Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Симонов, Обобщение точно транзитивных групп,
Изв. РАН. Сер. матем., 2014, том 78, выпуск 6, 153–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:14:41

УДК 512.573+512.543.7

А. А. Симонов

Обобщение точно транзитивных групп

Рассмотрены группы, близкие к точно n -транзитивным, как обобщения аффинных, проективных и n -транзитивных групп преобразований. Рассмотрены псевдополя степени n как обобщения алгебраических систем почти-области, КТ-поля и полей степени n . Доказано, что группы, близкие к точно n -транзитивным, и псевдополя степени n категорно эквивалентны.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: транзитивная группа, почти-область, почти-кольцо, категория.

DOI: 10.4213/im8214

Введение

К. Жордан в 1872 г. обнаружил [1], что среди конечных групп, за исключением симметрических S_n , знакопеременных A_{n+2} и групп Матье M_{11} и M_{12} , отсутствуют точно n -транзитивные группы при $n > 3$.

Р. Д. Кармайкл в 1931 г. [2] пришел к выводу, что конечные точно 2-транзитивные группы перестановок являются группами аффинных преобразований $x \mapsto xb + a$, $b \neq 0$, конечного почти-поля. Г. Цассенхауз в 1936 г. [3], [4] повторил этот результат и дополнительно показал, что каждая конечная точно 3-транзитивная группа изоморфна группе преобразований $x \mapsto \frac{xb+a}{xd+c}$ с подходящими условиями для a, b, c, d , построенной над полем $F \cup \{\infty\}$ и в некоторых случаях над почти-полем.

Обобщения теоремы Жордана рассматривались М. Холлом [5] в случае транзитивных и бесконечных групп. В бесконечном случае для точно 2-транзитивной группы он использовал дополнительное условие, приводящее к точно 2-транзитивной группе преобразований, но построенной над *планарным почти-полем*. Под планарностью подразумевается условие, когда уравнение вида $xa = xb + c$ при $a \neq b$ имеет единственное решение. Однако Дж. Л. Земмер [6] построил и непланарные почти-поля.

Ж. Титс [7] показал, что точно 2-транзитивная группа, если она локально компактна, связна и действует на топологическом пространстве, изоморфна группе преобразований $x \mapsto xb + a$, $b \neq 0$, вещественного $\mathbb{R}$ или комплексного $\mathbb{C}$ поля, или тела кватернионов $\mathbb{H}$. Точно 3-транзитивная группа в этом случае будет изоморфна группе преобразований $x \mapsto \frac{xb+a}{xd+c}$ с условием $ad - cb \neq 0$. Такую группу можно построить только над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Несмотря на отсутствие бесконечных точно k -транзитивных групп для $k > 3$ известно, что бесконечные k -транзитивные, но не $(k+1)$ -транзитивные группы существуют для произвольного k [8].

Если не требовать от группы локальной компактности и связности, то точно 2-транзитивная группа будет изоморфна аффинной группе преобразований $x \mapsto xb + a$ некоторого псевдополя. Под *псевдополем* в начале 50-х годов прошлого века Ж. Титс [7] определил алгебраическую систему $\langle B; \cdot, +, ^{-1}, -, 1, 0 \rangle$ с двумя бинарными операциями, удовлетворяющую аксиомам:

- 1) $\langle B; +, -, 0 \rangle$ – группоид с нейтральным элементом 0;
- 2) $a + (-a) = 0 \Rightarrow (-a) + a = 0$;
- 3) $\langle B_1; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ – группа с нейтральным элементом 1, где $B_1 = B \setminus \{0\}$;
- 4) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;
- 5) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
- 6) существует $r_{a,b} \in B_1$ такое, что $(x + a) + b = x \cdot r_{a,b} + (a + b)$ для любого $x \in B$.

Над неизоморфными псевдополями можно построить изоморфные точно 2-транзитивные группы. Для избежания этого Х. Карзелом [9] в середине 60-х годов прошлого века была введена близкая алгебраическая система – *почти-область* – как система с двумя бинарными операциями $\mathcal{B} = \langle B; \cdot, +, ^{-1}, -, 1, 0 \rangle$. При этом была усилена аксиома 1) и изменена аксиома 4):

- 1*) $\langle B; +, -, 0 \rangle$ – лупа с нейтральным элементом 0;
- 4*) $x \cdot 0 = 0$.

Наряду с обобщением почти-поля до почти-области в бесконечном случае для построения *точно 3-транзитивных групп* в [10] было введено КТ-поле, являющееся парой $(\mathcal{B}, \sigma)$, где $\mathcal{B}$ – почти-область, а σ – автоморфизм группы $B_1 = \langle B_1; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$. Для автоморфизма справедливо тождество

$$\sigma(1 - \sigma(x)) = 1 - \sigma(1 - x), \quad x \in B_1 \setminus \{1\}. \quad (1)$$

П. М. Кон [11, лемма 7.5.1] рассматривал эквивалентное определение тела $\mathcal{P} = \langle P; \cdot, +, ^{-1}, -, 1, 0 \rangle$, которое он строил при помощи унарной операции $\varphi: P_0 \rightarrow P_0$, действующей на мультипликативной группе $P_1 = \langle P_1; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$, где $P_0 = P_1 \setminus \{1\}$. Для операции φ выполняются следующие аксиомы:

- 1) $\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1}$, $x, y \in P_0$;
- 2) $\varphi(\varphi(x)) = x$, $x \in P_0$;
- 3) $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(\varphi(x)(\varphi(y))^{-1})\varphi(y^{-1})$, $x, y \in P_0$, $x \neq y$;
- 4) элемент $b = \varphi(x^{-1})x(\varphi(x))^{-1}$ не зависит от выбора $x \in P_0$.

При этом получается, что $b = -1$, а $\varphi(x) = 1 - x$. Фактически лемма Кона утверждает, что алгебраические системы – тела $\langle P; \cdot, +, ^{-1}, -, 1, 0 \rangle$ и $\langle P; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1, 0 \rangle$ – рационально эквивалентны.

Напомним необходимый вариант определения *рациональной эквивалентности* Мальцева [12], [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (рациональная эквивалентность). Классы $K\mathfrak{A}_1$ алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ сигнатуры σ_1 и $K\mathfrak{A}_2$ сигнатуры σ_2 называют *рационально эквивалентными*, если существуют отображения $F_2 (F_1)$, ставящие в соответствие символам сигнатуры σ_1 термы сигнатуры σ_2 (символам сигнатуры σ_2 – термы сигнатуры σ_1) с сохранением аргументности (числа аргументов функции $f^{(n)} \in \sigma_i$ и терма $t^{(n)} \in F_i(\sigma_{-i})$ совпадают), такие, что:

а) для любой алгебры $\mathfrak{A}_1 \in K\mathfrak{A}_1$ алгебра $F_2(\mathfrak{A}_1)$ входит в класс $K\mathfrak{A}_2$, операции σ_2 алгебры $F_2(\mathfrak{A}_1)$ определяются на A соответствующими $F_2(\sigma_1)$ -термами алгебры $\mathfrak{A}_1$;

б) для любой алгебры $\mathfrak{A}_2 \in K\mathfrak{A}_2$ алгебра $F_1(\mathfrak{A}_2)$ входит в класс $K\mathfrak{A}_1$, операции σ_1 алгебры $F_1(\mathfrak{A}_2)$ определяются на A соответствующими $F_1(\sigma_2)$ -термами алгебры $\mathfrak{A}_2$;

в) для любой алгебры $\mathfrak{A}_1 \in K\mathfrak{A}_1$ выполнено равенство $F_1(F_2(\mathfrak{A}_1)) = \mathfrak{A}_1$;

г) для любой алгебры $\mathfrak{A}_2 \in K\mathfrak{A}_2$ выполнено равенство $F_2(F_1(\mathfrak{A}_2)) = \mathfrak{A}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Под *рациональной эквивалентностью алгебр* $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ имеем в виду рациональную эквивалентность классов $K\mathfrak{A}_1$ и $K\mathfrak{A}_2$.

Неформально рациональная эквивалентность означает, что на множестве A определены два набора операций σ_1 и σ_2 так, что эти операции можно выразить друг через друга взаимно обратным образом.

Спустя десятилетие после работы Кона [14] В. Лейснер независимо пришел к схожим результатам [15]. Им же [16] было показано, что при использовании только части требований, наложенных на функцию $\varphi: B_0 \rightarrow B_0$, можно получить почти-поле (воспользовавшись только аксиомами 2)–4)) или почти-область (воспользовавшись только аксиомами 2), 3)).

Развивая свой подход, Лейснер для построения точно $(k+1)$ -транзитивных групп вместо одного автоморфизма $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{B}_1)$ с условием (1) для КТ-поля включил симметрическую группу автоморфизмов $S_{k-1} \subseteq \text{Aut}(\mathcal{B}_1)$ таких, что $^1 S_k = \langle \varphi, S_{k-1} \rangle$. При помощи такой алгебраической системы Лейснер построил точно n -транзитивные группы S_n , S_{n+1} , A_{n+2} и точно 4- и 5-транзитивные группы Матье M_{11} , M_{12} . Введенную алгебру он назвал B_1 -полем степени n [17], где $\mathcal{B}_1$ – мультипликативная группа, над которой строится поле степени n . Например, с КТ-полем связано B_1 -поле степени 3.

Автором для описания точно 2-транзитивных групп вводится [18] похожая алгебраическая система $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1, 0 \rangle$, но с частичной бинарной операцией $(\cdot): B \times B_1 \rightarrow B$.

В теории физических структур [19]–[21] изучаются nk -параметрические локально транзитивные группы Ли преобразований множества $\mathbb{R}^n$, похожие на точно k -транзитивные, а с точки зрения локальных преобразований они таковыми и являются. Действительно, если для множества B определить максимальное подмножество $\overline{B^k} \subset B^k$ такое, что

$$\overline{B^k} = \{(x_1, \dots, x_k) \in B^k \mid x_i \neq x_j \text{ для } i \neq j\},$$

то условие точной k -транзитивности можно сформулировать следующим образом:

(А) для произвольных неравных кортежей $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in \overline{B^k}$ существует единственный элемент $g \in T_k^s$ такой, что $x_i = g(y_i)$ для $i \in \{1, \dots, k\}$.

Для локальной точно k -транзитивности локально транзитивной группы T_k преобразований множества $\mathbb{R}^n$ условие (А) заменится близким условием

¹В данной записи имеется в виду, что группа S_k порождена своей подгруппой S_{k-1} и элементом φ .

(A^*) для любой точки $(x_1, \dots, x_{nk})$ некоторой окрестности U произвольной точки из открытого и плотного подмногообразия $\Omega_{\mathbb{R}^{nk}}$ многообразия $\mathbb{R}^{nk}$ и любой точки $(y_1, \dots, y_{nk})$ из некоторой окрестности W произвольной точки другого открытого и плотного подмногообразия $\Omega'_{\mathbb{R}^{nk}}$ существует единственный элемент $g \in T_k$ такой, что $(x_i, x_{i+k}, \dots, x_{i+k(n-1)}) = g(y_i, y_{i+k}, \dots, y_{i+k(n-1)})$ для $i \in \{1, \dots, k\}$.

Г. Г. Михайличенко в начале 1970-х годов рассмотрел случай $n = 1$ [21], а в начале 1990-х – случай $n = 2$ [22], [23]. Для $n = 1$ все полученные в работе [21] локальные решения с точностью до локального изоморфизма совпадали с глобальными решениями для точно k -транзитивных групп. Группы преобразований, полученные при $n = 2$, естественно, также допускают глобализацию. При таком рассмотрении прямое произведение групп, локально точно k -транзитивных, будет локально точно k -транзитивно. По этой причине класс точно k -транзитивных групп $KT_k^s(B)$ естественным образом расширяется на класс групп, близких к точно k -транзитивным $KT_k(B)$, в которые входят и прямые произведения таких групп.

В настоящей статье покажем, что для построения групп, близких к точно k -транзитивным, используются алгебраические системы, похожие на системы из аксиоматики Кона–Лейснера. Данные алгебраические системы категорно эквивалентны группам, близким к точно k -транзитивным.

Поясним использующуюся нами терминологию. Ж. Титсом для описания точно 2-транзитивных групп была введена алгебраическая система – *псевдополе* как обобщение понятия *поля*, *тела* и *почти-поля*. Однако в дальнейшем для описания таких групп стали использовать близкое понятие – *почти-область*. С другой стороны, Лейснером для описания точно n -транзитивных групп было введено понятие *G -поле степени n* , где G – мультипликативная группа *поля*, *тела* или *почти-области*. В некотором смысле данное понятие более естественно, так как для описания близких алгебраических систем, ассоциированных с точно 2- и точно 3-транзитивными группами, используется фактически одно название – “ G -поле степени 2” и “ G -поле степени 3” вместо “почти-область” и “КТ-поле”. В данной работе будем использовать понятие *псевдополе степени n* или $^2 G$ -*псевдополе степени n* при описании алгебраических систем, связанных с группами, близкими к точно n -транзитивным. В частном случае, когда рассматриваются точно транзитивные группы, такие алгебраические системы совпадают с введенными Лейснером G -полями степени n .

§ 1. Группы, близкие к точно 2-транзитивным

1.1. Примеры. Введем несколько определений [24, гл. 1, § 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если алгебра определена не на одном множестве A , а на нескольких $A_1, \dots, A_n$, т. е. носитель алгебры состоит из более чем одного множества, то такая алгебра $\langle A_1, \dots, A_n; \sigma \rangle$ называется *многосортовой* (*n -сортовой*³).

²Когда требуется конкретизация множества G .

³Иногда говорят *многоосновной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если в алгебре $\langle A; \sigma \rangle$ определены частичные операции $f_i^{(n)} \in \sigma$, действующие не на всем множестве, то такие алгебры называются *частичными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для множества B и множества кортежей B^n определим подмножество $\widehat{B}^n \subseteq \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$, состоящее из кортежей $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$, в которых все элементы попарно не равны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Группа $T_n(B)$ преобразования множества B называется *близкой к точно n -транзитивной*, если для произвольных кортежей $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n) \in \widehat{B}^n$ существует единственный элемент $g \in T_n$, для которого справедливо равенство $g(x_i) = y_i$ при любом $i \in \{1, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если подмножество $\widehat{B}^n$ максимальное, то такая группа $T_n^s(B)$ *точно n -транзитивна*.

Все известные в настоящий момент точно 2-транзитивные группы строятся над почти-полями. Естественно, возникает желание рассмотреть почти-кольцо $\mathcal{K} = \langle K; \cdot, +, -, 0 \rangle$ в качестве обобщения почти-поля. В этом случае над $\mathcal{K}$ можно построить группу $T_2(K)$ преобразований множества K , которая будет близкой к точно 2-транзитивной.

ЛЕММА 1. Если $\mathcal{K}$ – почти-кольцо с мультипликативной операцией $\langle K_1; \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$, которая на некотором подмножестве $K_1 \subset K$ является групповой, то можно построить группу T_2 преобразований множества K , близкую к точно 2-транзитивной, с подмножеством

$$\widehat{K}^2 = \{(x, y) \in K^2 \mid x - y \in K_1\}.$$

Рассмотрим почти-кольцо $\mathcal{K}$ с правосторонней дистрибутивностью, над которым построим функцию $f: K \times \widehat{K}^2 \rightarrow K$, заданную в виде

$$f(x, y_1, y_2) = x(y_1 - y_2) + y_2. \quad (2)$$

При помощи (2) для пар $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \widehat{K}^2$ построим умножение

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)). \quad (3)$$

Сначала проверим, является ли таким образом определенное умножение на множестве пар $\widehat{K}^2$ замкнутым, т.е. если $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \widehat{K}^2$, то и $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) \in \widehat{K}^2$. Действительно,

$$f(x_1, y_1, y_2) - f(x_2, y_1, y_2) = x_1(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \in K_1.$$

Аналогично проверим ассоциативность. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} f(f(x_i, y_1, y_2), z_1, z_2) &= (x_i(y_1 - y_2) + y_2)(z_1 - z_2) + z_2 \\ &= x_i(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) + y_2(z_1 - z_2) + z_2, \end{aligned}$$

а с другой – справедливо

$$\begin{aligned} f(x_i, f(y_1, z_1, z_2), f(y_2, z_1, z_2)) \\ = x_i(y_1(z_1 - z_2) + z_2 - z_2 - y_2(z_1 - z_2)) + y_2(z_1 - z_2) + z_2, \end{aligned}$$

таким образом, $\langle \widehat{K^2}; \circ \rangle$ – полугруппа. Очевидно, что в данной полугруппе элемент $(1, 0) \in \widehat{K^2}$, где $1 \in K_1$, $0 \in K$ – нейтральные элементы соответствующих групп, будет нейтральным. Легко проверяется и то, что элемент

$$(x_1, x_2)^{-1} = ((1 - x_2)(x_1 - x_2)^{-1}, -x_2(x_1 - x_2)^{-1})$$

принадлежит $\widehat{K^2}$ и будет обратным к (x_1, x_2) , таким образом, $\langle \widehat{K^2}; \circ, ^{-1}, (1, 0) \rangle$ – искомая группа.

1.2. Псевдополе степени 2. Рассмотрим двусортную алгебру $\langle A, B_1; \bullet, \cdot, ^{-1}, \varepsilon \rangle$, задающую группу преобразований $A \bullet B_1 \rightarrow A$, причем $A \cap B_1 = \emptyset$. На множестве $B = B_1 \cup A$ определим частичную операцию

$$B \cdot B_1 \rightarrow B \quad (4)$$

так, что если $x, y \in B_1$, то частичная операция $x \cdot y$ совпадает с умножением в группе B_1 , а при $x \in A$, $y \in B_1$ частичная операция $(\cdot)$ совпадает с операцией преобразования множества $A \bullet B_1 \rightarrow A$. Пусть на множестве B действует инволютивное отображение $\varphi_2: B \rightarrow B$, которое естественным образом разбивает множество B на следующие подмножества:

$$\begin{aligned} A_2 = \{x \in A \mid \varphi_2(x) \in B_1\}, \quad B_1^\varphi = \{x \in B_1 \mid \varphi_2(x) \in A_2\}, \\ \bar{A}_2 = A \setminus A_2, \quad B_0 = B_1 \setminus B_1^\varphi, \quad B_2 = B_1 \cup A_2. \end{aligned} \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Алгебраическую систему $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \varepsilon \rangle$ с частичной операцией (4) будем называть *псевдополем степени 2* (B_1 -*псевдополем степени 2*), если инволюция φ_2 удовлетворяет условию

$$(A1) \quad \varphi_2(\varphi_2(x)\varphi_2(y)) = \varphi_2(x\varphi_2(y^{-1}))y, \quad x \in B, \quad y \in B_0.$$

Далее рассмотрим эффективную группу $T_2(B)$ преобразований множества B , т. е. $\langle B, T_2; \bullet, \cdot, ^{-1}, \varepsilon \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. *Эффективность группы* означает, что для произвольного $g \in T_2$ найдется $x \in B$, для которого справедливо $g(x) \neq x$.

Определим преобразование множества B^2 этой же группой T_2 в виде

$$(x_1, x_2) \bullet g = (x_1 \bullet g, x_2 \bullet g),$$

где $(x_1, x_2) \in B^2$, $g \in T_2$, так что $B^2 \times T_2 \rightarrow B^2$.

ЛЕММА 2. В псевдополе степени 2 если $x \in B_1^\varphi$, то $x^{-1} \in B_1^\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО фактически следует из условия (A1) и того, что мультипликативная частичная операция определена на всем множестве $B \times B_1$. Действительно, если бы для $y \in B_0$ выполнялось $y^{-1} \in B_1^\varphi$, то правая часть тождества (A1) была бы не определена.

ЛЕММА 3. В псевдополе степени 2 эквивалентны следующие утверждения:

- 1) для любых $x \in A_2$ и $y \in B_0$ справедливо $xy \in A_2$;
- 2) для любых $x \in B_1^\varphi$ и $y \in B_0$ справедливо $xy \in B_0$;
- 3) B_1^φ – подгруппа группы B_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что из 1) следует 2). Допустим, что найдутся такие $x \in B_1^\varphi$, $y \in B_0$, для которых выполнено $x\varphi_2(y^{-1}) \in B_1^\varphi$; тогда в левой части тождества (A1) справедливо $\varphi_2(x) \in A_2$, следовательно,

$$\varphi_2(x)\varphi_2(y) \in A_2, \quad \varphi_2(\varphi_2(x)\varphi_2(y)) \in B_1^\varphi.$$

Получили противоречие, так как для правой части тождества из условия (A1) выполнено

$$\varphi_2(x\varphi_2(y^{-1})) \in A_2.$$

Пусть верно 2). Предположим, что найдутся такие $x \in A_2$, $y \in B_0$, для которых $x\varphi_2(y^{-1}) \in A_2$. Тогда в левой части тождества (A1) имеем

$$\varphi_2(\varphi_2(x)\varphi_2(y)) \in B_0,$$

а для правой $\varphi_2(x\varphi_2(y^{-1})) \in \bar{A}_2$, следовательно,

$$\varphi_2(x\varphi_2(y^{-1}))y \in A.$$

Противоречие.

Покажем, что из 2) следует 3). Допустим, что найдутся такие $x, y \in B_1^\varphi$, для которых $xy \in B_0$, но тогда

$$x = (xy)y^{-1} \in B_0.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию, следовательно, с учетом леммы 2 имеем $B_1^\varphi < B_1$. В обратную сторону утверждение очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнено одно из условий леммы 3. Тогда группа B_1 задает преобразование не только множества A , но и множества A_2 , т. е. для произвольных $x \in A_2$ и $y \in B_1$ выполнено $xy \in A_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдутся такие $x \in A_2$, $y \in B_1^\varphi$, $z \in B_0$, для которых выполнено $xy \in \bar{A}_2$. Тогда, с одной стороны, $(xy)z \in \bar{A}_2$, а с другой – $x(yz) \in A_2$, таким образом, предположение не верно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для множества пар B^2 рассмотрим проекции $\text{Pr}_i: B^2 \rightarrow B$ такие, что если $(x_1, x_2) \in B^2$, то $\text{Pr}_i(x_1, x_2) = x_i$. При помощи проекции Pr_1 определим подмножество $\widehat{B}$ так, что

$$\text{Pr}_1: \widehat{B^2} \rightarrow \widehat{B} \subseteq B.$$

Далее будем рассматривать алгебраические системы с дополнительными условиями:

(A2) для произвольных $x \in B_1^\varphi$ и $y \in B_0$ справедливо $xy \in B_0$;

(T1) если $(x_1, x_2) \in \widehat{B^2}$, то $(x_2, x_1) \in \widehat{B^2}$;

(T2) для произвольных $(y_1, y_2) \in \widehat{B^2}$ и $x \in \widehat{B}$ справедливо по крайней мере одно условие $(x, y_2) \in \widehat{B^2}$ или $(y_1, x) \in \widehat{B^2}$.

Рассмотрим теперь несколько лемм.

ЛЕММА 4. По произвольной группе $T_2(B) \in KT_2(B)$ с условиями (Т1) и (Т2) можно построить псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \varepsilon \rangle$ степени 2 с условием (А2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной пары $(e_1, e_2) \in \widehat{B^2}$ построим взаимно однозначное отображение $T_2(B) \rightarrow \widehat{B^2}$, сопоставляя элементу $g \in T_2$ пару

$$(g_1, g_2) = (e_1, e_2) \bullet g.$$

Нейтральному элементу ε группы T_2 поставим в соответствие пару (e_1, e_2) . Таким образом, элементы группы $T_2^{(e_1, e_2)}$, изоморфной T_2 , можно представить в виде пар из множества $\widehat{B^2}$ так, что если

$$(g_1, g_2) = (e_1, e_2) \bullet g,$$

то элементу $g \in T_2$ можно поставить в соответствие элемент изоморфной группы $[g_1, g_2] \in T_2^{(e_1, e_2)}$. Тогда

$$(e_1, e_2) \bullet [g_1, g_2] = (e_1 \bullet [g_1, g_2], e_2 \bullet [g_1, g_2]) = (g_1, g_2). \quad (6)$$

При последовательном преобразовании пары (e_1, e_2) элементами $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ придем к равенству

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = [x_1 \bullet [y_1, y_2], x_2 \bullet [y_1, y_2]]. \quad (7)$$

Рассмотрим стабилизатор $(T_2^{(e_1, e_2)})_{e_2}$ элемента e_2 , который будет состоять из пар

$$[x_1, e_2] \in (T_2^{(e_1, e_2)})_{e_2},$$

и проекцию $\text{Pr}_1: B^2 \rightarrow B$. Тогда, проецируя элементы стабилизатора $(T_2^{(e_1, e_2)})_{e_2}$ на подмножество

$$B_1^{(e_1, e_2)} = \{\text{Pr}_1(x, e_2) \mid [x, e_2] \in (T_2^{(e_1, e_2)})_{e_2}\},$$

можно естественным образом определить группу $\langle B_1^{(e_1, e_2)}; \cdot, ^{-1}, e_1 \rangle$, изоморфную стабилизатору $(T_2^{(e_1, e_2)})_{e_2}$. Умножение в группе $B_1^{(e_1, e_2)}$ так же, как и в группе $T_2^{(e_1, e_2)}$, будем записывать без точки. Расширим групповую операцию до частичной операции

$$B \times B_1^{(e_1, e_2)} \rightarrow B,$$

доопределив ее $xy = x \bullet [y, e_2]$. Тогда группа $B_1^{(e_1, e_2)}$ будет задавать преобразование множества

$$A^{(e_1, e_2)} = B \setminus B_1^{(e_1, e_2)}.$$

Действительно, если бы нашлись такие $x \in A^{(e_1, e_2)}$, $y \in B_1^{(e_1, e_2)}$, что $xy \in B_1^{(e_1, e_2)}$, то это противоречило бы тому, что $B_1^{(e_1, e_2)}$ – группа. Далее для простоты будем записывать B_1 , A , T_2 вместо $B_1^{(e_1, e_2)}$, $A^{(e_1, e_2)}$, $T_2^{(e_1, e_2)}$.

Из (6) и (7) следует, что элемент $[e_2, e_1]$ будет инволютивным элементом группы T_2 . Определим $\phi_2: B \rightarrow B$ в виде

$$\phi_2(x) = x \bullet [e_2, e_1].$$

Тогда

$$[e_2, e_1][x_2, x_1] = [x_1, x_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)][e_2, e_1]. \quad (8)$$

При помощи инволюции ϕ_2 определим подмножества множества B аналогично (5).

Для произвольного $[e_1, x_2] \in T_2$ при $x_2 \in B_0$, с одной стороны, можно записать

$$[e_1, x_2] = [x_2^{-1}, e_1][x_2, e_2] = [\phi_2(x_2^{-1}), e_2][e_2, e_1][x_2, e_2],$$

с другой стороны, с учетом (8) для $[e_1, x_2]$ справедливо

$$[e_1, x_2] = [e_2, e_1][\phi_2(x_2), e_2][e_2, e_1].$$

Используя последние два выражения и приравнявая результаты преобразований произвольного $t \in B$ элементом $[e_1, x_2] \in T_2$, придем к тождеству

$$\phi_2(\phi_2(t)\phi_2(x_2)) = \phi_2(t\phi_2(x_2^{-1}))x_2, \quad t \in B, \quad x_2 \in B_0, \quad (9)$$

таким образом, выполнено условие (A1).

Покажем теперь выполнение условия (A2). Из определения множества B_1 следует, что

$$\{(x, e_2) \in B^2 \mid x \in A\} \not\subseteq \widehat{B^2},$$

из чего с учетом (8) следует, что

$$\{(x, e_1) \in B^2 \mid x \in B_1^\phi \cup \bar{A}_2\} \not\subseteq \widehat{B^2}.$$

Однако, так как для произвольных $x \in B_1^\phi$ имеем $(x, e_1) \notin \widehat{B^2}$ и $e_1 \in \widehat{B}$, из условия (T2) следует, что для произвольных $x, y \in B_1^\phi$ справедливо $(x, y) \notin \widehat{B^2}$.

Если для произвольных $x \in B_0$, $y \in B_1^\phi$ справедливо

$$[x, e_1][y, e_2] = [xy, y],$$

то из (T2) также следует, что $xy \in B_0$.

Заметим, что для произвольного $[x_1, x_2] \in T_2(B)$ с учетом используемых обозначений $E(x) = x^{-1}$ и $E\phi_2(x) = E(\phi_2(x))$ можно записать

$$[x_1, x_2] = \begin{cases} [\phi_2(x_1x_2^{-1}), e_2]\phi_2[x_2, e_2], & x_2 \in B_1, \quad x_1x_2^{-1} \notin B_1^\phi, \\ [\phi_2(\phi_2(x_1)E\phi_2(x_2)), e_2]\phi_2[\phi_2(x_2), e_2]\phi_2, & x_2 \in A_2, \quad \phi_2(x_1)E\phi_2(x_2) \notin B_1^\phi. \end{cases} \quad (10)$$

Итак, произвольной группе $T_2(B)$ из класса групп, близких к точно 2-транзитивным $KT_2(B)$, поставили в соответствие

$$F^{(e_1, e_2)}: T_2(B) \mapsto \langle B; \cdot, {}^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle$$

псевдополе $\langle B; \cdot, {}^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle$ степени 2 из класса псевдополей степени 2. Построенное соответствие зависит от параметров $e_1, e_2 \in B$. Действительно, $F^{(e_1, e_2)}$ можно представить в виде суперпозиции двух соответствий:

$$F^{(e_1, e_2)} = F_A \circ F_T^{(e_1, e_2)},$$

так что

$$\langle B, T_2; \bullet, \cdot, {}^{-1}, \varepsilon \rangle \xrightarrow{F_T^{(e_1, e_2)}} \langle B, T_2^{(e_1, e_2)}; \bullet, \cdot, {}^{-1}, [e_1, e_2] \rangle \xrightarrow{F_A} \langle B; \cdot, {}^{-1}, \phi_2, e_1 \rangle.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. По алгебраической системе $\langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle$, в которой выполнены условия (A1) и (A2), можно построить группу $\langle B, T_2; \bullet, \cdot, {}^{-1}, [e_1, e_2] \rangle$, в которой выполнены условия (T1) и (T2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим выражение (A1) для $y \in B_0$ и $x = \varphi_2 E \varphi_2(y)$. Тогда

$$\varphi_2 E \varphi_2(y) = E \varphi_2 E(y) \equiv \varphi_2^E(y). \quad (11)$$

Для произвольных $t \in B$, $x \in B_1^\varphi$, $y \in B_0$ с учетом $\varphi_2^2 = \text{id}$ и условия (A1) получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_2(\varphi_2(\varphi_2(t)x)y) &= \varphi_2(\varphi_2(t)x\varphi_2^E(y))\varphi_2(y) \\ &= \varphi_2(t\varphi_2^E(x\varphi_2^E(y)))\varphi_2(x\varphi_2^E(y))\varphi_2(y) = \varphi_2(t\varphi_2^E(x\varphi_2^E(y)))\varphi_2(\varphi_2(x)y) \\ &= \varphi_2(t\varphi_2 E(\varphi_2(\varphi_2(x)y)E\varphi_2(y)))\varphi_2(\varphi_2(x)y), \end{aligned}$$

откуда придем к равенству

$$\varphi_2(\varphi_2(\varphi_2(t)x)y) = \varphi_2(t\varphi_2(\varphi_2(y)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)))\varphi_2(\varphi_2(x)y). \quad (12)$$

Для нейтрального элемента e_1 группы B_1 определим элемент $e_2 = \varphi_2(e_1)$. Тогда из $\varphi_2^2 = \text{id}$ и условия (A1) следует, что для $x = e_1$ и произвольного $y \in B_0$ выполняется тождество

$$e_2 y = e_2. \quad (13)$$

С учетом (12) тождество (13) будет справедливо и для $x \in B_1^\varphi$. Действительно, рассмотрим (12) при $t = e_1$; тогда придем к тождеству

$$\varphi_2(\varphi_2(e_2 x)y) = \varphi_2(y),$$

откуда следует, что элемент $e_2 \in A_2$ является левым нулем для всех элементов группы B_1 .

Построим группу $T_1(B)$ преобразований множества B при помощи правых сдвигов. Элементам $x \in B_1$ поставим в соответствие элементы $[x] \in T_1$ так, что $t \bullet [x] = tx$. При помощи группы $T_1(B)$ и отображения φ_2 построим эффективную группу $T_2(B)$ преобразования множества B . Условие эффективности группы можно записать в виде

$$(g_1 = g_2 \in T_2) \iff (\forall t \in B)(t \cdot g_1 = t \cdot g_2). \quad (14)$$

Покажем, что для $x \in B_0$ справедливо

$$\varphi_2[x]\varphi_2 = [\varphi_2^E(x)]\varphi_2[\varphi_2(x)]. \quad (15)$$

В самом деле, действуя на произвольный элемент $t \in B$ левой частью равенства (15), получим выражение

$$t \bullet \varphi_2[x] \varphi_2 = \varphi_2(\varphi_2(t)x).$$

После его преобразования тождествами $\varphi_2^2 = \text{id}$ и (A1) придем к выражению

$$\varphi_2(\varphi_2(t)x) = \varphi_2(t\varphi_2^E(x))\varphi_2(x),$$

правая часть которого совпадает с выражением, получающимся при действии на произвольный элемент $t \in B$ правой частью равенства (15). Следовательно, с учетом условия эффе́ктивности группы (14) выражение (15) справедливо. Аналогично, но уже воспользовавшись выражением (12), убедимся в справедливости тождества

$$\varphi_2[x]\varphi_2[y] = [\varphi_2(\varphi_2(y)E\varphi_2(\varphi_2(x)y))] \varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)y)] \varphi_2 \quad (16)$$

для $x \in B_1^\varphi$, $y \in B_0$. Покажем, что полученное выражение (16) справедливо и для $x \in B_1^\varphi$, $y \in B_1$. Действительно, если $x \in B_1^\varphi$, то и $\varphi_2(\varphi_2(x)y) \in B_1^\varphi$, а тогда рассмотрим $y \in B_1^\varphi$, $z \in B_0$ и, воспользовавшись условием (A2), дважды применим выражение (16):

$$\begin{aligned} \varphi_2[x]\varphi_2[yz^{-1}][z] &= [\varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1}))] \varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})] \varphi_2[z] \\ &= [\varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1}))\varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y))] \varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(x)y)] \varphi_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда с учетом (A1) имеем

$$\varphi_2^E(\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})\varphi_2^E(z)) = \varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)) \in B_0,$$

следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} &\varphi_2(\varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1}))\varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y))) \\ &= \varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})E\varphi_2(\varphi_2(x)yz^{-1})\varphi_2(\varphi_2(\varphi_2(x)y)E\varphi_2(z)))\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y)) \\ &= \varphi_2(\varphi_2(yz^{-1})\varphi_2E\varphi_2(z))\varphi_2(z)E\varphi_2(\varphi_2(x)y) = \varphi_2(y)E\varphi_2(\varphi_2(x)y). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (17), придем к тому, что выражение (16) справедливо при $x \in B_1^\varphi$, $y \in B_1$.

Определим множество

$$\hat{T}_2 = T_1 \cup \{[t]\varphi_2 \mid t \in B_1^\varphi\},$$

которому можно взаимно однозначно поставить в соответствие множество $B_2 = B_1 \cup A_2$. Элементу $x \in B_1$ поставим в соответствие элемент $[x] \in T_1$, а элементу $y \in A_2$ – элемент $[y] = [\varphi_2(y)]\varphi_2$.

2. Построим теперь группу T_2 и покажем сначала, что произвольный элемент $g \in T_2$ можно представить в виде пары $(g_1, g_2) \in T_1 \times \hat{T}_2$ так, что $g = [g_1]\varphi_2[g_2]$.

Определим кортеж из двух элементов, а для упрощения записи будем считать $\varphi_1 = \text{id}$. Тогда

$$[\varphi_k(\varphi_2(g_1)\varphi_k(g_2)), g_2] = [g_1]\varphi_2[g_2],$$

где $k = 1$, если $g_2 \in B_1$, и $k = 2$, если $g_2 \in A_2$. Перепишем данный кортеж в виде

$$[x, y] = [\varphi_2(\varphi_k(x)E\varphi_k(y))] \varphi_2[\varphi_k(y)] \varphi_k \quad (18)$$

при условии, что $\varphi_k(x)E\varphi_k(y) \notin B_1^\varphi$. Таким образом, из определения (18) для $y, z \in B_1$ справедливо

$$[x, y][z] = [xz, yz]. \quad (19)$$

Рассмотрим случай $y \in A_2$. Тогда

$$\begin{aligned} [x, y][z] &\stackrel{(18)+(16)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))] [\varphi_2(\varphi_2(z)E\varphi_2(yz))] \varphi_2[\varphi_2(yz)] \varphi_2 \\ &\stackrel{(A1)}{=} [\varphi_2(xy^{-1})\varphi_2^E(y)\varphi_2E(y)\varphi_2^E(yz)] \varphi_2[\varphi_2(yz)] \varphi_2 \stackrel{(A1)+(18)}{=} [xz, yz], \end{aligned}$$

таким образом, для произвольных $[x, y] \in T_2$ и $z \in B_1$ справедливо

$$[x, y][z] = [xz, yz] \in T_2.$$

Покажем также, что для φ_2 и произвольных $[x, y] \in T_2$ справедливо тождество

$$[x, y]\varphi_2 = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)]. \quad (20)$$

Рассмотрим сначала $y \in B_0$:

$$[x, y]\varphi_2 \stackrel{(18)+(15)}{=} [\varphi_2(xy^{-1})E\varphi_2E(y)] \varphi_2[\varphi_2(y)] \stackrel{(A1)}{=} [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))] \varphi_2[\varphi_2(y)].$$

С учетом (18) и $\varphi_2^2 = \text{id}$ приходим к справедливости равенства, аналогичного для $y \in B_1^\varphi$:

$$[x, y]\varphi_2 = [\varphi_2(\varphi_2(\varphi_2(x))E\varphi_2(\varphi_2(y)))]\varphi_2[\varphi_2(\varphi_2(y))]\varphi_2 = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)].$$

Для $y \in A_2$ в силу (18) имеем

$$[x, y]\varphi_2 = [\varphi_2(\varphi_2(x)E\varphi_2(y))]\varphi_2[\varphi_2(y)]\varphi_2\varphi_2 = [\varphi_2(x), \varphi_2(y)].$$

Таким образом, для произвольного кортежа $[x, y] \in T_2$ справедливо (19) и (20). Тогда с учетом определения кортежа (18) умножение кортежей запишем в виде

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = [x_1 \bullet [y_1, y_2], x_2 \bullet [y_1, y_2]]. \quad (21)$$

Также из определения кортежей (18) легко проверяется, что

$$e_1 \bullet [x, y] = x, \quad e_2 \bullet [x, y] = y,$$

а кортеж $[e_1, e_2] = [e_1]$ является нейтральным. Для произвольного кортежа $[x_1, x_2]$ обратный кортеж $[x_1, x_2]^{-1}$ (с учетом (15) и (16)) также будет кортежем. Следовательно, множество кортежей T_2 , определенных в (18), задает группу

преобразований множества B_2 . Кортеж $[e_2, e_1] = \varphi_2$ теперь можно записать в виде

$$[e_2, e_1][x, y] = [y, x],$$

следовательно, выполнено условие (T1).

Из определения множества A_2 следует, что для произвольного $x \in \bar{A}_2$ справедливо $\varphi_2(x) \in \bar{A}_2$. Из следствия 1 для произвольных $x \in \bar{A}_2$, $y \in B_1$ справедливо $xy \in \bar{A}_2$, таким образом, группа кортежей T_2 будет группой преобразования как множества $\bar{A}_2$, так и множества B , а $B_2 \subseteq B$. Проверим теперь выполнение (T2). Если для произвольных

$$[y_1, y_2] \in T_2, \quad x \in B_2$$

выполнено $[x, y_2] \in T_2$, то доказательство очевидно. Пусть $[x, y_2] \notin T_2$, т. е.

$$xy_2^{-1} \in B_1^\varphi \quad (\text{или } \varphi_2(x)E\varphi_2(y_2) \in B_1^\varphi).$$

Тогда с учетом (A2) и леммы 3 получим, что $x, y_2 \in B_1^\varphi$ (или $x, y_2 \in A_2$) или $x, y_2 \in B_0$.

Рассмотрим сначала $y_2 \in B_1^\varphi$ ($y_2 \in A_2$). Тогда должно выполняться $y_1 \in B_0$, в противном случае $[y_1, y_2] \notin T_2$. Следовательно, по условию (A2) имеем $xy_1^{-1} \in B_0$ и $[x, y_1] \in T_2$. Пусть теперь $x, y_2 \in B_0$; тогда если $y_1 \in A_2$, то $y_1x^{-1} \in A_2$, а если $y_1 \in B_1^\varphi$, то $xy_1 \in B_0$. Следовательно, имеем $[y_1, x] \in T_2$. Если $y_1 \in B_0$, то должно выполняться $y_2y_1^{-1} \in B_0$, следовательно,

$$xy_1^{-1} = xy_2^{-1}y_2y_1^{-1} \in B_0 \implies [y_1, x] \in T_2.$$

Таким образом, построено отображение класса B_1 -псевдополей степени 2 в класс групп, близких к точно 2-транзитивным:

$$\mathbb{T}: \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle \mapsto \langle B, T_2^{(e_1, e_2)}; \bullet, \cdot, ^{-1}, [e_1, e_2] \rangle,$$

ставящее в соответствие алгебраической системе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle$ группу преобразований $T_2(B)$. Лемма доказана.

Отметим, что дополнительное условие (A2) из леммы 5, налагаемое на псевдополе степени 2, достаточно сильное. Так, если имеются два псевдополя (B_1, A, φ_2) и (B'_1, A', φ'_2) степени 2, удовлетворяющих условию леммы, то можно рассмотреть их прямое произведение

$$(B_1 \times B'_1, A \times B' \cup B_1 \times A', \varphi_2 \times \varphi'_2),$$

которое также будет псевдополем степени 2, но без выполнения условия (A2). Действительно, для произвольного $(x, y) \in B_0 \times B'_0$ найдется $(e_1, y^{-1}) \in B_1^\varphi \times B'_0$, для которого будет выполнено

$$(x, y)(e_1, y^{-1}) = (x, e'_1) \notin B_0 \times B'_0.$$

Если $A = A_2 = \{e_2\}$, то группа $T_2(B)$ точно 2-транзитивна.

§ 2. Псевдополе степени n

Рассмотрим теперь более общий случай алгебраической системы

$$\langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle,$$

где $\varphi_2: B \rightarrow B$, $\sigma_i: B \rightarrow B$ – инволютивные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Алгебраическую систему $\langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle$ с частичной операцией $B \cdot B_1 \rightarrow B$ будем называть *псевдополем степени n* (B_1 -псевдополем степени n), если $\langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle$ – B_1 -псевдополе степени 2 и выполнены условия:

(A3) инволютивные операции $\sigma_3, \dots, \sigma_n$ задают автоморфизм частичной бинарной операции $B \times B_1 \rightarrow B$, т. е. для произвольных $x \in B$, $y \in B_1$ справедливо

$$\sigma_i(x \cdot y) = \sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y), \quad i \in \{3, \dots, n\};$$

(A4) для $i \neq j$ справедливы тождества

$$\sigma_i \varphi_2 \sigma_i = \varphi_2 \sigma_i \varphi_2, \quad \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j;$$

(A5) $\varphi_2 \sigma_i \varphi_2(e_1) = \sigma_i \varphi_2(e_1)$, $\sigma_i \sigma_j \varphi_2(e_1) = \sigma_j \varphi_2(e_1)$ при $i \neq j$.

Условие (A5) становится более естественным, если определить $e_2 = \varphi_2(e_1)$ и $e_i = \sigma_i(e_2)$. В этом случае тождества из (A5) можно записать в виде:

а) $\varphi_2(e_i) = e_i$ для $i \in \{3, \dots, n\}$;

б) $\sigma_j(e_i) = e_i$ для $i \neq j$.

Определим еще отображения $\varphi_i = \varphi_2 \sigma_i \varphi_2$ и подмножества

$$\begin{aligned} A_i &= \{x \in A \mid \varphi_i(x) \in B_1\}, & B_1^{\varphi_i} &= \{\varphi_i^{-1}(x) \mid x \in A_i\}, \\ B_0^{(i)} &= B_1 \setminus B_1^{\varphi_i}, & B_k &= B_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k. \end{aligned} \quad (22)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Отображения φ_i порождают группу $S_n = \langle \varphi_2, \dots, \varphi_n \rangle$ преобразований множества B .

С учетом (A4) получим тождество $\varphi_i \varphi_i = \varphi_2 \sigma_i \varphi_2 \varphi_2 \sigma_i \varphi_2 = \text{id}$.

Если определить отображения σ_{ij} в виде $\sigma_{ij} = \varphi_i \varphi_j \varphi_i$, то можно говорить, что справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для произвольных попарно неравных $i, j, k \in \{2, \dots, n\}$ справедливо свойство коммутативности $\varphi_i \sigma_{jk} = \sigma_{jk} \varphi_i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Отображения σ_i задают изоморфизм псевдополей степени 2

$$\sigma_i: \langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle \rightarrow \langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_i, e_1 \rangle.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Для группы преобразований $G(X)$, помимо стабилизатора $\text{St}_G(x)$ элемента $x \in X$, рассмотрим *стабилизатор* $\text{St}_G(x_1, \dots, x_k)$ *упорядоченных k -элементов* $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$, определенный по индукции

$$\begin{aligned} \text{St}_G(x_k), \text{St}_G(x_{k-1}, x_k) &= \text{St}_{\text{St}_G(x_k)}(x_{k-1}), \dots \\ \dots, \text{St}_G(x_1, \dots, x_k) &= \text{St}_{\text{St}_G(x_2, \dots, x_k)}(x_1). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Для любого класса алгебр $K\mathfrak{A}$ через $\vec{K}\mathfrak{A}$ обозначим категорию, объектами которой являются алгебры $\mathfrak{A} \in K\mathfrak{A}$, а морфизмами – гомоморфизмы алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 [25, § 4.4]. Функтор $\vec{F}_2: \vec{K}\mathfrak{A}_1 \rightarrow \vec{K}\mathfrak{A}_2$ является эквивалентностью категорий, а категории $\vec{K}\mathfrak{A}_1$ и $\vec{K}\mathfrak{A}_2$ будут эквивалентны, если существуют функтор $\vec{F}_1: \vec{K}\mathfrak{A}_2 \rightarrow \vec{K}\mathfrak{A}_1$ и естественные изоморфизмы $\vec{F}_1\vec{F}_2(\vec{K}\mathfrak{A}_1) \cong \vec{K}\mathfrak{A}_1$ и $\vec{F}_2\vec{F}_1(\vec{K}\mathfrak{A}_2) \cong \vec{K}\mathfrak{A}_2$.

2.1. Соответствие алгебраических систем. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Классы псевдополей $K\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle$ степени n и групп $KT_n(B)$, близких к точно n -транзитивным, при выполнении условий:

- 1) для псевдополя $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle$ степени 2 справедливо условие (A2),
- 2) существует $(x_1, x_2, e_3, \dots, e_n) \in \widehat{B}^n$ такой, что для стабилизатора $\text{St}_{T_n(B)}(e_3, \dots, e_n)$ упорядоченных $n - 2$ точек $(e_3, \dots, e_n) \in B^{n-2}$ выполнены условия (T1) и (T2),

категорно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По группе $T_n(B)$ построим псевдополе степени n

$$\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle.$$

Для произвольного набора $(e_1, \dots, e_n) \in \widehat{B}^n$, где $e_3, \dots, e_n$ из условия теоремы, можно построить взаимно однозначное отображение $T_n \rightarrow \widehat{B}^n$, ставящее в соответствие элементу $g \in T_n$ упорядоченный набор

$$(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot g.$$

Нейтральному элементу группы T_n поставим в соответствие $(e_1, \dots, e_n)$. Таким образом, элементы группы T_n можно представить в виде упорядоченного набора из множества $\widehat{B}^n$ так, что если $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot g$, то элементу $g \in T_n$ ставится в соответствие кортеж $[x_1, \dots, x_n] \in T_n^{(e_1, \dots, e_n)}$. Тогда

$$(e_1, \dots, e_n) \cdot [x_1, \dots, x_n] = (e_1 \cdot [x_1, \dots, x_n], \dots, e_n \cdot [x_1, \dots, x_n]) = (x_1, \dots, x_n). \quad (23)$$

Группу $T_n^{(e_1, \dots, e_n)}$, изоморфную T_n , состоящую из кортежей $[x_1, \dots, x_n]$, будем для простоты обозначать по-прежнему через T_n .

При последовательном преобразовании элемента $(e_1, \dots, e_n)$ кортежами $[x_1, \dots, x_n]$ и $[y_1, \dots, y_n]$ получим равенство

$$[x_1, \dots, x_n][y_1, \dots, y_n] = [x_1 \cdot [y_1, \dots, y_n], \dots, x_n \cdot [y_1, \dots, y_n]], \quad (24)$$

из которого согласно (23) следует, что стабилизатор элементов $e_3, \dots, e_n$ будет состоять из кортежей $[x_1, x_2, e_3, \dots, e_n]$. Множество всех возможных кортежей такого вида обозначим T_2 . Поскольку для T_2 выполнено условие леммы 4, можно построить псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, e_1 \rangle$ степени 2 с условием (A2).

Для доказательства условий (A3), (A4) и (A5) введем обозначения. Для произвольного

$$X = [x_1, \dots, x_n] \in T_n$$

элемент $X_{ij} \in T_n$ отличается перестановкой элементов x_i и x_j ; $E_1 = [e_1, \dots, e_n]$ – нейтральный элемент группы T_n . Из (23) и (24) следует, что $E_{ij}X = X_{ij}$, где $E_{ij} = (E_1)_{ij}$. С другой стороны, $E_{1i}^2 = E_1$ для $i \in \{2, \dots, n\}$ и

$$E_{1i}E_{1j}E_{1i} = E_{1j}E_{1i}E_{1j} \quad \text{при } i \neq j.$$

Таким образом, E_{1i} являются порождающими группы $S_n \leq T_n$. Определим функции $\varphi_i: B \rightarrow B$ при $i > 1$ в виде

$$\varphi_i(x) = x \cdot E_{1i}.$$

Следовательно, для них будут выполнены условия (A4) и (A5), и можно ввести множества $B_1^{\varphi_i}$, A_i , $B_0^{(i)}$, B_i .

Определим $\varepsilon_i: B \rightarrow B$ в виде

$$\varepsilon_i(x) = x \cdot E_{2i} = x \cdot E_{12}E_{1i}E_{12} = \varphi_2\varphi_i\varphi_2(x).$$

Тогда для произвольных $x \in B$, $y \in B_1$ справедливо

$$x \cdot [y, e_2, \dots, e_n]E_{2i} = x \cdot E_{2i}E_{2i}[y, e_2, \dots, e_n]E_{2i} = x \cdot E_{2i}[\varepsilon_i(y), e_2, \dots, e_n],$$

следовательно, получим равенство

$$\varepsilon_i(xy) = \varepsilon_i(x)\varepsilon_i(y).$$

Таким образом, ε_i принадлежит группе автоморфизмов частичной операции $B \times B_1 \rightarrow B$, а значит, выполнено условие (A3).

Итак, построено отображение

$$F_2: T_n(B) \rightarrow \langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, e_1 \rangle,$$

ставящее в соответствие группе $T_n(B)$ псевдополе степени n .

Заметим, что произвольный кортеж $[x_1, \dots, x_m]$, где $m \in \{2, \dots, n\}$, можно записать в виде

$$[\varphi_m(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1})E\varphi_k(x_m)), e_m]\varphi_m[\varphi_k(x_m)]\varphi_k, \quad (25)$$

где $k = 1$ при $x_m \in B_1$ и $k = l$ при $x_m \in A_l$.

2. Построим эффективную группу преобразований

$$T_n = \langle T_1, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n \rangle$$

множества B , порождаемую группой T_1 и инволюциями $\varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$. При этом T_1 – группа преобразований множества B_1 , построенная по соответствующей группе B_1 при помощи правых трансляций $x[y] = xy$.

Тождество из условия (A3) можно переписать в виде

$$\sigma_i[y]\sigma_i = [\sigma_i(y)], \quad y \in B_1,$$

но если ввести отображения $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, то полученное тождество можно переписать и для данных отображений:

$$\sigma_{ij}[x]\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}(x)]. \quad (26)$$

Покажем теперь, что выражения (15), (16) справедливы не только для φ_2 , но и для произвольного φ_i . Действительно, если $x \in B_0^{(i)}$, то получим

$$\begin{aligned} \varphi_i[x]\varphi_i &= \sigma_i \varphi_2 \sigma_i[x] \sigma_i \varphi_2 \sigma_i = \sigma_i \varphi_2[\sigma_i(x)] \varphi_2 \sigma_i = \sigma_i[\varphi_2^E \sigma_i(x)] \varphi_2[\varphi_2 \sigma_i(x)] \sigma_i \\ &= [\sigma_i \varphi_2^E \sigma_i(x)] \varphi_i[\sigma_i \varphi_2 \sigma_i(x)] = [\varphi_i^E(x)] \varphi_i[\varphi_i(x)], \end{aligned}$$

используя обозначение (11) и перенося его на φ_i , т. е. $\varphi_i^E = E \varphi_i E$. Если $x \in B_1^{\varphi_i}$, то имеем

$$\begin{aligned} \varphi_i[x]\varphi_i[y] &= \sigma_i \varphi_2 \sigma_i[x] \sigma_i \varphi_2 \sigma_i[y] = \sigma_i \varphi_2[\sigma_i(x)] \varphi_2[\sigma_i(y)] \sigma_i \\ &= \sigma_i[\varphi_2(\varphi_2 \sigma_i(y) E \varphi_2(\varphi_2 \sigma_i(x) \sigma_i(y)))] \varphi_2[\varphi_2(\varphi_2 \sigma_i(x) \sigma_i(y))] \varphi_2 \sigma_i \\ &= [\varphi_i(\varphi_i(y) E \varphi_i(\varphi_i(x) y))] \varphi_i[\varphi_i(\varphi_i(x) y)] \varphi_i. \end{aligned}$$

Поскольку для псевдополя $\langle B; \cdot, {}^{-1}, \varphi_2, \varepsilon \rangle$ степени 2 справедливо условие (A2), для T_2 выполнено условие (T2). Построим группу T_n по индукции. Пусть построена группа T_{m-1} , близкая к точно $(m-1)$ -транзитивной, с кортежами $[x_1, \dots, x_{m-1}] \in T_{m-1}$ длины $m-1$ и нейтральным элементом $[e_1, \dots, e_{m-1}]$, где $e_i = \sigma_i(e_2) \in A_i$. Для произвольного $[x_1, \dots, x_{m-1}] \in T_{m-1}$ выполнено

$$e_i \cdot [x_1, \dots, x_{m-1}] = x_i.$$

По множеству $B_m = B_{m-1} \cup A_m$ построим множество

$$\widehat{T_m} = \widehat{T_{m-1}} \cup \{[t]\varphi_m \mid t \in B_1^{\varphi_m}\},$$

ставя в соответствие элементу $x \in A_m$ элемент $[x] = [\varphi_m(x)]\varphi_m$ так, что $\varphi_m(x) \in B_1^{\varphi_m}$. Покажем, что произвольный элемент $g \in T_m$ можно представить в виде

$$g = [g_1, \dots, g_{m-1}]\varphi_m[g_m],$$

где

$$[g_1, \dots, g_{m-1}] \in T_{m-1}, \quad g_m \in B_m.$$

Определим кортеж из m элементов, по-прежнему считая $\varphi_1 = \text{id}$, в виде

$$[g_1, \dots, g_{m-1}]\varphi_m[g_m] = [\varphi_k(\varphi_m(g_1)\varphi_k(g_m)), \dots, \varphi_k(\varphi_m(g_{m-1})\varphi_k(g_m)), g_m],$$

где $k = 1$ при $g_m \in B_1$ и $k = l$ при $g_m \in A_l$. Перепишем кортеж относительно правой части:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] \\ = [\varphi_m(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1})E\varphi_k(x_m))] \varphi_m[\varphi_k(x_m)]\varphi_k, \end{aligned} \quad (27)$$

где $x_i \in B_m$ и $\varphi_k(x_i)E\varphi_k(x_m) \notin B_1^{\varphi_m}$. Из данного определения следует, что

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, e_m] = [x_1, \dots, x_{m-1}], \quad [e_m, e_2, \dots, e_{m-1}, e_1] = \varphi_m,$$

а действие кортежа на элементы e_i согласно действию кортежей из T_{m-1} и в силу условия (A5) запишется в виде

$$e_i \cdot [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] = x_i.$$

Покажем, что для кортежа (27) справедливо равенство

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, x_m][y] = [x_1y, \dots, x_{m-1}y, x_my]. \quad (28)$$

Равенство (28) очевидно для $x_m \in B_1$. Рассмотрим случай $x_m \in A_m$:

$$\begin{aligned} & [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m][y] \\ &= [\varphi_m(\varphi_m(x_1)E\varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_m(x_{m-1})E\varphi_m(x_m))] \varphi_m[\varphi_m(x_m)] \varphi_m[y] \\ &= [\varphi_m(\varphi_m(x_1)E\varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_m(x_{m-1})E\varphi_m(x_m))] \\ &\quad \times [\varphi_m(\varphi_m(y)E\varphi_m(x_my))] \varphi_m[\varphi_m(x_my)] \varphi_m \\ &= [\varphi_m(x_1x_m^{-1})\varphi_m^E(x_m), \dots, \varphi_m(x_{m-1}x_m^{-1})\varphi_m^E(x_m)] [\varphi_mE(x_m)\varphi_m^E(x_my)] \\ &\quad \times \varphi_m[\varphi_m(x_my)] \varphi_m \\ &= [\varphi_m(x_1x_m^{-1})\varphi_m^E(x_my), \dots, \varphi_m(x_{m-1}x_m^{-1})\varphi_m^E(x_my)] \varphi_m[\varphi_m(x_my)] \varphi_m \\ &= [\varphi_m(\varphi_m(x_1y)E\varphi_m(x_my)), \dots, \varphi_m(\varphi_m(x_{m-1}y)E\varphi_m(x_my))] \varphi_m[\varphi_m(x_my)] \varphi_m \\ &= [x_1y, \dots, x_{m-1}y, x_my]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $x_m \in A_k$, когда $k \in \{2, \dots, m-1\}$:

$$\begin{aligned} & [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m][y] \\ &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1})E\varphi_k(x_m))] \varphi_m\varphi_k\varphi_k[\varphi_k(x_m)]\varphi_k[y] \\ &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1})E\varphi_k(x_m))] \varphi_k\sigma_{km} \\ &\quad \times [\varphi_k(\varphi_k(y)E\varphi_k(x_my))] \sigma_{km}\varphi_k\varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [\sigma_{km}\varphi_k(\varphi_k(x_1)E\varphi_k(x_m)), \dots, \sigma_{km}\varphi_k(\varphi_k(x_{m-1})E\varphi_k(x_m))] \\ &\quad \times [\sigma_{km}\varphi_k(\varphi_k(y)E\varphi_k(x_my))] \varphi_k\varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [\sigma_{km}\varphi_k(x_1x_m^{-1})\sigma_{km}\varphi_k^E(x_m), \dots, \sigma_{km}\varphi_k(x_{m-1}x_m^{-1})\sigma_{km}\varphi_k^E(x_m)] \\ &\quad \times [\sigma_{km}\varphi_kE(x_m)\sigma_{km}\varphi_k^E(x_my)] \varphi_k\varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [\sigma_{km}\varphi_k(x_1x_m^{-1})\sigma_{km}\varphi_k^E(x_my), \dots, \sigma_{km}\varphi_k(x_{m-1}x_m^{-1})\sigma_{km}\varphi_k^E(x_my)] \\ &\quad \times \varphi_k\varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [\sigma_{km}\varphi_k(\varphi_k(x_1y)E\varphi_k(x_my)), \dots, \sigma_{km}\varphi_k(\varphi_k(x_{m-1}y)E\varphi_k(x_my))] \\ &\quad \times \varphi_k\varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1y)E\varphi_k(x_my)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}y)E\varphi_k(x_my))] \varphi_m[\varphi_k(x_my)]\varphi_k \\ &= [x_1y, \dots, x_my]. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для произвольного $\varphi_i \in \{\varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ справедливо выражение

$$[x_1, \dots, x_m]\varphi_i = [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_m)]. \quad (29)$$

Согласно определению кортежа (27) для $x_m \in A_i$ выражение (29) очевидно. Рассмотрим $x_m \in B_1$. Пусть $x_m \in B_0^{(i)}$:

$$[x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] \varphi_i = [\varphi_m(x_1 x_m^{-1}), \dots, \varphi_m(x_{m-1} x_m^{-1})] \varphi_m \varphi_i [\varphi_i^E(x_m)] \varphi_i [\varphi_i(x_m)],$$

при $i = m$ имеем

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] \varphi_m &= [\varphi_m(x_1 x_m^{-1}) \varphi_m^E(x_m), \varphi_m(x_{m-1} x_m^{-1}) \varphi_m^E(x_m)] \varphi_m [\varphi_m(x_m)] \\ &= [\varphi_m(\varphi_m(x_1) E \varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_m(x_{m-1}) E \varphi_m(x_m))] \varphi_m [\varphi_m(x_m)] \\ &= [\varphi_m(x_1), \dots, \varphi_m(x_{m-1}), \varphi_m(x_m)], \end{aligned}$$

а при $i \in \{2, \dots, m-1\}$ получаем

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{m-1}, x_m] \varphi_i &= [\varphi_m(x_1 x_m^{-1}), \dots, \varphi_m(x_{m-1} x_m^{-1})] \varphi_i [\sigma_{im} \varphi_i^E(x_m)] \sigma_{im} \varphi_i [\varphi_i(x_m)] \\ &= [\varphi_i \varphi_m(x_1 x_m^{-1}) \sigma_{im} \varphi_i^E(x_m), \dots, \varphi_i \varphi_m(x_{m-1} x_m^{-1}) \sigma_{im} \varphi_i^E(x_m)] \varphi_i \varphi_m [\varphi_i(x_m)] \\ &= [\sigma_{im}(\varphi_i(x_1 x_m^{-1}) \varphi_i^E(x_m)), \dots, \sigma_{im}(\varphi_i(x_{m-1} x_m^{-1}) \varphi_i^E(x_m))] \varphi_i \varphi_m [\varphi_i(x_m)] \\ &= [\varphi_m \varphi_i(\varphi_i(x_1 x_m^{-1}) \varphi_i^E(x_m)), \dots, \varphi_m \varphi_i(\varphi_i(x_{m-1} x_m^{-1}) \varphi_i^E(x_m))] \varphi_m [\varphi_i(x_m)] \\ &= [\varphi_m(\varphi_i(x_1) E \varphi_i(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_i(x_{m-1}) E \varphi_i(x_m))] \varphi_m [\varphi_i(x_m)] \\ &= [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_m)]. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай, когда $x_m \in B_1^{\varphi_i}$:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_m] \varphi_i &= [\varphi_m(\varphi_i \varphi_i(x_1) E \varphi_i \varphi_i(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_i \varphi_i(x_{m-1}) E \varphi_i \varphi_i(x_m))] \varphi_m [\varphi_i \varphi_i(x_m)] \varphi_i \\ &= [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_m)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x_m \in A$. Если $x_m \in A_i$, то он легко сводится к случаю $x_m \in B_1^{\varphi_i}$. Тогда необходимо рассмотреть

$$x_m \in \bar{A}_i \cap \left(\bigcup_k \bar{A}_k \right), \quad \text{где} \quad \bar{A}_i = \{x \in A \mid \varphi_i(x) \in A\}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi_i, \varphi_k, \varphi_m$ попарно не равны:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_m] \varphi_i &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_m [\varphi_k(x_m)] \varphi_k \varphi_i \\ &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_m [\varphi_k(x_m)] \varepsilon_{ki} \varphi_k \\ &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_m \varepsilon_{ki} [\varepsilon_{ki} \varphi_k(x_m)] \varphi_k \\ &\stackrel{\text{утв. 2}}{=} [\varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \sigma_{ki} \varphi_m [\varphi_k \varphi_i(x_m)] \varphi_k \\ &= [\sigma_{ki} \varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \sigma_{ki} \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_m [\varphi_k \varphi_i(x_m)] \varphi_k \\ &= [\varphi_m(\varphi_k \varphi_i(x_1) E \varphi_k \varphi_i(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k \varphi_i(x_{m-1}) E \varphi_k \varphi_i(x_m))] \varphi_m [\varphi_k \varphi_i(x_m)] \varphi_k \\ &= [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_{m-1}), \varphi_i(x_m)]. \end{aligned}$$

Если $\varphi_k = \varphi_m$, то утверждением 2 нельзя воспользоваться, но можно записать

$$\begin{aligned}
 & [x_1, \dots, x_m] \varphi_i \\
 &= [\varphi_i \varphi_m(\varphi_m(x_1) E \varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_i \varphi_m(\varphi_m(x_{m-1}) E \varphi_m(x_m))] \varphi_m[\varphi_m \varphi_i(x_m)] \varphi_m \\
 &= [\varphi_m(\varepsilon_{im} \varphi_m(x_1) E \varepsilon_{im} \varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_m(\varepsilon_{im} \varphi_m(x_{m-1}) E \varepsilon_{im} \varphi_m(x_m))] \\
 &\quad \times \varphi_m[\varphi_m \varphi_i(x_m)] \varphi_m \\
 &= [\varphi_m(\varphi_m \varphi_i(x_1) E \varphi_m \varphi_i(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_m \varphi_i(x_{m-1}) E \varphi_m \varphi_i(x_m))] \\
 &\quad \times \varphi_m[\varphi_m \varphi_i(x_m)] \varphi_m \\
 &= [\varphi_i(x_1), \dots, \varphi_i(x_{m-1}), \varphi_i(x_m)].
 \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть последний случай $\varphi_i = \varphi_m$. Тогда утверждением 2 также нельзя воспользоваться:

$$\begin{aligned}
 & [x_1, \dots, x_m] \varphi_m = \\
 &= [\varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_k \varphi_m[\varphi_k \varphi_m(x_m)] \varphi_k \\
 &= [\varphi_k \varphi_m(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \varphi_k \varphi_m(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \varphi_m[\varphi_k \varphi_m(x_m)] \varphi_k \\
 &= \varphi_m[\sigma_{km}(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m \sigma_{km}(\varphi_k(x_{m-1}) E \varphi_k(x_m))] \\
 &\quad \times \varphi_m[\varphi_k \varphi_m(x_m)] \varphi_k \\
 &= [\varphi_m(\sigma_{km} \varphi_k(x_1) E \sigma_{km} \varphi_k(x_m)), \dots, \varphi_m(\sigma_{km} \varphi_k(x_{m-1}) E \sigma_{km} \varphi_k(x_m))] \\
 &\quad \times \varphi_m[\varphi_k \varphi_m(x_m)] \varphi_k \\
 &= [\varphi_m(\varphi_k \varphi_m(x_1) E \varphi_k \varphi_m(x_m)), \dots, \varphi_m(\varphi_k \varphi_m(x_{m-1}) E \varphi_k \varphi_m(x_m))] \\
 &\quad \times \varphi_m[\varphi_k \varphi_m(x_m)] \varphi_k \\
 &= [\varphi_m(x_1), \dots, \varphi_m(x_m)].
 \end{aligned}$$

С учетом определения кортежей (18), (27) и выражений (28), (29) умножение кортежей запишем в виде

$$[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m] = [x_1 \cdot [y_1, \dots, y_m], \dots, x_m \cdot [y_1, \dots, y_m]], \quad (30)$$

а кортеж $[e_1, \dots, e_m]$ является нейтральным. Кортежи

$$[e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_m] = \sigma_{ij}$$

с переставленными элементами e_i и e_j при умножении слева на кортеж $[y_1, \dots, y_m]$ задают перестановку элементов y_i и y_j , следовательно, произвольные σ_{ij} задают произвольную перестановку элементов кортежа, а значит, выполнено условие (T1).

Согласно определению кортежей (27) и формуле их произведения (30) стабилизатор элемента e_m будет совпадать с группой $T_{m-1}(B)$, следовательно, стабилизатор упорядоченных элементов $(e_3, \dots, e_m)$ имеет вид

$$\text{St}_{T_m(B)}(e_3, \dots, e_m) = T_2(B).$$

Итак, построено отображение

$$F_1: K\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle \rightarrow KT_n(B).$$

3. Отображения F_2 и F_1 , построенные в пп. 1, 2, для функторов $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_1}$ задают отображения объектов соответствующих категорий $\overrightarrow{K}\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle$ и $\overrightarrow{KT}_n(B)$. Построим теперь отображения морфизмов данных категорий.

Для произвольного морфизма

$$h \in \text{mor}(\overrightarrow{K}\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle)$$

по соответствующим алгебрам

$$\text{dom } h = \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle, \quad \text{cod } h = \langle B^h; \cdot^h, ^{-1^h}, \varphi_2^h, \sigma_3^h, \dots, \sigma_n^h, e_1^h \rangle$$

при помощи F_2 построим их образы

$$\langle B, T_n^{(e_1, \dots, e_n)}; \bullet, G, ^{-1}, [e_1, \dots, e_n] \rangle, \quad \langle B^h, T_n^{(e_1^h, \dots, e_n^h)}; \bullet', G', ^{-1'}, [e_1^h, \dots, e_n^h] \rangle.$$

С учетом построения (30) групповой операции G при помощи функции $f: B \times \widehat{B}^n \rightarrow B$, фактически введенной определением кортежа (27), получим, что в категории $\overrightarrow{K}\langle B, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1}, \varepsilon \rangle$ групп преобразований морфизм $\overrightarrow{F_2}(h)$ определяется в виде пары морфизмов

$$h: B \rightarrow B^h, \quad h \times \dots \times h: T_n^{(e_1, \dots, e_n)} \rightarrow T_n^{(e_1^h, \dots, e_n^h)}$$

так, что если определен морфизм h , то естественным образом определен и морфизм

$$\overrightarrow{F_2}(h) = (h, h \times \dots \times h).$$

Единичный морфизм при таком отображении перейдет в единичный:

$$\overrightarrow{F_2}: \text{id}_{\mathfrak{A}} \mapsto \text{id}_{\overrightarrow{F_2}(\mathfrak{A})},$$

и для произвольных $f, h \in \text{mor}(\overrightarrow{K}\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle)$, для которых определена композиция $f \circ h$, также определена композиция

$$\overrightarrow{F_2}(f \circ h) = \overrightarrow{F_2}(f) \circ \overrightarrow{F_2}(h).$$

В обратную сторону, несмотря на то, что гомоморфизм групп преобразований

$$(\mu, \lambda): \langle B, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1}, \varepsilon \rangle \rightarrow \langle B^{(\mu, \lambda)}, T_n^{(\mu, \lambda)}; \bullet^{(\mu, \lambda)}, \cdot^{(\mu, \lambda)}, ^{-1^{(\mu, \lambda)}}, \varepsilon^{(\mu, \lambda)} \rangle$$

задается парой (μ, λ) , в силу описанного выше построения изоморфной группы

$$f_{e_1, \dots, e_n}: \langle B, T_n; \bullet, \cdot, ^{-1}, \varepsilon \rangle \rightarrow \langle B, T_n^{(e_1, \dots, e_n)}; \bullet, \cdot, ^{-1}, [e_1, \dots, e_n] \rangle$$

данные преобразования согласованы, т. е. найдутся такие попарно неравные элементы $e_1, \dots, e_n \in B$ и такое преобразование $\eta: B \rightarrow B^{(\mu, \lambda)}$, что $\eta(e_i) \neq \eta(e_j) \in B^{(\mu, \lambda)}$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \langle B, T_n^{(e_1, \dots, e_n)}; \bullet, \cdot, -^1, [e_1, \dots, e_n] \rangle & \xrightarrow{F_1} & \langle B; \cdot, -^1, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle \\ \downarrow (\eta, \eta \times \dots \times \eta) & & \downarrow \eta \\ \langle B^\eta, T_n^{(e_1^\eta, \dots, e_n^\eta)}; \bullet^\eta, \cdot^\eta, -^{1^\eta}, [e_1^\eta, \dots, e_n^\eta] \rangle & \xrightarrow{F_1} & \langle B^\eta; \cdot^\eta, -^{1^\eta}, \varphi_2^\eta, \sigma_3^\eta, \dots, \sigma_n^\eta, e_1^\eta \rangle \end{array}$$

будет коммутативной, а морфизм $\eta = \vec{F}_1(\eta, \eta \times \dots \times \eta)$ будет задавать морфизм соответствующих алгебр. Единичный морфизм при таком отображении перейдет в единичный:

$$\vec{F}_1: \text{id}_{\mathfrak{A}} \mapsto \text{id}_{\vec{F}_1(\mathfrak{A})},$$

и для произвольных

$$(f_1, f_2), (h_1, h_2) \in \text{mor}(\vec{K}\langle B, T_n; \bullet, \cdot, -^1, \varepsilon \rangle),$$

для которых определена композиция $(f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)$, определено

$$\vec{F}_1((f_1, f_2) \circ (h_1, h_2)) = \vec{F}_1(f_1, f_2) \circ \vec{F}_1(h_1, h_2).$$

Рассматривая суперпозицию отображений F_1, F_2 :

$$\begin{aligned} F_1 \circ F_2(\langle B; \cdot, -^1, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle) &= F_1(\langle B; \widehat{B}^n, -^1, [e_1, \dots, e_n] \rangle) \\ &= \langle B; \cdot, -^1, \phi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle, \\ F_2 \circ F_1(\langle B, T_n; \bullet, \cdot, -^1, \varepsilon \rangle) &= F_2(\langle B; \cdot, -^1, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle) \\ &= \langle B; \widehat{B}^n, -^1, [e_1, \dots, e_n] \rangle, \end{aligned}$$

приходим к естественному изоморфизму $F_1 \circ F_2 \cong \text{id}$ и $F_2 \circ F_1 \cong \text{id}$. Теорема доказана.

2.2. Примеры. В качестве характерного примера группы $T_n(B)$, близкой к точно n -транзитивной, рассмотрим группу $\text{GL}(n, P) \cong T_n(P^n)$. Данная группа построена над B_1 группой степени n с групповым умножением, определенным в виде

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2, \dots, x_1 y_n + x_n),$$

и функциями

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_2, \dots, x_1).$$

Функции φ_i при действии на упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ меняют между собой местами два элемента x_1 и x_i , остальные при этом оставляя на месте.

Кроме данного решения имеется еще одно, неэквивалентное решение, которое можно получить из классификации решений в теории физических структур, полученной Г. Г. Михайличенко [21]. Это решение запишется над той же

группой $\mathcal{B}_1$ и с теми же функциями φ_i , за исключением последней φ_n , которая в данном решении запишется в виде

$$\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 - x_1 - \dots - x_{n-1}, x_2, \dots, x_n).$$

Полученная при помощи такой алгебраической системы группа $T_n(P^n)$ вложена [26] в группу $\mathrm{GL}(n+1, P)$.

Группы, близкие к точно n -транзитивным при $A_i = \{e_i\}$ для $i \in \{2, \dots, n\}$, будут точно n -транзитивны. В качестве примера точно 3-транзитивных групп всегда можно рассмотреть произвольное поле P , так как антиавтоморфизм $E: P_1 \rightarrow P_1$ для поля будет автоморфизмом мультипликативной группы P_1 .

В качестве нетривиального примера для $n < 6$ можно рассмотреть почти-поле, построенное над кватернионной группой $\mathbb{H}_1$, $|\mathbb{H}_1| = 8$. Мультипликативную группу $\mathbb{H}_1$ можно определить на множестве $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, при этом $e_1 = 1$. Операции определим при помощи перестановок

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (1, e_2)(i, -j)(-i, k)(j, -k), & \sigma_3 &= (e_2, e_3)(i, k)(j, -j)(-i, -k), \\ \sigma_4 &= (e_2, e_4)(i, j)(-i, -j)(-k, k), & \sigma_5 &= (e_2, e_5)(i, -i)(j, k)(-j, -k). \end{aligned}$$

Антиавтоморфизм есть $E = (i, -i)(j, -j)(k, -k)$.

При помощи элемента $b = -1$ можно построить аддитивную операцию $x \oplus y = \varphi_2(x(by)^{-1})y$, которая будет изоморфна аддитивной группе поля $\mathrm{GF}(3^2)$. Элементы группы можно записать в виде

$$\begin{aligned} e_2 &= (0, 0); & i &= (0, 1); & -i &= (0, 2); \\ 1 &= (1, 0); & j &= (2, 1); & -j &= (1, 2); \\ -1 &= (2, 0); & k &= (1, 1); & -k &= (2, 2). \end{aligned}$$

Данные аддитивная и мультипликативная операции задают почти-поле $\langle \mathbb{H}; \cdot, \oplus, ^{-1}, \ominus, 1, e_2 \rangle$ с правосторонней дистрибутивностью. Группа T_4 изоморфна группе Матье M_{11} , так как она является единственной 4-транзитивной группой на 7920 элементах. Группа T_5 мощности 95040 изоморфна группе Матье M_{12} .

Для других примеров рассмотрим транзитивные 4-параметрические группы преобразований плоскости. Для этого воспользуемся результатами построенных двуметрик в теории физических структур [22] и покажем, что справедлива

ЛЕММА 6. *Над множеством $B = \mathbb{R}^2$ можно построить псевдополя $\langle \mathbb{R}^2; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, e_1 \rangle$ степени n при $n = 2, 3, 4$:*

- 1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{pmatrix}$;
- 2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{-1} \\ x_2 x_1^{-1} \end{pmatrix}$,
 $\sigma_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2^{-1} \\ x_2^{-1} \end{pmatrix}$;
- 3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{-1} \\ -x_2 x_1^{-2} \end{pmatrix}$;
- 4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$;

- 5) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 |y_1|^c \end{pmatrix}, \text{ где } c \in [0, 1), \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$
 6) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1^2 + (x_1 - 1)x_1 y_1^2 \ln |y_1| \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$
 7) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в построении преобразований плоскости

$$\chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

для двухкомпонентной функции⁴ $f = (f_1, f_2)$ и в переходе к новой функции $f' = (f'_1, f'_2)$, при помощи которой будет строиться группа $T_n(\mathbb{R}^2)$, т. е., с одной стороны, должно выполняться равенство

$$\chi(f(\lambda(x_1, x_2), \psi(y_1, \dots, y_{2n}))) = f'(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{2n}),$$

а с другой стороны, умножение

$$\begin{aligned} G((x_1, \dots, x_{2n}), (y_1, \dots, y_{2n})) \\ = (f'(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{2n}), \dots, f'(x_{2n-1}, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n})) \end{aligned}$$

должно задавать групповое умножение в $T_n(\mathbb{R}^2)$. Преобразования ищутся для функций из [22, формулы (5)–(8)] при $n = 2$, функций (9)–(11) из [22] при $n = 3$ и (12) из [22] при $n = 4$.

Убедиться в том, что двухкомпонентные функции $\varphi_2, \sigma_3, \sigma_4$ на соответствующих группах задают псевдополя степени n , можно прямой проверкой выполнения тождеств (A1)–(A5). Лемма доказана.

Заключение

Известно, что группу $GL(n, P)$ можно рассматривать как группу автоморфизмов векторного пространства P^n . В настоящей работе показано, что эту же группу можно рассматривать и как группу, близкую к точно n -транзитивной, построенной над псевдополем степени n . Более того, таких групп и соответствующих алгебраических систем достаточно много. Само обобщение групп, точно n -транзитивных, и полей степени n до групп, близких к точно n -транзитивным и псевдополям степени n , происходит вполне естественно, так что между ними сохраняется категорная эквивалентность. Полученные результаты могут найти применение как в теории групп, так и в теории физических структур для поиска новых полиметрических решений для физических структур ранга $(2, n)$.

Список литературы

1. C. Jordan, “Recherches sur les substitutions”, *J. Math. Pures Appl.* (2), **17** (1872), 351–367.
2. R. D. Carmichael, “Algebras of certain doubly transitive groups”, *Amer. J. Math.*, **53**:3 (1931), 631–644.

⁴В терминах статьи [22] такая двухкомпонентная функция называется *двуметрикой*.

3. H. Zassenhaus, "Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**:1 (1935/1936), 17–40.
4. H. Zassenhaus, "Über endliche Fastkörper", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**:1 (1935/1936), 187–220.
5. M. Hall, "On a theorem of Jordan", *Pacific J. Math.*, **4**:2 (1954), 219–226.
6. J. L. Zemmer, "Near-fields, planar and non-planar", *Math. Student*, **32** (1964), 145–150.
7. J. Tits, "Sur les groupes doublement transitif continus", *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 203–224; "Sur les groupes doublement transitif continus: correction et compléments", *Comment. Math. Helv.*, **30** (1956), 234–240.
8. A. Barlotti, K. Strambach, " k -transitive permutation groups and k -planes", *Math. Z.*, **185**:4 (1984), 465–485.
9. H. Karzel, "Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **32**:3–4 (1968), 191–206.
10. W. Kerby, H. Wefelscheid, "Über eine scharf 3-fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **37**:3–4 (1972), 225–235.
11. П. М. Кон, *Свободные кольца и их связи*, Мир, М., 1975, 422 с.; пер. с англ.: P. M. Cohn, *Free rings and their relations*, London Math. Soc. Monogr., **2**, Academic Press, London–New York, 1971, xvi+346 pp.
12. А. И. Мальцев, "Структурная характеристика некоторых классов алгебр", *Докл. АН СССР*, **120**:1 (1958), 29–32.
13. А. Г. Пинус, "Инварианты отношения рациональной эквивалентности", *Сиб. матем. журн.*, **41**:2 (2000), 430–436; англ. пер.: A. G. Pinus, "Invariants of rational equivalence", *Siberian Math. J.*, **41**:2 (2000), 357–361.
14. P. M. Cohn, "On the embedding of rings in skew fields", *Proc. London Math. Soc.* (3), **11**:1 (1961), 511–530.
15. W. Leissner, "Eine Charakterisierung der multiplikativen Gruppe eines Körpers", *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **73**:1 (1971/72), 92–100.
16. W. Leissner, "Ein Stufenaufbau der Fastbereiche, Fastkörper und Körper aus ihrer multiplikativen Gruppe", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **46**:1 (1977), 55–89.
17. W. Leissner, "On sharply n -ply transitive groups", *Proceedings of the eighteenth international symposium on functional equations* (Waterloo and Scarborough, Ontario, Canada, August 26–September 6, 1980), Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont., 1980.
18. А. А. Симонов, "О соответствии между почти-областями и группами", *Алгебра и логика*, **45**:2 (2006), 239–251; англ. пер.: A. A. Simonov, "Correspondence between near-domains and groups", *Algebra and Logic*, **45**:2 (2006), 139–146.
19. Ю. И. Кулаков, *Элементы теории физических структур*, С добавлением Г. Г. Михайличенко, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1968, 226 с.
20. Ю. И. Кулаков, "Об одном принципе, лежащем в основании классической физики", *Докл. АН СССР*, **193**:1 (1970), 72–75.
21. Г. Г. Михайличенко, "Решение функциональных уравнений в теории физических структур", *Докл. АН СССР*, **206**:5 (1972), 1056–1058; англ. пер.: G. G. Mikhailichenko, "Solution of functional equations in the theory of physical structures", *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 1377–1380.
22. Г. Г. Михайличенко, "Двуметрические физические структуры и комплексные числа", *Докл. АН СССР*, **321**:4 (1991), 677–680; англ. пер.: G. G. Mikhailichenko, "Dimetric physical structures and complex numbers", *Soviet Math. Dokl.*, **44**:3 (1992), 775–778.
23. Г. Г. Михайличенко, "Двуметрические физические структуры ранга $(n + 1, 2)$ ", *Сиб. матем. журн.*, **34**:3 (1993), 132–143; англ. пер.: G. G. Mikhailichenko,

- “Bimetric physical structures of rank $(n + 1, 2)$ ”, *Siberian Math. J.*, **34**:3 (1993), 513–522.
24. Б. И. Плоткин, *Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных*, Наука, М., 1991, 448 с.; англ. пер.: B. Plotkin, *Universal algebra, algebraic logic, and databases*, Math. Appl., **272**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994, xvii+438 pp.
25. С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004, 352 с.; пер. с англ.: S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998, xii+314 pp.
26. В. Г. Бардаков, А. А. Симонов, “Кольца и группы матриц с нестандартным произведением”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:3 (2013), 504–519; англ. пер.: V. G. Bardakov, A. A. Simonov, “Rings and groups of matrices with a nonstandard product”, *Siberian Math. J.*, **54**:3 (2013), 393–405.

АНДРЕЙ АРТЁМОВИЧ СИМОНОВ
(ANDREI A. SIMONOV)
Новосибирский государственный университет
E-mail: andrey.simonoff@gmail.com

Поступило в редакцию
23.01.2014