Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе и существовании разложения Чжоу–Лефшеца для комплексных проективных многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 1, 185–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:56:11

УДК 512.7

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе и существовании разложения Чжоу–Лефшеца для комплексных проективных многообразий

Доказано, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для гладкого комплексного проективного многообразия X , если выполнено хотя бы одно из следующих условий: X – компактификация минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой и общий схемный слой абелевой схемы обладает редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках; X – неприводимое голоморфное симплектическое (гиперкэлерово) 4-мерное многообразие, совпадающее с компактификацией Альтмана–Клеймана относительного якобиана семейства $C \rightarrow \mathbb{P}^2$ гиперэллиптических кривых рода 2 со слабыми вырождениями, причем каноническая проекция $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ является лагранжевым слоением. Разложение Чжоу–Лефшеца существует для гладкого проективного 3-мерного многообразия X при условии, что X имеет структуру 1-параметрического неизотривиального семейства КЗ-поверхностей (с вырождениями) или семейства регулярных поверхностей произвольной размерности Кодaira κ с сильными вырождениями.

Библиография: 51 наименование.

Ключевые слова: стандартная гипотеза типа Лефшеца, минимальная модель Нерона, редукция мультипликативного типа, КЗ-поверхность, гиперкэлерово многообразие, разложение Чжоу–Лефшеца, отображение Абеля–Якоби.

DOI: 10.4213/im8227

Введение

Хорошо известно, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца [1] об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для всех гладких комплексных проективных кривых, поверхностей, абелевых многообразий [2] и трехмерных многообразий размерности Кодaira $\kappa(X) < 3$ [3] (в частности, она верна для всех комплексных эллиптических трехмерных многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона абелевых поверхностей над полями алгебраических функций одной переменной с полем констант C). Кроме того, гипотеза $B(X)$ выполняется для голоморфных симплектических многообразий, являющихся деформациями точечных схем Гильберта КЗ-поверхностей [4], а также для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ двух проективных неизотривиальных гладких семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2$, КЗ-поверхностей над гладкой проективной кривой C при условии, что ранги решеток трансцендентных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00097).

циклов на общих геометрических слоях X_{ks} , $k = 1, 2$, являются различными простыми нечетными числами [5].

Пусть $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что все слои морфизма π_2 являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, общий геометрический слой X_{2s} является КЗ-поверхностью. Если для любого особого слоя преобразование Пикара–Лефшеца γ (локальное преобразование монодромии), ассоциированное с этим особым слоем и действующее на $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$, удовлетворяет условию $N^2 \neq 0$, где $N = \log(\gamma)$, то мы говорим, что $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – *семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями рационального типа*. Согласно результатам Вик. С. Куликова в этом случае можно считать, что все вырожденные слои морфизма π_2 являются объединениями гладких *рациональных поверхностей* V_i кратности 1 с нормальными пересечениями, двойные кривые $C_{i,j} = V_i \cap V_j$ на каждой поверхности V_i являются гладкими *рациональными кривыми*, образующими цикл, локализация семейства $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ над любым открытым диском в C имеет тривиальный канонический класс [6, теоремы I, II].

В работе [7] доказано, что гипотеза $B(X)$ верна для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность с полустабильными слоями над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такое семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями рационального типа, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для общего геометрического слоя X_{2s} и

$$\{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{1\delta}) \neq \emptyset\} = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{2\delta}) \neq \emptyset\}$$

(это условие о совпадении локусов вырождений семейств эллиптических кривых и семейств КЗ-поверхностей ошибочно не содержится среди условий теоремы 1 в [7], и его следует добавить в формулировку; доказательство теоремы 1 при этом фактически сохраняется без изменений, за исключением того, что мы полагаем $\Delta = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$ и с самого начала предполагаем полустабильность слоев эллиптической поверхности $X_1 \rightarrow C$).

Кроме того, в [7] показано, что гипотеза $B(X)$ верна для любой гладкой проективной компактификации X минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой при условии, что общий схемный слой является *абсолютно простым* абелевым многообразием, обладающим редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках.

Случай, когда общий схемный слой абелевой схемы не является абсолютно простым абелевым многообразием, исследован в § 1, 2.

По определению для d -мерного многообразия X существует разложение Чжоу–Лефшеца, если существует такое разложение Чжоу–Кюннета $\{\Pi_i \mid 0 \leq i \leq 2d\}$, что для всех $i > d$ морфизм мотивов Чжоу $(X, \Pi_i, 0) \rightarrow (X, \Pi_{2d-i}, i-d)$, задаваемый пересечением $i-d$ раз с гиперплоским сечением, является изоморфизмом [8, определение 4.1].

В настоящей статье мы докажем следующие основные теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для гладкого комплексного проективного многообразия X , если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) X – компактификация минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой и общий схемный слой абелевой схемы обладает редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках;

(ii) X – неприводимое голоморфное симплектическое (гиперкэлерово) 4-мерное многообразие, совпадающее с компактификацией Альтмана–Клеймана относительного якобиана семейства $C \rightarrow \mathbb{P}^2$ гиперэллиптических кривых рода 2 со слабыми вырождениями, причем каноническая проекция $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ является лагранжесвым слоением.

ТЕОРЕМА 2. *Разложение Чжоу–Лефшеца существует для гладкого проективного трехмерного многообразия X , если существует морфизм $\pi: X \rightarrow C$ на гладкую проективную кривую, иррегулярность $h^{1,0}(X_s)$ общего геометрического слоя X_s равна нулю, причем выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) слой X_s является рациональной поверхностью;

(ii) слой X_s является поверхностью Энриквеса;

(iii) слой X_s является КЗ-поверхностью, причем среди слоев морфизма π имеются хотя бы два неизоморфных гладких слоя;

(iv) все слои морфизма π являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, причем для всех неприводимых компонент E_i , $i = 1, \dots, n$, некоторого геометрического слоя X_δ имеем $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$ (случай сильного вырождения).

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

§ 1. О стандартной гипотезе для гладкой проективной модели расслоенного произведения трех эллиптических поверхностей

1.1. В данном параграфе мы докажем теорему 1 в случае, когда выполнено условие (i), причем X является гладкой проективной моделью расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2 \times_C X_3$ трех эллиптических поверхностей $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2, 3$, с полустабильными слоями над гладкой проективной кривой C и непустой локус вырождений $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$ не зависит от выбора k .

Рассматривая в случае необходимости разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и гладкую модель $\tilde{X}_k$ расслоенного произведения $X_k \times_C \tilde{C}$, $k = 1, 2, 3$, мы можем считать в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [9, с. 53–54], [3, лемма 1.1], что особый слой $X_{k\delta}$ эллиптической поверхности X_k имеет тип I_{m_k} , $m_k \geq 3$, по классификации Кодaira [10, теорема 6.2] (другими словами, он является объединением гладких рациональных кривых с нормальными пересечениями, образующими колесо).

Следующая лемма является легким обобщением леммы 4.1 из [7].

1.2. ЛЕММА. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2, 3$, – морфизм гладкой проективной поверхности X_k на гладкую кривую C , причем все слои $X_{k\delta}$, $k = 1, 2, 3$, над точкой $\delta \in C$ являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями. Тогда существует такое разрешение особенностей

$$\sigma: [X_1 \times_C X_2 \times_C X_3]^{\text{smooth}} \rightarrow X_1 \times_C X_2 \times_C X_3$$

в окрестности слоя $\sigma^{-1}(X_{1\delta} \times X_{2\delta} \times X_{3\delta})$ (тождественное на гладких слоях структурного морфизма $X_1 \times_C X_2 \times_C X_3 \rightarrow C$), что слой над точкой δ композиции

$$[X_1 \times_C X_2 \times_C X_3]^{\text{smooth}} \xrightarrow{\sigma} X_1 \times_C X_2 \times_C X_3 \rightarrow C$$

является объединением гладких неприводимых рациональных 3-мерных компонент V_i кратности 1 с нормальными пересечениями и $H^1(V_i, \mathbb{Q}) = H^3(V_i, \mathbb{Q}) = 0$. Более того, для $i \neq j$ многообразие $V_i \cap V_j$ является несвязным объединением гладких рациональных поверхностей или пустым множеством.

1.3. Далее мы считаем, что $X \rightarrow X_1 \times_C X_2 \times_C X_3$ – разрешение особенностей расслоенного произведения, о котором идет речь в лемме из п. 1.2, причем поверхности $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2, 3$, имеют непустой локус вырождений $\Delta = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$, не зависящий от выбора k , и все вырожденные слои являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями.

Положим $C' = C \setminus \Delta$. Можно считать, что структурный морфизм $\pi: X \rightarrow C$ гладкий над C' . Пусть $C' \xrightarrow{j} C$ – каноническое вложение, $X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, $\pi' = \pi|_{X'}: X' \rightarrow C'$ и $\pi'_k: \pi_k^{-1}(C') \rightarrow C'$ – структурные морфизмы.

Согласно лемме из п. 1.2 любой особый слой X_δ структурного морфизма $X \rightarrow C$ является объединением гладких рациональных 3-мерных многообразий V_i кратности 1 с нормальными пересечениями и следующими свойствами:

$$H^1(V_i, \mathbb{Q}) = H^3(V_i, \mathbb{Q}) = 0, \quad (1.1)$$

$$H^2(V_i, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i) \stackrel{\text{def}}{=} \text{NS}(V_i) \otimes \mathbb{Q}, \quad (1.2)$$

$$H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) = H^3(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i \neq j, \quad (1.3)$$

$$H^2(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j). \quad (1.4)$$

Пусть $\Pi(X_\delta)$ – полиэдр, вершинам которого соответствуют компоненты V_i слоя X_δ ; вершины $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ образуют $(k-1)$ -симплекс, если $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \neq \emptyset$. Положим

$$X_\delta^{(k)} = \coprod_{i_1 < \dots < i_k} V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k},$$

и пусть морфизм $\delta_j: X_\delta^{(k)} \rightarrow X_\delta^{(k-1)}$ определен на $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k}$ как вложение

$$V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \hookrightarrow V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_{j-1}} \cap V_{i_{j+1}} \cap \dots \cap V_{i_k}.$$

Рассмотрим спектральную последовательность (типа Майера–Виеториса)

$$E_1^{q,r} = H^r(X_\delta^{(q+1)}, \mathbb{Q}). \quad (1.5)$$

Известно [11, гл. 4, § 2, п. 2.4–2.7], что дифференциал $d_1^{q,r}: E_1^{q,r} \rightarrow E_1^{q+1,r}$ индуцирован комбинаторным дифференциалом $D_2 = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{r+j} \delta_j^*$ и является морфизмом веса нуль чистых структур Ходжа. Более того,

$$E_2^{q,r} = E_\infty^{q,r} = \mathrm{Gr}_r^W H^{q+r}(X_\delta, \mathbb{Q}).$$

1.4. Рассмотрим нормализацию $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, то имеется каноническая точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, следствие (8.2.8)]:

$$H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi_n} H^n(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа и φ_n – морфизм ограничения.

Пусть $D^*(\delta)$ – небольшой проколотый диск на кривой C с центром в точке $\delta \in \Delta$. Спектральная последовательность Лере для вложения $j: C' \subset C$ дает точную последовательность смешанных структур Ходжа [13, с. 457; следствие (13.10); с. 464, 470; замечание (14.5)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) &\rightarrow H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \\ &\rightarrow H^0(C, R^1 j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow H^2(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H^0(C, R^1 j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \\ = \bigoplus_{\delta \in \Delta} H^1(D^*(\delta), R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\delta \in \Delta} \frac{H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})}{N H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})}, \end{aligned}$$

пространство $H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})$, $s \in C'$, снабжено предельной смешанной структурой Ходжа, ассоциированной с локальной монодромией γ вокруг точки $\delta \in C$ (преобразованием Пикара–Лефшеца), $N = \log(\gamma)$. По теореме о локально инвариантных циклах (см. [13, предложение (15.12)], [14, п. (3.7)]) эта последовательность принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) &\rightarrow H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} \frac{H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})}{N H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})} \rightarrow H^2(C, R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})$ [13, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [13, диаграмма (15.1) для слу-

чая $m = n - 1]$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\
 & & H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) & & & & \\
 & & \simeq \downarrow \gamma_n & & & & \\
 & & H^1(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) & & & & \\
 & & \cap & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_n} & H^n(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (1.7)$$

где $\gamma_n \circ \alpha_n$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β_n – морфизм смешанных структур Ходжа [13, теоремы (15.3), (15.4)].

По теореме Делиня каноническое отображение

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q})$$

является сюръективным морфизмом рациональных структур Ходжа [15, пп. 4.1.1, 4.1.2], поэтому диаграмма (1.7) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\
 & & H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) & & & & \\
 & & \cap & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \longrightarrow 0
 \end{array} \quad (1.8)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q})$$

вырождается и дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [13, теорема (15.11), предложение (15.12), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned}
 0 & \rightarrow H^2(C, R^{n-2} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q})] \\
 & \xrightarrow{\alpha_n} H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поэтому, принимая во внимание (1.9) и присоединяя канонические отображения ядер и коядер к диаграмме (1.8), мы получим коммутативную диаграмму

с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \longrightarrow & (i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_n) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\
 0 & \rightarrow & H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & H^0(C', R^n\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{1.10}$$

и точную последовательность змеевидной диаграммы [16, § 1, предложение 2]

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) &\rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_n) \\
 &\rightarrow \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Легко проверить, что (1.11) является последовательностью морфизмов рациональных структур Ходжа [17, доказательство теоремы 2.3].

Мы утверждаем, что

$$H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) = 0, \tag{1.12}$$

$$H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{1.13}$$

Действительно, двойственность Пуанкаре на слоях гладкого морфизма $\pi': X' \rightarrow C'$ дает изоморфизм локальных систем $R^5\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^1\pi'_*\mathbb{Q}$, поэтому из очевидной тривиальности следа абелевой схемы $\text{Pic}^0(X'/C') \rightarrow C'$ и в силу [15, пп. 4.1.3.3, 4.4.3] следует, что

$$H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) = 0.$$

Гладкое многообразие Z является несвязным объединением компонент V_i , обладающих свойствами (1.1), поэтому из (1.11) следует, что

$$(i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall n \in \{3, 5\}, \tag{1.14}$$

$$\text{Ker}(\psi_n) = \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} \quad \forall n \in \{3, 5\}, \tag{1.15}$$

$$H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{1.16}$$

С другой стороны, известно [18, п. 1.9], что

$$H^2(C, R^n\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, j_*R^n\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = H^0(C', R^n\pi'_*\mathbb{Q})^\vee,$$

поэтому из (1.16) следует, что $H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) = 0$. Формулы (1.12), (1.13) доказаны.

Очевидно, что из (1.11), (1.12) и (1.15) следует, что

$$H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) = \frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q})} \quad \forall n \in \{3, 5\}. \quad (1.17)$$

1.5. ЛЕММА. *Для всех $n \in \{3, 5\}$ имеем равенство $H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.6) следует существование вложения смешанных структур Ходжа

$$\frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \cap \text{Im}(\varphi_n \otimes \mathbb{C})}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{C})} \hookrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} \frac{H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})}{NH^{n-1}(X_s, \mathbb{C})}. \quad (1.18)$$

Напомним, что уровень компоненты Ходжа типа (p, q) равен $|p - q|$. Поскольку $\frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \cap \text{Im}(\varphi_n \otimes \mathbb{C})}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{C})}$ является чистой структурой Ходжа типа $(n, 0) + (n-1, 1) + \dots + (0, n)$ и все компоненты Ходжа этой структуры имеют нечетный уровень, для доказательства леммы достаточно проверить, что для любой точки $\delta \in \Delta$ предельная смешанная структура Ходжа $H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})/NH^{n-1}(X_s, \mathbb{C})$ не имеет нетривиальных компонент нечетного уровня (так как вложение (1.18) имеет тип (r, r) и поэтому сохраняет нечетность уровней).

Рассмотрим четную последовательность Клеменса–Шмида (см. [19], [11, гл. 5, § 3]), ассоциированную с точкой $\delta \in \Delta$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\psi} H_6(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^2(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^2(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_4(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^4(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_2(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^6(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^6(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^6(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_0(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где пространство $H^{2p}(X_s, \mathbb{Q})$ снабжено предельной смешанной структурой Ходжа (иногда обозначаемой через H_{lim}^{2p} [19]) и морфизмы $\psi, \mu, \nu, N \stackrel{\text{def}}{=} \log(\gamma)$ смешанных структур Ходжа имеют типы $(-3, -3), (4, 4), (0, 0), (-1, -1)$ соответственно.

Морфизм ψ в точной последовательности (1.19) индуцирует вложение (типа $(-3, -3)$) смешанных структур Ходжа

$$\frac{H^4(X_s, \mathbb{Q})}{NH^4(X_s, \mathbb{Q})} \hookrightarrow H_2(X_\delta, \mathbb{Q}) = H^2(X_\delta, \mathbb{Q})^\vee.$$

Из (1.18) следует, что для доказательства леммы в случае $n = 5$ достаточно проверить, что для всех $\delta \in \Delta$ пространство $H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ снабжено смешанной структурой Ходжа с четными уровнями.

Возвращаясь к спектральной последовательности (1.5), в силу (1.1)–(1.3) имеем

$$\begin{aligned} \text{Gr}_1^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{1,1} \\ &= \frac{\text{Ker}[d_1^{1,1}: \bigoplus_{i < j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j < k} H^1(V_i \cap V_j \cap V_k, \mathbb{Q})]}{\text{Im}[d_1^{0,1}: \bigoplus_i H^1(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})]} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_2^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{0,2} = \mathrm{Ker}[d_1^{0,2}: E_1^{0,2} \rightarrow E_1^{1,2}] \\
&= \mathrm{Ker}[d_1^{0,2}: H^2(X_\delta^{(1)}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X_\delta^{(2)}, \mathbb{Q})] \\
&= \mathrm{Ker}\left[d_1^{0,2}: \bigoplus_i H^2(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i<j} H^2(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})\right] \hookrightarrow \bigoplus_i \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i).
\end{aligned}$$

В частности, $W_1 = W_0$ и $\mathrm{Gr}_2^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(1, 1)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_0^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{2,0} = \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{2,0}: E_1^{2,0} \rightarrow E_1^{3,0}]}{\mathrm{Im}[d_1^{1,0}: E_1^{1,0} \rightarrow E_1^{2,0}]} \\
&= \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{2,0}: H^0(X_\delta^{(3)}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(X_\delta^{(4)}, \mathbb{Q})]}{\mathrm{Im}[d_1^{1,0}: H^0(X_\delta^{(2)}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(X_\delta^{(3)}, \mathbb{Q})]}
\end{aligned}$$

является чистой структурой Ходжа типа $(0, 0)$. Значит, пространство $H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ снабжено смешанной структурой Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1)$ с четными уровнями. Поэтому лемма доказана в случае, когда $n = 5$.

Аналогично морфизм ψ в точной последовательности (1.19) индуцирует вложение (типа $(-3, -3)$) смешанных структур Ходжа

$$H^2(X_s, \mathbb{Q})/NH^2(X_s, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_4(X_\delta, \mathbb{Q}) = H^4(X_\delta, \mathbb{Q})^\vee.$$

Из (1.18) следует, что для доказательства леммы в случае $n = 3$ достаточно проверить, что $H^4(X_\delta, \mathbb{Q})$ является смешанной структурой Ходжа с четными уровнями.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
E_1^{3,1} &= \bigoplus_{i<j<k<l} H^1(V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l, \mathbb{Q}) = 0, \\
E_1^{3,2} &= \bigoplus_{i<j<k<l} H^2(V_i \cap V_j \cap V_k \cap V_l, \mathbb{Q}) = 0, \\
E_1^{1,2} &= \bigoplus_{i<j} H^2(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i<j} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j), \\
E_1^{2,2} &= \bigoplus_{i<j<k} H^2(V_i \cap V_j \cap V_k, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i<j<k} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j \cap V_k), \\
E_1^{2,3} &= \bigoplus_{i<j<k} H^3(V_i \cap V_j \cap V_k, \mathbb{Q}) = 0,
\end{aligned}$$

поэтому в силу (1.3), (1.4) имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_1^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{3,1} = \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{3,1}: E_1^{3,1} \rightarrow E_1^{4,1}]}{\mathrm{Im}[d_1^{2,1}: E_1^{2,1} \rightarrow E_1^{3,1}]} = 0, \\
\mathrm{Gr}_2^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{2,2} = \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{2,2}: E_1^{2,2} \rightarrow E_1^{3,2}]}{\mathrm{Im}[d_1^{1,2}: E_1^{1,2} \rightarrow E_1^{2,2}]} = \frac{E_1^{2,2}}{\mathrm{Im}[d_1^{1,2}: E_1^{1,2} \rightarrow E_1^{2,2}]} \\
&= \frac{\bigoplus_{i<j<k} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j \cap V_k)}{\mathrm{Im}[d_1^{1,2}: \bigoplus_{i<j} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j) \rightarrow \bigoplus_{i<j<k} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j \cap V_k)]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_3^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{1,3} = \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{1,3}: E_1^{1,3} \rightarrow E_1^{2,3}]}{\mathrm{Im}[d_1^{0,3}: E_1^{0,3} \rightarrow E_1^{1,3}]} \\
&= \frac{\bigoplus_{i < j} H^3(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})}{\mathrm{Im}[\bigoplus_i H^3(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^3(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})]} = 0, \\
\mathrm{Gr}_4^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{0,4} = \mathrm{Ker}[d_1^{0,4}: E_1^{0,4} \rightarrow E_1^{1,4}] \\
&= \mathrm{Ker}\left[\bigoplus_i H^4(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^4(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})\right] \hookrightarrow \bigoplus_i H^4(V_i, \mathbb{Q}) \\
&= \bigoplus_i \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i) \smile \mathrm{cl}_{V_i}(H_i),
\end{aligned}$$

где H_i – гиперплоское сечение многообразия V_i и суммы берутся по симплексам соответствующих размерностей полиэдра $\Pi(X_\delta)$. В частности, $W_1 = W_0$,

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\bigoplus_{i < j < k} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j \cap V_k)}{\mathrm{Im}[d_1^{1,2}: \bigoplus_{i < j} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j) \rightarrow \bigoplus_{i < j < k} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V_i \cap V_j \cap V_k)]}$$

имеет тип $(1, 1)$, $W_3 = W_2$ и $\mathrm{Gr}_4^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) = W_4/W_3$ имеет тип Ходжа $(2, 2)$. С другой стороны, $H^0(X_\delta^{(5)}, \mathbb{Q}) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}_0^W H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{4,0} = \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{4,0}: E_1^{4,0} \rightarrow E_1^{5,0}]}{\mathrm{Im}[d_1^{3,0}: E_1^{3,0} \rightarrow E_1^{4,0}]} \\
&= \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{4,0}: H^0(X_\delta^{(5)}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(X_\delta^{(6)}, \mathbb{Q})]}{\mathrm{Im}[d_1^{3,0}: H^0(X_\delta^{(4)}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(X_\delta^{(5)}, \mathbb{Q})]} = 0.
\end{aligned}$$

Значит, пространство $H^4(X_\delta, \mathbb{Q})$ снабжено смешанной структурой Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1) + (2, 2)$ с четными уровнями. Лемма доказана.

1.6. Хорошо известно, что спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \implies H^*(X, \mathbb{Q})$$

вырождена [13, следствие (15.15)], поэтому из (1.16) и леммы из п. 1.5 следует, что

$$H^3(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q}), \quad H^5(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^4 \pi_* \mathbb{Q}). \quad (1.20)$$

1.7. Фиксируем обильный дивизор H на X и точку $s \in C'$. Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет невырожденное кососимметрическое спаривание

$$\Phi_s: H^1(X_s, \mathbb{Q}) \times H^1(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto \langle x \smile \mathrm{cl}_{X_s}(H_s)^{\smile -2} \smile y \rangle} \mathbb{Q},$$

где $\mathrm{cl}_{X_s}(H_s) \in H^2(X_s, \mathbb{Q})$ – ограничение обильного класса $\mathrm{cl}_X(H) \in H^2(X, \mathbb{Q})$ и $\langle \cdot \rangle: H^6(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ – изоморфизм ориентации [20, п. 1.2.A(ii)]. Пусть $\mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ – группа автоморфизмов пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$, сохраняющих форму Φ_s . По определению класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ является образующей пространства

$$[H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)}$$

инвариантов диагонального действия симплектической группы $\mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ на тензорном произведении $H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$. Это цикл Ходжа (другими словами, он принадлежит $H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X_s \times X_s, \mathbb{C})$ [17, п. 1.4]), являющийся, следовательно, алгебраическим по теореме Лефшеца о дивизорах.

Пусть G – замыкание в топологии Зарисского образа канонического представления монодромии $\rho: \pi_1(C', s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$. Используя замену базы, индуцированную некоторым разветвленным накрытием $\tilde{C} \rightarrow C$, мы можем (и будем) считать, что G связна. Это предположение совместимо с теоремой Мамфорда о существовании полустабильных редукций [9, с. 53, 54].

По теореме Делиня для любой точки $s \in C'$ вне некоторого счетного подмножества группа G – нормальная подгруппа в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ рациональной структуры Ходжа $H^1(X_s, \mathbb{Q})$ [21, теорема 7.3]. Мы фиксируем такую точку s и будем называть ее *общей в смысле Ходжа*. С другой стороны, $\mathrm{Hg}(H^1(X_s, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ [17, формула (1.3)]. Значит,

$$G \hookrightarrow \mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s).$$

Поскольку класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ является образующей подпространства

$$\begin{aligned} [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)} &\hookrightarrow [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^G \\ &= [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \end{aligned}$$

при диагональном действии $\pi_1(C', s)$ на $H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$, класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ определяет сечение

$$\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)}$$

типа $(1, 1)$ вариации структур Ходжа $R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}$.

1.8. Пусть X – гладкая проективная модель расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2 \times_C X_3$ трех эллиптических поверхностей, о которых идет речь в п. 1.1.

В силу аргументов из [18, пп. 2.1–2.3] для доказательства гипотезы $B(X)$ в рассматриваемом случае достаточно построить алгебраический изоморфизм

$$H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

Пусть $\mathcal{P}'$ – расслоение Пуанкаре на абелевой схеме $X' \times_{C'} X'$. Для $s \in C'$ определен класс Пуанкаре $c_1(\mathcal{P}'_s) \in H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$, причем алгебраическое соответствие $c_1(\mathcal{P}'_s)^{-2}$ дает алгебраический изоморфизм $H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})$ [20, лемма 2A12, замечание 2A13]. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X \times_C X$ – разрешение особенностей расслоенного произведения, $p_k: X \times_C X \rightarrow X$ – каноническая проекция, $\tau = p_k\sigma$. Можно считать, что Y – гладкая проективная компактификация многообразия $X' \times_{C'} X'$. Пусть $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение.

1.9. По теореме Лефшеца о дивизорах сечение $\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q})$ (построенное в п. 1.7) поднимается до алгебраического класса $\mathcal{D} \in H^2(Y, \mathbb{Q})$ относительно композиции канонических сюръективных [15, теорема 4.1.1] морфизмов структур Ходжа

$$H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2(\pi' \times_{C'} \pi')_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}),$$

поэтому алгебраический класс $\mathcal{D}^{\sim 2} \in H^4(Y, \mathbb{Q})$ определяет изоморфизм локальных систем

$$R^4\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^2\pi'_*\mathbb{Q},$$

продолжающийся до композиции

$$R^4\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^4(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim \mathcal{D}^{\sim 2}} R^8(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_2\sigma)^*} R^2\pi_*\mathbb{Q},$$

которая в свою очередь дает *точную* последовательность (аналогичную точной последовательности (2.15) в [17])

$$H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \sim \mathcal{D}^{\sim 2}]} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

в силу конечности множества $\Delta = C \setminus C'$. Из (1.20) следует, что имеется изоморфизм

$$H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \sim \mathcal{D}^{\sim 2}]} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Из формулы проекции имеем

$$\begin{aligned} (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \sim \mathcal{D}^{\sim 2}] &= [\mathrm{pr}_2 \iota\sigma]_*([\mathrm{pr}_1 \iota\sigma]^*x \sim \mathcal{D}^{\sim 2}) \\ &= \mathrm{pr}_{2*}(\iota\sigma)_*((\iota\sigma)^* \mathrm{pr}_1^*x \sim \mathcal{D}^{\sim 2}) = \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*x \sim (\iota\sigma)_*\mathcal{D}^{\sim 2}). \end{aligned}$$

Поэтому алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\mathcal{D}^{\sim 2} \in H^6(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм $H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q})$. Теорема 1 в случае (i) доказана для гладкой модели расслоенного произведения трех эллиптических поверхностей с полустабильными слоями и совпадающими локусами вырождений.

§ 2. О стандартной гипотезе для гладкой проективной компактификации минимальной модели Нерона в случае плохих редукций мультипликативного типа

2.1. В данном параграфе мы завершим доказательство теоремы 1 при выполнении условия (i).

Случай, когда общий слой абелевой схемы является *абсолютно простым* 3-мерным абелевым многообразием, исследован в [7, теорема 2]. Поэтому в силу результатов из § 1 и [3, лемма 1.1] мы можем (и будем) считать, что общий схемный слой изоморфен произведению гладкой абсолютно простой абелевой поверхности и эллиптической кривой.

Хорошо известно, что любое неразложимое 2-мерное абелево многообразие с главной поляризацией над алгебраически замкнутым полем является якобианом гладкой проективной кривой рода 2 [22, п. 4.1, следствие 2]. В частности,

любое простое 2-мерное абелево многообразие над алгебраически замкнутым полем изогенно якобиану гладкой кривой. С другой стороны, хорошо известно, что свойство иметь редукцию мультипликативного типа сохраняется при замене базы, определенной разветвленным накрытием кривых $\tilde{C} \rightarrow C$. Поэтому в силу результатов Делиня–Мамфорда о взаимоотношениях редукций кривых и якобианов [23], теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [9, с. 53, 54], результатов из § 1 и [3, лемма 1.1] достаточно доказать стандартную гипотезу для гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_1 \times_C X_2$, где $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – морфизм (с сечением) гладкой проективной поверхности X_1 на кривую C , общий схемный слой $X_{1\eta}$ морфизма π_1 является гладкой кривой рода 2, существует хотя бы один вырожденный слой, все вырожденные слои являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями (случай полного вырождения), якобиево многообразие $\text{Pic}^0(X_{1\eta})$ является абсолютно простой абелевой поверхностью, морфизм $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ задает на гладкой проективной поверхности X_2 структуру неизотривиального эллиптического пучка с сечением, причем все вырожденные слои морфизма π_2 являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями и локусы вырождений семейств $\pi_k: X_k \rightarrow C$, $k = 1, 2$, совпадают. Для этого достаточно заметить, что существует доминантное рациональное отображение $X_1 \times_C X_1 \times_C X_2 \dashrightarrow \mathcal{J}$, поэтому $B(X) \Rightarrow B(\overline{\mathcal{J}})$ в силу [3, лемма 1.1], где $\overline{\mathcal{J}}$ – проективная гладкая компактификация модели Нерона $\mathcal{J}$.

Известно, что имеется каноническое сюръективное отображение рациональных структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ [13, следствие (15.14)].

2.2. ЛЕММА. *Структура Ходжа $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула Кюннета для когомологий слоев морфизма π' дает разложение

$$\begin{aligned} H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \\ \simeq H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q})^{\oplus 2} \oplus H^0(C', R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_{2*}\mathbb{Q})^{\oplus 2} \oplus H^0(C', R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и мы утверждаем, что все слагаемые являются $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа типа $(1, 1)$. Это очевидно для слагаемых $H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q})$, потому что $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(-1)$; остается заметить, что поляризация абелевой схемы $\text{Pic}^0(X'_k/C') \rightarrow C'$ определяет изоморфизм $[R^1\pi'_{k*}\mathbb{Q}]^\vee \simeq R^1\pi'_{k*}\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}(1)$ [15, п. 4.2.3] и существует изоморфизм рациональных структур Ходжа [15, следствие 4.4.13]

$$H^0(C', R^1\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_{2*}\mathbb{Q}) \simeq \text{Hom}_{C'}(\text{Pic}^0(X'_2/C'), \text{Pic}^0(X'_1/C')) \otimes \mathbb{Q}(-1),$$

причем структура $\text{Hom}_{C'}(\text{Pic}^0(X'_2/C'), \text{Pic}^0(X'_1/C')) \otimes \mathbb{Q}$ имеет тип Ходжа $(0, 0)$ [15, п. 4.4.6]. Из этих фактов следует, что $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$ [3, п. 1.4]. Лемма доказана.

2.3. Можно считать, что $\text{rank NS}(X) \geq 3$. Используя лемму из п. 2.2 и [18, алгоритмы пп. 2.1–2.3], легко построить алгебраический изоморфизм $H^6(X, \mathbb{Q}) \simeq H^2(X, \mathbb{Q})$. В силу аргументов из [18, п. 2.4] и согласно неравенствам (1.20) остается доказать существование алгебраического изоморфизма

$$H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \simeq H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

2.4. ЛЕММА. Для $s \in C'$ имеется такой алгебраический класс $\omega_s \in H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$, что алгебраическое соответствие ω_s^{-2} дает алгебраический изоморфизм $H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что спаривание

$$\Phi_s^{(1)}: H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \times H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

кососимметрическое и невырожденное. Напомним, что матрица билинейной формы $\Phi_s^{(1)}$ относительно базиса Витта $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_{-2}^{(1)}, e_{-1}^{(1)}$ пространства $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ равна $\begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [24, гл. VIII, § 13, п⁰ 3]. Фиксируем точку $p \in X_{1s}$. Тогда

$$e_i^{(1)} \smile e_j^{(1)} = \begin{cases} \text{cl}_{X_{1s}}(p) & \text{для } i = -j = 1, 2, \\ -\text{cl}_{X_{1s}}(p) & \text{для } i = -j = -1, -2, \\ 0 & \text{для } i \neq -j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Можно отождествить алгебру Ли $\text{ssp}(\Phi_s^{(1)})$ с алгеброй Ли матриц вида $a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -S^t A S \end{pmatrix}$, где A, B, C – (2×2) -матрицы и B, C – матрицы, симметричные относительно второй диагонали [24, гл. VIII, § 13, п⁰ 3]. Легко показать с помощью прямых вычислений, что 1-мерное пространство $[H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(\Phi_s^{(1)})}$ порождается классом Пуанкаре

$$\wp(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})) = -e_1^{(1)} \otimes e_{-1}^{(1)} - e_2^{(1)} \otimes e_{-2}^{(1)} + e_{-2}^{(1)} \otimes e_2^{(1)} + e_{-1}^{(1)} \otimes e_1^{(1)}. \quad (2.2)$$

Поскольку $\wp(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}))$ – цикл Ходжа [17, п. 1.4], он является алгебраическим по теореме Лефшеца о дивизорах.

Рассмотрим алгебраический класс

$$\begin{aligned} \omega_s &= \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) + \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) + \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})) \\ &= \sum_{k=1}^2 [-e_1^{(k)} \otimes e_{-1}^{(k)} - e_2^{(k)} \otimes e_{-2}^{(k)} + e_{-2}^{(k)} \otimes e_2^{(k)} + e_{-1}^{(k)} \otimes e_1^{(k)}] \\ &\quad - e_1 \otimes e_{-1} + e_{-1} \otimes e_1, \end{aligned}$$

где $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, e_{-2}^{(k)}, e_{-1}^{(k)}$ – базис Витта k -й копии $H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q})$ пространства $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ в разложении Кюннета

$H^1(X_s, \mathbb{Q}) = H^1(X_{1s} \times X_{1s} \times X_{2s}, \mathbb{Q}) = H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \oplus H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \oplus H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})$,
 e_1, e_{-1} – базис Витта пространства $H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})$,

$$\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})) = -e_1 \otimes e_{-1} + e_{-1} \otimes e_1 \quad (2.3)$$

– алгебраический класс Пуанкаре на эллиптической кривой X_{2s} , причем для точки $q \in X_{2s}$ имеем

$$e_i \smile e_j = \begin{cases} \text{cl}_{X_{2s}}(q) & \text{для } i = -j = 1, \\ -\text{cl}_{X_{2s}}(q) & \text{для } i = -j = -1, \\ 0 & \text{для } i \neq -j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Хорошо известно, что алгебраическое соответствие $\wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}))$ на $X_{1s}^{(k)} \times X_{1s}^{(k)}$ определяет изоморфизм

$$H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{[\wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*} H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}),$$

где

$$[\wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_{2s*}^{(k)}([\alpha \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(k)}}(X_{1s}^{(k)})] \smile \wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q})))$$

для $\alpha \in H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q})$ и $\text{pr}_{2s}^{(k)}: X_{1s}^{(k)} \times X_{1s}^{(k)} \rightarrow X_{1s}^{(k)}$ – каноническая проекция [17, лемма 1.5]. С другой стороны, из (2.1), (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} [\wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*(e_j^{(k)}) &= \text{pr}_{2s*}^{(k)}([e_j^{(k)} \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(k)}}(X_{1s}^{(k)})] \\ &\quad \smile [-e_1^{(k)} \otimes e_{-1}^{(k)} - e_2^{(k)} \otimes e_{-2}^{(k)} + e_{-2}^{(k)} \otimes e_2^{(k)} + e_{-1}^{(k)} \otimes e_1^{(k)}]) \\ &= \text{pr}_{2s*}^{(k)}([\text{cl}_{X_{1s}^{(k)}}(p) \otimes e_j^{(k)}]) = e_j^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$[\wp(H^1(X_{1s}^{(k)}, \mathbb{Q}))]^{-2} = 4 \text{cl}_{X_{1s}^{(k)}}(p) \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(k)}}(p). \quad (2.6)$$

Кроме того, алгебраическое соответствие $\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))$ на $X_{2s} \times X_{2s}$ определяет изоморфизм

$$H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{[\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]_*} H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}),$$

где

$$[\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]_*(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_{2s*}^{(3)}([\alpha \otimes \text{cl}_{X_{2s}}(X_{2s})] \smile \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})))$$

для $\alpha \in H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и $\text{pr}_{2s}^{(3)}: X_{2s} \times X_{2s} \rightarrow X_{2s}$ – каноническая проекция [17, лемма 1.5]. С другой стороны, из (2.3), (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} [\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]_*(e_j) &= \text{pr}_{2s*}^{(3)}([e_j \otimes \text{cl}_{X_{2s}}(X_{2s})] \smile [-e_1 \otimes e_{-1} + e_{-1} \otimes e_1]) \\ &= \text{pr}_{2s*}^{(3)}([\text{cl}_{X_{2s}}(q) \otimes e_j]) = e_j, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$[\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]^{-2} = 2 \text{cl}_{X_{2s}}(q) \otimes \text{cl}_{X_{2s}}(q). \quad (2.8)$$

Алгебраическое соответствие

$$\begin{aligned} \omega_s^{-2} &= 4 \text{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(p) \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(p) + 4 \text{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p) \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p) + 2 \text{cl}_{X_{2s}}(q) \otimes \text{cl}_{X_{2s}}(q) \\ &\quad + 2(e_1^{(1)} \smile e_1^{(2)}) \otimes (e_{-1}^{(1)} \smile e_{-1}^{(2)}) + \dots + 2(e_{-1}^{(2)} \smile e_{-1}) \otimes (e_1^{(2)} \smile e_1) \\ &\in H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}). \quad (2.10)$$

Действительно, в силу (2.1) и (2.4) $\mathbb{Q}$ -пространство

$$H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot (e_i^{(1)} \smile e_{-i}^{(1)}) \otimes (e_j^{(2)} \smile e_{-j}^{(2)})$$

аннулируется (относительно $\smile$ -умножения) всеми слагаемыми в разложении (2.9) элемента ω_s^{-2} , кроме $4 \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q) \otimes \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q)$; с другой стороны, обозначая через $\operatorname{pr}_{2s}: X_s \times X_s \rightarrow X_s$ каноническую проекцию, мы видим, что $\operatorname{cl}_{X_{2s}}(q) \otimes \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q)$ определяет изоморфизм (2.10), потому что

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_{2s*}([H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes \operatorname{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{-2}) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot [\operatorname{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(p) \smile \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p) \smile \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q)] \otimes \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q)) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot \operatorname{cl}_{X_s}(p \times p \times q) \otimes \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q)) = \mathbb{Q} \cdot \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q) = H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Аналогично соответствие ω_s^{-2} индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}), \quad (2.11)$$

потому что $H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot (e_i^{(1)} \smile e_{-i}^{(1)}) \otimes (e_j \smile e_{-j})$ аннулируется всеми слагаемыми в разложении (2.9) элемента ω_s^{-2} , кроме $4 \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p) \otimes \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_{2s*}([H^2(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes \operatorname{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{-2}) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot [\operatorname{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(p) \smile \operatorname{cl}_{X_{2s}}(q) \smile \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p)] \otimes \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(q)) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot \operatorname{cl}_{X_s}(p \times p \times q) \otimes \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p)) = \mathbb{Q} \cdot \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(p) = H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} [\omega_s^{-2}]_3^\wedge = [\wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{-2} + 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) \\ + [\wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}))]^{-2} \end{aligned}$$

– сумма всех слагаемых в ω_s^{-2} , не содержащих множителей типа e_j . Поскольку e_j аннулирует пространство $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и соответствия $[\wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{-2}$, $[\wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}))]^{-2}$ аннулируют $H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})$ в силу формулы (2.6), то соответствие ω_s^{-2} действует на пространстве $H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ как $2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}))$ и определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}), \quad (2.12)$$

потому что в силу формулы (2.5) и [17, лемма 1.5] имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes \operatorname{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{-2}) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes \operatorname{cl}_{X_s}(X_s)] \\ \smile 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}))) \\ = \operatorname{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ \otimes \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(X_{1s}^{(1)}) \otimes \operatorname{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(X_{1s}^{(2)}) \otimes \operatorname{cl}_{X_{2s}}(X_{2s})] \\ \smile 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}))) \end{aligned}$$

$$= H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}) = H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}).$$

Наконец, пусть

$$\begin{aligned} [\omega_s^{\smile 2}]_2^{\wedge} &= [\wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{\smile 2} + 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})) \\ &\quad + [\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]^{\smile 2} \end{aligned}$$

– сумма всех слагаемых в $\omega_s^{\smile 2}$, не содержащих множителей типа $e_j^{(2)}$. Поскольку $e_j^{(2)}$ аннулирует пространство $H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})$ и соответствия $[\wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{\smile 2}$, $[\wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))]^{\smile 2}$ аннулируют $H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})$ в силу формул (2.6) и (2.8), то соответствие $\omega_s^{\smile 2}$ действует на пространстве $H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})$ как $2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))$ и определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}), \quad (2.13)$$

потому что в силу (2.5), (2.7) и [17, лемма 1.5] имеем

$$\begin{aligned} \text{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes \text{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{\smile 2}) \\ = \text{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) \otimes \text{cl}_{X_s}(X_s)] \\ \smile 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))) \\ = \text{pr}_{2s*}([H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(1)}}(X_{1s}^{(1)}) \otimes \text{cl}_{X_{1s}^{(2)}}(X_{1s}^{(2)}) \otimes \text{cl}_{X_{2s}}(X_{2s})] \\ \smile 2 \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^0(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))) \\ = H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}) = H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Остается использовать симметрию $X_{1s}^{(1)} \longleftrightarrow X_{1s}^{(2)}$, формулы (2.10)–(2.13) и формулу Кюннета. Лемма доказана.

2.5. Можно считать, что $\omega_s = \wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$, потому что разложение Кюннета пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$ дает соотношения

$$\begin{aligned} \wp(H^1(X_s, \mathbb{Q})) &\in [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)} \\ &\hookrightarrow [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) \times \text{Sp}(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) \times \text{Sp}(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q}))} \\ &= \mathbb{Q} \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(1)}, \mathbb{Q})) + \mathbb{Q} \cdot \wp(H^1(X_{1s}^{(2)}, \mathbb{Q})) + \mathbb{Q} \cdot \wp(H^1(X_{2s}, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

В итоге утверждение теоремы 1 при выполнении условия (i) получаем в силу леммы из п. 2.4 и стандартного алгоритма из п. 1.7 и п. 1.9 построения алгебраического изоморфизма $H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$.

§ 3. Доказательство стандартной гипотезы для некоторых гиперкэлеровых 4-мерных многообразий, расслоенных на якобианы кривых рода 2

3.1. Пусть X – гладкое комплексное проективное односвязное многообразие с тривиальным каноническим классом. Тогда X является произведением многообразий следующих типов:

- 1) проективное многообразие Y размерности не менее 3 с $H^0(Y, \Omega_Y^*) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\omega$, где ω – образующая канонического пучка $\mathcal{K}_Y$ (многообразие Калаби–Яо);
- 2) проективное многообразие Z с $H^0(Z, \Omega_Z^*) = \mathbb{C}[\omega]$, где пространство $H^0(Z, \Omega_Z^2)$ одномерное и порождается формой ω , невырожденной в каждой точке (гиперкэлерово многообразие, называемое также неприводимым симплектическим) [25].

Следуя [26, § 6, 7] и [27, § 1.2], напомним некоторые простые конструкции гиперкэлеровых многообразий X произвольной четной размерности $2r \geq 2$:

- а) для любой КЗ-поверхности S обозначим через $X = S^{[r]}$ точечную схему Гильберта, классифицирующую конечные замкнутые подсхемы в S длины r ;
- б) для любой абелевой поверхности A построим $A^{[r+1]}$ тем же способом и положим $X = K_r = \{\text{слой над } 0 \text{ морфизма суммирования } A^{[r+1]} \rightarrow A\}$; в частности, если $r = 1$, то X – поверхность Куммера абелевой поверхности A ;
- с) произвольная проективная деформация X гиперкэлерова многообразия типа $S^{[r]}$ или K_r .

Абелевым расслоением на $2n$ -мерном гиперкэлеровом многообразии X мы называем структуру расслоения над $\mathbb{P}^n$ с общим слоем – гладким абелевым многообразием размерности n .

Если для проективного 4-мерного гиперкэлерова многообразия X существует сюръективный морфизм $f: X \rightarrow B$ со связным общим слоем на гладкое многообразие B размерности $0 < \dim B < \dim X$, то из классификации поверхностей Кастельнуово–Энриквеса и результатов Мацущиты [28], [29] следует, что общий слой является абелевой поверхностью и $B = \mathbb{P}^2$.

3.2. Если неприводимое голоморфное симплектическое (гиперкэлерово) 4-мерное многообразие X удовлетворяет условию (ii) теоремы 1, то в силу результатов Д. Г. Маркушевича [30] многообразие X бирационально эквивалентно $S^{[2]}$, где S – некоторая гладкая проективная КЗ-поверхность. Хорошо известно, что гиперкэлерово многообразие $S^{[2]}$ получается раздутием диагонали в $S \times S$ и факторизацией по инволюции – перестановке двух множителей. Поскольку стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для поверхностей и совместима с декартовыми произведениями [20, следствие 2.5], то для доказательства теоремы 1 в случае (ii) остается воспользоваться [3, лемма 1.1].

§ 4. О когомологиях расслоенного 3-мерного многообразия с полустабильными слоями

4.1. ЛЕММА. Пусть C – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, X – гладкое проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм, геометрические слои которого являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

Тогда для всех i функции $s \mapsto \dim H^i(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ постоянны на C , пучок $R^i \pi_* \mathcal{O}_X$ локально свободен, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку общий геометрический слой морфизма π гладкий и связный, то все слои X_s , $s \in C$, связные по принципу связности [31, гл. III, § 11, пример 11.4]. Поэтому X_s – связная приведенная схема для всех $s \in C$, и

$$\dim H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 1 \quad (4.1)$$

для всех $s \in C$, так что $\pi_* \mathcal{O}_X$ – локально свободный пучок ранга 1 (см. [32, гл. 2, § 5, следствие 2], [31, гл. III, § 12, следствие 12.9]).

Канонический морфизм $\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ инъективен в общей точке η кривой C . Его ядро является подпучком без кручения обратимого пучка $\mathcal{O}_C$. Поэтому это ядро является локально свободным подпучком ранга 0 и канонический морфизм $\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ инъективен. С другой стороны, формула (4.1) и теорема Грауэрта показывают, что канонический морфизм

$$\pi_* \mathcal{O}_X \otimes \kappa(s) \rightarrow H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$$

является изоморфизмом для всех точек $s \in C$ [31, гл. III, § 12, следствие 12.9]. Поэтому образ $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$ при каноническом инъективном морфизме $\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ порождает слой пучка $\pi_* \mathcal{O}_X$ в любой точке $s \in C$ и, следовательно, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$.

Из (4.1) следует, что для любой замкнутой точки $s \in C$ и для общей точки $\eta \in C$ имеем

$$\dim_{\kappa(s)} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) - \dim_{\kappa(\eta)} H^0(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0.$$

Поэтому $\pi: X \rightarrow C$ является *когомологически плоским* морфизмом и по теореме М. Артина относительный функтор Пикара $\mathrm{Pic} X/C$ на категории C -схем со значениями в категории абелевых групп представлен алгебраическим C -пространством $P = \mathrm{Pic}(X/C)$ с локально конечным представлением [33, предложения 5.1, 5.2, теорема 1.5.1].

Заметим, что X_s не имеет вложенных компонент, потому что $(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ – приведенная схема [34, гл. IV, § 3, предложение 3.2.1].

Для любой максимальной точки $x \in X_s$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ является дискретно нормированным кольцом, и мы уже доказали, что $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$. Поэтому π удовлетворяет условию $(N)^*$ из [33, определение 6.1.4]. Более того, по условию леммы кратность любой неприводимой компоненты E_i дивизора X_s есть $d = d' = 1$ в обозначениях [33, шп. 6.1.1, 6.1.11]. Следовательно, подфунктор $\mathrm{Pic}^\tau X/C$ относительного функтора Пикара $P^\tau \hookrightarrow P$ представлен *открытой отделимой* групповой подсхемой $P^\tau \hookrightarrow P$ [33, предложение 4.2.1, следствие 6.4.5].

Для любой замкнутой точки $s \in C$ группа P_s^τ / P_s^0 конечна и группа P_s / P_s^0 имеет конечный тип [33, теорема 3.2.1]. Поскольку P_s / P_s^0 – этальная группа [33, (3.2.d)], она является конечнопорожденной абелевой группой.

Если геометрический слой X_s гладкий, то группа P_s^0 – многообразие Пикара $\mathrm{Pic}^0(X_s)$. Если X_s имеет особенности, то $X_s = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $n \geq 2$, – объединение

гладких неприводимых компонент кратности 1 с нормальными пересечениями (другими словами, вложение $X_s \hookrightarrow X$ в любой точке аналитически эквивалентно вложению множества координатных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^3$). Пусть $j_s: X_s = \bigcup_{i=1}^n E_i \hookrightarrow X$ – каноническое замкнутое вложение. Мы будем обозначать пучок $j_{s*}(\mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times)$ (продолжение пучка $\mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times$ единицей вне множества $\bigcup_{i=1}^n E_i$) просто через $\mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times$. Хорошо известно [31, гл. III, § 2, лемма 2.10], что

$$H^k\left(\bigcup_{i=1}^n E_i, \mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times\right) = H^k(X, j_{s*}(\mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times)).$$

Аналогично $\mathcal{O}_{E_1}^\times$, $\mathcal{O}_{\bigcup_{i=2}^n E_i}^\times$ и $\mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times$ рассматриваются как пучки абелевых групп на X . Мы имеем точную последовательность пучков абелевых групп на X

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{E_1}^\times \oplus \mathcal{O}_{\bigcup_{i=2}^n E_i}^\times \xrightarrow{r} \mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times \rightarrow 1,$$

где r определяется следующим образом. Пусть $p_1: \mathcal{O}_{E_1}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times$, $p_2: \mathcal{O}_{\bigcup_{i=2}^n E_i}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times$ – канонические сюръективные отображения, $x \in E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)$, $f_1 \in \mathcal{O}_{E_{1x}}^\times$, $f_2 \in \mathcal{O}_{(\bigcup_{i=2}^n E_i)_x}^\times$; тогда

$$r(f_1 \oplus f_2) = p_1(f_1)p_2(f_2^{-1}).$$

В результате мы получим точную последовательность когомологий

$$\begin{aligned} H^0\left(E_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^n E_i\right), \mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times\right) &\rightarrow H^1\left(\bigcup_{i=1}^n E_i, \mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}^\times\right) \\ &\rightarrow H^1(E_1, \mathcal{O}_{E_1}^\times) \oplus H^1\left(\bigcup_{i=2}^n E_i, \mathcal{O}_{\bigcup_{i=2}^n E_i}^\times\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, $H^0(E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i), \mathcal{O}_{E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)}^\times) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\times)^m$, где m – число связных компонент кривой $E_1 \cap (\bigcup_{i=2}^n E_i)$. Поэтому легко доказать индукцией по n , что P_s^0 – расширение абелева многообразия с помощью тора (напомним, что $H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}^\times) = \text{Pic}(E_i)$ – расширение конечнопорожденной группы Нерона–Севери $\text{NS}(E_i)$ с помощью многообразия Пикара $\text{Pic}^0(E_i)$). Таким образом, доказано, что для любой замкнутой точки $s \in C$ алгебраическая группа P_s^0 является расширением абелева многообразия с помощью тора. В частности, унитарный радикал группы P_s^0 тривиален.

Пусть $\eta \in C$ – общая схемная точка кривой C , $\bar{P}$ – схемное замыкание P_η в P . Хорошо известно, что $\bar{P}$ – алгебраическое пространство групп, замкнутое в P и плоское над C [33, п. 3.3.4]. Поскольку морфизм π удовлетворяет условию $(N)^*$ из [33, определение 6.1.4] и $\text{char } \kappa(s) = 0$ для всех $s \in C$, то канонический морфизм $\bar{P} \rightarrow C$ является *формально гладким* [33, п. 7.2.1]. В силу [33, предложение 6.3.1] для любой замкнутой точки $s \in C$ алгебраическая группа $P_s^\tau / \bar{P}_s^\tau$ является *унитарной*. Поскольку уже доказано, что унитарный радикал группы P_s^0 тривиален и группа P_s^τ / P_s^0 конечная [33, теорема 3.2.1], то $P_s^\tau / \bar{P}_s^\tau$ – конечная группа. Схема $\bar{P}^\tau$ имеет локально конечное представление над C , и слои структурного морфизма $\bar{P}^\tau \rightarrow C$ имеют конечный тип, поэтому

$\overline{P}^\tau$ – схема конечного типа над C . Более того, схема $\overline{P}^\tau$ открыта в $\overline{P}$ [35, VI, теорема 1.1]. Поэтому структурный морфизм $\overline{P}^\tau \rightarrow C$ плоский. Следовательно, он гладкий, и функция $p(s) = \dim \overline{P}_s^\tau$ постоянна на C .

Поскольку $P_s^\tau/\overline{P}_s^\tau$ и P_s^τ/P_s^0 – конечные группы, то

$$p(s) = \dim P_s^\tau = \dim P_s^0 = \dim P_s = \text{const}. \quad (4.2)$$

Пусть $e: C \rightarrow P$ – нулевое сечение, $s \in C$ – замкнутая точка, $e_s: \text{Срес } \mathbb{C} \rightarrow s \xrightarrow{e} P_s$ – соответствующая нулевая точка P_s . Касательное пространство P_s в точке $e(s)$ совпадает с $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(e_s^* \Omega_{P_s}^1, \mathbb{C})$ и изоморфно множеству продолжений $e_s: \text{Срес } \mathbb{C} \rightarrow P_s$ до $\mathbb{C}$ -морфизмов $\text{Срес } \mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \rightarrow P_s$ [36, дополнение к § 2, лемма 1]. Последнее множество является подмножеством группы $H^1(X_s[\varepsilon], \mathcal{O}_{X_s[\varepsilon]}^\times)$, состоящим из классов обратимых пучков с тривиальными ограничениями на X_s ; из равенств

$$\begin{aligned} H^1(X_s[\varepsilon], \mathcal{O}_{X_s[\varepsilon]}^\times) &= H^1(X_s, [\mathcal{O}_{X_s} \oplus \varepsilon \mathcal{O}_{X_s}]^\times) = H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}^\times \oplus \varepsilon \mathcal{O}_{X_s}) \\ &= H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}^\times) \oplus \varepsilon H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \end{aligned}$$

следует, что касательное пространство группы P_s в точке $e(s)$ совпадает с пространством $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$. Поэтому из (4.2) получаем

$$\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \text{const}. \quad (4.3)$$

Следовательно, когерентный пучок $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X$ локально свободен [31, гл. 2, § 5, следствие 2], [32, гл. III, § 12, следствие 12.9].

Точная последовательность когерентных пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-X_s) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X_s} \rightarrow 0$$

дает равенство эйлеровых характеристик

$$\chi(\mathcal{O}_{X_s}) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-X_s)),$$

причем по теореме Римана–Роха для обратимого пучка $\mathcal{O}_X(-X_s)$ имеем

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X(-X_s)) &= \deg \left(-\frac{1}{6} \text{cl}_X(X_s)^{\smile 3} + \frac{1}{4} \text{cl}_X(X_s)^{\smile 2} \smile c_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \text{cl}_X(X_s) \smile (c_1^{\smile 2} + c_2) + \frac{1}{24} c_1 \smile c_2 \right), \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – характеристические классы многообразия X [37, введение, п. 0.5]; поскольку все слои X_s гомологичны на X фиксированному слою X_{s_0} , мы видим, что $\text{cl}_X(X_s)$ не зависит от $s \in C$, поэтому

$$\chi(\mathcal{O}_{X_s}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) - \dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) + \dim H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \text{const}. \quad (4.4)$$

Очевидно, что из (4.1), (4.3), (4.4) имеем равенство

$$\dim H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \text{const}. \quad (4.5)$$

Поскольку $\pi: X \rightarrow C$ – собственный плоский морфизм, из (4.5) следует, что пучок $R^2 \pi_* \mathcal{O}_X$ локально свободен [32, гл. 2, § 5, следствие 2], [31, гл. III, § 12, следствие 12.9]. Лемма доказана.

4.2. ЛЕММА. Пусть C – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, X – гладкое проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм, геометрические слои которого являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями. Предположим, что $h^{1,0}(X_s) = 0$ для общего геометрического слоя X_s морфизма π , причем для всех неприводимых компонент E_i , $i = 1, \dots, n$, некоторого геометрического слоя X_δ имеем $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$. Тогда $H^0(C, R^2\pi_*\mathcal{O}_X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 4.1 и регулярности общего геометрического слоя морфизма π имеем $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$, $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = 0$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathcal{O}_X) \Rightarrow H^*(X, \mathcal{O}_X)$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ (см. [38, добавление В]). Эта последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(C, R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(C, \mathcal{O}_C) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathcal{O}_X)] \rightarrow H^1(C, R^1\pi_*\mathcal{O}_X) \rightarrow H^3(C, \mathcal{O}_C) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку $H^2(C, \mathcal{O}_C) = 0$ и $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = 0$, из (4.6) следует, что

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathcal{O}_X). \quad (4.7)$$

В силу леммы из п. 4.1 пучок $R^2\pi_*\mathcal{O}_X$ локально свободен. Из (4.5) и теоремы Грауэрта следует, что канонический морфизм

$$R^2\pi_*\mathcal{O}_X \otimes \kappa(s) \rightarrow H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$$

является изоморфизмом для любого $s \in C$ [31, гл. III, § 12, следствие 12.9]. Поэтому в силу (4.7) для любой точки $s \in C$ каноническое отображение ограничения $H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ является композицией канонических отображений

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathcal{O}_X) \hookrightarrow \prod_{s \in C} H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \rightarrow H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}). \quad (4.8)$$

В частности, элемент $\alpha \in H^2(X, \mathcal{O}_X)$ однозначно определяется своими ограничениями

$$\alpha_s = \alpha|_{X_s} \in H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}), \quad s \in C.$$

Мы утверждаем, что

$$\forall \alpha \in H^2(X, \mathcal{O}_X), \quad \forall s \in C \quad \alpha_s = 0. \quad (4.9)$$

Действительно, в силу классической теории Ходжа элемент α представлен классом когомологий формы $\bar{\beta}$, где $\beta \in H^0(X, \Omega_X^2)$ – голоморфная 2-форма на X . Другими словами,

$$\alpha = \bar{\beta} + d\omega$$

для подходящей дифференциальной 1-формы ω на X . Если слой X_s гладкий, то положим $\beta_s = \beta|_{X_s}$ и $\omega_s = \omega|_{X_s}$. Тогда

$$\alpha_s = \bar{\beta}_s + d\omega_s. \quad (4.10)$$

Если z_1, z_2 – локальные голоморфные координаты на X_s , то мы имеем

$$\beta_s = b(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2, \quad \beta_s \wedge \bar{\beta}_s = |b(z_1, z_2)|^2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2.$$

Поэтому

$$\int_{X_s} \beta_s \wedge \bar{\beta}_s = 0 \iff \beta_s = 0. \quad (4.11)$$

Поскольку

$$\int_{X_s} \beta_s \wedge \bar{\beta}_s = \int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta},$$

соотношение (4.11) принимает вид

$$\int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta} = 0 \iff \beta_s = 0. \quad (4.12)$$

По условию теоремы для любой неприводимой компоненты E_i , $i = 1, \dots, n$, геометрического слоя $X_\delta = \bigcup_{i=1}^n E_i$ мы имеем равенство $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$. Поэтому $H^0(E_i, \Omega_{E_i}^2) = 0$ в силу теоремы двойственности Серра и $\beta|_{E_i} = 0$ для всех i ,

$$\int_{X_\delta} \beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta|_{E_i} \wedge \overline{\beta|_{E_i}} = 0. \quad (4.13)$$

Поскольку слой X_δ гомологичен X_s на X и $\beta \wedge \bar{\beta}$ – замкнутая форма, мы получаем по теореме Стокса

$$\int_{X_\delta} \beta \wedge \bar{\beta} = \int_{X_s} \beta \wedge \bar{\beta}.$$

Поэтому (4.12), (4.13) дают равенство $\beta_s = 0$. В силу (4.10) форма $\alpha_s = d\omega_s$ точная. С другой стороны, $\alpha_s \in H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ можно рассматривать как гармоническую форму на X_s . Поскольку форма α_s гармоническая и точная, то $\alpha_s = 0$ [39, § 2, формула (2.2)]. В силу (4.8) форму α можно рассматривать как голоморфное сечение голоморфного векторного расслоения $R^2\pi_*\mathcal{O}_X$ на кривой C , обращающееся в нуль почти всюду. Значит, $\alpha = 0$, и формула (4.9) доказана. Из (4.8), (4.9) следует, что $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Лемма доказана.

4.3. ЛЕММА. *Предположим, что для гладкого проективного трехмерного многообразия X существует морфизм $\pi: X \rightarrow C$ на гладкую проективную кривую, причем $h^{2,0}(X_s) = 1$, $h^{1,0}(X_s) = 0$ для общего геометрического слоя X_s и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(а) *образ представления монодромии $\pi_1(C', s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(X_s, \mathbb{Q}))$, ассоциированного с гладкой частью $\pi': X' \rightarrow C'$ морфизма π , бесконечен;*

(б) *некоторый вырожденный геометрический слой X_δ морфизма $\pi: X \rightarrow C$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и соответствующее локальное преобразование Пикара–Лефшеца γ , действующее на $H^2(X_s, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, удовлетворяет условию $\log(\gamma) \neq 0$.*

Тогда $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{C} \rightarrow C$ – конечное разветвленное накрытие. Существует такая гладкая проективная модель $\tilde{X}$ расслоенного произведения $X \times_C \tilde{C}$, что композиция

$$\tilde{X} \rightarrow X \times_C \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$$

является гладким морфизмом над $\tilde{C} \times_C C'$. Поэтому легко видеть, что условие (а) леммы о бесконечности образа глобального представления монодромии стабильно относительно замены базы $\tilde{C} \rightarrow C$.

С другой стороны, если преобразование Пикара–Лефшеца γ , ассоциированное с полустабильным слоем X_δ и действующее на $H^2(X_s, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, удовлетворяет условию (б) леммы, то свойство $\log(\gamma) \neq 0$ стабильно относительно перехода к подходящей гладкой проективной модели схемы $X \times_C \tilde{C}$, потому что при локальной замене базы $t = \tau^n$ имеем $\log(\gamma^n) = n \log(\gamma)$. Следовательно, условие (б) стабильно относительно замены базы, и в рассматриваемом случае образ представления глобальной монодромии бесконечен, так как γ является его элементом бесконечного порядка. В частности, (б) $\Rightarrow$ (а).

Композиция $\tilde{X} \rightarrow X \times_C \tilde{C} \rightarrow X$ определяет вложение рациональных структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(\tilde{X}, \mathbb{Q})$, которое в свою очередь дает вложение $H^2(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ компонент Ходжа типа $(0, 2)$, поэтому в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [9, с. 53–54] и теоремы о монодромии [40, теорема (6.1)] мы можем (и будем) предполагать, что выполняются следующие дополнительные условия:

- 1) морфизм $\pi: X \rightarrow C$ имеет сечение;
- 2) все слои морфизма π являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями;
- 3) все преобразования Пикара–Лефшеца, ассоциированные с гладким морфизмом $\pi' = \pi|_{X'}: X' \rightarrow C'$, являются унитарными.

Поскольку образ представления монодромии $\pi_1(C', s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(X_s, \mathbb{Q}))$ бесконечен, пространство

$$H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \simeq H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$$

порождается алгебраическими классами когомологий [41, предложение 1.3].

Пусть $\Delta \hookrightarrow C$ – непустое конечное подмножество, содержащее $\{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_\delta) \neq \emptyset\}$,

$$C' = C \setminus \Delta \xrightarrow{j} C, \quad \pi' = \pi|_{\pi^{-1}(C')}: X' \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(C') \rightarrow C', \\ f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$$

– нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, следствие (8.2.8)]

$$H^0(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа. Кроме того,

$$(i_\Delta f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi_2} H^2(X', \mathbb{Q})]. \quad (4.14)$$

По теореме Делиня каноническое отображение $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом рациональных структур Ходжа [15, пп. 4.1.1, 4.1.2]. С другой стороны, в рассматриваемом случае $R^1\pi'_*\mathbb{Q} = 0$ в силу регулярности слоев морфизма π' , поэтому нижняя строка диаграммы (1.6) в случае $n = 2$ и (4.14) дают точную последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_\Delta f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Поскольку рациональная структура Ходжа $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ имеет тип $(1, 1)$ по теореме Лефшеца о дивизорах на слое X_s , из (4.15) следует, что рациональная структура Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$. Значит, $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Лемма доказана.

§ 5. О существовании разложения Чжоу–Лефшеца для комплексных проективных 3-мерных многообразий

5.1. Пусть $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ – категория гладких комплексных проективных многообразий, $\sim$ – адекватное отношение эквивалентности на алгебраических циклах с рациональными коэффициентами (в частности, прообраз, прямой образ и пересечение циклов всегда определены по модулю $\sim$) и с группами циклов $C_{\sim}^j(X)$ коразмерности j по модулю $\sim$. Если X имеет связные компоненты $X_1, \dots, X_n$ размерностей $d_1, \dots, d_n$ и Y – многообразие, мы полагаем

$$C_{\sim}^{\dim X + r}(X \times Y) = \bigoplus_{i=1}^n C_{\sim}^{d_i + r}(X_i \times Y)$$

для $r \in \mathbb{Z}$. Тогда имеется билинейный закон композиции

$$C_{\sim}^{\dim Y_1 + r_1}(Y_1 \times Y_2) \times C_{\sim}^{\dim Y_2 + r_2}(Y_2 \times Y_3) \rightarrow C_{\sim}^{\dim Y_1 + r_1 + r_2}(Y_1 \times Y_3), \\ f \times g \mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* f \cdot \text{pr}_{23}^* g),$$

где $\text{pr}_{ij}: Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \rightarrow Y_i \times Y_j$ – проекция. Этот закон композиции ассоциативен, и $C_{\sim}^{\dim X}(X \times X)$ – кольцо.

Объектами категории $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ мотивов являются тройки (X, p, m) , где X – d -мерное многообразие, $p \in C_{\sim}^d(X \times X)$ – проектор (другими словами, $p \circ p = p$) и $m \in \mathbb{Z}$. Множества морфизмов определяются как

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_k}((X, p, m), (Y, q, n)) = q \circ C_{\sim}^{\dim X - m + n}(X \times Y) \circ p.$$

Мотив $h(X)$ многообразия X определяется формулой $h(X) = (X, \text{id}_X, 0)$ (см. работы [42], [43]).

5.2. Далее мы будем рассматривать категорию $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ мотивов Чжоу с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. Морфизмы в $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ задаются формулой

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}((X, p, m), (Y, q, n)) = q \circ \text{CH}_{\dim X - m + n}(X \times Y)_{\mathbb{Q}} \circ p,$$

где $\text{CH}_i(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$ – группа Чжоу i -мерных циклов с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ по модулю рациональной эквивалентности $\sim$. Мотив $h(X)$ многообразия X определяется формулой $h(X) = (X, \Delta_X, 0)$, где $\Delta_X \in \text{CH}_d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ – класс диагонали.

Гладкое проективное d -мерное многообразие X имеет разложение Чжоу–Кюннета, если существуют такие попарно ортогональные проекторы $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{2d} \in \text{CH}_d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$, в сумме дающие диагональ Δ_X , что $(\Pi_i)_* H_*(X, \mathbb{Q}) = H_i(X, \mathbb{Q})$ для всех i [8, § 4].

Напомним, что для многообразия X существует разложение Чжоу–Лефшеца, если существует такое разложение Чжоу–Кюннета $\{\Pi_i \mid 0 \leq i \leq 2d\}$, что для всех $i > d$ морфизм мотивов Чжоу $(X, \Pi_i, 0) \rightarrow (X, \Pi_{2d-i}, i-d)$, задаваемый пересечением $i-d$ раз с гиперплоским сечением, является изоморфизмом [8, определение 4.1].

Обозначим через $N^i H_{2i}(X, \mathbb{Q})$ образ отображения класса $\text{cl}_i: \text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H_{2i}(X, \mathbb{Q})$ и положим

$$N^i H_{2i+1}(X, \mathbb{Q}) = \sum \text{Im}[\Gamma_*: H_1(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2i+1}(X, \mathbb{Q})],$$

где суммирование производится по всем гладким проективным кривым C и всем соответствиям $\Gamma \in \text{CH}_{i+1}(C \times X)_{\mathbb{Q}}$.

Если в обозначениях [8] имеем $H_i(X, \mathbb{Q}) = N^{[i/2]} H_i(X, \mathbb{Q})$ для всех $i > d$, то по теореме Виала для многообразия X существует разложение Чжоу–Лефшеца [8, теорема 4.2]. В частности, это верно для гладкого проективного 3-мерного многообразия X с $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (например, для многообразия Калаби–Яо) [8, следствие 4.3].

Мы рассмотрим некоторые гладкие проективные трехмерные многообразия, для которых $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и, следовательно, существует разложение Чжоу–Лефшеца (см. далее предложения из пп. 5.3, 5.4, 5.6; теорема 2 следует из этих предложений).

5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Разложение Чжоу–Лефшеца существует для гладкого проективного трехмерного многообразия X , если существует морфизм*

$\pi: X \rightarrow C$ на гладкую проективную кривую и иррегулярность $h^{1,0}(X_s)$ общего геометрического слоя X_s равна нулю, причем выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) слой X_s является рациональной поверхностью;
- (ii) слой X_s является поверхностью Энриквеса;
- (iii) слой X_s является КЗ-поверхностью, причем среди слоев морфизма π имеются хотя бы два неизоморфных гладких слоя;
- (iv) $h^{2,0}(X_s) = 1$, образ монодромии $\pi_1(C', s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(X_s, \mathbb{Q}))$, ассоциированной с гладкой частью $\pi': X' \rightarrow C'$ морфизма π , бесконечен;
- (v) $h^{2,0}(X_s) = 1$, некоторый вырожденный геометрический слой X_δ морфизма $\pi: X \rightarrow C$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и соответствующее локальное преобразование Пикара–Лефшеца γ , действующее на $H^2(X_s, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, удовлетворяет условию $\log(\gamma) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ [8, следствие 4.3].

Рассматривая в случае необходимости разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и гладкую модель $\tilde{X}$ расслоенного произведения $X \times_C \tilde{C}$, мы можем считать в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [9, с. 53–54] и существования вложения рациональных структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(\tilde{X}, \mathbb{Q})$, что все слои морфизма π являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

В силу $h^{1,0}(X_s) = 0$ имеется точная последовательность (4.15), поэтому достаточно проверить, что рациональная структура Ходжа $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$.

Если общий геометрический слой X_s морфизма π' является рациональной поверхностью или поверхностью Энриквеса, то $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$ и, следовательно, структура Ходжа $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$.

Если общий геометрический слой X_s морфизма π' является КЗ-поверхностью, причем среди слоев гладкого морфизма π' имеются хотя бы два неизоморфных слоя, то семейство КЗ-поверхностей $\pi': X' \rightarrow C'$ является *неизотривиальным*, поэтому в силу одного результата Ю. Г. Зархина имеем каноническое вложение рациональных структур Ходжа

$$H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{NS}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$$

для любой точки $s \in C'$ [44, следствие 4.1.1] и, следовательно, структура Ходжа $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ имеет тип $(1, 1)$ в силу теоремы Лефшеца о дивизорах на X_s .

В случаях (iv), (v) остается применить лемму из п. 4.3. Предложение доказано.

5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть C – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, X – гладкое проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм, геометрические слои которого являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями. Предположим, что $h^{1,0}(X_s) = 0$ для общего геометрического слоя X_s морфизма π , причем для всех неприводимых компонент E_i ,

$i = 1, \dots, n$, некоторого геометрического слоя X_δ имеем $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$. Тогда для многообразия X существует разложение Чжоу–Лefшеца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы п. 4.2 и [8, следствие 4.3].

5.5. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие размерности Кодайры $\kappa = 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, Y – минимальная модель X . Тогда Y имеет терминальные особенности [45], которые, очевидно, являются каноническими. С другой стороны, канонические особенности рациональны [46], поэтому $h^i(\mathcal{O}_X) = h^i(\mathcal{O}_Y)$, так как Y нормально и для любого разрешения особенностей $\varphi: Y^{\text{smooth}} \rightarrow Y$ имеем $R^i \varphi_* \mathcal{O}_{Y^{\text{smooth}}} = 0$ для всех $i > 0$.

Из результатов Каваматы [47] следует, что канонический класс K_Y численно тривиален; более того, существует такое наименьшее положительное целое число m , что mK_Y линейно эквивалентен нулю [48, теорема 3.2, доказательство теоремы 3.1].

Имеется каноническая структура $\mathcal{O}_Y$ -алгебры на $\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_Y([-iK_Y])$, где $[-iK_Y]$ – целая часть $\mathbb{Q}$ -дивизора $-iK_Y$. Пусть

$$\tilde{Y} = \text{Spec} \left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_Y([-iK_Y]) \right) \xrightarrow{f} Y$$

– каноническое отображение. Хорошо известно, что многообразие $\tilde{Y}$ неприводимо и $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ – циклическое μ_m -накрытие. Более того, f этальное в коразмерности 1,

$$f^*(K_Y) = K_{\tilde{Y}} \sim 0,$$

и особенности $\tilde{Y}$ терминальные (см. [49, п. 2.4], [50, пп. 3.1, 3.2], [51, п. 1.1.10]).

5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие размерности Кодайры $\kappa(X) = 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, Y – минимальная модель X , $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ – каноническое циклическое μ_m -накрытие, где m – наименьшее положительное целое число, для которого $mK_Y \sim 0$. Если $H^1(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0$, то для многообразия X существует разложение Чжоу–Лefшеца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $H^1(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0$ и двойственности Серра следует, что для любого разрешения особенностей $\tilde{Y}^{\text{smooth}} \rightarrow \tilde{Y}$ имеем $H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}^{\text{smooth}}}) = 0$ [3, доказательство предложения 4.3]. Поэтому из существования рационального доминантного отображения $\tilde{Y}^{\text{smooth}} \dashrightarrow X$ следует, что $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и, следовательно, для X существует разложение Чжоу–Лefшеца [8, следствие 4.3]. Предложение доказано.

5.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через $[\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{hom}}$ подпространство гомологически тривиальных классов рациональной эквивалентности и через $[\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{alg}}$ подпространство алгебраически тривиальных классов. Аналогично определяется группа $\text{CH}_i(X)_{\text{alg}}$ целочисленных алгебраически тривиальных классов.

Пусть $J_i^a(X)$ – образ отображения Абеля–Якоби

$$AJ_i: \text{CH}_i(X)_{\text{alg}} \rightarrow J_i(X)$$

в промежуточный якобиан $J_i(X)$; хорошо известно, что $J_i^a(X)$ – абелево многообразие.

Из результатов Виаля [8, следствие 4.3, теоремы 1, 2] следует, что если $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для 3-мерного многообразия X , то попарно ортогональные проекторы $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_6 \in \text{CH}_3(X \times X)_{\mathbb{Q}}$ (в сумме дающие диагональ Δ_X) можно выбрать так, что будут выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Pi_{2i} &= {}^t\Pi_{6-2i}, \\ (\Pi_{2i})_* H_*(X, \mathbb{Q}) &= H_{2i}(X, \mathbb{Q}), \\ [\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{hom}} &= \text{Ker}[\Pi_{2i}: \text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}],\end{aligned}$$

мотив Чжоу $(X, \Pi_{2i}, 0)$ изоморфен $(\mathbb{L}^{\otimes i})^{\oplus d_i}$, где $d_i = \dim H_{2i}(X, \mathbb{Q})$;

$$\begin{aligned}\Pi_{2i+1} &= {}^t\Pi_{6-2i-1}, \\ (\Pi_{2i+1})_* H_*(X, \mathbb{Q}) &= N^i H_{2i+1}(X, \mathbb{Q}), \\ \text{Ker}[AJ_i: [\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{alg}} \rightarrow J_i^a(X) \otimes \mathbb{Q}] \\ &= \text{Ker}[\Pi_{2i+1}: [\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{alg}} \rightarrow [\text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}}]_{\text{alg}}],\end{aligned}$$

мотив Чжоу $(X, \Pi_{2i+1}, 0)$ изоморфен $h_1(J_i^a(X))(i)$.

Список литературы

1. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic geometry*, Internat. Colloq. (Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
2. D. I. Lieberman, “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
3. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds. II”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 1047–1062.
4. F. Charles, E. Markman, “The standard conjectures for holomorphic symplectic varieties deformation equivalent to Hilbert schemes of $K3$ surfaces”, *Compos. Math.*, **149**:3 (2013), 481–494.
5. О. В. Никольская, “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств $K3$ -поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164; англ. пер.: O. V. Nikol’skaya, “On algebraic cycles on a fibre product of families of $K3$ -surfaces”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 143–162.
6. Вик. С. Куликов, “Вырождения $K3$ -поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
7. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 181–214; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex 4-dimensional elliptic varieties and compactifications of Néron minimal models”, *Izv. Math.*, **78**:1 (2014), 169–200.
8. Ch. Vial, “Projectors on the intermediate algebraic Jacobians”, *New York J. Math.*, **19** (2013), 793–822.

9. G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I.*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, viii+209 pp.
10. K. Kodaira, “On compact analytic surfaces. II”, *Ann. of Math.* (2), **77**:3 (1963), 563–626.
11. Вик. С. Куликов, П. Ф. Курчанов, “Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа”, *Алгебраическая геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **36**, ВИНТИ, М., 1989, 5–231; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, P. F. Kurchanov, “Complex algebraic varieties: periods of integrals and Hodge structures”, *Algebraic geometry. III*, Encyclopaedia Math. Sci., **36**, Springer, Berlin, 1998, 1–217.
12. P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
13. S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math.* (2), **109**:3 (1979), 415–476.
14. С. Н. Clemens, “Degeneration of Kähler manifolds”, *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290.
15. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика*. Сб. пер., **17**, № 5, Мир, М., 1973, 3–56; пер. с фр.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
16. Н. Бурбаки, *Элементы математики*, Алгебра. Гл. X. Гомологическая алгебра, Наука, М., 1987, 183 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre. Ch. X. Algèbre homologique, Masson, Paris, 1980, vii+216 pp.
17. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds”, *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 167–187.
18. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 119–142; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex 4-dimensional elliptic varieties”, *Izv. Math.*, **76**:5 (2012), 967–990.
19. D. R. Morrison, “The Clemens–Schmid exact sequence and applications”, *Topics in transcendental algebraic geometry* (Princeton, N.J., 1981/1982), Ann. of Math. Stud., **106**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984, 101–119.
20. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
21. Ю. Г. Зархин, “Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarhin, “Weights of simple Lie algebras in cohomology of algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
22. В. В. Шокуров, “Алгебраические кривые и их якобианы”, *Алгебраическая геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **36**, ВИНТИ, М., 1989, 233–273; англ. пер.: V. V. Shokurov, “Algebraic curves and their Jacobian”, *Algebraic geometry. III*, Encyclopaedia Math. Sci., **36**, Springer, Berlin, 1998, 219–270.
23. П. Делинь, Д. Мамфорд, “Неприводимость многообразия кривых заданного рода”, *Математика*. Сб. пер., **16**, № 3, ИЛ, М., 1972, 13–53; пер. с англ.: P. Deligne, D. Mumford, “The irreducibility of the space of curves of given genus”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **36**:1 (1969), 75–109.
24. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. 1–3, Мир, М., 1976, 496 с.; гл. 4–6, 1972, 334 с.; гл. 7, 8, 1978, 342 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, 2nd éd., Actualités Sci. Indust., **1285**, Hermann, Paris, 1971, 146 pp.;

- Chaps. 2, 3, **1349**, 1972, 320 pp.; Chaps. 4–6, **1337**, 1968, 288 pp.; Chaps. 7, 8, **1364**, 1975, 271 pp.
25. A. Beauville, “Holomorphic symplectic geometry: a problem list”, *Complex and differential geometry*, Springer Proc. Math., **8**, Springer, Heidelberg, 2011, 49–63.
 26. A. Beauville, “Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle”, *J. Differential Geom.*, **18**:4 (1983), 755–782.
 27. Y. André, “On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties”, *Math. Ann.*, **305**:1 (1996), 205–248.
 28. D. Matsushita, “On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold”, *Topology*, **38**:1 (1999), 79–83; “Addendum”, *Topology*, **40**:2 (2001), 431–432.
 29. D. Matsushita, “Higher direct images of dualizing sheaves of Lagrangian fibrations”, *Amer. J. Math.*, **127**:2 (2005), 243–259.
 30. Д. Г. Маркушевич, “Лагранжевы семейства якобианов кривых рода 2”, *Алгебраическая геометрия* – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **34**, ВИНТИ, М., 2001, 237–267; англ. пер.: D. Markushevich, “Lagrangian families of Jacobians of genus 2 curves”, *J. Math. Sci.*, **82**:1 (1996), 3268–3284.
 31. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981, 600 с.; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, xvi+496 pp.
 32. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971, 299 с.; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math., **5**, Oxford Univ. Press, London, 1970, viii+242 pp.
 33. M. Raynaud, “Spécialisation du foncteur de Picard”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **38** (1970), 27–76.
 34. A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **24**:1 (1965), 5–223.
 35. A. Grothendieck, “Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard: propriétés générales”, *Fondements de la géométrie algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962, Secrétariat mathématique, Paris, 1962, 23 p. (Séminaire Bourbaki, 14e année, 1961/62, exp. no. 236).
 36. С. Ю. Аракелов, “Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:6 (1971), 1269–1293; англ. пер.: S. Yu. Arakelov, “Families of algebraic curves with fixed degeneracies”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:6 (1971), 1277–1302.
 37. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973, 280 с.; пер. с англ.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Grundlehren Math. Wiss., **131**, Springer-Verlag, New York, 1966, x+232 pp.
 38. Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983, 392 с.; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1980, xiii+323 pp.
 39. Шэн-Шэн Чжэнь, *Комплексные многообразия*, ИЛ, М., 1961, 240 с.; пер. с англ.: Shiing-Shen Chern, *Complex manifolds*, Textos de Matemática, **5**, Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, Recife, Pernambuco, 1959, v+181 pp.
 40. W. Schmid, “Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping”, *Invent. Math.*, **22**:3–4 (1973), 211–319.
 41. Г. А. Мустафин, “Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 948–978; англ. пер.: G. A. Mustafin, “Families of algebraic varieties and invariant cycles”, *Math. USSR-Izv.*, **27**:2 (1986), 251–278.

42. U. Jannsen, “Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity”, *Invent. Math.*, **107**:1 (1992), 447–452.
43. A. J. Scholl, “Classical motives”, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 163–187.
44. Yu. G. Zarhin, “Hodge groups of $K3$ surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
45. M. Reid, “Young person’s guide to canonical singularities”, *Algebraic geometry, Bowdoin*, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 345–414.
46. R. Elkik, “Rationalité des singularités canoniques”, *Invent. Math.*, **64**:1 (1981), 1–6.
47. Y. Kawamata, “Abundance theorem for minimal threefolds”, *Invent. Math.*, **108**:2 (1992), 229–246.
48. Y. Kawamata, “On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$ ”, *Math. Ann.*, **275**:4 (1986), 539–546.
49. В. В. Шокуров, “Трёхмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.
50. В. А. Исковских, “Особенности на минимальных моделях алгебраических многообразий”, *Алгебраическая геометрия – 11*, Труды семинара по алгебраической геометрии отдела алгебры Математического института РАН под руководством академика РАН И. Р. Шафаревича (1996–1998 гг.), Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **70**, ВИНТИ, М., 2001, 51–77; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Singularities on minimal models of algebraic varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **106**:5 (2001), 3269–3285.
51. Ю. Г. Прохоров, *Индуктивные методы в теории минимальных моделей*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2001.

СЕРГЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ ТАНКЕЕВ
(SERGEY G. TANKEEV)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило в редакцию
28.02.2014