Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О группе Брауэра арифметической модели гиперкэлера многообразия над числовым полем, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 3, 203–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:16:57

УДК 512.7

С. Г. Танкеев

О группе Брауэра арифметической модели гиперкэлера многообразия над числовым полем

Доказана гипотеза Артина о конечности группы Брауэра арифметической модели гиперкэлера многообразия V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ при условии, что $b_2(V \otimes_k \mathbb{C}) > 3$. Показано, что группа Брауэра арифметической модели односвязного многообразия Калаби–Яо над числовым полем является конечной. Доказано также, что если для гладкого проективного многообразия V над полем k произвольной характеристики $\text{char}(k) \neq l$ верна l -адическая гипотеза Тэйта о дивизорах, то группа $\text{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\text{Gal}(k^s/k)}(l)$ конечная независимо от условия полупростоты непрерывного l -адического представления группы Галуа $\text{Gal}(k^s/k)$ в пространстве $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1))$.

Библиография: 42 наименования.

Ключевые слова: гиперкэлера многообразие, многообразие Калаби–Яо, арифметическая модель, группа Брауэра, гипотеза Артина, К3-поверхность, абелева поверхность, точечная схема Гильберта, обобщенное многообразие Куммера, модулярная поверхность Гильберта.

DOI: 10.4213/im8234

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Обозначим через A кольцо целых поля k . Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где X – регулярная схема, общий схемный слой π изоморфен V (мы называем $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$ арифметической моделью V).

По определению группа Брауэра $\text{Br}(X)$ классифицирует пучки центральных простых алгебр на X по модулю подобия. Известно, что существует каноническое вложение $\text{Br}(X) \hookrightarrow \text{Br}'(X)$, где $\text{Br}'(X) = H_{\text{ét}}^2(X, G_m)$ – кохомологическая группа Брауэра.

Артин высказал гипотезу о том, что группа Брауэра $\text{Br}(X)$ конечная [1, гл. IV, § 2, вопрос 2.19]. Хорошо известно, например, что группа $\text{Br}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Br}(\text{Spec } A)$ конечная.

Пусть W – гладкое комплексное проективное односвязное многообразие с тривиальным каноническим классом. Тогда W является произведением многообразий следующих типов:

1) проективное многообразие Y размерности не менее 3 с $H^0(Y, \Omega_Y^*) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot \omega$, где ω – образующая канонического пучка $\mathcal{K}_Y$ (многообразие Калаби–Яо);

2) проективное многообразие Z с $H^0(Z, \Omega_Z^*) = \mathbb{C}[\omega]$, где пространство $H^0(Z, \Omega_Z^2)$ одномерное и порождается формой ω , невырожденной в каждой точке (гиперкэлерово многообразие, называемое также неприводимым симплектическим).

По теореме Яо кэлерово многообразие W с тривиальным каноническим расслоением допускает кэлерову метрику с группой голономий, содержащейся в $SU(n)$ (что эквивалентно тривиальности кривизны Риччи); по теоремам Берже и Де Рама многообразие W является произведением многообразий с группами голономий $SU(m)$ или $Sp(r)$; это соответствует двум случаям теоремы разложения [2].

В настоящей работе мы доказываем гипотезу Артина о конечности когомологической группы Брауэра $Br'(X)$ для арифметической модели гиперкэлерова многообразия V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ при условии, что второе число Бетти $b_2(V \otimes_k \mathbb{C})$ больше трех. Это условие автоматически выполнено для проективных деформаций схемы Гильберта $Hilb^r(S)$ конечных подсхем длины $r \geq 1$ проективной комплексной КЗ-поверхности S или обобщенного многообразия Куммера K_r размерности $2r$, $r \geq 1$, ассоциированного с комплексной абелевой поверхностью, а также для проективных деформаций гиперкэлерова многообразия О'Гради размерности 6 или 10.

Техника доказательства является комбинацией методов из [3]–[5] и позволяет доказать конечность группы $Br'(X)$ для арифметических моделей произведений следующих многообразий над числовым полем k :

- 1) гиперкэлерова многообразия V при условии, что $b_2(V \otimes_k \mathbb{C}) > 3$;
- 2) спорадического гиперкэлерова многообразия О'Гради V размерности 6 или 10;
- 3) гладкой проективной канонически поляризованной поверхности V с условиями $h^{2,0}(V \otimes_k \mathbb{C}) = (K_{V \otimes_k \mathbb{C}}^2) = 1$;
- 4) многообразия Фано V прямых на гладкой 4-мерной кубике;
- 5) односвязного многообразия Калаби–Яо;
- 6) односвязной проективной гладкой поверхности V при условии, что существует доминантное k -рациональное отображение $C_1 \times_k C_2 \dashrightarrow V$ произведения двух кривых C_1, C_2 над полем k ;
- 7) гладкой диагональной поверхности в $\mathbb{P}^3$ (например, поверхности Ферма).

Доказано, что для модулярной поверхности Гильберта V , ее арифметической модели $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ и для любого простого числа l группы $Br'(V \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})^{\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(l)$ и $Br'(X)(l)$ конечны.

Кроме того, если для многообразия V над полем k произвольной характеристики $\operatorname{char}(k) \neq l$ верна l -адическая гипотеза Тэйта о дивизорах, то при доказательстве конечности группы $Br'(V \otimes_k \overline{k})^{\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)}(l)$ мы устраним условие полупростоты непрерывного l -адического представления группы Галуа $\operatorname{Gal}(k^s/k)$ в пространстве $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1))$, которое играет важную роль в [3, предложение 2.5].

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные советы.

§ 1. О конечности группы Брауэра арифметической модели гиперкэлера многообразия над числовым полем

1.1. Для любого поля k через k^s обозначается его сепарабельное замыкание. Всюду далее выражение “почти для всех простых чисел l ” эквивалентно выражению “для всех простых l , кроме конечного числа исключений”. Следующие утверждения играют ключевую роль во всем дальнейшем изложении.

1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [3, предложение 2.5, следствие 2.6]. Пусть V – гладкое проективное геометрически целое многообразие над полем k . Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (a) V – кривая или поверхность;
- (b) $\text{char}(k) = 0$;
- (c) существуют такие конечное расширение k'/k , $k' \subset k^s$, и простое число $q \neq \text{char}(k)$, что группа Галуа $\text{Gal}(k^s/k')$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes_k k^s)$, $\text{Gal}(k^s/k')$ -модуль $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_q(1))$ полупростой и $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_q(1))^{\text{Gal}(k^s/k')} = \text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes \mathbb{Q}_q$.

Тогда почти для всех простых чисел l каноническое отображение

$$H^1(\text{Gal}(k^s/k), \text{NS}(V \otimes_k k^s)/l) \rightarrow H^1(\text{Gal}(k^s/k), H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mu_l))$$

инъективно и $\text{Gal}(k^s/k)$ -модуль $\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes \mathbb{Z}_l$ является прямым слагаемым $\text{Gal}(k^s/k)$ -модуля $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1))$. Если выполнено условие (c), то группа $\text{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\text{Gal}(k^s/k)}(q)$ конечная.

1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V – гладкое проективное геометрически целое многообразие над числовым полем k , $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, A – кольцо целых поля k , $X \rightarrow \text{Spec } A$ – арифметическая модель многообразия V . Если группа $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$ конечная, то когомологическая группа Брауэра $\text{Br}'(X)$ также конечная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в [5, доказательство теоремы 1.1], где показано, что конечность группы $\text{Br}'(X)$ формально следует из конечности группы $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$.

1.4. Следуя [6, § 6, 7] и [4, п. 1.2], рассмотрим некоторые гиперкэлера многообразия V произвольной четной размерности $2r \geq 2$:

- i) $V = S^{[r]} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hilb}^r(S)$ – точечная схема Гильберта для любой КЗ-поверхности S , классифицирующая конечные замкнутые подсхемы в S длины r ;
- ii) $V = K_r = \{\text{слой над точкой } 0 \text{ морфизма суммирования } J^{[r+1]} \rightarrow J\}$ – обобщенное многообразие Куммера, ассоциированное с любой абелевой поверхностью J ; в частности, если $r = 1$, то V – поверхность Куммера абелевой поверхности J ;
- iii) произвольная проективная деформация V гиперкэлера многообразия типа $S^{[r]}$ или K_r .

Кроме того, существуют спорадические гиперкэлера многообразия, построенные О’Гради:

- iv) 10-мерная гладкая проективная модель V пространства модулей полустабильных свободных от кручения пучков ранга 2 на КЗ-поверхности S , компактифицирующая пространство модулей стабильных ранга 2 векторных расслоений на S с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ [7]; известно, что $b_2(V) = 24$ [8];

v) 6-мерное гиперкэлерово многообразие V с $b_2(V) = 8$ [9], ассоциированное с пространством модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = 2$ на абелевой поверхности A .

1.5. Пусть (V, L) – гладкое проективное поляризованное односвязное многообразие, определенное над подполем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, и $L_{\mathbb{C}}$ – соответствующая поляризация многообразия $V \otimes_k \mathbb{C}$.

Следуя [4, п. 1.4], отождествим поляризацию $L_{\mathbb{C}}$ с элементом группы $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))/\text{tors}$ и снабдим решетку $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})(1)/\text{tors}$ билинейной формой ψ , определенной формулой

$$\psi(x, y) = \deg(x \smile y \smile L_{\mathbb{C}}^{\dim V - 2});$$

эта форма *отличается* от формы, определенной в [4, п. 1.4], лишь множителем (-1) . Обозначим через $P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})(1)$ примитивную решетку (ортogonalное дополнение образа $L_{\mathbb{C}}$ в $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})(1)/\text{tors}$). Эта примитивная решетка обладает структурой Ходжа веса 0 и поляризуется билинейной формой ψ . Мы обозначаем через $h_0^{p,q}$ ее числа Ходжа.

Рассмотрим следующие условия, сформулированные в работе Андре [4, § 1.4]:

(A₁) $h_0^{-1,1} = h_0^{1,-1} = 1$, $h_0^{0,0} > 0$, $h_0^{p,q} = 0$ для $|p - q| > 2$;

(B₁) существуют гладкая связная k -схема S , точка $s \in S(k)$ и проективный гладкий k -морфизм $f: Y \rightarrow S$ такие, что выполнены следующие условия:

i) $V = Y_s$,

ii) $L_{\mathbb{C}}$ продолжается до сечения $R^2 f_{\mathbb{C}*}^{\text{an}} \mathbb{Z}(1)/\text{tors}$,

iii) образ канонического отображения $\widetilde{S(\mathbb{C})} \rightarrow \mathcal{M}$, где $\widetilde{S(\mathbb{C})}$ – универсальное накрытие многообразия $S(\mathbb{C})$ и $\mathcal{M}$ – пространство модулей структур Ходжа на примитивной поляризованной решетке $P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})(1)$, содержит непустое открытое подмножество.

Кроме того, в силу теоремы Лефшеца о дивизорах выполнено условие:

(B₁⁺) для каждого $t \in S(\mathbb{C})$ любой элемент типа $(0, 0)$ в $H^2(Y_t, \mathbb{Q})(1)$ является алгебраическим классом.

Хорошо известно, что поляризованные абелевы поверхности, канонически поляризованные поверхности с $p_g = (K^2) = 1$ и гиперкэлеровы многообразия со вторым числом Бетти > 3 обладают свойствами (A₁), (B₁), (B₁⁺) [4, пп. 1.4, 3.3–3.6].

Мы докажем следующее обобщение леммы 4.3 из [3] при условии, что поле k числовое.

1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V – односвязное гладкое проективное многообразие над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Если многообразие V удовлетворяет условиям (A₁), (B₁), то каноническое инъективное отображение $[\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \hookrightarrow H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ является изоморфизмом почти для всех простых чисел l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что точная последовательность Куммера пучков в этальной топологии

$$1 \rightarrow \mu_{l^n} \rightarrow G_m \xrightarrow{l^n} G_m \rightarrow 1$$

дает точную последовательность модулей Галуа [3, формула (1)]

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l^n \rightarrow H_{\mathrm{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_{l^n}) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes_k \bar{k})_{l^n} \rightarrow 0,$$

которая в свою очередь дает инъективное отображение

$$[\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \hookrightarrow H_{\mathrm{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Как замечено в начале доказательства леммы 4.3 из [3], можно считать, что группа Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ тривиально действует на $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})$. Мы фиксируем вложение $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ и отождествим поле $\bar{k}$ с его образом в $\mathbb{C}$.

Из односвязности V следует, что $H_{\mathrm{et}}^1(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l) = 0$ и $H_{\mathrm{et}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$ не имеет кручения для любого простого числа l ; кроме того, $H^1(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) = 0$ и $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})$ не имеет кручения [4, п. 2.1].

Пусть $W_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа веса n . Разложение Ходжа $W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} W_{\mathbb{C}}^{p,q}$ определяет морфизм вещественных алгебраических групп

$$h: \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}),$$

где $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m над $\mathbb{C}$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{R}$ [10, определение В.42]. Элемент $z \in \mathbb{C}^{\times} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на компоненте Ходжа $W_{\mathbb{C}}^{p,q}$ по правилу [11, (2.1.5.1)]

$$z \cdot v = z^p \bar{z}^q v.$$

Рассмотрим группу $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^{\times} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\mathrm{GL}(W_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* структуры Ходжа $W_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\mathrm{Hg}(W_{\mathbb{Q}})$ [10, определение В.51]. Если $W_{\mathbb{Q}}$ – поляризуемая рациональная структура Ходжа, то $\mathrm{Hg}(W_{\mathbb{Q}})$ – редуктивная $\mathbb{Q}$ -группа, естественным образом действующая в пространстве $W_{\mathbb{Q}}$ [10, предложение В.57]; это представление полупростое в силу редуктивности группы Ходжа. При этом рациональные подструктуры Ходжа в $W_{\mathbb{Q}}$ совпадают с $\mathrm{Hg}(W_{\mathbb{Q}})$ -подмодулями [10, предложение В.54].

В рассматриваемом случае группа Ходжа $\mathrm{Hg}(H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$ рациональной структуры Ходжа $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ естественным образом действует на $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$. По теореме Лефшеца о дивизорах имеем

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

$$[H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{C})] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(1) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1))^{\mathrm{Hg}(H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))}.$$

Определим $\mathbb{Q}$ -пространство трансцендентных циклов $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\perp}$ как сумму всех неприводимых рациональных подструктур Ходжа

$$W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)),$$

где $\dim_{\mathbb{Q}} W_{\mathbb{Q}} \geq 2$. Из теоремы Лефшеца о дивизорах следует существование *канонического* разложения

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\perp}.$$

Поскольку существует каноническое вложение

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)),$$

то определена *решетка трансцендентных циклов*

$$\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \cap H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)).$$

Очевидно, что $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \cap \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp = 0$ и группа $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \oplus \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp$ имеет конечный индекс δ в группе $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$.

Всюду далее l – простое число, не делящее δ и порядок *конечной* группы $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$. Тогда в силу формулы универсальных коэффициентов для когомологий [12, гл. 2, § 15, п. 5] имеем

$$\begin{aligned} H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) &= [H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}] \oplus [\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}] \\ &= H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Поскольку простое число l не делит δ , то (обозначая через A/l факторгруппу A/lA абелевой группы A) мы видим, что каноническая точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \oplus \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \rightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \Delta \rightarrow 0$$

с конечной группой Δ порядка δ и (1.1) дают равенство

$$H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))/l = \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})/l \oplus \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp/l. \quad (1.2)$$

Пусть $L \in \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – класс гиперплоского сечения, $d = \dim V \geq 2$. Известно, что морфизм $V \otimes_k \mathbb{C} \rightarrow V \otimes_k \bar{k}$, определенный k -вложением $\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$, индуцирует изоморфизм групп Нерона–Севери $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})$, так что из невырожденности симметрической билинейной формы

$$\begin{aligned} \psi: H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)) \times H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1)) \\ \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y \smile L_{\mathbb{C}}^{d-2}} H^{2d}(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(d)) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

и равенства $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})_{\mathrm{tors}} = 0$ следует невырожденность симметрического спаривания [3, начало доказательства леммы 2.3]

$$\psi_0: \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k}) \times \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k}) \xrightarrow{x \times y \mapsto \deg(x \cdot y \cdot L^{d-2})} \mathbb{Z}.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \smile \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\smile d-1} = 0,$$

потому что в случае $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \smile \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\smile d-1} \neq 0$ мы имеем для некоторых элементов $n_1, \dots, n_{d-1} \in \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})$ и некоторой неприводимой рациональной подструктуры Ходжа $W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp$ размерности ≥ 2 соотношение

$$W_{\mathbb{Q}} \smile n_1 \smile n_2 \smile \dots \smile n_{d-1} \neq 0;$$

рассматривая отображение рациональных структур Ходжа веса 0

$$W_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{w \mapsto w \smile n_1 \smile n_2 \smile \dots \smile n_{d-1}} H^{2d}(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(d)) = \mathbb{Q},$$

мы видим, что его ядро, являющееся рациональной структурой Ходжа, имеет коразмерность 1 в структуре Ходжа $W_{\mathbb{Q}}$, что противоречит неравенству $\dim W_{\mathbb{Q}} \geq 2$ и неприводимости рациональной структуры Ходжа $W_{\mathbb{Q}}$. Значит,

$$\psi(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})) = 0. \quad (1.3)$$

Легко проверить, что ограничение формы ψ на $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})$ является невырожденной $\mathbb{Q}$ -билинейной формой [3, начало доказательства леммы 2.3]. Поэтому из (1.3) следует, что рациональная структура Ходжа $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\perp}$, канонически определенная как сумма всех неприводимых рациональных подструктур Ходжа $W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}(1))$ размерности не менее 2, является ортогональным дополнением пространства $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V \otimes_k \mathbb{C})$ относительно формы ψ и не зависит от выбора поляризации L ; более того, ограничение спаривания ψ на $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})/l$ является невырожденной $\mathbb{Z}/l$ -билинейной формой, и из (1.2) следует, что $\mathbb{Z}/l$ -пространство $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^{\perp}/l$ совпадает с ортогональным дополнением $\mathbb{Z}/l$ -подпространства $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})/l \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))/l$ относительно ограничения спаривания ψ [3, доказательство леммы 4.3].

Поскольку группа $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ не имеет кручения, из (1.1) следует равенство $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))/l = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mu_l)$. Теорема сравнения этальных когомологий с классическими дает изоморфизм $\mathbb{Z}_l$ -модулей

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) = H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l, \quad (1.4)$$

совместимый с $\smile$ -произведениями [13, предложение 6.1]. Кроме того, (1.2) дает разложение $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l) = \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l \oplus \mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})^{\perp}/l, \quad (1.5)$$

совместимое с $\smile$ -произведениями, так что $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})^{\perp}/l$ является ортогональным дополнением $\mathbb{Z}/l$ -подпространства $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l \hookrightarrow H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)$ относительно соответствующего ограничения спаривания ψ (здесь мы используем совместимость канонических отображений $\mathrm{Pic}(V \otimes_k \bar{k}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)$ и $\mathrm{Pic}(V \otimes_k \bar{k}) \rightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mu_l)$ [14, предложение 3.8.5]).

Пусть $P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ – ортогональное дополнение элемента L относительно ψ . Тогда из (1.4) следует, что $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \stackrel{\text{def}}{=} P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ является модулем Галуа и $\mathbb{Z}_l$ -подмодулем в $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$. Ясно, что $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ является ортогональным дополнением элемента L в $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ относительно $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -инвариантного спаривания

$$\psi_l: H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \times H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \xrightarrow{x \times y \mapsto \deg(x \smile y \smile L^{\smile d-2})} \mathbb{Z}_l.$$

Аналогично $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k})^{\perp} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ является ортогональным дополнением $\mathbb{Z}_l$ -подмодуля $\mathrm{NS}(V \otimes_k \bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ в $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ относительно ψ_l и поэтому является подмодулем Галуа.

Пусть $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$ – четная $\mathbb{Z}$ -алгебра Клиффорда пары

$$(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)), \psi|_{P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))}).$$

Комплексное векторное подпространство $P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \hookrightarrow H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{C}(1))$ имеет разложение Ходжа типа $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$ с числами Ходжа $h^{-1,1} = h^{1,-1} = 1$.

По теореме Лефшеца о дивизорах решетка $\mathrm{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp$ имеет тривиальное пересечение с $(0, 0)$ -подпространством. Кроме того, $\mathbb{Z}$ -алгебра $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$ естественным образом снабжена структурой Ходжа типа $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$, индуцированной структурой на $P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ (через отождествление $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) = \bigoplus_i \wedge^{2i} P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ [15, лемма 4.4]).

С другой стороны, $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ совпадает с четной $\mathbb{Z}_l$ -алгеброй Клиффорда пары

$$(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)), \psi_l|_{P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))})$$

(через отождествление $C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) = \bigoplus_i \wedge^{2i} P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$). Ясно, что $C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ имеет естественную структуру $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуля, индуцированную действием Галуа на $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$.

Используя конструкцию Куги–Сатаке и следуя [4, доказательство основной леммы 1.7.1], мы можем считать (после замены поля k конечным расширением), что существует абелево многообразие Куги–Сатаке A над k (ассоциированное с поляризованным многообразием $(V \otimes_k \mathbb{C}, L_{\mathbb{C}})$ и обладающее комплексными умножениями на элементы из $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$ [4, п. 4.2]), причем канонический инъективный морфизм колец

$$u: C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) \hookrightarrow \mathrm{End}(H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}))$$

имеет следующие свойства:

- (а) отображение u является морфизмом веса 0 структур Ходжа;
- (б) морфизм $\mathbb{Z}_l$ -алгебр

$$\begin{aligned} u_l: C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) &\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)), \end{aligned}$$

полученный из морфизма u тензорным умножением на $\mathbb{Z}_l$ и применением изоморфизма сравнения $H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$, является инъективным морфизмом модулей Галуа;

- (с) существуют изоморфизмы структур Ходжа [4, п. 4.2]

$$C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))} H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})$$

и модулей Галуа [4, замечание 4.5.2.i, основная лемма 1.7.1]

$$C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))} H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l).$$

Мы можем (и будем) считать, что $\mathrm{End}(A) = \mathrm{End}(A \otimes_k \bar{k})$.

Используя совместимые изоморфизмы [3, п. 4.1]

$$\begin{aligned} H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}(H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}), \\ H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_l}(T_l(A \otimes_k \bar{k}), \mathbb{Z}_l), \\ T_l(A \otimes_k \bar{k}) &= H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l, \end{aligned}$$

мы получим совместимые антиизоморфизмы

$$\begin{aligned} t: \mathrm{End} H^1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End} H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}), \\ t_l: \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l} H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l} T_l(A \otimes_k \bar{k}) \end{aligned}$$

структур Ходжа веса 0 и модулей Галуа соответственно.

В итоге мы имеем инъективный морфизм структур Ходжа веса 0

$$tu: C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) \hookrightarrow \text{End } H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}),$$

продолжение которого по $\mathbb{Z}_l$ -линейности совпадает с инъективным морфизмом модулей Галуа

$$t_l u_l: C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_l} T_l(A \otimes_k \bar{k}).$$

Мы будем отождествлять $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$ и $\text{End}(A \otimes_k \mathbb{C})$ с их образами в $\text{End } H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})$. Заметим, что все элементы подкольца $\text{End}(A \otimes_k \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{End } H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})$ имеют тип Ходжа $(0, 0)$ [11, пп. 4.4.6].

Рассмотрим сначала случай, когда $\text{rank NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \geq 2$. Тогда существует ненулевой элемент $m \in \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \cap P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$, причем из существования вложения $\mathbb{Z}$ -модулей

$$\mathbb{Z} \cdot m \oplus \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \hookrightarrow P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$$

следует, что

$$\begin{aligned} m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp &= m \otimes_{\mathbb{Z}} \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \hookrightarrow \wedge^2 P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) \\ &\hookrightarrow C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))) \hookrightarrow \text{End } H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

По той же причине имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp \xrightarrow{x \mapsto m \wedge x} m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp. \quad (1.6)$$

Поскольку $m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp$ не содержит ненулевых элементов типа $(0, 0)$, то

$$(m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp) \cap \text{End}(A \otimes_k \mathbb{C}) = 0. \quad (1.7)$$

Хорошо известно, что в силу теоремы сравнения этальных когомологий с классическими для любого целого числа $n \geq 1$ имеем канонические изоморфизмы [3, формулы (14), (15)]:

$$(A \otimes_k \bar{k})_n \xrightarrow{\sim} (A \otimes_k \mathbb{C})_n \xrightarrow{\sim} H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})/n, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}/n) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}((A \otimes_k \bar{k})_n, \mathbb{Z}/n) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}((A \otimes_k \mathbb{C})_n, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_1(A \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})/n, \mathbb{Z}/n). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя (1.8), (1.9), мы получим из (1.6), что почти для всех простых чисел l модуль Галуа $\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})^\perp/l$ изоморфен подмодулю

$$(m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp)/l \hookrightarrow (\text{End}_{\mathbb{Z}_l} T_l(A \otimes_k \bar{k}))/l = \text{End}_{\mathbb{F}_l}(A \otimes_k \bar{k})_l.$$

Согласно (1.7) и [3, лемма 4.2] пространство $(m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp)/l$ имеет тривиальное пересечение с пространством $\text{End}(A \otimes_k \bar{k})/l$ почти для всех l . Вариант гипотезы Тэйта для абелевых многообразий над конечнопорожденным расширением поля $\mathbb{Q}$ [3, предложение 3.4] показывает, что почти для всех простых чисел l имеем

$$[\text{End}_{\mathbb{F}_l}(A \otimes_k \bar{k})_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = \text{End}_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(A \otimes_k \bar{k})_l = \text{End}(A)/l,$$

поэтому любой $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -инвариантный элемент из $(m \wedge \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp)/l$ содержится в $\text{End}(A)/l = \text{End}(A \otimes_k \bar{k})/l$ и, следовательно, должен быть нулем. В итоге $[\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})^\perp/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = 0$ почти для всех l . Значит, из соотношения (1.5) следует, что

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = [\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

почти для всех l .

Предположим, наконец, что $\text{rank NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) = 1$.

Обозначим через $C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ полную алгебру Клиффорда пары

$$(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)), \psi_l|_{P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))}),$$

где $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ – ортогональное дополнение к L в $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ относительно формы ψ_l . Следуя [16, п. 3], определим каноническое $\mathbb{Z}_l$ -линейное отображение [17, гл. IX, § 9, п⁰ 1]

$$\varrho: P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))),$$

обладающее свойством

$$\varrho(x)^2 = \psi_l(x, x) \in \mathbb{Z}_l \subset C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))).$$

Хорошо известно, что отображение ϱ инъективное, причем $\varrho(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ является прямым слагаемым свободного $\mathbb{Z}_l$ -модуля $C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ и, следовательно, *насыщенным* подмодулем (другими словами, фактормодуль свободен) [17, гл. IX, § 9, п⁰ 3, теорема 1, следствие 2]. Обозначим через

$$\text{mult}_L: C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_l} C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

гомоморфизм $\mathbb{Z}_l$ -алгебр, который переводит элемент $a \in C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ в эндоморфизм $x \mapsto a \cdot x$. Поскольку $1 \in C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$, то гомоморфизм mult_L инъективен. В частности, $\mathbb{Z}_l$ -алгебры $C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ и $\text{mult}_L(C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))))$ изоморфны [16, п. 3].

Каноническое непрерывное l -адическое представление

$$\rho_l: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l}(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

сохраняет форму $\psi_l|_{P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))}$. Поэтому в силу универсального свойства алгебр Клиффорда существует такое *непрерывное* [16, п. 3] представление $\rho_{l, \text{Cliff}}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l} C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$, что для любого $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ и любого $x \in P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$ имеем

$$\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(\varrho(x)) = \varrho(\rho_l(\sigma)(x)).$$

В частности, отображение ϱ является морфизмом $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей, потому что в силу функториальности рассматриваемых конструкций структура $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуля на $C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ задается представлением $\rho_{l, \text{Cliff}}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_l} C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$.

В обозначениях [4, вариант 4.1.3] имеется изоморфизм левых $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$ -модулей $C^+(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))^\# \xrightarrow{\sim} C(P^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)))$, позволяющий рассмотреть вариант конструкции Куги–Сатаке в терминах полной алгебры Клиффорда вместо ее четной части. Соответствующее абелево многообразие Куги–Сатаке $A^\#$ изогенно квадрату абелева многообразия A , построенного по четной части [4, вариант 4.1.3]. В силу [4, лемма 6.5.1] можно считать, что абелевы многообразия A и $A^\#$ определены над полем k , причем существует изоморфизм модулей Галуа [4, замечание 4.5.2.i]

$$C^+(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(A \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$$

и, следовательно, имеется изоморфизм $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \xrightarrow{\iota_l} H_{\text{ét}}^1(A^\# \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l).$$

Проверим, наконец, что отображение

$$H_{\text{ét}}^1(A^\# \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\text{mult}_L} \text{End}_{\mathbb{Z}_l} H_{\text{ét}}^1(A^\# \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l)$$

является морфизмом $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей. Для этого достаточно проверить, что отображение

$$\text{mult}_L : C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_l} C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

является морфизмом $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей.

Поскольку для всех $a, x \in C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)))$ и любого $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ в силу функториальности рассматриваемых конструкций имеем

$$\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(a \cdot x) = \rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(a) \cdot \rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(x),$$

желаемый результат следует из соотношений

$$\begin{aligned} \text{mult}_L(a)(x) &= a \cdot x, \\ [\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(\text{mult}_L(a)(x)) &= ((\sigma \text{mult}_L)(\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(a)))(\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(x)) \\ &= \rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(a) \cdot \rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(x) = \text{mult}_L(\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(a))(\rho_{l, \text{Cliff}}(\sigma)(x))] \\ &\implies [\sigma \text{mult}_L = \text{mult}_L]. \end{aligned}$$

В итоге конструкция Куги–Сатаке дает последовательность инъективных отображений $\mathbb{Z}_l[\text{Gal}(\bar{k}/k)]$ -модулей

$$\begin{aligned} P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) &\xrightarrow{\varrho} C(P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))) \xrightarrow{\iota_l} H_{\text{ét}}^1(A^\# \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l) \\ &\xrightarrow{\text{mult}_L} \text{End}_{\mathbb{Z}_l} H_{\text{ét}}^1(A^\# \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l). \end{aligned}$$

Поэтому из [16, предложение 3.1] следует, что $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуль $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ полупростой и $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуль $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))/l$ полупростой почти для всех простых чисел l .

Для многообразия V над числовым полем k выполнены условия (A_1) , (B_1) , (B_1^+) из п. 1.5, поэтому для любого простого числа l верны l -адическая гипотеза Тэйта для дивизоров и полупростота модуля Галуа $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ [4, теорема 1.6.1]. В частности, из существования разложения модулей Галуа

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) = \mathbb{Q}_l \cdot L \oplus P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

следует, что для любого конечного расширения полей k'/k имеем

$$[P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k')} = 0. \quad (1.10)$$

Если простое число l не делит индекс δ подгруппы $\text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C}) \oplus \text{NS}(V \otimes_k \mathbb{C})^\perp$ в группе $H^2(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z}(1))$ и порядок конечной группы $H^3(V \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$, то легко видеть, используя алгоритм доказательства теоремы 4.1 из [16], что имеется разложение модулей Галуа

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) = \mathbb{Z}_l \cdot L \oplus P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)). \quad (1.11)$$

В силу (1.10) и предложения 3.2 в [16], примененного к $U_l = E_l = P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$, почти для всех простых чисел l имеем

$$[P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k')} = 0. \quad (1.12)$$

Из (1.1), (1.2) и (1.11) следует, что в рассматриваемом случае (1.12) принимает вид

$$[\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})^\perp/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k')} = 0. \quad (1.13)$$

С другой стороны, в силу (1.5) почти для всех простых чисел l имеется разложение $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l) = \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l \oplus \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})^\perp/l.$$

Поэтому из (1.13) следует, что

$$[H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)]^{\text{Gal}(\bar{k}/k')} = [\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k')}$$

почти для всех простых чисел l . Предложение доказано.

1.7. ЛЕММА. Пусть V – односвязное гладкое проективное многообразие над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Если V удовлетворяет условиям (A_1) , (B_1) , то группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ конечная для всех простых чисел l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для многообразия V и любого простого числа l верны l -адическая гипотеза Тэйта для дивизоров и полупростота модуля Галуа $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ [4, теорема 1.6.1]. Поэтому в силу предложения из п. 1.2 группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ конечная для всех простых чисел l . Лемма доказана.

1.8. ТЕОРЕМА. Пусть $X \rightarrow \text{Spec } A$ – арифметическая модель гладкого проективного гиперкэлерова многообразия V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $b_2(V \otimes_k \mathbb{C}) > 3$. Тогда группы

$$\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)], \quad \text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}, \quad \text{Br}'(X) \quad (1.14)$$

являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{Pic}(V \otimes_k \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})$ и $\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})_{\text{tors}} = 0$, для доказательства конечности группы $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$ достаточно проверить, что группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ является конечной [3, замечание 1.3].

Рассмотрим точную последовательность [3, формула (5)]

$$0 \rightarrow [\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})_l^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l)).$$

Поскольку $\text{char}(k) = 0$, в силу предложения 1.2 каноническое отображение

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l))$$

инъективно почти для всех простых l . Согласно предложению из п. 1.6 группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})_l^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ тривиальна почти для всех l . В итоге лемма из п. 1.7 дает конечность группы $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$. Значит, группа $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$ конечная.

Согласно предложению из п. 1.3 конечность группы $\text{Br}'(X)$ следует из конечности группы $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$. Теорема доказана.

1.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – арифметическая модель гладкого проективного гиперкэлерова многообразия V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, причем $V \otimes_k \mathbb{C} = \operatorname{Hilb}^r(S)$ для некоторой проективной КЗ-поверхности S или $V \otimes_k \mathbb{C} = K_r$ – обобщенное многообразие Куммера размерности $2r$, ассоциированное с комплексной абелевой поверхностью J . Тогда группы (1.14) являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $b_2(\operatorname{Hilb}^r(S)) = 23$, $b_2(K_r) = 7$ (см. [2, п. 1.4], [4, п. 3.1]). Следствие доказано.

1.10. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – арифметическая модель произведения $V = \prod_{i=1}^n V_i$ гладких проективных гиперкэлеровых многообразий V_i над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, причем (для любого i) имеем $b_2(V_i \otimes_k \mathbb{C}) > 3$. Тогда группы (1.14) являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $V \otimes_k \bar{k}$ – односвязное многообразие, так как многообразия $V_i \otimes_k \bar{k}$ односвязны. Значит,

$$\operatorname{Pic}(V \otimes_k \bar{k}) = \operatorname{NS}(V \otimes_k \bar{k}), \quad \operatorname{NS}(V \otimes_k \bar{k})_{\operatorname{tors}} = 0.$$

Поэтому для доказательства конечности группы $\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \rightarrow \operatorname{Br}'(V)]$ достаточно проверить, что группа $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ является конечной [3, замечание 1.3] (и тогда группа $\operatorname{Br}'(X)$ конечная в силу предложения из п. 1.3).

Согласно следствию из п. 1.9 группа $\operatorname{Br}'(V_i \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечная. Остается заметить, что образ канонического отображения

$$\prod_i \operatorname{Br}'(V_i \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$$

имеет конечный индекс в группе $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ [18, теорема А, следствие 3.2, (i)]. Следствие доказано.

1.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – арифметическая модель канонически поляризованной поверхности V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, причем $h^{2,0}(V \otimes_k \mathbb{C}) = (K_{V \otimes_k \mathbb{C}}^2) = 1$. Тогда группы (1.14) являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каноническая модель поверхности V является гладким полным пересечением двух секстиков во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3)$ [19, теорема 1.7], [20, теорема 1], и выполнены условия (A_1) и (B_1^+) [4, п. 3.5]. Кроме того, поверхность $V \otimes_k \mathbb{C}$ односвязная [19, теорема 2.2]. С другой стороны, поскольку $\operatorname{char}(k) = 0$, в силу предложения из п. 1.2 каноническое отображение

$$H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{NS}(V \otimes_k \bar{k})/l) \rightarrow H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mu_l))$$

инъективно почти для всех простых l . В силу предложения из п. 1.6 группа $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})_l^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ тривиальна почти для всех l , поэтому лемма из п. 1.7 обеспечивает конечность группы $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ и, следовательно, группы $\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \rightarrow \operatorname{Br}'(V)]$, $\operatorname{Br}'(X)$ конечные. Предложение доказано.

1.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – арифметическая модель многообразия Фано V прямых на гладкой 4-мерной кубике над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Тогда группы (1.14) являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $V \otimes_k \mathbb{C}$ является проективной деформацией 4-мерного многообразия $\operatorname{Hilb}^2(S)$, где S – некоторая КЗ-поверхность степени 14 в $\mathbb{P}^8$; более того, любая проективная достаточно общая деформация многообразия $\operatorname{Hilb}^2(S)$ является многообразием Фано некоторой кубики [21, предложение 2]. В силу теоремы из п. 1.8 группы (1.14) конечные. Предложение доказано.

1.13. ТЕОРЕМА. Пусть $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – арифметическая модель односвязного многообразия Калаби–Яо V над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k: \mathbb{Q}] < \infty$. Тогда группы (1.14) являются конечными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению многообразие Калаби–Яо размерности d – это гладкое проективное многообразие с тривиальным каноническим классом и нулевыми числами Ходжа $h^{i,0}$ для $0 < i < d$. По условию теоремы многообразие V односвязное.

Если $\dim V = 2$, то V является КЗ-поверхностью; в этом случае группы $\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \rightarrow \operatorname{Br}'(V)]$ и $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечные в силу теоремы Скоробогатова–Зархина [3, теорема 1.2].

В дальнейшем мы считаем, что V – односвязное многообразие Калаби–Яо размерности больше 2. В этом случае $H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и группа $\operatorname{NS}(V \otimes_k \bar{k})$ не имеет кручения. Поэтому группа $\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Im}[\operatorname{Br}(k) \rightarrow \operatorname{Br}'(V)]$ конечная [22, лемма 1.3]. Отсюда следует, что группы $\operatorname{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$ и $\operatorname{Br}'(X)$ конечные. Теорема доказана.

§ 2. Устранение условия полупростоты l -адического представления группы Галуа

2.1. Следующая теорема является модификацией [3, предложение 2.5], [22, предложение 4.1]. Новизна заключается в устранении условия полупростоты непрерывного $\operatorname{Gal}(k^s/k)$ -модуля $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1))$, о котором идет речь в предложении из п. 1.2.

2.2. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное геометрически целое многообразие над полем k . Предположим, что для многообразия V и простого числа $l \neq \operatorname{char}(k)$ верна l -адическая гипотеза Тэйта о дивизорах: существует такое конечное расширение k'/k , $k' \subset k^s$, что группа Галуа $\operatorname{Gal}(k^s/k')$ действует тривиально на $\operatorname{NS}(V \otimes_k k^s)$ и

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1))^{\operatorname{Gal}(k^s/k')} = \operatorname{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Тогда группа $\operatorname{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\operatorname{Gal}(k^s/k)}(l)$ конечная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\operatorname{Gal}(k^s/k)$ -инвариантный класс гиперплоского сечения $L \in \operatorname{NS}(V \otimes_k k^s)^{\operatorname{Gal}(k^s/k)}$. Предположим сначала, что V – поверхность. В силу теоремы об индексе пересечения для поверхностей над полем произвольной характеристики [23, лекция 18] билинейная форма $x \times y \mapsto (-1) \deg(x \smile y)$ на $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1)) \cap [\operatorname{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes \mathbb{Q}]$ положительно определена.

Используя слабую теорему Лефшеца о гладких гиперплоских сечениях и теорему об индексе для поверхностей, легко проверим, что для любого гладкого проективного d -мерного многообразия V над полем k произвольной характеристики $\text{char}(k) \neq l$ билинейная форма $x \times y \mapsto (-1) \deg(x \smile y \smile L^{d-2})$ на $P_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1)) \cap [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes \mathbb{Q}]$ положительно определена [24, предложение 3.7], [25, гл. V, п. 5.3.2.3]. Следовательно, ядро симметрического спаривания теории пересечений

$$\psi_0: \text{NS}(V \otimes_k k^s) \times \text{NS}(V \otimes_k k^s) \xrightarrow{x \times y \mapsto \deg(x \cdot y \cdot L^{d-2})} \mathbb{Z}$$

совпадает с конечной группой $\text{NS}(V \otimes_k k^s)_{\text{tors}}$, поэтому спаривание

$$\psi_l: [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l] \times [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l] \xrightarrow{x \times y \mapsto \deg(x \cdot y \cdot L^{d-2})} \mathbb{Q}_l$$

невырождено.

Дальнейшие вычисления в основном повторяют этапы доказательства предложения 2.5 в [3].

Симметрическая билинейная форма на $\text{NS}(V \otimes_k k^s)/\text{tors}$, индуцированная формой ψ_0 , невырождена и имеет дискриминант $\delta \neq 0$. Рассмотрим $\text{Gal}(k^s/k)$ -инвариантную симметрическую $\mathbb{Z}_l$ -билинейную форму

$$\Psi_l: H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1)) \times H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1)) \xrightarrow{x \times y \mapsto \deg(x \smile y \smile L^{d-2})} \mathbb{Z}_l.$$

Хорошо известная совместимость класса когомологий пересечения алгебраических циклов и $\smile$ -произведения их классов когомологий [1, гл. VI, предложение 9.5, § 10] показывает, что ограничение формы Ψ_l на $\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ совпадает с формой, индуцированной формой ψ_0 . Сильная теорема Лефшеца и двойственность Пуанкаре дают равенство $\text{Ker}(\Psi_l) = H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1))_{\text{tors}}$.

Положим $H = H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1))/\text{tors}$, и пусть ψ – $\text{Gal}(k^s/k)$ -инвариантная $\mathbb{Z}_l$ -билинейная форма на H , индуцированная формой Ψ_l . Пусть

$$N \stackrel{\text{def}}{=} [\text{NS}(V \otimes_k k^s)/\text{tors}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \hookrightarrow H.$$

Очевидно, что N – свободный $\mathbb{Z}_l$ -подмодуль Галуа в H , причем дискриминант ограничения ψ на N равен δ . Обозначим через $N^\perp$ ортогональное дополнение к N в H относительно формы ψ ; очевидно, что $N^\perp$ является $\text{Gal}(k^s/k)$ -подмодулем в H . Из [3, лемма 2.1] (где $\Lambda = \mathbb{Z}_l$) следует, что

$$N \cap N^\perp = 0, \quad \delta^2 H \subset N \oplus N^\perp.$$

Пусть $\widetilde{M}$ – прообраз $N^\perp$ в $H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1))$. Очевидно, что $\widetilde{M}$ – подмодуль Галуа, причем $\widetilde{M} \cap [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l]$ является группой кручения в $\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ и, следовательно, совпадает с группой $\text{NS}(V \otimes_k k^s)(l)$. Ясно, что

$$\delta^2 H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1)) \subset [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l] + \widetilde{M}.$$

Положим $n = \text{Card}(\text{NS}(V \otimes_k k^s)_{\text{tors}})$, $M = n\widetilde{M}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} M \cap [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l] &= 0, \\ n\delta^2 H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1)) &\subset [\text{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l] \oplus M. \end{aligned}$$

В частности, $[\mathrm{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l] \oplus M$ является $\mathrm{Gal}(k^s/k')$ -подмодулем конечного индекса в $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Z}_l(1))$. Следовательно, существует разложение $\mathrm{Gal}(k^s/k')$ -модулей

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1)) = [\mathrm{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l] \oplus [M \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l].$$

Очевидно, что каноническая точная последовательность $\mathrm{Gal}(k^s/k')$ -модулей [3, формула (3)]

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \rightarrow H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1)) \rightarrow T_l(\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \rightarrow 0$$

определяет изоморфизм $\mathrm{Gal}(k^s/k')$ -модулей

$$M \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} T_l(\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l,$$

так что имеется изоморфизм $\mathrm{Gal}(k^s/k')$ -модулей

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1)) \xrightarrow{\sim} [\mathrm{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l] \oplus [T_l(\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l].$$

По условию теоремы имеем равенство

$$H_{\mathrm{\acute{e}t}}^2(V \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(k^s/k')} = \mathrm{NS}(V \otimes_k k^s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l.$$

Следовательно,

$$[T_l(\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(k^s/k')} = 0$$

и группа $\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k')}(l)$ конечная. Из существования канонического включения $\mathrm{Gal}(k^s/k') \hookrightarrow \mathrm{Gal}(k^s/k)$ следует, что группа $\mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}(l)$ конечная. Теорема доказана.

§ 3. Замечание и примеры

3.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно, что спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$H^p(\mathrm{Gal}(k^s/k), H_{\mathrm{\acute{e}t}}^q(V \otimes_k k^s, G_m)) \implies H_{\mathrm{\acute{e}t}}^{p+q}(V, G_m)$$

дает точную последовательность [1, приложение В]

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$; очевидно, что эта последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Pic}(V) &\rightarrow \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)} \\ &\rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}] \\ &\rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^s)) \rightarrow H^3(\mathrm{Gal}(k^s/k), G_m) \end{aligned}$$

и определяет инъекции

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}'(V) / \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)] &\hookrightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}, \\ \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes_k k^s)] / \mathrm{Im}[\mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)] &\hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(k^s/k), \mathrm{Pic}(V \otimes_k k^s)). \end{aligned}$$

Если k – числовое поле, то $H^3(\text{Gal}(\bar{k}/k), G_m) = 0$ по теореме Тэйта [26, гл. VII, § 11, п. 11.4]; кроме того, для любого простого числа p группа $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ бесконечная [27, лемма 1.1] (связь этой леммы с глобальной теорией полей классов и аналитической теорией чисел хорошо видна на следующем примере:

$$H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

где

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q}) \simeq \prod_l \mathbb{Z}_l^\times$$

по теореме Кронекера–Вебера [28, гл. XIII, § 4, следствие 2] и

$$\mathbb{Z}_l^\times \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(l-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_l, & \text{если } l \neq 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, & \text{если } l = 2, \end{cases}$$

в силу хорошо известных фактов о строении группы l -адических единиц [29, гл. II, п. 3.1–3.2]; бесконечность группы $H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ следует из теоремы Дирихле [29, гл. VI] о бесконечности множества простых чисел l , для которых $l \equiv 1 \pmod{p}$.

Из этих фактов и равенства $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = 0$ легко следует, что если для дивизоров на многообразии V верна l -адическая гипотеза Тэйта, $H^1(V \otimes_k \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes_k \bar{k}}) = 0$ и группа Галуа $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ тривиально действует на $\text{Pic}(V \otimes_k \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes_k \bar{k})$, то группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ конечная в силу теоремы из п. 2.2, в то же время

$$\begin{aligned} \text{группа } \text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)](l) \text{ конечная} \\ \iff \text{группа } \text{NS}(V \otimes_k \bar{k}) \text{ не имеет } l\text{-кручения.} \end{aligned}$$

Используя алгоритм доказательства теоремы 1.1 из [5], легко проверим, что если группа $\text{NS}(V \otimes_k \bar{k})$ не имеет l -кручения, то в рассматриваемом случае группа $\text{Br}'(X)(l)$ конечная.

3.2. ТЕОРЕМА. *Предположим, что для односвязной проективной гладкой поверхности V над числовым полем k , $[k:\mathbb{Q}] < \infty$, существует доминантное k -рациональное отображение $C_1 \times_k C_2 \xrightarrow{\Phi} V$ произведения двух кривых C_1, C_2 над полем k . Тогда группы $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$, $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ и $\text{Br}'(X)$ конечные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теорем Фалтингса [30] и Тэйта [31, теоремы 3, 4] l -адическая гипотеза Тэйта верна для дивизоров на $C_1 \times_k C_2$ (хотя в работе Тэйта речь идет о дивизорах на произведении кривых и абелевых многообразий над конечными полями, аргументы остаются справедливыми над числовыми полями в силу результатов Фалтингса). Имеется коммутативная диаграмма k -рациональных отображений

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_k C_2 & \xrightarrow{\Phi} & V \\ & \searrow \sigma \quad \nearrow \Psi & \\ & W & \end{array}$$

в которой σ является бирациональным морфизмом поверхностей, Ψ – морфизм конечной степени. Поэтому гипотеза Тэйта о дивизорах верна для W , а сюръективный морфизм Ψ определяет вложение модулей Галуа $\Psi^*: H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)) \hookrightarrow H_{\text{ét}}^2(W \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$, причем $\Psi_* \Psi^* = \deg \Psi$ и, следовательно, l -адическая гипотеза Тэйта о дивизорах верна для многообразия V . Значит, для любого простого числа l группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ конечная в силу теоремы из п. 2.2.

В силу предложения из п. 1.3, замечания из п. 3.1 и односвязности поверхности $V \otimes_k \bar{k}$ достаточно проверить, что почти для всех простых чисел l группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ тривиальная.

Существует такая приведенная кривая $D \hookrightarrow V$, что морфизм

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi|_{\Psi^{-1}(V \setminus D)}: \Psi^{-1}(V \setminus D) \rightarrow V \setminus D$$

является *конечным* и *плоским*.

Композиция отображений ограничения и коограничения

$$H_{\text{ét}}^p([V \setminus D] \otimes_k \bar{k}, G_m) \xrightarrow{\text{Res}} H_{\text{ét}}^p([\Psi^{-1}(V \setminus D)] \otimes_k \bar{k}, G_m) \xrightarrow{\text{Cores}} H_{\text{ét}}^p([V \setminus D] \otimes_k \bar{k}, G_m)$$

является умножением на степень морфизма ψ [32, начало доказательства леммы 1.4]. Поэтому почти для всех простых чисел l имеется инъективное каноническое отображение

$$\text{Br}'([V \setminus D] \otimes_k \bar{k})(l) \xrightarrow{\psi^*} \text{Br}'([\Psi^{-1}(V \setminus D)] \otimes_k \bar{k})(l). \quad (3.1)$$

Хорошо известно, что для гладкой проективной кривой C_i группа $\text{Br}'(C_i \otimes_k \bar{k})$ тривиальная [1, гл. III, § 2, пример 2.22(d)]. С другой стороны, образ канонического отображения

$$\text{Br}'(C_1 \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \times \text{Br}'(C_2 \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \text{Br}'([C_1 \times_k C_2] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

имеет конечный индекс в группе $\text{Br}'([C_1 \times_k C_2] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ [18, теорема А, следствие 3.2, (i)]. Значит, группа $\text{Br}'([C_1 \times_k C_2] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечная. Ясно, что каноническое отображение $\sigma^*: \text{Br}'([C_1 \times_k C_2] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow \text{Br}'(W \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ биективно, так как группа Брауэра является бирациональным инвариантом поверхности $W \otimes_k \bar{k}$ [33, гл. III, § 7, следствие (7.2)]. Поэтому группа $\text{Br}'(W \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечная.

Имеется точная последовательность $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей [33, гл. III, § 6, следствие (6.2)], [32, доказательство теоремы 6.2]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{ét}}^2([V \setminus \text{Sing}(D)] \otimes_k \bar{k}, G_m) &\rightarrow H_{\text{ét}}^2([V \setminus D] \otimes_k \bar{k}, G_m) \\ &\rightarrow H_{\text{ét}}^1([D \setminus \text{Sing}(D)] \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку $\text{codim}_V(\text{Sing}(D)) \geq 2$, по теореме чистоты для группы Брауэра [33, гл. III, § 6, теорема (6.1), следствие (6.2)] существует канонический изоморфизм

$$H_{\text{ét}}^2(V \otimes_k \bar{k}, G_m) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2([V \setminus \text{Sing}(D)] \otimes_k \bar{k}, G_m).$$

Следовательно, из (3.2) получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &\rightarrow \text{Br}'([V \setminus D] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow H_{\text{ét}}^1([D \setminus \text{Sing}(D)] \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}, \end{aligned}$$

в которой группа $H_{\text{ét}}^1([D \setminus \text{Sing}(D)] \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ конечная [32, предложение 6.1]. Отсюда следует, что группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ содержится в группе $\text{Br}'([V \setminus D] \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ в качестве подгруппы конечного индекса.

Аналогично конечная группа $\text{Br}'(W \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ содержится в $\text{Br}'(\Psi^{-1}(V \setminus D) \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ в качестве подгруппы конечного индекса. Поэтому последняя группа конечная. Из (3.1) следует, что группа $\text{Br}'([V \setminus D] \otimes_k \bar{k})(l)$ тривиальная почти для всех l . Поэтому группа $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ тривиальная почти для всех l . Теорема доказана.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. Для любой гладкой проективной диагональной поверхности $V \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ над числовым полем k , $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, группы $\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]$, $\text{Br}'(V \otimes_k \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ и $\text{Br}'(X)$ конечные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению гладкая диагональная поверхность задается в однородных координатах $(x_0: x_1: x_2: x_3)$ на $\mathbb{P}^3$ уравнением вида

$$a_0x_0^d + a_1x_1^d + a_2x_2^d + a_3x_3^d = 0,$$

где $a_0a_1a_2a_3 \neq 0$, поэтому она изоморфна над полем $\bar{k}$ поверхности Ферма

$$F = \{x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0\}$$

степени d . Фиксируем такое $\varepsilon \in \bar{k}$, что $\varepsilon^d = -1$. Пусть $C = \{x_0^d + x_1^d + x_2^d = 0\}$ – кривая Ферма степени d и $C' = \{y_0^d + y_1^d + y_2^d = 0\}$ – ее копия. Существует рациональное отображение конечной степени [34, лемма 1.1]

$$\Phi: [C \times_k C] \otimes_k k(\varepsilon) \dashrightarrow \frac{(x_0: x_1: x_2) \times (y_0: y_1: y_2) \mapsto (x_0y_2: x_1y_2: \varepsilon x_2y_0: \varepsilon x_2y_1)}{F \otimes_k k(\varepsilon)}.$$

Рассматривая в случае необходимости конечное алгебраическое расширение поля k , мы можем считать, что $\varepsilon \in k$, так что рациональное отображение Φ определено над k . Остается применить теорему из п. 3.2. Следствие доказано.

3.4. Пусть K – вещественное квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых алгебраических чисел поля K , $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ – верхняя полуплоскость. Модулярная группа Гильберта $G = \text{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ действует на $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'} \right),$$

где $a \mapsto a'$ обозначает (вещественное) сопряжение в поле K над $\mathbb{Q}$.

В дальнейшем через Γ будет обозначаться модулярная группа или любая ее конгруэнц-подгруппа. Пространство орбит $[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]/\Gamma$ имеет конечный объем, но не компактно. Компактификация Сатаке этого пространства является нормальной проективной поверхностью. Минимальное разрешение особенностей этой поверхности дает модулярную поверхность Гильберта W .

Хорошо известно, что W определена над полем рациональных чисел, $W = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, где V – односвязная [35] проективная поверхность, которая удовлетворяет гипотезе Тэйта о дивизорах (см. [36, § 1, следствие D], [37]–[39]) и является компактификацией схемы модулей абелевых поверхностей с главной поляризацией, некоторыми дополнительными структурами и вещественными умножениями на элементы кольца $\mathcal{O}_K$ [40].

Если, например, p – простое число, $p \equiv 1 \pmod{4}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$, то поверхность V является:

- 1) рациональной для $p = 5, 13, 17$;
- 2) раздутием эллиптической K3-поверхности для $p = 29, 37, 41$;
- 3) эллиптической поверхностью с геометрическим родом $h^{2,0} = 2$ и размерностью Кодайры $\kappa = 1$ для $p = 53, 61, 73$;
- 4) поверхностью основного типа ($\kappa = 2$) для $p \geq 89$ [41, теорема III.1; гл. II, формула (15)], [42].

3.5. ТЕОРЕМА. *Для модулярной поверхности Гильберта V , ее арифметической модели $X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ и для любого простого числа l группы $\mathrm{Br}'(V \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(l)$ и $\mathrm{Br}'(X)(l)$ конечны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания из п. 3.1 это следует из справедливости l -адической гипотезы Тэйта для дивизоров на V и односвязности поверхности V .

Список литературы

1. Дж. Милн, *Этальные кохомологии*, Мир, М., 1983, 392 с.; пер. с англ.: J. S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980, xiii+323 pp.
2. A. Beauville, “Holomorphic symplectic geometry: a problem list”, *Complex and differential geometry* (Hannover, 2009), Springer Proc. Math., **8**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011, 49–64.
3. A. N. Skorobogatov, Yu. G. Zarhin, “A finiteness theorem for the Brauer group of Abelian varieties and K3 surfaces”, *J. Algebraic Geom.*, **17**:3 (2008), 481–502.
4. Y. André, “On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties”, *Math. Ann.*, **305** (1996), 205–248.
5. С. Г. Танкеев, “О конечности группы Брауэра арифметической схемы”, *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 136–149; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the finiteness of the Brauer group of an arithmetic scheme”, *Math. Notes*, **95**:1 (2014), 121–132.
6. A. Beauville, “Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle”, *J. Differential Geom.*, **18** (1983), 755–782.
7. K. O’Grady, “Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3”, *J. Reine Angew. Math.*, **512** (1999), 49–117.
8. A. Rapagnetta, “On the Beauville form of the known irreducible symplectic varieties”, *Math. Ann.*, **340**:1 (2008), 77–95.
9. K. O’Grady, “A new six-dimensional irreducible symplectic variety”, *J. Algebraic Geom.*, **12**:3 (2003), 435–505.
10. B. B. Gordon, “A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties”, Appendix in: J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, Second edition, CRM Monograph Series, **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 297–356.
11. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с фр.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
12. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989, 496 с.
13. P. Deligne, J. Milne, “Tannakian categories”, *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math., **900**, Springer-Verlag, New York, 1982, 101–228.

14. J.P. Jouanolou, “Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern”, Exposé VII. SGA 5, *Cohomologie l -adique et fonctions L* , Lecture Notes in Math., **589**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977, 282–350.
15. P. Deligne, “La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$ ”, *Invent. Math.*, **15** (1972), 206–226.
16. A. N. Skorobogatov, Yu. G. Zarhin, *A finiteness theorem for the Brauer group of $K3$ surfaces in odd characteristic*, arXiv: 1403.0849v1.
17. Н. Бурбаки, *Алгебра: модули, кольца, формы*, Наука, М., 1966, 555 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Algèbre*, Livre II, Hermann, Paris, 1959.
18. A. N. Skorobogatov, Yu. G. Zarhin, “The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties”, *J. Eur. Math. Soc.*, **16** (2014), 749–768.
19. F. Catanese, “The moduli and global period mapping of surfaces with $K^2 = p_g = 1$: a counterexample to the global Torelli problem”, *Compositio Math.*, **41** (1980), 401–414.
20. A. Todorov, “Surfaces of general type with $p_g = 1$ and $(K, K) = 1$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **13**:1 (1980), 1–21.
21. A. Beauville, R. Donagi, “La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **301**:14 (1985), 703–706.
22. J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, “Good reduction of the Brauer–Manin obstruction”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365** (2013), 579–590.
23. Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968, 236 с.; пер. с англ.: D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1966, xi+200 pp.
24. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
25. Y. André, “Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)”, *Panoramas et Synthèses*, **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
26. Дж. Касселс, А. Фрёлих (ред.), *Алгебраическая теория чисел*, Мир, М., 1969, 483 с.; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, A. Fröhlich (editors), *Algebraic number theory*, Proc. Internat. Conf., Brighton; Academic Press, London; Thompson, Washington, DC, 1967, xviii+366 pp.
27. С. Г. Танкеев, “О группе Брауэра арифметической схемы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 155–186; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the Brauer group of arithmetic scheme”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 357–388.
28. А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972, 408 с.; пер. с англ.: A. Weil, *Basic number theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967, xviii+294 pp.
29. Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972, 184 с.; пер. с фр.: J.-P. Serre, *Cours d’arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970, 188 pp.
30. G. Faltings, “Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern”, *Invent. Math.*, **73**:3 (1983), 349–366.
31. Дж. Тэйт, “Эндоморфизмы абелевых многообразий над конечными полями”, *Математика. Сб. пер.*, **12**:6 (1968), 31–40; пер. с англ.: J. Tate, “Endomorphisms of abelian varieties over finite fields”, *Invent. Math.*, **2**:2 (1966), 134–144.
32. J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, “Descente galoisienne sur le groupe de Brauer”, *J. Reine Angew. Math.*, **682** (2013), 141–165.
33. A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer. I, II, III”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 46–188.
34. T. Shioda, T. Katsura, “On Fermat varieties”, *Tohoku Math. J.*, **31** (1979), 97–115.
35. О. В. Шварцман, “Односвязность факторпространства модулярной группы Гильберта”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:2 (1974), 99–100; англ. пер.: O. V. Shvartsman, “Simple-connectivity of a factor-space of the modular Hilbert group”, *Funct. Anal. Appl.*, **8**:2 (1974), 188–189.

36. V. K. Murty, D. Ramakrishnan, “Period relations and the Tate conjecture for Hilbert modular surfaces”, *Invent. Math.*, **89** (1987), 319–345.
37. C. Klingenberg, “Die Tate Vermutungen für Hilbert–Blumenthal Flächen”, *Invent. Math.*, **89** (1987), 291–318.
38. G. Harder, R. P. Langlands, M. Rapoport, “Algebraische Zyklen auf Hilbert–Blumenthal-Flächen”, *J. Reine Angew. Math.*, **366** (1986), 53–120.
39. T. Oda, “Periods of Hilbert modular surfaces”, *Progress in Math.*, **19**, Birkhäuser, Boston, MA, 1982, xvi+123 pp.
40. F. Hirzebruch, G. van der Geer, “Lectures on Hilbert modular surfaces”, *Sem. Math. Sup.*, **77**, Presses de l’Université de Montréal, Montréal, QC, 1981, 193 pp.
41. F. Hirzebruch, A. Van de Ven, “Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces”, *Invent. Math.*, **23** (1974), 1–29.
42. F. Hirzebruch, D. Zagier, “Classification of Hilbert modular surfaces”, *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 43–77.

СЕРГЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ ТАНКЕЕВ
(SERGEY G. TANKEEV)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило в редакцию
14.03.2014
24.11.2014