^3$.

Список литературы

1. J. W. Bruce, G. J. Fletcher, F. Tari, “Bifurcations of implicit differential equations”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **130**:3 (2000), 485–506.
2. M. Cibrario, “Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto”, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Ser. II*, **65** (1932), 889–906.
3. А. А. Давыдов, “Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 1–10; англ. пер.: A. A. Davydov, “Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point”, *Funct. Anal. Appl.*, **19**:2 (1985), 81–89.
4. А. А. Давыдов, Э. Росалес-Гонсалес, “Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости”, *Докл. РАН*, **350**:2 (1996), 151–154; англ. пер.: A. A. Davydov, È. Rosales-Gonsales, “The complete classification of typical second-order linear partial-differential equations on the plane”, *Dokl. Math.*, **54**:2 (1996), 669–672.
5. В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, “Симплектическая геометрия”, *Динамические системы* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **4**, ВИНТИ, М., 1985, 5–135.
6. А. Б. Гивенталь, “Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., **33**, ВИНТИ, М., 1988, 55–112; англ. пер.: A. B. Givental’, “Singular Lagrangian manifolds and their Lagrangian mappings”, *J. Soviet Math.*, **52**:4 (1990), 3246–3278.
7. В. И. Арнольд, “О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями”, *Матем. заметки*, **44**:1 (1988), 3–18; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Surfaces defined by hyperbolic equations”, *Math. Notes*, **44**:1 (1988), 489–497.
8. А. О. Ремизов, “Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений”, *Оптимальное управление*, СМФН, **19**, РУДН, М., 2006, 131–170; англ. пер.: A. O. Remizov, “Multidimensional Poincaré construction and singularities of lifted fields for implicit differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **151**:6 (2008), 3561–3602.
9. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. I: *Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982, 304 с.; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, v. I: *The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, xi+382 pp.
10. А. А. Давыдов, Л. Чинь Тхи Зиеп, “Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек”, *УМН*, **65**:5(395) (2010), 189–190; англ. пер.: A. A. Davydov, L. Trinh Thi Diep, “Normal forms for families of linear equations of mixed type near non-resonant folded singular points”, *Russian Math. Surveys*, **65**:5 (2010), 984–986.

Илья Александрович Богаевский
(IL’YA A. BOGAEVSKI)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ibogaevsk@gmail.com

Поступило в редакцию
23.12.2013