Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Плотность полугруппы в банаховом пространстве, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 21–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:59:17

УДК 517.982.256+517.538.5

П. А. Бородин

Плотность полугруппы в банаховом пространстве

Исследуются условия, налагаемые на множество M в банаховом пространстве X , необходимые или достаточные для того, чтобы множество $R(M)$ сумм $x_1 + \dots + x_n$, $x_k \in M$, было всюду плотно в X . Выделяются условия, при которых замыкание $\overline{R(M)}$ является аддитивной подгруппой в X , и условия, при которых эта аддитивная подгруппа плотна в X . Доказывается, в частности, что если M – замкнутая спрямляемая кривая в равномерно выпуклом и равномерно гладком пространстве X , не лежащая целиком ни в каком замкнутом полупространстве $\{x \in X: f(x) \geq 0\}$, $f \in X^*$, и минимальная в том смысле, что всякая ее собственная поддуга лежит в некотором открытом полупространстве $\{x \in X: f(x) > 0\}$, то $\overline{R(M)} = X$. Полученные результаты применяются к аппроксимациям в различных функциональных пространствах.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: банахово пространство, аддитивная полугруппа, плотность, равномерно выпуклое пространство, модуль гладкости, аппроксимация, наипростейшие дроби.

DOI: 10.4213/im8220

§ 1. Введение

Работа посвящена решению следующей общей задачи.

Задача 1. Найти условия, налагаемые на заданное подмножество M банахова пространства X , необходимые или достаточные для того, чтобы множество

$$R(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{M + \dots + M}_n$$

было всюду плотно в X , т. е. любой элемент из X сколь угодно точно приближался конечными суммами элементов из M .

Множество $R(M)$ представляет собой *аддитивную полугруппу, порожденную множеством M* , поэтому задачу 1 можно рассматривать как частный случай задачи о плотности полугруппы в банаховом пространстве (везде далее мы будем использовать термин “плотность” вместо “всюду плотности” и термин “плотны” вместо “образуют всюду плотное множество”). В [1, гл. 8, §2] множество $R(M)$ называется *аддитивным результатом множества M* , или

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант № НШ-3682.2014.1) и РФФИ (гранты № 14-01-00510, 14-01-91158).

полумодулем, порожденным множеством M , и обозначается $(M)_a$. Поскольку в задаче 1 нет умножения на скаляр, пространство X в этой задаче можно считать действительным.

Задача 1 в качестве частных случаев содержит задачу о сходимости n -членных приближений ($M = \{\lambda d: \lambda \in \mathbb{R}, d \in D\}$, где D – словарь; см., например, [2]), а также задачу о приближении многочленами с целыми коэффициентами (см., например, [3]).

Основной мотивировкой для исследования задачи 1 послужили некоторые вопросы теории приближения наипростейшими дробями (логарифмическими производными многочленов)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

в различных банаховых пространствах X функций, заданных на различных подмножествах комплексной плоскости. Здесь в качестве M берется множество $SF(E) = \{\frac{1}{z-a}: a \in E\}$, где $E \subset \mathbb{C}$, и ставится задача о плотности результата $R(SF(E))$ в X , т. е. задача о плотности в X наипростейших дробей с полюсами из E .

В [4] отмечена неплотность $R(SF(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}))$ во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$ (этот факт следует из более ранних результатов В. И. Данченко), и для всякого $u > 0$ доказана плотность $R(SF(\{a: |\operatorname{Im} a| > u\}))$ в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ комплекснозначных функций $f(x)$, заданных и непрерывных на действительной оси $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Множество $R(SF(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+))$ наипростейших дробей с полюсами вне полуоси $\mathbb{R}_+$ плотно в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \geq 2$ и не плотно в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p < 2$ (см. [5], [6]). Если K – компакт на комплексной плоскости, то $R(SF(\mathbb{C} \setminus K))$ плотно в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на K и голоморфных внутри K , тогда и только тогда, когда K не разбивает плоскость [7]. В [8] исследовался вопрос о плотности в пространстве $AC(K)$ множества $R(SF(E))$ наипростейших дробей с полюсами из подмножества E комплексной плоскости, не пересекающегося с K . Некоторые леммы из [8] послужили прототипами результатов настоящей работы.

Полученные в работе общие результаты, относящиеся к задаче 1, применяются в теории приближения наипростейшими дробями и их обобщениями (теоремы 7, 8 и следствия 3–6).

Отметим одно очевидное условие, необходимое для существования положительного решения задачи 1.

ЛЕММА 1. *Для плотности $R(M)$ в X необходимо, чтобы множество M было разносторонним: для любого ненулевого функционала $f \in X^*$ существует такой элемент $x \in M$, что $f(x) < 0$ ($\operatorname{Re} f(x) < 0$ в случае комплексного X).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \geq 0$ для любого $x \in M$, то $f(x) \geq 0$ и для любого $x \in R(M)$, а элементы $z \in X$, удовлетворяющие условию $f(z) < 0$, не могут быть приближены элементами $R(M)$ (геометрически это означает,

что $R(M)$ целиком лежит в одном из полупространств, на которые X делится гиперплоскостью $\ker f$).

Упомянутый выше факт неплотности множества $R(SF(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}))$ наипростейших дробей с полюсами вне действительной оси во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ как раз и выводится из существования такого функционала $F \in L_q(\mathbb{R}) = (L_p(\mathbb{R}))^*$, что $\operatorname{Re} F(r) \geq 0$ для любого $r \in SF(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$:

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+i} \frac{1}{x-a} dx \geq 0, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Обоснование плотности $R(M)$ в пространстве X обычно разделяется на решение двух подзадач:

I) доказательство того, что $\overline{R(M)}$ – аддитивная подгруппа в X (т.е. любой элемент $-x$, $x \in M$, с любой точностью приближается суммами элементов из M);

II) доказательство того, что эта аддитивная подгруппа $\overline{R(M)}$ совпадает с X . Задачи I), II) решаются в конечномерном случае следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – конечномерное нетривиальное банахово пространство и $M \subset X$. Тогда:

1) для того чтобы $\overline{R(M)}$ было аддитивной подгруппой в X , необходимо и достаточно, чтобы множество M было разносторонним;

2) для выполнения равенства $\overline{R(M)} = X$ (при условии, что множество M разностороннее) достаточно, чтобы множество M было связным.

Конечно, связность M в утверждении 2) теоремы 1 не является необходимым условием, как показывает пример множества $M = \{-1, \sqrt{2}\}$ на действительной оси $X = \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Необходимость следует из леммы 1. Докажем достаточность. Разносторонность множества M в конечномерном случае означает, что нулевой элемент X лежит внутри выпуклой оболочки множества M вместе с некоторой своей окрестностью.

Для всякого вектора $v \in M$ найдется столь малое положительное число λ_0 , что $-\lambda_0 v$ лежит в той окрестности нуля, которая попадает в выпуклую оболочку M . Следовательно, найдутся такие векторы $v_1, \dots, v_s \in M$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, что $-\lambda_0 v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$ (по теореме Каратеодори [9, §2] можно взять $s \leq \dim X + 1$). Следовательно, $-v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$ для некоторых положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. По теореме Дирихле [10, гл. 1, §5] для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N , что каждое число $N\alpha_k$ отличается от некоторого целого неотрицательного числа N_k меньше, чем на $\varepsilon/(\|v_1\| + \dots + \|v_s\|)$ (нормы берутся в пространстве X). Имеем

$$\begin{aligned} & \| -v - ((N-1)v + N_1 v_1 + \dots + N_s v_s) \| \\ & \leq \| -Nv - N(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s) \| + \sum_{k=1}^s |N\alpha_k - N_k| \|v_k\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Вектор $(N-1)v + N_1v_1 + \dots + N_sv_s$ лежит в $R(M)$, поэтому $-v \in \overline{R(M)}$. Таким образом, $\overline{R(M)}$ – замкнутая аддитивная подгруппа в X .

2) Замкнутая аддитивная подгруппа в конечномерном пространстве есть сумма замкнутого $\mathbb{R}$ -линейного подпространства L и дискретной решетки [11, гл. 7, § 1]. В силу связности $M \subset L$, поскольку выпуклая оболочка M содержит некоторую окрестность нуля, получаем $L = X = \overline{R(M)}$, что и требовалось показать. Теорема доказана.

В бесконечномерном случае утверждения 1), 2) теоремы 1 неверны. Рассмотрим подзадачи I) и II) задачи 1 отдельно и подробно в следующих параграфах. В основном мы сосредоточимся на рассмотрении случая связного порождающего множества M . Интересно, что в подзадаче I) основную роль играет выпуклость единичной сферы $S(X)$ пространства X (теорема 2), а в подзадаче II) – гладкость этой сферы (теоремы 4, 5). Основным результатом работы является теорема 6, которая по существу переносит теорему 1 на бесконечномерный случай при дополнительных условиях, налагаемых на множество M и пространство X .

§ 2. Условия, при которых замыкание полугруппы является подгруппой

Множество $\overline{R(M)}$ является подгруппой, если каждый элемент $-z$, $z \in M$, с любой точностью приближается элементами $R(M)$. Выделим ситуацию, в которой такой приближаемости можно добиться сразу для всех $z \in M$.

Разностороннее множество M в банаховом пространстве X назовем *минимальным*, если для любой окрестности $U(x)$ всякого элемента $x \in M$ найдется такой функционал $f \in X^*$, что для всякого $y \in M \setminus U(x)$ выполнено неравенство $f(y) > 0$ (в комплексном случае $\operatorname{Re} f(y) > 0$).

ЛЕММА 2. Пусть M – разносторонний минимальный компакт в X . Для того чтобы $\overline{R(M)}$ было замкнутой аддитивной подгруппой в X , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись $x_1, \dots, x_n \in M$, удовлетворяющие неравенству $\|x_1 + \dots + x_n\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

Рассмотрим произвольный элемент $z \in M$ и его шаровую окрестность $B(z, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. По условию существует такой функционал $f \in X^*$, что для всякого $y \in M \setminus B(z, \varepsilon)$ выполнено $f(y) > 0$. Поскольку разность $M \setminus B(z, \varepsilon)$ компактна, имеем $f(y) > \delta$ для всякого $y \in M \setminus B(z, \varepsilon)$ и некоторого $\delta > 0$. По условию найдутся $x_1, \dots, x_n \in M$, удовлетворяющие неравенству $\|x_1 + \dots + x_n\| < \min\{\frac{\delta}{\|f\|}, \varepsilon\}$. Если $x_k \notin B(z, \varepsilon)$ для любого k , то $\|x_1 + \dots + x_n\| \geq \frac{1}{\|f\|} f(x_1 + \dots + x_n) > \frac{n\delta}{\|f\|}$. Следовательно, какой-то элемент x_k лежит в $B(z, \varepsilon)$, и выполнены неравенства

$$\| -z - (x_1 + \dots + x_n - x_k) \| \leq \| z - x_k \| + \| x_1 + \dots + x_n \| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, элемент $-z$ с любой точностью приближается элементами из $R(M)$, а значит, $\overline{R(M)}$ – замкнутая аддитивная подгруппа.

Приведем теперь обещанный пример разностороннего компакта M в бесконечномерном пространстве, для которого $\overline{R(M)}$ не является подгруппой.

ПРИМЕР 1. Множество $M = \{\alpha_x: 0 \leq x \leq 1\}$, где $\alpha_x(t) = -tI_{[0,x]}(t) + I_{[x,1]}(t)$ (I_A – индикаторная функция множества $A \subset [0, 1]$), в каждом из пространств $L_2[0, 1]$ и $L_1[0, 1]$ является разносторонним минимальным связным компактом, но $R(M)$ не является подгруппой.

Действительно, связность и компактность множества M очевидны. Докажем его разносторонность.

Пусть для некоторой функции $f \in L_2[0, 1]$ или $f \in L_\infty[0, 1]$ неравенство $\int_0^1 f(t)\alpha_x(t) dt \geq 0$ выполнено при любом $x \in [0, 1]$. Это означает, что для любого $x \in [0, 1]$

$$-\int_0^x tf(t) dt + \int_x^1 f(t) dt \geq 0.$$

В терминах первообразной $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ это неравенство переписывается следующим образом:

$$-xF(x) + F(1) - F(x) + \int_0^x F(t) dt \geq 0. \quad (1)$$

Для точки x_0 , в которой $F(x)$ достигает максимума ($F(x_0) = \max\{F(x): x \in [0, 1]\}$), с использованием (1) получаем

$$x_0F(x_0) \geq \int_0^{x_0} F(t) dt \geq F(x_0) - F(1) + x_0F(x_0) \geq x_0F(x_0),$$

откуда $F(x) = F(x_0)$ при всех $x \in [0, x_0]$ и $F(1) = F(x_0)$. Поскольку $F(0) = 0$, имеем $F(1) = F(x) = 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $F(x) \leq 0$ при $x \in [x_0, 1]$. Тогда при $x = 1$ неравенство (1) принимает вид $\int_0^1 F(t) dt \geq 0$. Следовательно, $F \equiv 0$, а значит, и $f \equiv 0$.

Докажем минимальность компакта M в пространствах L_2 и L_1 . Для этого достаточно доказать, что для любого $s \in (0, 1)$ и $0 < \delta < \min\{s, 1-s\}$ найдется такая функция $g \in L_\infty[0, 1]$, что $\int_0^1 g(t)\alpha_x(t) dt > 0$ для любого $x \notin (s-\delta, s+\delta)$. Рассмотрим функцию $g(t) = (1 + \frac{\delta}{4})I_{[s-\delta, s]} - (1 - \frac{\delta}{4})I_{[s, s+\delta]}$. При $x \leq s-\delta$ имеем

$$\int_0^1 g(t)\alpha_x(t) dt = \int_{s-\delta}^{s+\delta} g(t) dt = \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\delta - \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\delta = \frac{\delta^2}{2},$$

а при $x \geq s+\delta$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)\alpha_x(t) dt &= -\int_{s-\delta}^{s+\delta} tg(t) dt \\ &= \left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{(s-\delta)^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{(s+\delta)^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right) = \delta^2 - \frac{s\delta^2}{2} \geq \frac{\delta^2}{2}, \end{aligned}$$

так что $\int_0^1 g(t)\alpha_x(t) dt \geq \frac{\delta^2}{2}$ для любого $x \notin (s-\delta, s+\delta)$.

Осталось доказать, что $\overline{R(M)}$ не является подгруппой для начала в $L_2[0, 1]$. В силу леммы 2 достаточно показать, что норма всякой суммы из $m \geq 1$ функций α_x больше некоторого положительного числа, не зависящего от этой суммы. Всякая такая сумма с любой точностью приближается суммой S из m функций вида $\alpha_{\nu/n}$, $\nu = 0, \dots, n$, где $n = 2qm$, а q – достаточно большое натуральное число. Пусть в сумме S имеется m_ν слагаемых $\alpha_{\nu/n}$, $\nu = 0, \dots, n$, $m_0 + m_1 + \dots + m_n = m$. Тогда на каждом отрезке $[\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}]$ функция $S(t)$ равна $\sum_{j=0}^{\nu} m_j - t \sum_{j=\nu+1}^n m_j =: -c_\nu t + (m - c_\nu)$ и мы имеем

$$\begin{aligned}
 \|S\|_{L_2[0,1]}^2 &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} (-c_\nu t + m - c_\nu)^2 dt \\
 &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left((m - c_\nu)^2 t - c_\nu (m - c_\nu) t^2 + \frac{c_\nu^2 t^3}{3} \right) \Big|_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} \\
 &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{(m - c_\nu)^2}{n} - c_\nu (m - c_\nu) \frac{2\nu + 1}{n^2} + \frac{c_\nu^2}{3} \frac{3(\nu + 1/2)^2 + 1/12}{n^3} \right) \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left((m - c_\nu)^2 n^2 - 2(m - c_\nu) n \left(\nu + \frac{1}{2} \right) c_\nu + c_\nu^2 \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{c_\nu^2}{36} \right) \\
 &\geq \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} ((m - c_\nu)n - c_\nu \nu)^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} (m - c_\nu) n c_\nu \\
 &\geq \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} (mn - c_\nu(n + \nu))^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} m^2 n \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{\nu=0}^{n-1} (n + \nu)^2 \left(\frac{mn}{n + \nu} - c_\nu \right)^2 - \frac{m^2}{n} \\
 &\geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{mn}{n + \nu} \right\|^2 - \frac{m}{2q} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{m\nu}{n + \nu} \right\|^2 - \frac{m}{2q},
 \end{aligned}$$

где $\|u\|$ – расстояние от числа u до ближайшего целого числа.

Числа $u_\nu = \frac{m\nu}{n+\nu}$, $\nu = 0, \dots, n-1$, возрастают от 0 до почти $\frac{m}{2}$ с шагом, величина которого колеблется в интервале $(\frac{1}{8q}, \frac{1}{2q})$:

$$u_{\nu+1} - u_\nu = \frac{m(\nu+1)}{n+\nu+1} - \frac{m\nu}{n+\nu} = \frac{mn}{(n+\nu+1)(n+\nu)} \in \left(\frac{mn}{4n^2}, \frac{mn}{n^2} \right) = \left(\frac{1}{8q}, \frac{1}{2q} \right).$$

Поэтому на каждом полуцелом отрезке вида $[k, k + \frac{1}{2}]$ или $[k + \frac{1}{2}, k + 1]$ (таких отрезков всего m на $[0, \frac{m}{2}]$) имеется не меньше q чисел u_ν и сумма квадратов их норм (т.е. квадратов расстояний до k или до $k + 1$ соответственно) на каждом из этих отрезков не меньше, чем

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left(\frac{j}{8q} \right)^2 \geq \frac{(q-1)^3}{3(8q)^2} \geq \frac{q^3/2}{192q^2} = \frac{q}{384}$$

(последнее неравенство верно при $q \geq 5$), и можно продолжить прерванную выше оценку:

$$\|S\|_{L_2[0,1]}^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{m\nu}{n+\nu} \right\|^2 - \frac{m}{2q} \geq \frac{1}{n} \cdot m \cdot \frac{q}{384} - \frac{m}{2q} = \frac{1}{768} - \frac{m}{2q} \geq \frac{1}{900}$$

(последнее неравенство справедливо при достаточно больших q). Таким образом, норма любой суммы S указанного вида, а значит, и норма любой суммы функций α_x не меньше $\frac{1}{30}$. Следовательно, $\overline{R(M)}$ не является подгруппой в $L_2[0, 1]$.

Оценим снизу норму суммы S в пространстве $L_1[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|S\|_{L_1[0,1]} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} |-c_\nu t + m - c_\nu| dt \geq \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} (-c_\nu t + m - c_\nu) dt \right| \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| -\frac{c_\nu}{2} \frac{2\nu+1}{n^2} + \frac{m-c_\nu}{n} \right| \geq \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} |(m-c_\nu)n - c_\nu \nu| - \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|c_\nu|}{2} \\ &\geq \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} |mn - c_\nu(n+\nu)| - \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m}{2} \geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{mn}{n+\nu} - c_\nu \right| - \frac{1}{4q} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{mn}{n+\nu} \right\| - \frac{1}{4q} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{m\nu}{n+\nu} \right\| - \frac{1}{4q} \geq \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\| \frac{m\nu}{n+\nu} \right\|^2 - \frac{1}{4q} \geq \frac{1}{900}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство доказывается так же, как выше. Следовательно, $\overline{R(M)}$ не является подгруппой и в $L_1[0, 1]$. Обоснование примера закончено.

Отметим, что даже если “замкнуть” кривую M из примера 1, добавив к ней все функции $\beta_x(t) = \frac{I_{[0,x]}(t) - tI_{[x,1]}(t)}{[x,1]}$, $x \in [0, 1]$, то для новой замкнутой кривой M_1 множество $\overline{R(M_1)}$ также не является подгруппой в $L_2[0, 1]$ (суммы S из обоснования примера 1 имеют точно такой же вид и по норме отделены от нуля).

Напомним, что банахово пространство X с единичной сферой $S(X)$ называется *равномерно выпуклым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x, y \in S(X), \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть в равномерно выпуклом банаховом пространстве X задано разностороннее минимальное множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, состоящее из спрямляемых (замкнутых или разомкнутых) кривых Γ_j . Тогда $\overline{R(\Gamma)}$ – подгруппа в X .

Существенность спрямляемости кривых Γ_j в теореме 2 показывает пример 1 в пространстве $L_2[0, 1]$ (оно равномерно выпукло), а существенность равномерной выпуклости пространства X показывает пример 1 в пространстве $L_1[0, 1]$ (в этом пространстве кривая M из примера 1 спрямляема).

Условие равномерной выпуклости пространства в теореме 2 можно заменить на условие его суперрефлексивности (см., например, [12, примечания и ссылки

к гл. 3]), поскольку всякое суперрефлексивное пространство можно так эквивалентно перенормировать, что оно станет равномерно выпуклым [13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ надо найти такие $x_1, \dots, x_n \in \Gamma$, что $\|x_1 + \dots + x_n\| < \varepsilon$.

Из разносторонности Γ следует, что 0 лежит в замыкании $\overline{\text{conv } \Gamma}$ выпуклой оболочки Γ . Согласно [14, предложение 1.2] существует вероятностная мера μ с носителем на Γ , представляющая 0:

$$\int_{\Gamma} f(y) d\mu(y) = 0 \quad \forall f \in X^*. \quad (2)$$

Покажем, что $\text{supp } \mu = \Gamma$. Если $\mu(U(x)) = 0$ для какой-то окрестности точки $x \in \Gamma$, то в силу минимальности и компактности Γ для некоторых $f \in X^*$ и $\delta > 0$ имеем $f(y) > \delta > 0$ для всех $y \in \Gamma \setminus U(x)$, и тогда

$$\int_{\Gamma} f(y) d\mu(y) = \int_{\Gamma \setminus U(x)} f(y) d\mu(y) \geq \delta,$$

что противоречит равенству (2).

Пусть $\theta_j = \mu(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, m$. По теореме Дирихле о совместных приближениях [10, гл. 1, § 5] существует бесконечная последовательность Λ натуральных чисел n , для каждого из которых все числа $n\theta_j$ отличаются от ближайших к ним целых неотрицательных чисел n_j меньше, чем на $n^{-1/m}$. Зафиксируем $n \in \Lambda$. Для каждого j возьмем на кривой Γ_j какую-нибудь точку (один из концов Γ_j , если эта кривая разомкнута) и, начиная от нее, последовательно отложим n_j связанных дуг, включающих свои концы, мера μ каждой из которых равна $\frac{1}{n}$. Если мера μ имеет атом a на кривой Γ_j , то этот атом может служить точечной дугой разбиения или общим концом двух соседних дуг, причем его мера дробится нужным образом на все дуги, в которые он входит. При таком разбиении последняя дуга либо не “дойдет” до первой (соответственно, до другого конца всей кривой Γ_j), либо перекроет ее (соответственно, “оттолкнувшись” от другого конца кривой Γ_j , пойдет обратно по ней же). В любом случае образуется лишняя дуга α_j (не покрытая совсем или покрытая дважды), для которой $\mu(\alpha_j) < n^{-(1+1/m)}$. В итоге все множество Γ разобьется на ориентированные дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с $\mu(\gamma_k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$, и ориентированные дуги $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ с $\mu(\alpha_j) < n^{-(1+1/m)}$, $j = 1, \dots, m$, причем некоторые из дуг α_j проходятся в противоположном направлении, а некоторые из дуг γ_k имеют точки возврата в одном из концов кривой Γ_j , после которой они проходятся в обратном направлении вдоль соответствующей дуги α_j .

Для каждого $k = 1, \dots, n$ найдется такая точка y_k , что

$$f(y_k) = n \int_{\gamma_k} f(y) d\mu(y) \quad \forall f \in X^*$$

(см. [14, предложение 1.1]). Точка y_k , являясь средним нормированного сужения меры μ на соответствующую дугу γ_k , лежит в замыкании выпуклой оболочки $\text{conv } \gamma_k$ этой дуги.

Положим $d(\gamma_k) = \sup\{\rho(x, \gamma_k) : x \in \text{conv } \gamma_k\}$ (здесь и далее $\rho(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ обозначает расстояние от точки x до множества A). Возьмем какие-нибудь точки $x_k \in \gamma_k$, ближайшие к точкам y_k , $k = 1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| &\leq \sum_{k=1}^n \|x_k - y_k\| + \left\| \sum_{k=1}^n y_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + \sup_{f \in S(X^*)} \sum_{k=1}^n f(y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + \sup_{f \in S(X^*)} \sum_{k=1}^n n \int_{\gamma_k} f(y) d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + \sup_{f \in S(X^*)} n \left(\int_{\Gamma} f(y) d\mu(y) - \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} f(y) d\mu(y) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + \sup_{f \in S(X^*)} n \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j} f(y) d\mu(y) \\ &\leq \sum_{k=1}^n d(\gamma_k) + mn \sup_{y \in \Gamma} \|y\| n^{-1-1/m}. \end{aligned}$$

Поскольку второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю с ростом n , осталось доказать, что $\sum_{k=1}^n d(\gamma_k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$.

Для данного $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через l_k длину отрезка, соединяющего концы u и v дуги γ_k . Сумма расстояний от любой точки дуги γ_k до u и v не превосходит длины $|\gamma_k|$ этой дуги. Поэтому дуга γ_k лежит внутри 2-шара (см. [15])

$$B_k = B(u, v; |\gamma_k|) = \{z \in X : \|z - u\| + \|z - v\| \leq |\gamma_k|\}.$$

В этом же 2-шаре лежит и выпуклая оболочка $\text{conv } \gamma_k$. Положим

$$r_k = \sup_{z \in B_k} \rho(z, [u, v]) \leq \frac{|\gamma_k|}{2}$$

и заметим, что, во-первых, каждая точка отрезка $[u, v]$ отстоит от кривой γ_k не более, чем на r_k , а во-вторых,

$$d(\gamma_k) = \sup_{z \in \text{conv } \gamma_k} \rho(z, \gamma_k) \leq \sup_{z \in B_k} \rho(z, \gamma_k) \leq \sup_{z \in B_k} (\rho(z, [u, v]) + r_k) = 2r_k \leq |\gamma_k|. \quad (3)$$

Нам понадобится

ЛЕММА 3. Пусть банахово пространство X равномерно выпукло. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\|u - v\| = 1$, $\|z - u\| + \|z - v\| \leq 1 + \delta$ следует $\rho(z, [u, v]) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [15, теорема 2]. Для полноты изложения приведем короткое доказательство, принадлежащее О. Н. Косухину.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из определения равномерной выпуклости находим такое $\delta' > 0$, что из $x, y \in S(X)$, $\|x + y\| > 2 - \delta'$ следует $\|x - y\| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \min\{\delta', \varepsilon\}$. Пусть имеются такие $u, v, z \in X$, что $\|u - v\| = 1$, $\|z - u\| + \|z - v\| \leq 1 + \delta$. Положим $\alpha = \|z - u\|$, $\beta = \|z - v\|$. На отрезке $[u, v]$

найдем такие точки z_u, z_v , что $\|z_u - u\| = \alpha$, $\|z_v - v\| = \beta$. Точка z_u лежит между z_v и v , $\|z_u - z_v\| = \alpha + \beta - 1$.

Если, скажем, $\alpha < \delta$, то $\rho(z, [u, v]) \leq \|z - u\| = \alpha < \delta \leq \varepsilon$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha \geq \delta$ и $\beta \geq \delta$. Имеем

$$\begin{aligned} (2 - \delta)(\alpha + \beta) &\leq \alpha + \beta + 1 = 2\|u - v\| + \|z_v - z_u\| = \|2(u - v) + z_v - z_u\| \\ &\leq \|z_v - v + z - v\| + \|z_u - u + z - u\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что верно хотя бы одно из неравенств

$$\|z_v - v + z - v\| \geq \beta(2 - \delta), \quad \|z_u - u + z - u\| \geq \alpha(2 - \delta).$$

Если без ограничения общности верно первое неравенство, то для единичных векторов $x = (z_v - v)/\beta$ и $y = (z - v)/\beta$ имеем $\|x + y\| \geq 2 - \delta \geq 2 - \delta'$, откуда $\|x - y\| < \varepsilon$, и справедлива цепочка соотношений

$$\rho(z, [u, v]) \leq \|z - z_v\| = \|(z - v) - (z_v - v)\| = \|\beta y - \beta x\| < \varepsilon \beta \leq \varepsilon(1 + \delta - \alpha) \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Для наших u и v — концов дуги γ_k — имеем $\|u - v\| = l_k$, поэтому по лемме 3 из $\|z - u\| + \|z - v\| \leq l_k(1 + \delta)$ следует $\rho(z, [u, v]) < \varepsilon l_k$, или в принятых выше обозначениях

$$|\gamma_k| \leq l_k(1 + \delta) \implies r_k \leq \varepsilon l_k \implies d(\gamma_k) \leq 2\varepsilon l_k \leq 2\varepsilon |\gamma_k|. \quad (4)$$

Пусть I_1 — множество тех $k \in \{1, \dots, n\}$, для которых выполнено неравенство $|\gamma_k| \leq l_k(1 + \delta)$, а I_2 — множество оставшихся k . Из (3) и (4) имеем

$$\sum_{k=1}^n d(\gamma_k) = \sum_{k \in I_1} d(\gamma_k) + \sum_{k \in I_2} d(\gamma_k) \leq 2\varepsilon \sum_{k \in I_1} |\gamma_k| + \sum_{k \in I_2} |\gamma_k|. \quad (5)$$

С ростом $n \in \Lambda$ дуги γ_k становятся все мельче (иначе для какой-то нетривиальной дуги $\gamma \in \Gamma$ получим $\mu(\gamma) = 0$, что противоречит доказанному выше равенству $\text{supp } \mu = \Gamma$), и обе суммы $\sum_{k=1}^n |\gamma_k|$ и $\sum_{k=1}^n l_k$ стремятся к $|\Gamma| := \sum_{j=1}^m |\Gamma_j|$ (длины дуг $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ стремятся к нулю). В частности, можно выбрать такое $n \in \Lambda$, что при этом n выполнены неравенства

$$\sum_{k=1}^n |\gamma_k| < |\Gamma| + \varepsilon', \quad \sum_{k=1}^n l_k > |\Gamma| - \varepsilon',$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon \delta}{2(1+\delta)}$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Gamma| - \varepsilon' &< \sum_{k=1}^n l_k = \sum_{k \in I_1} l_k + \sum_{k \in I_2} l_k \leq \sum_{k \in I_1} |\gamma_k| + (1 + \delta)^{-1} \sum_{k \in I_2} |\gamma_k| \\ &\leq |\Gamma| + \varepsilon' - \sum_{k \in I_2} |\gamma_k| + (1 + \delta)^{-1} \sum_{k \in I_2} |\gamma_k|, \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$\sum_{k \in I_2} |\gamma_k| < \frac{2\varepsilon'(1+\delta)}{\delta} = \varepsilon.$$

Из последнего неравенства и (5) получаем $\sum_{k=1}^n d(\gamma_k) \leq 2\varepsilon(|\Gamma| + \varepsilon') + \varepsilon$, так что, действительно, суммы $\sum_{k=1}^n d(\gamma_k)$ стремятся к нулю с ростом $n \in \Lambda$. Теорема доказана.

Приведем еще одно условие для компакта M в произвольном банаховом пространстве, достаточное для того, чтобы $\overline{R(M)}$ было подгруппой.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в банаховом пространстве X задан разносторонний минимальный компакт M , у которого минимально возможное число $n(\varepsilon)$ элементов в ε -сети удовлетворяет оценке

$$n(\varepsilon) = O\left(\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

при некотором $\alpha > 0$. Тогда $\overline{R(M)}$ – подгруппа в X .

По-видимому, скорость роста $n(\varepsilon)$ в теореме 3 может быть увеличена (компакт M из примера 1 в пространстве $L_1[0, 1]$ имеет $n(\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Без ограничения общности число α можно считать натуральным. Для всякого достаточно большого натурального n по условию найдутся n шаров $B_1, \dots, B_n$ с радиусом $\varepsilon \leq \exp(-cn^{1/\alpha})$, покрывающих компакт M ($c = \text{const} > 0$). Для $m = n^{2\alpha}$ найдется ε' -сеть компакта M из m элементов, где $\varepsilon' \leq \exp(-cm^{1/\alpha}) = \exp(-cn^2)$. Следовательно, найдутся шары $V_1, \dots, V_m$ с радиусами $2\varepsilon'$ и центрами на M , покрывающие M . Считаем, что шары V_j занумерованы таким образом, что центры первых k_1 из этих шаров лежат во множестве $M \cap B_1$, центры шаров с номерами от $k_1 + 1$ до k_2 – во множестве $(M \cap B_2) \setminus B_1$ и так далее, центры шаров с номерами от $k_{j-1} + 1$ до k_j – во множестве $(M \cap B_j) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{j-1})$, $j = 2, \dots, n$.

Положим

$$M_1 = M \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k_1} V_k\right),$$

$$M_j = \left(M \cap \left(\bigcup_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} V_k\right)\right) \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{j-1}), \quad j = 2, \dots, n.$$

Из разносторонности M следует, что 0 лежит в замыкании $\text{conv } \overline{M}$ выпуклой оболочки M . Пусть μ – вероятностная мера с носителем на M , представляющая 0:

$$\int_{\Gamma} f(y) d\mu(y) = 0 \quad \forall f \in X^*$$

(см. [14, предложение 1.2]).

По теореме Дирихле о совместных приближениях [10, гл. 1, § 5] для любого натурального Q найдутся такое натуральное $q \leq Q$ и такие неотрицательные целые числа q_j , что $|q\mu(M_j) - q_j| \leq (\frac{1}{Q})^{1/n}$, $j = 1, \dots, n$.

Положим $M_{jk} = (M_j \cap V_k) \setminus (\bigcup_{l=k_{j-1}+1}^{k-1} V_l)$, $j = 1, \dots, n$, $k = k_{j-1} + 1, \dots, k_j$ (здесь и далее считаем $k_0 = 0$).

Каждую меру $\mu_j = \mu|_{M_j}$ (здесь и далее $\mu|_A$ обозначает сужение меры μ на множество A) разобьем в сумму q_j положительных мер $\mu_{j1}, \dots, \mu_{jq_j}$ и одной положительной или отрицательной меры ν_j следующим образом.

Первые меры μ_{js} — это меры вида

$$\frac{1}{q\mu(M_{jk})} \mu|_{M_{jk}}, \quad k = k_{j-1} + 1, \dots, k_j,$$

для каждой пары j, k берем ровно $[q\mu(M_{jk})]$ таких мер (здесь и далее $[a]$ и $\{a\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа a); всего для данного j их число не превосходит q_j , а снизу это число оценивается следующим образом:

$$\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} [q\mu(M_{jk})] = \sum_k q\mu(M_{jk}) - \sum_k \{q\mu(M_{jk})\} \geq q\mu(M_j) - (k_j - k_{j-1}).$$

Каждая такая мера μ_{js} имеет вариацию $\frac{1}{q}$ и носитель на множестве M_{jk} для некоторого k ; назовем их *мерами типа I*.

Разность меры μ_j и суммы всех уже определенных мер типа I обозначим μ'_j (это неотрицательная мера). Оставшиеся меры μ_{js} (назовем их *мерами типа II*) положим равными

$$\frac{1}{q\mu'_j(M_j)} \mu'_j;$$

этих мер не больше, чем

$$q_j - (q\mu(M_j) - (k_j - k_{j-1})) \leq 1 + k_j - k_{j-1}.$$

Каждая такая мера μ_{js} типа II имеет вариацию $\frac{1}{q}$ и носитель во множестве M_j .

Разность меры μ_j и суммы всех построенных мер $\mu_{j1}, \dots, \mu_{jq_j}$ типов I и II обозначим ν_j . Это положительная или отрицательная мера (в зависимости от того, что больше: $\mu(M_j)$ или q_j/q) с носителем во множестве M_j , имеющая вариацию $|\nu_j| = |\mu(M_j) - \frac{q_j}{q}| \leq (qQ^{1/n})^{-1}$.

Таким образом, мера μ разложена в сумму мер μ_{js} , $j = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, q_j$, типа I и типа II и мер ν_j , $j = 1, \dots, n$.

Для каждой пары j, s найдется такая точка y_{js} , что

$$f(y_{js}) = q \int_{\text{supp } \mu_{js}} f(y) d\mu_{js}(y) \quad \forall f \in X^*$$

(см. [14, предложение 1.1]). Точка y_{js} , являясь средним нормированной меры $q\mu_{js}$, лежит в замыкании выпуклой оболочки $\text{conv}(\text{supp } \mu_{js})$ носителя этой

меры. Для каждого j, s возьмем какой-нибудь элемент x_{js} , ближайший к y_{js} во множестве M . Имеем $x_{js} \in M$, и

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{q_j} x_{js} \right\| &\leq \left\| \sum_{j,s} y_{js} \right\| + \sum_{j,s} \|x_{js} - y_{js}\| \\ &= \sup_{f \in S(X^*)} \sum_{j,s} f(y_{js}) + \sum'_{j,s} \|x_{js} - y_{js}\| + \sum''_{j,s} \|x_{js} - y_{js}\| \end{aligned}$$

(где через $\sum'$ и $\sum''$ обозначены суммы по тем парам j, s , для которых мера μ_{js} имеет тип I и II соответственно)

$$\leq \sup_{f \in S(X^*)} \sum_{j,s} q \int_{\text{supp } \mu_{js}} f(y) d\mu_{js}(y) + \sum_{j=1}^n q_j 4\varepsilon' + \sum_{j=1}^n (1 + k_j - k_{j-1}) 2(\varepsilon + \varepsilon')$$

(мы использовали то, что носитель каждой меры μ_{js} типа I расположен в некотором шаре V_k с радиусом $2\varepsilon'$ и центром в точке из M , а значит, в этом шаре лежат соответствующие x_{js} и y_{js} , и, аналогично, носитель каждой меры μ_{js} типа II лежит во множестве M_j , которое “выходит” из шара B_j радиусом ε не более, чем на ε')

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{f \in S(X^*)} q \int_M f(y) d\left(\mu - \sum_{j=1}^n \nu_j\right) + 4\varepsilon' \sum_{j=1}^n (q\mu(M_j) + 1) + 2(\varepsilon + \varepsilon')(m + n) \\ &\leq q \max_{y \in M} \|y\| \sum_{j=1}^n |\nu_j| + 4\varepsilon'(q + n) + 8\varepsilon m \leq \frac{n}{Q^{1/n}} + 4e^{-cn^2}(Q + n) + 8e^{-cn^{1/\alpha}} n^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Взяв $Q = [\exp(cn^2 - n)] + 1$, при достаточно больших n получим

$$\left\| \sum_{j,s} x_{js} \right\| \leq ne^{-cn+1} + 8e^{-n} + 8e^{-cn^{1/\alpha}} n^{2\alpha} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда по лемме 2 получаем, что $\overline{R(M)}$ – подгруппа в X . Теорема доказана.

§ 3. Плотность подгруппы

Структура замкнутой аддитивной подгруппы бесконечномерного банахова пространства может быть весьма нетривиальной [16], [17]. В гильбертовом пространстве имеются, например, гомотопически нетривиальные связные подгруппы [18], [19].

Напомним, что банахово пространство X с единичной сферой $S(X)$ называется *равномерно гладким*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x \in S(X), \|y\| < \delta \implies \|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon\|y\|.$$

Пространство X является равномерно гладким тогда и только тогда, когда его *модуль гладкости*

$$s(\tau) = \sup \left\{ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} \right\| - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}, \quad \tau \geq 0,$$

обладает свойством $s(\tau) = o(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ (см., например, [12, гл. 3, § 4]).

ЛЕММА 4. Пусть G – замкнутая аддитивная подгруппа в равномерно гладком банаховом пространстве X с модулем гладкости $s(\tau)$, $\tau \geq 0$. Если $a, b \in G$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in G$, что $x_0 = a$, $x_n = b$ и $\sum_{k=1}^n s(\|x_k - x_{k-1}\|) < \varepsilon$, то весь отрезок $[a, b]$ лежит в G .

Точность этого утверждения в гильбертовом пространстве (модуль гладкости которого $s(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2} - 1 = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$) показывает пример подгруппы $L^2_{\mathbb{Z}}[0, 1]$, состоящей из целозначных функций пространства $L^2[0, 1]$: для любых двух различных элементов $a, b \in L^2_{\mathbb{Z}}[0, 1]$ отрезок $[a, b]$ не лежит в $L^2_{\mathbb{Z}}[0, 1]$, и в то же время для любого $\delta > 0$ найдутся такие $x_0, \dots, x_n \in L^2_{\mathbb{Z}}[0, 1]$, что $x_0 = a$, $x_n = b$, $\|x_k - x_{k-1}\| < \delta$ при всех $k = 1, \dots, n$ и сумма $\sum_{k=1}^n \|x_k - x_{k-1}\|^2$ ограничена константой, зависящей только от a и b .

Лемма 4 является следствием известной леммы “об округлении коэффициентов”, в случае равномерно гладких пространств доказанной В.П. Фонфом [20] (эквивалентное утверждение имеется также в более ранней работе Й. Линденштраусса [21]): если $y_1, \dots, y_n \in X$, $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$, $\lambda_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, то найдутся такие числа $\theta_k \in \{0, 1\}$, что

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n \theta_k y_k \right\| \leq A \left(\max_{1 \leq k \leq n} \|y_k\| + \left(\sum_{k=1}^n s(\|y_k\|) \right)^\gamma \right),$$

где постоянные A и $0 < \gamma \leq 1$ зависят только от функции $s(\tau)$.

Приведем прямое доказательство леммы 4 для полноты изложения.

При доказательстве леммы 4 удобно пользоваться не модулем гладкости пространства X , а величиной

$$\omega(\tau) = \sup \{ \|x + y\| - \|x\| - f_x(y) : \|x\| = 1, \|y\| = \tau \},$$

где $f_x \in S(X^*)$ – опорный функционал к сфере $S(X)$ в точке x . Эта величина позволяет следующим образом оценивать норму сдвинутого вектора x (уже необязательно единичного):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + f_{x/\|x\|}(y) + \|x\| \omega\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right).$$

Нетрудно показать, что при всех $\tau \geq 0$ выполнено неравенство $s(\tau) \leq \omega(\tau) \leq 2s(\tau)$, однако это разные величины: например, для гильбертова пространства $s(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2} - 1$, но $\omega(\tau) = \frac{\tau^2}{2}$. Из указанного соотношения между s и ω и известного неравенства

$$2 \leq \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(2\tau)}{s(\tau)} \leq 4$$

(см., например, [12, гл. 3, § 4, лемма 1]) следует, что для любого $\rho > 0$ существует такая константа $C(\rho)$, что при всех достаточно малых τ верно неравенство $\omega\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \leq C(\rho)\omega(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Пространство X можно считать действительным. При $\theta \in [0, 1]$ положим $x(\theta) = \theta b + (1 - \theta)a$, $\rho(\theta) = \rho(x(\theta), G)$ – расстояние от точки $x(\theta)$ до множества G .

Пусть имеется такое значение θ , что $\rho(\theta) = \rho > 0$.

Для заданного $\delta > 0$ возьмем такую точку $y \in G$, что $\rho \leq \|x(\theta) - y\| < \rho + \delta$, и пусть $f_{\sigma(y)} \in S(X^*)$ – опорный функционал к $S(X)$ в точке $\sigma(y) = \frac{x(\theta) - y}{\|x(\theta) - y\|}$. Для любого $g \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \|x(\theta) - y\| - \delta < \rho &\leq \|x(\theta) - y \pm g\| \\ &\leq \|x(\theta) - y\| \pm f_{\sigma(y)}(g) + \|x(\theta) - y\| \omega\left(\frac{\|g\|}{\|x(\theta) - y\|}\right) \\ \implies |f_{\sigma(y)}(g)| &< \delta + \|x(\theta) - y\| \omega\left(\frac{\|g\|}{\|x(\theta) - y\|}\right) \leq \delta + (\rho + \delta) \omega\left(\frac{\|g\|}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ из неравенства $\omega(\tau) < \varepsilon$ следует неравенство $\omega\left(\frac{\tau}{\rho}\right) < C(\rho)\omega(\tau)$. Для такого ε , подобранных по нему точек $x_0 = a$, $x_1, \dots, x_n = b \in G$ из условия леммы и $\delta < \min\{\varepsilon/n, \rho\}$ имеем

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(y)}(b - a)| &\leq \sum_{k=1}^n |f_y(x_k - x_{k-1})| \leq n\delta + \sum_{k=1}^n (\rho + \delta) \omega\left(\frac{\|x_k - x_{k-1}\|}{\rho}\right) \\ &\leq \varepsilon + (\rho + \delta) \sum_{k=1}^n C(\rho) \omega(\|x_k - x_{k-1}\|) \\ &\leq \varepsilon + 2\rho C(\rho) \sum_{k=1}^n 2s(\|x_k - x_{k-1}\|) \leq \varepsilon + 4\rho C(\rho) \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, если $y_n \in G$ и $\|x(\theta) - y_n\| \rightarrow \rho(\theta) > 0$ (минимизирующая последовательность), то $f_{\sigma(y_n)}(b - a) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. При фиксированном $\Delta\theta$ таком, что $\theta + \Delta\theta \in [0, 1]$, для любого y_n имеем

$$\begin{aligned} \rho(\theta + \Delta\theta) &\leq \|x(\theta + \Delta\theta) - y_n\| = \|x(\theta) - y_n + \Delta\theta(b - a)\| \\ &\leq \|x(\theta) - y_n\| + f_{\sigma(y_n)}(\Delta\theta(b - a)) + \|x(\theta) - y_n\| \omega\left(\frac{|\Delta\theta| \|b - a\|}{\|x(\theta) - y_n\|}\right). \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\rho(\theta + \Delta\theta) \leq \rho(\theta) + \rho(\theta) \omega\left(\frac{|\Delta\theta| \|b - a\|}{\rho(\theta)}\right).$$

Отсюда, пользуясь свойством $\omega(\tau) \leq 2s(\tau) = o(\tau)$, $\tau \rightarrow 0$, модуля гладкости в равномерно гладком пространстве X , получаем, что функция $\rho(\theta)$ постоянна на любом отрезке, где она положительна. Это означает, что $\rho \equiv 0$ и $[a, b] \subset G$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – замкнутая аддитивная подгруппа равномерно гладкого пространства X с модулем гладкости $s(\tau)$ и непрерывное отображение $\varphi: [0, 1] \rightarrow G$ имеет такой модуль непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$, что $s(\omega_\varphi(\delta)) = o(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда G содержит замкнутое $\mathbb{R}$ -линейное подпространство L , порожденное элементами вида $a - b$, где $a, b \in \varphi([0, 1])$.

В частности, если отображение φ липшицево, то G содержит L при любом модуле гладкости $s(\tau)$.

В этой теореме $o(\delta)$ нельзя заменить на $O(\delta)$ – см. пример после формулировки леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $a, b \in \varphi([0, 1])$. Для любого $\varepsilon > 0$ по условию можно найти такое $\delta > 0$, что $s(\omega(\lambda)) < \varepsilon\lambda$ при $\lambda \in [0, \delta]$. На отрезке $[0, 1]$ возьмем такие точки $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, что $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(t_n) = b$ и $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\} < \delta$. Имеем

$$\sum_{k=1}^n s(\|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|) \leq \sum_{k=1}^n s(\omega_\varphi(t_k - t_{k-1})) < \sum_{k=1}^n \varepsilon(t_k - t_{k-1}) \leq \varepsilon.$$

Следовательно, элементы a и b удовлетворяют условиям леммы 4, и по этой лемме весь отрезок $[a, b]$ лежит в G . Тогда и весь отрезок $[0 = a - a, b - a]$ лежит в G , а значит, G содержит всю прямую $\{\alpha(a - b) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$ и функция $K(u, t)$, заданная на квадрате $\Delta = [0, 1] \times [a, b]$, обладает следующими свойствами:

- а) $K(u, t) \in L_p[a, b]$ при каждом $u \in [0, 1]$;
- б) для любых u_1, u_2, t выполнено неравенство $|K(u_1, t) - K(u_2, t)| \leq C|u_1 - u_2|$ с некоторой константой $C > 0$ (равномерная липшицевость по переменной u ; отсюда следует существование ограниченной производной $\frac{\partial K}{\partial u}$ почти всюду на Δ);

с) уравнение

$$\int_a^b \frac{\partial K}{\partial u}(u, t)h(t) dt \equiv 0, \quad u \in [0, 1],$$

имеет лишь нулевое решение h в пространстве $L_q[a, b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда конечные суммы функций $\pm K(u, \cdot)$, $u \in [0, 1]$, плотны в пространстве $L_p[a, b]$.

В качестве функций $K(u, t)$ подойдут, например, e^{ut} или $\sin(ut)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть G – замыкание в $L_p[a, b]$ множества сумм функций $\pm K(u, \cdot)$, $u \in [0, 1]$. Нетрудно видеть, что G является замкнутой аддитивной подгруппой в $L_p[a, b]$.

Отображение $\varphi: [0, 1] \rightarrow G$, $\varphi(u) = K(u, \cdot)$, является липшицевым в силу условия б), пространство L_p равномерно гладкое, поэтому по теореме 4 подгруппа G содержит подпространство L , порожденное функциями $K(u, \cdot) - K(0, \cdot)$.

Покажем, что L совпадает с $L_p[a, b]$. Если это не так, то найдется такая ненулевая функция $h \in L_q[a, b]$, что

$$\begin{aligned} \int_a^b (K(u, t) - K(0, t))h(t) dt &\equiv 0, \quad u \in [0, 1], \\ \implies \int_a^b K(u, t)h(t) dt &\equiv \text{const} \implies \int_a^b \frac{\partial K}{\partial u}(u, t)h(t) dt \equiv 0 \end{aligned}$$

(последняя импликация обосновывается с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Отсюда по условию с) имеем $h = 0$, что противоречит предположению.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для функции f из действительного пространства $L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье $\hat{f}$ обращается в нуль на множестве нулевой меры Лебега на $\mathbb{R}$ и интегральный модуль непрерывности

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 \leq r \leq \delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

обладает свойством $\omega_2^2(f, \delta) = o(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ (например, если f – финитная функция, удовлетворяющая условию Липшица), то конечные суммы функций $\pm f(t - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Существование условия, налагаемого на интегральный модуль непрерывности функции f в следствии 2, показывает пример функции $f = I_{[0,1]}$ (порожденная сдвигами этого индикатора подгруппа в $L_2(\mathbb{R})$ состоит только из целозначных функций и не совпадает с $L_2(\mathbb{R})$, а $\omega_2(I_{[0,1]}, \delta) = O(\delta)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть G – замыкание в $L_2(\mathbb{R})$ множества сумм функций $\pm f_\lambda(t) = \pm f(t - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в $L_2(\mathbb{R})$. Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ подгруппа G содержит образ $\varphi([0, 1])$ отображения $\varphi: [0, 1] \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $\varphi(u) = f_{\alpha u}$, модуль непрерывности которого

$$\omega_\varphi(\delta) = \sup \{ \|\varphi(u+r) - \varphi(u)\| : 0 \leq u \leq 1-r, 0 \leq r \leq \delta \} = \omega_2(f, |\alpha|\delta)$$

по условию обладает свойством

$$s(\omega_\varphi(\delta)) = \sqrt{1 + \omega_2^2(f, |\alpha|\delta)} - 1 \leq \frac{1}{2} \omega_2^2(f, |\alpha|\delta) = o(|\alpha|\delta) = o(\delta)$$

при $\delta \rightarrow 0$, где $s(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2} - 1$ – модуль гладкости гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому по теореме 4 подгруппа G содержит подпространство L , порожденное функциями $\varphi(1) - \varphi(0) = f_\alpha - f$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что L совпадает с $L_2(\mathbb{R})$. Если это не так, то найдется такая ненулевая функция $h \in L_2(\mathbb{R})$, что

$$(f_\alpha - f, h) \equiv 0, \alpha \in \mathbb{R} \implies (f_\alpha, h) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \alpha) h(t) dt = (f_1 * h)(\alpha) \equiv \text{const},$$

где $f_1(t) = f(-t)$. Функции f_1, h принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, поэтому $\text{const} = 0$, т.е. элемент h ортогонален всем сдвигам $f(t - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку $\hat{f}$ обращается в нуль на множестве нулевой меры, система $\{f(t - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ полна в $L_2(\mathbb{R})$ по классической теореме Винера [22, гл. 2, § 15]. Следовательно, $h = 0$, что противоречит предположению.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всякого отрезка Δ , лежащего на отрицательной полуоси $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, конечные суммы функций $\pm \frac{1}{x-a}$, $a \in \Delta$ (логарифмические производные рациональных функций со всеми нулями и всеми полюсами на Δ), плотны в каждом из действительных пространств $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – замыкание в $L_p(\mathbb{R}_+)$ множества указанных в условии сумм. Ясно, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в $L_p(\mathbb{R}_+)$.

Отображение $\varphi: \Delta \rightarrow G$, $\varphi(a) = \frac{1}{x-a}$, липшицево, поэтому по теореме 4 подгруппа G содержит замкнутое подпространство L , порожденное разностями $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$, $a, b \in \Delta$.

Если $L \neq L_p(\mathbb{R}_+)$, то найдется ненулевая действительная функция $h \in L_q(\mathbb{R}_+)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для которой

$$H(a) := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{h(x)}{x-a} dx \equiv \text{const}, \quad a \in \Delta.$$

Это означает, что голоморфная в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ функция $H(z)$ постоянна в данной области, а поскольку $H(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow -\infty$, то $H(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Следовательно, равенство $\int_{\mathbb{R}_+} h(x)R(x) dx = 0$ имеет место для любой рациональной функции R , $R(\infty) = 0$, а поскольку действительные функции этого типа плотны в действительном пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, то $h = 0$.

Таким образом, $L = L_p(\mathbb{R}_+) = G$, и доказательство завершено.

При приближении наипростейшими дробями рассматриваемая подгруппа может содержать образ не отрезка (как в теореме 4), а связного плоского множества. Поэтому нам необходима

ЛЕММА 5 [8]. Пусть E – связное множество на плоскости. Для любых двух точек $a, b \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ в E найдутся такие точки $z_0 = a, z_2, \dots, z_n = b$, что $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|^2 < \varepsilon$.

Как недавно показал О. Н. Косухин [23], показатель 2 в лемме 5 уменьшить нельзя.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – замкнутая аддитивная подгруппа равномерно гладкого пространства X , модуль гладкости которого удовлетворяет равенству $s(\tau) = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$ (например, $X = L_p$ при $p \geq 2$; см. [24, ч. II, гл. 1, § e]), E – связное множество на плоскости и липшицево отображение $\varphi: E \rightarrow X$ таково, что $\varphi(E) \subset G$. Тогда G содержит замкнутое $\mathbb{R}$ -линейное подпространство L , порожденное элементами вида $a - b$, где $a, b \in \varphi(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $a, b \in \varphi(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ по условию и в силу леммы 5 найдутся такие точки $z_0, z_1, \dots, z_n \in E$ и константа $C > 0$, что $a = \varphi(z_0)$, $b = \varphi(z_n)$ и

$$\sum_{k=1}^n \|\varphi(z_k) - \varphi(z_{k-1})\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|^2 < C\varepsilon.$$

Следовательно, элементы $0 = a - a$ и $a - b$ удовлетворяют условиям леммы 4 (при $x_k = a - \varphi(z_k)$), и по этой лемме весь отрезок $[0, a - b]$ лежит в G , но тогда G содержит всю прямую $\{\lambda(a - b): \lambda \in \mathbb{R}\}$. Теорема доказана.

Компакт E в комплексной плоскости будем называть множеством единственности для гармонических функций, если любые две функции, гармонические в некоторой области $D \supset E$ и совпадающие на E , совпадают всюду в D .

СЛЕДСТВИЕ 4. 1) Пусть связанные компакты E_1 и E_2 лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости и каждый из них является множеством единственности для гармонических функций. Тогда конечные суммы дробей вида $\pm \frac{1}{x-a}$ (т.е. логарифмические производные рациональных функций, или разности наипростейших дробей) с полюсами $a \in E_1 \cup E_2$ плотны в комплексном пространстве $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [2, \infty)$.

2) Если компакты E_1 и E_2 , кроме того, спрямляемы: всякие две точки $a, b \in E_j$ можно соединить кривой конечной длины, лежащей в этом же E_j , то утверждение 1) верно при всех $p \in (1, \infty)$.

Условие о том, что E_j должны быть множествами единственности для гармонических функций, в следствии 4 существенно: для произвольных E_1 и E_2 , лежащих на мнимой оси, утверждение следствия неверно, поскольку $\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} \frac{1}{x-iy} dx = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Пусть G – замыкание в $L_p(\mathbb{R})$ множества сумм дробей вида $\pm \frac{1}{z-a}$, $a \in E_1 \cup E_2$. Ясно, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в $L_p(\mathbb{R})$.

Подгруппа G содержит липшицевы образы связанных плоских компактов E_1 и E_2 (отображение $\varphi: E_j \rightarrow L_p(\mathbb{R})$, $\varphi(a) = \frac{1}{z-a}$, удовлетворяет условию Липшица), поэтому по теореме 5 при $p \in [2, \infty)$ подгруппа G содержит все замкнутое линейное подпространство L над полем $\mathbb{R}$, порожденное функциями $R_{ab}(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$, где a, b – произвольная пара точек из одного E_j , $j = 1, 2$. В случае 2) получаем то же самое при произвольном $p \in (1, \infty)$ по теореме 4: пространство L_p равномерно гладкое при таких p , а соединяющая точки $a, b \in E_j$ спрямляемая кривая является липшицевым образом отрезка при натуральной параметризации.

Покажем, что L совпадает с $L_p(\mathbb{R})$. Если это не так, то найдется такая ненулевая функция $h \in L_q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, что

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \overline{h(x)} R_{ab}(x) dx = 0 \quad \forall a, b \in E_j, \quad j = 1, 2.$$

Это означает, что гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{h(x)}}{x-z} dx$$

постоянна на компактах E_1 и E_2 . По условию оба этих компакта являются множествами единственности для гармонических функций, так что u постоянна в обеих полуплоскостях, а поскольку $u(iy) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$, получаем $u(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Отсюда имеем $h = 0$, что противоречит предположению.

СЛЕДСТВИЕ 5. 1) Пусть связный компакт E не пересекается с положительной полуосью $\mathbb{R}_+$ действительной оси и является множеством единственности для гармонических функций. Тогда конечные суммы дробей вида $\pm \frac{1}{x-a}$ с полюсами $a \in E$ плотны в комплексном пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \geq 2$.

2) Если компакт E , кроме того, спрямляем (см. следствие 4), то утверждение 1) верно при всех $p \in (1, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 4.

Условие о том, что E должно быть множеством единственности для гармонических функций, в следствии 5 также существенно: для произвольного E , лежащего на отрицательной части $\mathbb{R}_-$ действительной оси, утверждение следствия неверно, поскольку $\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x+1} \frac{1}{x-a} dx = 0$ для любого $a < 0$. При этом суммы дробей вида $\pm \frac{1}{x-a}$ с полюсами $a \in \mathbb{R}_-$ (т.е. логарифмические производные рациональных функций со всеми нулями и полюсами на $\mathbb{R}_-$) плотны в действительном пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ при всех $p \in (1, \infty)$ (см. следствие 3).

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – компакт со связным дополнением, ненулевая функция $f(z)$ голоморфна вне другого компакта F , $f(\infty) = 0$, и третий связный компакт E лежит в неограниченной компоненте связности множества $\{a \in \mathbb{C}: (F + a) \cap K = \emptyset\}$. Если E является множеством единственности для гармонических функций, то конечные суммы функций $\pm f(z - a)$, $a \in E$, плотны в пространстве $AC(K)$.

Следствие 6 обобщает одно из утверждений теоремы 5 в [8], где рассматривался частный случай $f(z) = \frac{1}{z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Дополнение к компакт $E + F$ открыто, и компакт K лежит в конечном числе связных компонент этого дополнения. Поэтому найдутся такие взаимно внешние спрямляемые жордановы контуры $S_1, \dots, S_m$, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \operatorname{Int} S_j$, $\overline{\bigcup_{j=1}^m \operatorname{Int} S_j} \subset \mathbb{C} \setminus (F + E)$ и, более того, E лежит в неограниченной компоненте связности Ω множества $\{w \in \mathbb{C}: (F + w) \cap \operatorname{Int} \bar{S} = \emptyset\}$, где $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$.

Рассмотрим гильбертово пространство $AL_2(S)$ – пополнение пространства $AC(S \cup \operatorname{Int} S)$ по норме

$$\|f\| = \left(\int_S |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2};$$

$AL_2(S)$ является подпространством пространства $L_2(S, |dz|)$.

Замыкание множества конечных сумм функций $\pm f(z - a)$, $a \in E$, является замкнутой аддитивной подгруппой в $AL_2(S)$. Отображение $\varphi: E \rightarrow G$, $\varphi(a) = f(z - a)$, липшицево, поэтому по теореме 5 подгруппа G содержит замкнутое $\mathbb{R}$ -линейное подпространство L , порожденное функциями $f(z - a) - f(z - b)$, где $a, b \in E$.

Если $L \neq AL_2(S)$, то для некоторой ненулевой функции $h \in AL_2(S)$ выполнено

$$\operatorname{Re} \int_S (f(z - a) - f(z - b)) \overline{h(z)} |dz| = 0, \quad a, b \in E.$$

Это означает, что функция $H(w) := \int_S f(z - w) \overline{h(z)} |dz|$, голоморфная в области Ω , имеет постоянную на множестве $E \subset \Omega$ действительную часть. Поскольку E является множеством единственности для гармонических функций,

имеем $\operatorname{Re} H(w) \equiv \operatorname{const}$ в Ω , откуда $H(w) \equiv \operatorname{const}$ в Ω , а поскольку $H(\infty) = 0$ (по условию $f(\infty) = 0$), то $H \equiv 0$ в Ω .

Пусть на бесконечности функция $f(z)$ имеет разложение:

$$f(z) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}, \quad f_\nu \neq 0.$$

Тогда при $z \in S$ и достаточно больших по модулю w имеем

$$f(z-w) = \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{P_{m-\nu}(z)}{w^m},$$

где $P_{m-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{m-\nu} f_{m-k}(-1)^{m-k} C_{m-1}^k z^k$ – многочлен с ненулевым старшим коэффициентом. Поэтому равенства

$$0 = H(w) = \sum_{m=\nu}^{\infty} \left(\int_S P_{m-\nu}(z) \overline{h(z)} |dz| \right) \frac{1}{w^m}$$

означают, что функция h ортогональна в $AL_2(S)$ всем многочленам. Поскольку многочлены плотны в $AL_2(S)$, то $h = 0$.

Таким образом, $L = AL_2(S)$, т. е. всякий многочлен с любой точностью приближается конечными суммами функций $\pm f(z-a)$, $a \in E$, в норме $AL_2(S)$. Однако тогда в силу интегральной формулы Коши этот многочлен с любой точностью приближается такими суммами равномерно на K . По теореме С. Н. Мергеляна многочлены плотны в $AC(K)$, а значит, в $AC(K)$ плотны и указанные суммы. Следствие доказано.

§ 4. Плотность полугруппы, порожденной спрямляемыми кривыми

Следующее утверждение дает положительное решение задачи 1 в достаточно общей ситуации.

ТЕОРЕМА 6. Пусть в равномерно выпуклом и равномерно гладком пространстве X задано разностороннее минимальное множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, состоящее из спрямляемых (замкнутых или разомкнутых) кривых Γ_j .

1) Если $m = 1$, то $\overline{R(\Gamma)} = X$.

2) Если $m > 1$, то $\overline{R(\Gamma)}$ есть замкнутая аддитивная подгруппа в X , содержащая линейное подпространство L действительной коразмерности не больше $m - 1$, причем всякий функционал $f \in L^\perp$ (аннулятор в овеществленном X^*) постоянен на каждой из кривых Γ_j , $j = 1, \dots, m$.

Возможность случая 2) показывает пример множества $\Gamma = \{1\} \cup \{-1\}$ в пространстве $X = \mathbb{R}$ (две одноточечные “кривые”): здесь $m = 2$, $\overline{R(\Gamma)} = \mathbb{Z}$ и подпространство $L = \{0\}$ как раз имеет коразмерность $m - 1 = 1$. Аналогичные примеры в конечномерном евклидовом пространстве можно привести для произвольного натурального m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Замкнутый результат $\overline{R(\Gamma)}$ является замкнутой аддитивной подгруппой в X по теореме 2.

Если каждую кривую Γ_j параметризовать ее натуральным параметром, то она станет липшицевым образом отрезка, и тогда по теореме 4 подгруппа $\overline{R(\Gamma)}$ содержит линейное подпространство L_j , порожденное разностями $a - b$, где $a, b \in \Gamma_j$.

Пусть L – замыкание суммы $L_1 + \dots + L_m$. Ясно, что $L \subset \overline{R(\Gamma)}$.

Если $L \neq X$, то для всякого ненулевого функционала $f \in L^\perp$ (аннулятор в овеществленном X^*) имеем $f(a - b) = 0$ для любых a и b из одного Γ_j , $j = 1, \dots, m$. Следовательно, f постоянен на каждой из кривых Γ_j . Если $m = 1$, т.е. Γ состоит из одной кривой, наличие такого функционала f противоречит разносторонности Γ , так что в этом случае $L = X = \overline{R(\Gamma)}$. Если же $m > 1$ и $L^\perp$ содержит $n > m$ линейно независимых функционалов $f_1, \dots, f_n$, каждый из которых постоянен на каждой кривой Γ_j , то найдется ненулевая линейная комбинация $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$, равная нулю на каждой кривой Γ_j , что противоречит разносторонности множества Γ . Теорема доказана.

§ 5. Приложения к приближению наипростейшими дробями

Основная задача теории приближения наипростейшими дробями с ограничением на расположение полюсов формулируется следующим образом [8].

Пусть K – компакт со связным дополнением и не пересекающийся с ним компакт E таков, что $\widehat{E} \supset K$ (K покрывается ограниченными компонентами связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$). Верно ли, что наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$?

В случае, когда K лежит в *одной* ограниченной компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus E$, положительное решение этой задачи вытекает из одного результата Кореваара (подробно см. [8]).

В общем случае удастся доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 7 [8]. Пусть компакт K имеет связное дополнение и не пересекающееся с ним множество E содержит такие взаимно внешние замкнутые жордановы спрямляемые контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } \Gamma_j$. Тогда наипростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$.

В [8] приведено “комплексное” доказательство этой теоремы. Здесь мы выводим ее из теоремы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В каждой из областей $\text{Int } \Gamma_j$ возьмем такой простой спрямляемый жорданов контур S_j , что $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } S_j =: \text{Int } S$, где $S := \bigcup_{j=1}^m S_j$. Контуры S_j , $j = 1, \dots, m$, взаимно внешние.

Рассмотрим такое же гильбертово пространство $AL_2(S)$, как в доказательстве следствия 6, с указанной там нормой.

Множество $SF(\Gamma)$ наипростейших дробей с полюсами на $\Gamma := \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ в пространстве $AL_2(S)$ является объединением замкнутых спрямляемых кривых. Покажем, что $SF(\Gamma)$ является разносторонним множеством в $AL_2(S)$. Если

для некоторой функции $h \in AL_2(S)$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-a} |dz| \geq 0, \quad a \in \Gamma,$$

то действительная часть $\operatorname{Re} H(w)$ функции $H(w) = \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-w} |dz|$, голоморфной во внешности S , неотрицательна на Γ . Получаем, что функция H , будучи голоморфной и ограниченной во внешности составного контура Γ , отображает (в случае, если она не постоянна) эту внешность на ограниченную область, содержащую точку $0 = H(\infty)$ и имеющую границу в правой полуплоскости. Это невозможно, поэтому H постоянна во внешности Γ , а поскольку $H(\infty) = 0$, получаем $H \equiv 0$ во внешности S . Следовательно, $\int_S \overline{h(z)} R(z) |dz| = 0$ для любой рациональной функции R с полюсами вне S и с условием $R(\infty) = 0$, а поскольку такие рациональные функции плотны в $AL_2(S)$, то $\int_S \overline{h(z)} h(z) |dz| = 0$, т. е. $h = 0$.

Итак, множество $SF(\Gamma)$ разностороннее.

Покажем, что $SF(\Gamma)$ является минимальным множеством в $AL_2(S)$. Пусть из составного контура Γ удалена дуга $\gamma \subset \Gamma_k$. Возьмем какую-нибудь точку $s \in \operatorname{Int} S_k$ и с помощью теоремы Рунге найдем такой многочлен P , $P(0) = 0$, что функция $g(w) = P(\frac{1}{w-s})$ близка к 1 на $\Gamma \setminus \gamma$. По интегральной формуле Коши имеем

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_k} \frac{g(z)}{z-w} dz$$

(S_k обходится по часовой стрелке, w лежит во внешности S_k), так что для функционала $G \in (AL_2(S))^*$, $G(f) = (2\pi i)^{-1} \int_{S_k} g(z) f(z) dz$, имеем $\operatorname{Re} G(\frac{1}{z-a}) = \operatorname{Re} g(a) > 0$, $a \in \Gamma \setminus \gamma$. Таким образом, функционал $\operatorname{Re} G$ положителен на множестве $SF(\Gamma) \setminus \{\frac{1}{z-a} : a \in \gamma\}$.

Итак, множество $SF(\Gamma)$ минимальное.

По теореме 6 получаем, что или $\overline{R(SF(\Gamma))} = AL_2(S)$, или $\overline{R(SF(\Gamma))}$ содержит подпространство L конечной вещественной коразмерности, причем всякий функционал $f \in L^\perp$ постоянен на всех функциях $\frac{1}{z-a}$, где точки a лежат на одной кривой Γ_k . В последнем случае опять найдется такая ненулевая функция $h \in AL_2(S)$, что

$$\operatorname{Re} \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-a} |dz| = c_k, \quad a \in \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Получается, что функция $H(w) = \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-w} |dz|$, голоморфная и ограниченная во внешности составного контура Γ , отображает (в случае, если она не постоянна) эту внешность на ограниченную область, граница которой лежит в объединении нескольких вертикальных прямых. Это невозможно, поэтому H постоянна во внешности Γ , а поскольку $H(\infty) = 0$, получаем $H \equiv 0$ во внешности S . В этом случае, как и выше при доказательстве разносторонности, получаем $h = 0$.

Таким образом, $\overline{R(SF(\Gamma))} = AL_2(S)$, т. е. всякий многочлен с любой точностью приближается наипростейшими дробями с полюсами на Γ в норме $AL_2(S)$.

Тогда в силу интегральной формулы Коши этот многочлен с любой точностью приближается такими дробями равномерно на K . Остается вспомнить, что по теореме С. Н. Мергеляна многочлены плотны в $AC(K)$. Теорема доказана.

В контексте теории приближения наипростейшими дробями и их обобщениями вполне разумной представляется задача о приближении разностями $r_1 - r_2$ наипростейших дробей при условии, что полюсы дроби r_1 лежат в заданном множестве E_1 , а полюсы дроби r_2 – во множестве E_2 , причем $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Такая постановка задачи имеет естественную физическую интерпретацию. Если вспомнить, что наипростейшая дробь с полюсами $\{a_k\}$ комплексно сопряжена функции напряженности плоского электростатического поля, создаваемого одинаковыми одноименными зарядами (“электронами”), расположенными в точках a_k [25, гл. 3, § 2], то указанные разности $r_1 - r_2$ соответствуют полям, создаваемым “электронами” и “позитронами”, естественно помещаемыми в разные места комплексной плоскости.

Приведем результат о равномерном приближении на компакте посредством разностей $r_1 - r_2$ указанного типа.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K – компакт со связным дополнением, лежащий либо во внутренности, либо во внешности замкнутой жордановой спрямляемой кривой Γ , и точка $b \notin K$ лежит внутри Γ . Тогда функции вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} - \frac{m}{z - b}, \quad a_k \in \Gamma, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad m + n > 0 \quad (6)$$

($n = 0$ означает, что первой суммы нет), плотны в пространстве $AC(K)$.

Условие о том, что K лежит полностью либо внутри, либо вне Γ , в теореме 8 существенно, как показывает следующий далее пример 2. Условие $b \in \text{Int } \Gamma$ также существенно: например, для $K = \{2\}$, $\Gamma = \{a: |a| = 1\}$, $b = 10$ все функции из (6) имеют на K положительную действительную часть, а значит, не плотны в $AC(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Если $K \subset \text{Int } \Gamma$, то по теореме 7 наипростейшие дроби с полюсами на Γ плотны в $AC(K)$, а значит, функции (6) также плотны.

Далее считаем, что K лежит снаружи Γ .

Пусть S – спрямляемая кривая во внешности Γ , которая окружает K : $\text{Int } S \supset K$. Рассмотрим гильбертово пространство $AL_2(S)$ – пополнение пространства $AC(S \cup \text{Int } S)$ по норме

$$\|f\| = \left(\int_S |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2};$$

$AL_2(S)$ является подпространством пространства $L_2(S, |dz|)$.

Указанные в (6) функции образуют результат множества

$$M = \left\{ \frac{1}{z - a} : a \in \Gamma \right\} \cup \left\{ \frac{-1}{z - b} \right\},$$

которое является объединением двух спрямляемых кривых (одна из них – точка) в пространстве $AL_2(S)$.

Докажем разносторонность и минимальность множества M в $AL_2(S)$.

Если для некоторой функции $h \in AL_2(S)$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-a} |dz| \geq 0, \quad a \in \Gamma, \quad \operatorname{Re} \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-b} |dz| \leq 0,$$

то действительная часть $\operatorname{Re} H(w)$ функции $H(w) = \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-w} |dz|$, голоморфной во внешности S , неотрицательна на Γ и неположительна в точке $b \in \operatorname{Int} \Gamma$. Поэтому $\operatorname{Re} H(w)$ равна нулю на $\operatorname{Int} \Gamma$, а значит, и всюду во внешности S . Отсюда и из равенства $H(\infty) = 0$ получаем $H \equiv 0$ во внешности S . Следовательно, $\int_S \overline{h(z)} R(z) |dz| = 0$ для любой рациональной функции R с полюсами вне S и с условием $R(\infty) = 0$, а поскольку такие рациональные функции плотны в $AL_2(S)$, то $\int_S \overline{h(z)} h(z) |dz| = 0$, т. е. $h = 0$.

Итак, множество M разностороннее.

Покажем, что M является минимальным множеством в $AL_2(S)$. Пусть из контура Γ удалена дуга γ . Возьмем какую-нибудь точку s внутри S и с помощью теоремы Рунге найдем такой многочлен P , $P(0) = 0$, что функция $g(w) = P\left(\frac{1}{w-s}\right)$ близка к 1 на $\Gamma \setminus \gamma$ и близка к -1 в точке b . По интегральной формуле Коши имеем

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{g(z)}{z-w} dz$$

(кривая S обходится по часовой стрелке, w лежит во внешности S), так что для функционала $G \in (AL_2(S))^*$, $G(f) = (2\pi i)^{-1} \int_S g(z) f(z) dz$, получаем

$$\operatorname{Re} G\left(\frac{1}{z-a}\right) = \operatorname{Re} g(a) > 0, \quad a \in \Gamma \setminus \gamma, \quad \operatorname{Re} G\left(\frac{-1}{z-b}\right) = -\operatorname{Re} g(b) > 0.$$

Таким образом, функционал $\operatorname{Re} G$ положителен на $M \setminus \left\{\frac{1}{z-a} : a \in \gamma\right\}$. В случае, когда из множества M удаляется изолированная точка $-\frac{1}{z-b}$, рассуждения аналогичны.

По теореме 6 получаем, что или $\overline{R(M)} = AL_2(S)$, или $\overline{R(M)}$ содержит подпространство L вещественной коразмерности 1, причем всякий функционал $f \in L^\perp$ постоянен на всех функциях $\frac{1}{z-a}$, $a \in \Gamma$. В последнем случае опять найдется такая ненулевая функция $h \in AL_2(S)$, что

$$\operatorname{Re} \int_S \frac{\overline{h(z)}}{z-a} |dz| = \operatorname{const}, \quad a \in \Gamma.$$

Отсюда, как и выше при доказательстве разносторонности, получаем $\operatorname{const} = 0$ и $h = 0$.

Таким образом, $\overline{R(M)} = AL_2(S)$, т. е. всякий многочлен с любой точностью приближается суммами вида (6) в норме $AL_2(S)$. Тогда в силу интегральной формулы Коши данный многочлен с любой точностью приближается этими суммами равномерно на K . По теореме С. Н. Мергеляна многочлены плотны в $AC(K)$, а значит, в $AC(K)$ плотны и суммы (6). Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Пусть $K = \{0; 2\}$, $\Gamma = \{a: |a| = 1\}$, $b = \frac{1}{10}$. Тогда множество $M = \{\frac{1}{z-a}: a \in \Gamma\} \cup \{\frac{-1}{z-b}\}$ не является разносторонним в $AC(K) = C(K)$ (и, тем более, $R(M)$ не плотно в $C(K)$).

Действительно, возьмем функционал $\mu \in (C(K))^*$, $\mu(f) := 10f(2) + f(0)$, и покажем, что $\operatorname{Re} \mu(f) > 0$ для всякой функции $f \in M$. При $a \in \Gamma$ имеем

$$\operatorname{Re} \mu\left(\frac{1}{z-a}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{10}{2-a} + \frac{1}{0-a}\right) = \frac{10(2 - \operatorname{Re} a)}{|2-a|^2} - \operatorname{Re} \bar{a} \geq \frac{10}{9} - 1 > 0,$$

$$\text{и } \operatorname{Re} \mu\left(-\frac{1}{z-b}\right) = -\frac{10}{2-0.1} - \frac{1}{0-0.1} = -\frac{10}{1.9} + 10 > 0.$$

§ 6. Задачи

В заключение приведем некоторые задачи, естественно возникающие в связи с полученными результатами.

1. Можно ли придать количественную форму теореме 2 с использованием модуля выпуклости пространства X и более слабыми, чем спрямляемость, условиями, налагаемыми на кривые?

2. Можно ли увеличить порядок роста величины $n(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в теореме 3?

3. К следствию 2: существует ли такая функция f в действительном пространстве $L_2(\mathbb{R})$, что $\bar{R}(\{f(x-a): a \in \mathbb{R}\}) = L_2(\mathbb{R})$?

4. Верна ли теорема 6 без условия минимальности множества Γ ?

5. Верен ли аналог теоремы 7 для сдвигов функции f из следствия 6?

6. Можно ли в теореме 8 заменить спрямляемую кривую Γ произвольным связным множеством E со свойством $b \in \hat{E} \setminus E$ (т.е. точка b лежит в одной из ограниченных компонент дополнения к E)?

Автор благодарен В. Банашику, Я. Грабовскому, В. М. Кадецу и О. Н. Косухину за ценные замечания.

Список литературы

1. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957, xii+808 pp.
2. V. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", *Found. Comput. Math.*, **3**:1 (2003), 33–107.
3. А. О. Гельфонд, "О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами", *УМН*, **10**:1(63) (1955), 41–65.
4. П. А. Бородин, О. Н. Косухин, "О приближении наипростейшими дробями на действительной оси", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, "On approximation by the simplest fractions on the real axis", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.
5. П. А. Бородин, "Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах", *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 803–810; англ. пер.: P. A. Borodin, "Estimates of the distances to direct lines and rays from the poles of simplest fractions bounded in the norm of L_p on these sets", *Math. Notes*, **82**:6 (2007), 725–732.

6. П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями на полуоси”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions on the semi-axis”, *Sb. Math.*, **200**:8 (2009), 1127–1148.
7. В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 502–507.
8. П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 23–40; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions with constraints on the poles”, *Sb. Math.*, **203**:11 (2012), 1553–1570.
9. Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002, 210 с.; пер. с нем.: T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **3**, Berlin, Springer, 1934.
10. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, ИЛ, М., 1961, 213 с.; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **45**, Cambridge Univ. Press, New York, 1957, x+166 pp.
11. Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства*, Наука, М., 1969, 392 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Première partie. (Fascicule III.) Livre III. Topologie générale*, Chap. 3: Groupes topologiques. Chap. 4: Nombres réels, 3ème éd., rev. et augm., Actualités Sci. Indust., **1143**, Hermann, Paris, 1960, 236 pp.; Chap. V: Groupe à un paramètre. Chap. VI: Espaces numériques et espaces projectifs. Chap. VII: Les groupes additifs R^n . Chap. VIII: Nombres complexes, Actualités Sci. Indust., **1235**, 1963, 151 pp.
12. Дж. Дистель, *Геометрия банаховых пространств*, Вища шк., Киев, 1980, 215 с.; пер. с англ.: J. Diestel, *Geometry of Banach spaces – selected topics*, Lecture Notes in Math., **485**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975, xi+282 pp.
13. Р. Энфло, “Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm”, *Israel J. Math.*, **13**:3–4 (1972), 281–288.
14. Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968, 112 с.; пер. с англ.: R. R. Phelps, *Lectures on Choquet’s theorem*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.–Toronto, Ont.–London, 1966, v+130 pp.
15. П. А. Бородин, “О выпуклости N -чебышевских множеств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 19–46; англ. пер.: P. A. Borodin, “On the convexity of N -Chebyshev sets”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 889–914.
16. W. Banaszczyk, *Additive subgroups of topological vector spaces*, Lecture Notes in Math., **1466**, Springer-Verlag, Berlin, viii+178 pp.
17. Т. Dobrowolski, J. Grabowski, “Subgroups of Hilbert spaces”, *Math. Z.*, **211** (1992), 657–659.
18. R. Cauty, “Un exemple de sous-groupe additif de l’espace de Hilbert”, *Colloq. Math.*, **77**:1 (1998), 147–162.
19. J. Grabowski, “Homotopically non-trivial additive subgroups of Hilbert spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:5 (1999), 1563–1565.
20. В. П. Фонф, “Об условно сходящихся рядах в равномерно гладком пространстве Банаха”, *Матем. заметки*, **11**:2 (1972), 209–214; англ. пер.: V. P. Fonf, “Conditionally convergent series in a uniformly smooth Banach space”, *Math. Notes*, **11**:2 (1972), 129–132.
21. J. Lindenstrauss, “On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces”, *Michigan Math. J.*, **10**:3 (1963), 241–252.

22. Н. Винер, *Интеграл Фурье и некоторые его приложения*, Физматгиз, М., 1963, 256 с.; пер. с англ.: N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, University Press, Cambridge, 1933, xii+201 pp.
23. О. Н. Косухин, “Об одном свойстве связных множеств”, *Материалы VI Петрозаводской международной конференции “Комплексный анализ и его приложения”* (1–7 июля 2012 г.), Изд-во ПетрГУ, Петрозаводск, 2012, 43.
24. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, v. I: *Sequence spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **92**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, xiii+188 pp.; v. II: *Function spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, 1979, x+243 pp.
25. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 4-е изд., Наука, М., 1973, 736 с.; нем. пер. 3-го изд.: M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, *Math. Naturwiss. Tech.*, **13**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, x+846 pp.

ПЕТР АНАТОЛЬЕВИЧ БОРОДИН
(PETR A. BORODIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило в редакцию
03.02.2014
21.04.2014