Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, Собственные колебания густых каскадных соединений со “сверхтяжелыми” концентрированными массами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 3, 41–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:45:58

УДК 517.956.225+517.956.8

Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин

Собственные колебания густых каскадных соединений со “сверхтяжелыми” концентрированными массами

Изучаются асимптотики по малому параметру собственных элементов краевой задачи для оператора Лапласа в густом каскадном соединении с концентрированными массами. Существует пять качественно различных случаев в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций при стремлении малого параметра к нулю (“легкие”, “промежуточные”, “слегка тяжелые”, “умеренно тяжелые” и “сверхтяжелые” концентрированные массы). Изучается влияние концентрированных масс на асимптотики собственных колебаний в последних двух случаях. Строятся ведущие члены асимптотических разложений как для собственных функций, так и для собственных значений, которые строго обосновываются при помощи соответствующих асимптотических оценок. Более того, найдены новые типы высокочастотных собственных колебаний.

Библиография: 41 наименование.

Ключевые слова: густое каскадное соединение, концентрированные массы, усреднение, согласование асимптотических разложений, собственные функции, собственные значения, задачи с малым параметром.

DOI: 10.4213/im8238

§ 1. Введение

Настоящей работой мы продолжаем изучение спектральных задач в областях с концентрированными массами для нового типа густых соединений, а именно густых каскадных соединений, начатое нами в статьях [1]–[6]. Густые каскадные соединения являются моделями во многих областях как естественных, так и прикладных наук, например нанотехнологий, микротехники, современной инженерии (микрорадиаторы), многих физических и биологических систем (см. [1]–[8]).

Колебательные системы с концентрированными массами, имеющими диаметр порядка $O(\varepsilon)$, изучаются достаточно давно. Экспериментально установлено, что наличие масс ведет к изменению главных частот колебаний и локализации таких колебаний в окрестности концентрированных масс. Новый импульс исследованиям был дан после работы [9], в которой математически был обоснован эффект локальных колебаний. Затем появилось большое количество работ (см. [1]–[5], где можно найти широко представленную библиографию по задачам с периодическими концентрированными массами, непериодически расположенные концентрированные массы изучались в [10], [11]).

Работа второго автора частично поддержана РФФИ (грант № 15-01-07920).

В работах [1], [2] мы изучали случаи $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha = 1$. Случаи “тяжелых” концентрированных масс $\alpha \in (1, +\infty)$ мы начали изучать в [3]–[5], где были рассмотрены случаи “слегка тяжелых” концентрированных масс ($\alpha \in (1, 2)$) и был обнаружен новый эффект *объемной кожи* (spatial skin-effect) для собственных колебаний (рис. 1).

Рис. 1. Исходные и усредненные собственные колебания с эффектом объемной кожи

Как нам известно, впервые эффект кожи для систем с концентрированными массами около границы был обнаружен в [12].

В настоящей работе мы продолжаем изучать эффект объемной кожи в случае “умеренно тяжелых” ($\alpha = 2$) и “сверхтяжелых” ($\alpha > 2$) концентрированных масс.

Известно, что для спектральных задач с концентрированными массами существуют другие последовательности сходящихся собственных значений $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$, $n(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; соответствующие колебания называются *высокочастотными* (см., например, [9]–[17]). Сходимость собственных значений $\lambda_n(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого фиксированного n называется *низкочастотной сходимостью* спектра.

В работе [2] мы также доказали низко- и высокочастотную сходимость спектра задачи (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, построили и обосновали ведущие члены асимптотического разложения как для собственных значений, так и для собственных функций в случаях $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha = 1$. Более того, как в работе [16], мы нашли *псевдовибрации* в задаче (1.1), которые имеют быстроосциллирующий характер и при которых различные присоединенные прямоугольники в соединении колеблются независимо, т. е. со своей собственной частотой.

Здесь мы покажем, что существует новый класс высокочастотных колебаний в задаче (1.1), так называемые *высокочастотные ячеичные колебания*, которые возникают для каждого типа концентрированных масс, упомянутых выше.

Статья организована следующим образом. После постановки задачи мы описываем и сравниваем основные результаты. В § 2 мы строим ведущие члены асимптотики как для собственных функций, так и для собственных значений в случае $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. В § 3 мы обосновываем построенную асимптотику и доказываем соответствующие асимптотические оценки. Аналогичные исследования проведены в § 4 для случая $\alpha \in (m, m + 1)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. В § 5 мы

изучаем высокочастотные ячеичные колебания задачи (1.1) (кратко результаты изложены в заметке [6]).

1.1. Постановка задачи. Пусть a, b_1, b_2, h_1, h_2 – положительные действительные числа такие, что

$$0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{2}, \quad 0 < b_1 - \frac{h_1}{2}, \quad b_1 + \frac{h_1}{2} < b_2 - \frac{h_1}{2}, \quad b_2 + \frac{h_1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}.$$

Эти неравенства означают, что интервалы

$$\left(b_1 - \frac{h_1}{2}, b_1 + \frac{h_1}{2}\right), \quad \left(b_2 - \frac{h_1}{2}, b_2 + \frac{h_1}{2}\right), \quad \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2}\right), \\ \left(1 - b_2 - \frac{h_1}{2}, 1 - b_2 + \frac{h_1}{2}\right), \quad \left(1 - b_1 - \frac{h_1}{2}, 1 - b_1 + \frac{h_1}{2}\right)$$

содержатся в $(0, 1)$ и не пересекаются.

Пусть Ω_0 – область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\Omega_0$ и $\Omega_0 \subset \{x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$. Пусть граница $\partial\Omega_0$ содержит отрезок $I_0 = \{x : x_1 \in [0, a], x_2 = 0\}$. Мы также предполагаем, что существует положительное число δ_0 такое, что $\Omega_0 \cap \{x : 0 < x_2 < \delta_0\} = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, \delta_0)\}$.

Разобьем отрезок $I_0 := [0, a]$ на N равных сегментов $[\varepsilon j, \varepsilon(j+1)]$, $j = 0, \dots, N-1$. Здесь N – большое натуральное число, поэтому величина $\varepsilon = a/N$ – малый дискретный параметр.

Рис. 2. Густое каскадное соединение Ω_ε

Модельное *густое каскадное соединение* Ω_ε (рис. 2) состоит из тела соединения Ω_0 и большого количества тонких прямоугольников

$$G_j^{(1)}(d_k, \varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \varepsilon(j + d_k)| < \frac{\varepsilon h_1}{2}, x_2 \in (-\varepsilon l_1, 0] \right\}, \quad k = 1, \dots, 4,$$

$$G_j^{(2)}(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| x_1 - \varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{\varepsilon h_2}{2}, x_2 \in (-l_2, 0] \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $d_1 = b_1$, $d_2 = b_2$, $d_3 = 1 - b_2$, $d_4 = 1 - b_1$. Итак, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}$, где

$$G_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} \left(\bigcup_{k=1}^4 G_j^{(1)}(d_k, \varepsilon) \right), \quad G_\varepsilon^{(2)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j^{(2)}(\varepsilon);$$

число тонких прямоугольников равно $5N$, и они разделяются на два чередующихся класса $G_\varepsilon^{(1)}$ и $G_\varepsilon^{(2)}$ в зависимости от их длины. Длина прямоугольников из первого класса равна εl_1 , а из второго класса равна l_2 . Таким образом, имеется большой перепад длин прямоугольников при переходе из одного класса в другой. Кроме того, параметр ε характеризует расстояние между соседними тонкими прямоугольниками и их толщину, которая равна εh_1 для прямоугольников из первого класса и εh_2 для прямоугольников из второго класса. Тонкие прямоугольники из каждого класса ε -периодически чередуются вдоль отрезка $I_0 = \{x: x_1 \in [0, a], x_2 = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Количество отростков на ячейке периодичности (пять) выбрано не случайно. Для избежания технических сложностей в нахождении невязок рассматривается симметричная ячейка, которая определяется одним длинным отростком, а малых отростков, соответственно, как минимум может быть два (для симметрии ячейки), но тогда не заметно отсутствие взаимодействия между малыми отростками. Поэтому выбрано по два отростка с каждой стороны от длинного отростка. В такой конфигурации очень хорошо видны все эффекты, о которых упоминалось выше.

В Ω_ε рассматривается следующая спектральная задача:

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(\varepsilon, x) &= \lambda(\varepsilon) \rho_\varepsilon(x) u(\varepsilon, x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u(\varepsilon, x) &= 0, & x \in \Gamma_1, \\ -\partial_\nu u(\varepsilon, x) &= 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_1, \\ [u]_{|x_2=0} &= [\partial_{x_2} u]_{|x_2=0} = 0, & x_1 \in Q_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – производная по направлению единичной внешней нормали; квадратные скобки означают скачок соответствующего выражения; Γ_1 – кривая на $\partial\Omega_0$, находящаяся в $\{x: x_2 > \delta_0\}$; плотность имеет вид

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ \varepsilon^{-\alpha}, & x \in G_\varepsilon^{(1)}; \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр (если $\alpha > 0$, то в малых прямоугольниках $G_\varepsilon^{(1)}$ из первого класса присутствуют концентрированные массы); $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^{(1)} \cup Q_\varepsilon^{(2)}$, $Q_\varepsilon^{(i)} = G_\varepsilon^{(i)} \cap \{x: x_2 = 0\}$, $i = 1, 2$.

Очевидно, что для любого фиксированного ε существует последовательность собственных значений

$$0 < \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_n(\varepsilon) \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

задачи (1.1). Соответствующие собственные функции $\{u_n(\varepsilon, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$, принадлежащие $\mathcal{H}_\varepsilon$, могут быть нормализованы следующим образом:

$$(u_n, u_k)_{L_2(\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)})} + \varepsilon^{-\alpha} (u_n, u_k)_{L_2(G_\varepsilon^{(1)})} = \delta_{n,k}, \quad \{n, k\} \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Здесь и далее $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера, $\mathcal{H}_\varepsilon$ – соболевское пространство $\{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ в смысле следа}\}$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} := \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon.$$

Наша цель – изучить асимптотическое поведение собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ и собственных функций $\{u_n(\varepsilon, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. когда количество присоединенных тонких прямоугольников из каждого класса неограниченно растет, а их толщина стремится к нулю.

Отметим, что переход к пределу сопровождается влиянием концентрированных масс на тонких прямоугольниках из первого класса. Фактически присутствуют два типа возмущений для задачи (1.1): возмущение области и возмущение плотности. Мы будем изучать влияние обоих факторов на асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций.

1.2. Краткое описание результатов. Опишем два типа колебаний, возникающих в таких соединениях.

1.2.1. Низкочастотные колебания. Мы установили пять качественно различных случаев в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций задачи (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, а именно случаи “легких” концентрированных масс ($\alpha \in (0, 1)$), “промежуточных” концентрированных масс ($\alpha = 1$) и “тяжелых” концентрированных масс ($\alpha \in (1, +\infty)$), последний подразделяется на “слегка тяжелые” концентрированные массы ($\alpha \in (1, 2)$), “умеренно тяжелые” ($\alpha = 2$) и “сверхтяжелые” ($\alpha > 2$).

В случаях “легких” и “промежуточных” концентрированных масс (см. [1], [2]) возмущение области играет ведущую роль в асимптотическом поведении.

Если $\alpha \in (0, 1)$, то спектр усредненной задачи совпадает со спектром в области без концентрированных масс (см., например, работы [14], [18]–[22], где была обнаружена неожиданная особенность в геометрической структуре спектра – наличие *лакун*). Концентрированные массы влияют только на второй член асимптотического разложения; в частности, асимптотическое разложение собственного значения $\lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1.1) имеет вид

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon^{1-\alpha} \lambda_{1-\alpha} + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^{2-\alpha} \lambda_{2-\alpha} + \dots \quad (1.4)$$

Здесь индекс n мы не выписываем.

Концентрированные массы начинают проявляться в соответствующей усредненной спектральной задаче в случае $\alpha = 1$. Это влияние проявляется в появлении дополнительного слагаемого $4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0)$ со спектральным параметром λ_0 в скачке производных на интерфейсе, т.е.

$$\partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) - h_2 \partial_{x_2} v_0^-(x_1, 0) = -4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a). \quad (1.5)$$

Этот член также указывает на влияние геометрической структуры тонких прямоугольников из первого класса на асимптотику. В данном случае асимптотическое разложение собственного значения имеет форму

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \quad (1.6)$$

Оказывается, что мы не можем напрямую подставить $\alpha = 1$ в (1.4), чтобы получить формулу (1.6).

Если $\alpha > 1$, то концентрированные массы начинают играть ведущую роль в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций. Принципиальное различие между этим и предыдущими случаями проявляется в следующем: все собственные значения $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ сходятся к нулю со скоростью $\varepsilon^{\alpha-1}$, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha-1} \lambda_0^{(n)} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Этот факт был доказан в следующей лемме.

ЛЕММА 1 [5]. *Если $\alpha > 1$, то для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ существуют такие константы C_0, C_1 и ε_0 , что для любых значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеют место оценки*

$$0 < \lambda_n(\varepsilon) \leq C_0 \varepsilon^{\alpha-1}, \quad \|u_n\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Также существует такая положительная не зависящая ни от ε , ни от n константа c_0 , что

$$0 < c_0 \varepsilon^{\alpha-1} \leq \lambda_n(\varepsilon) \quad (1.7)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

В работах [3]–[5] задача (1.1) была полностью исследована в случае $\alpha \in (1, 2)$. Было доказано, что собственные колебания $\{u_n(\varepsilon, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеют новый тип эффекта кожи, который мы назвали *эффектом объемной кожи*. Это означает, что колебания тонких прямоугольников из второго класса повторяют форму колебания зоны присоединения (интерфейса) в первом члене асимптотики, который имеет вид

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^-(x_1) \equiv v_0^+(x_1, 0), & x \in D_2 = (0, a) \times (-l_2, 0), \end{cases} \quad (1.8)$$

при этом $v_0(x)$ и соответствующее число λ_0 являются решением следующей задачи Стеклова:

$$\begin{aligned} \Delta_x v_0^+(x) &= 0, & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &= 0, & x \in \Gamma_2, \\ v_0^+(x) &= 0, & x \in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0), & x_1 \in (0, a). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Число λ_0 является ведущим членом асимптотического разложения

$$\lambda(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-1} \lambda_{\alpha-1} + \dots) \quad (1.10)$$

собственных значений задачи (1.1). Второй член в (1.10) зависит от геометрических характеристик тонких прямоугольников из первого класса $G_\varepsilon^{(1)}$, тонких прямоугольников из второго класса $G_\varepsilon^{(2)}$ и области Ω_0 и имеет вид

$$\lambda_{\alpha-1} = -\frac{\lambda_0}{4h_1 l_1} \left(h_2 l_2 + \int_{\Omega_0} (v_0^+)^2 dx \right). \quad (1.11)$$

Соответствующий второй член $v_{\alpha-1}^-$ асимптотического разложения собственных функций в D_2 зависит от геометрических параметров h_2 и l_2 . Отметим также, что $v_{\alpha-1}^-$ зависит от двух переменных x_1 и x_2 , что не выполняется для первого члена асимптотики v_0^- (см. (1.8)).

Если $\alpha \in (m, m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, то мы покажем, что асимптотическое разложение собственного значения задачи (1.1) имеет вид

$$\lambda(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m}\lambda_{\alpha-m} + \dots + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^{\alpha-m+1}\lambda_{\alpha-m+1} + \dots), \quad (1.12)$$

где λ_0 – собственное значение задачи (1.9), а второй член задается формулой

$$\lambda_{\alpha-m} = -\frac{1}{4h_1l_1} \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) dx. \quad (1.13)$$

Второй член в разложении (1.12) зависит только от геометрических характеристик тонких прямоугольников из первого класса $G_\varepsilon^{(1)}$, в которых присутствуют концентрированные массы. Это означает возрастающее влияние концентрированных масс на асимптотику собственных значений задачи (1.1).

Для соответствующих собственных функций мы наблюдаем усиление эффекта объемной кожи. Это означает, что два ведущих члена асимптотического разложения не зависят от x_2 в D_2 , а именно первый член такой же, как v_0 для $\alpha \in (1, 2)$ (см. (1.8)), и второй член имеет аналогичную форму

$$v_{\alpha-m}(x) = \begin{cases} v_{\alpha-m}^+(x), & x \in \Omega_0, \\ v_{\alpha-m}^-(x_1) = v_{\alpha-m}^+(x_1, 0), & x \in D_2. \end{cases} \quad (1.14)$$

Более того, чем ближе α к целому числу m , тем большее количество членов разложения находится между $\varepsilon^{\alpha-m}\lambda_{\alpha-m}$ и $\varepsilon\lambda_1$ в (1.12). Например, появляются члены $\varepsilon^{2\alpha-2m}\lambda_{2\alpha-2m}$, $\varepsilon^{3\alpha-3m}\lambda_{3\alpha-3m}$. По этой причине здесь и далее мы пишем “...” между слагаемыми $\varepsilon^{\alpha-m}\lambda_{\alpha-m}$ и $\varepsilon\lambda_1$. Это означает, что для целого α мы не можем использовать (1.12), в этом случае необходимо заново применять формальную процедуру.

Таким образом, для $\alpha = m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, мы записываем следующий анзац для $\lambda_n(\varepsilon)$ (также опускаем индекс n):

$$\lambda(\varepsilon) \approx \varepsilon^{m-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(m) + \varepsilon^2\lambda_2(m) + \dots), \quad (1.15)$$

где λ_0 – собственное значение задачи (1.9), и если $m = 2$, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & -\frac{\lambda_0}{4h_1l_1} \left(h_2l_2 + \int_{\Omega_0} (v_0^+)^2 dx \right) - \frac{\varsigma_{(0,0)}}{4h_1l_1} - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\ & - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) dx_1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

а если $m \geq 3$, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & -\frac{\varsigma_{(0,0)}}{4h_1l_1} - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\ & - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) dx_1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь функции $Z_1^{(2)}(\eta)$ удовлетворяют задаче (2.22), а константы $\varsigma_{(0,0)}$ и $\varsigma_{(2,0)}$ определяются равенствами (2.32) – см. лемму 2.

Сравнивая формулы для второго члена в асимптотических разложениях собственных значений задачи (1.1) (см. (1.11) для $\alpha \in (1, 2)$, (1.16) для $\alpha = 2$ и (1.13), (1.17) для $\alpha > 2$), мы видим уменьшение влияния геометрии области Ω_0 и тонких прямоугольников из второго класса $G_\varepsilon^{(2)}$ на асимптотическое поведение собственных значений. Этот и вышеприведенные факты объясняют разделение “тяжелых” концентрированных масс на “слегка тяжелые” ($\alpha \in (1, 2)$), “умеренно тяжелые” ($\alpha = 2$) и “сверхтяжелые” концентрированные массы ($\alpha > 2$).

Напомним, что случаи $\alpha = 2$ и $\alpha > 2$ представляют особый интерес в наших исследованиях в настоящей работе.

1.2.2. Высокочастотные ячеичные колебания. Как и для колебания закрепленной мембраны с концентрированными массами на малых множествах диаметра $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (см., например, [23]–[29] и обзор литературы в этих работах), существуют три различных случая для соответствующих спектральных задач с дифференциальными операторами второго порядка: $\alpha < 2$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$. В этих работах было доказано, что существуют два типа собственных колебаний: локальные колебания, для которых соответствующие собственные функции имеют порядок $\mathcal{O}(1)$ только в малой окрестности концентрированных масс, и глобальные колебания, для которых соответствующие собственные функции присутствуют во всей мембране. Локальные и глобальные колебания могут одновременно существовать только в случае $\alpha \geq 2$, при этом локальные колебания являются низкочастотными. В случае $\alpha < 2$ локальных колебаний не существует. Соответствующие собственные значения для локальных колебаний имеют асимптотику

$$\lambda_n(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha-2} \lambda_n + o(\varepsilon^{\alpha-2}), \quad (1.18)$$

где λ_n – собственное значение соответствующей локальной спектральной задачи. Формула (1.18) показывает структуру низкочастотной сходимости спектра.

В отличие от результатов работ [23]–[26], мы показываем, что существуют свободные колебания в задаче (1.1), которые соответствуют локальным колебаниям концентрированных масс; они присутствуют при любом значении параметра $\alpha \in (0, +\infty)$ и всегда являются высокочастотными колебаниями (см. § 5). Соответствующие собственные значения для этих колебаний имеют асимптотику

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha-2} \Lambda + o(\varepsilon^{\alpha-2}), \quad (1.19)$$

где Λ – собственное значение соответствующей спектральной ячеичной задачи (см. (5.1)). Из формулы (1.19) вытекает, что эти собственные значения имеют порядок $\mathcal{O}(1)$ при $\alpha = 2$. Это является еще одной причиной, по которой мы выделяем случай $\alpha = 2$ среди “тяжелых” масс.

1.3. Перемасштабирование задачи (1.1). Используя оценки из леммы 1 для “тяжелых” концентрированных масс, мы перемасштабируем собственные значения и собственные функции следующим образом:

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha-1} \Lambda(\varepsilon), \quad u(\varepsilon, x) = \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}} v(\varepsilon, x). \quad (1.20)$$

После перемасштабирования задача (1.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} -\Delta_x v(\varepsilon, x) &= \varepsilon^{\alpha-1} \Lambda(\varepsilon) v(\varepsilon, x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ -\Delta_x v(\varepsilon, x) &= \varepsilon^{-1} \Lambda(\varepsilon) v(\varepsilon, x), & x \in G_\varepsilon^{(1)}, \\ -\partial_\nu v(\varepsilon, x) &= 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_1, \\ v(\varepsilon, x) &= 0, & x \in \Gamma_1, \\ [v]_{|x_2=0} &= [\partial_{x_2} v]_{|x_2=0} = 0, & x_1 \in Q_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Определим оператор $A_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$, который соответствует задаче (1.21), следующим равенством:

$$(A_\varepsilon u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = (u, v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\varepsilon, \quad (1.22)$$

где $\mathcal{V}_\varepsilon$ – весовое пространство $L^2(\Omega_\varepsilon)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{V}_\varepsilon} := \varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} uv \, dx + \varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} uv \, dx.$$

Легко видеть, что оператор A_ε самосопряженный, положительный и компактный. Более того, задача (1.21) эквивалентна спектральной задаче $A_\varepsilon u = \lambda^{-1}(\varepsilon)u$ в $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Следовательно, для любого фиксированного значения ε существует последовательность собственных значений задачи (1.21)

$$0 < \Lambda_1(\varepsilon) < \Lambda_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \Lambda_n(\varepsilon) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

Соответствующие собственные функции $\{v_n(\varepsilon, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно ортонормировать следующим образом:

$$(v_n, v_k)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \delta_{n,k}, \quad \{n, k\} \in \mathbb{N}. \quad (1.24)$$

§ 2. Построение асимптотики в случае $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

2.1. Формальная асимптотика. Сочетая методы теории усреднения и методы исследования поведения тонких областей, мы ищем главные члены асимптотики собственных значений $\Lambda_n(\varepsilon)$ и собственных функций $v_n(\varepsilon, \cdot)$ в форме (индекс n опущен)

$$\Lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad (2.1)$$

$$v(\varepsilon, x) \approx v_0^+(x) + \varepsilon v_1^+(x) + \varepsilon^2 v_2^+(x) + \dots \quad \text{в области } \Omega_0, \quad (2.2)$$

$$v(\varepsilon, x) \approx v_0^-\left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j\right) + \varepsilon v_1^-\left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j\right) + \varepsilon^2 v_2^-\left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j\right) + \dots \quad (2.3)$$

в тонких прямоугольниках $G_j^{(2)}(\varepsilon)$, $j = 0, \dots, N-1$, и в зоне соединения тела и тонких прямоугольников из обоих классов (которое мы называем *внутренним*

разложением) в виде ряда

$$\begin{aligned} v(\varepsilon, x) \approx & v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon \left(v_1^+(x_1, 0) + Z_1^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \Big) + \varepsilon^2 \left(X_2^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_1^+(x_1, 0) \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 X_2^{(i)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} v_1^+(x_1, 0) + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) \Big) + \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathcal{B} := \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (2, 0)\}$. Мы использовали следующие стандартные обозначения: $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}}$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обозначим $\Gamma_2 := \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_1 \cup I_0)$. Подставляя (2.1) и (2.2) в задачу (1.21) и собирая члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, получаем

$$\begin{aligned} -\Delta_x v_0^+(x) &= 0, & x &\in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x)|_{x \in \Gamma_2} &= 0, & v_0^+(x)|_{x \in \Gamma_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Приравнявая члены при степени ε^1 , выводим

$$\begin{aligned} -\Delta_x v_1^+(x) &= \delta_{2,m} \lambda_0 v_0^+(x), & x &\in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_1^+(x)|_{x \in \Gamma_2} &= 0, & v_1^+(x)|_{x \in \Gamma_1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\delta_{2,m}$ – символ Кронекера. Чтобы замкнуть эти задачи, необходимо найти условия для I_0 (см. далее п. 2.2).

2.1.1. *Формальная асимптотика в каждом тонком прямоугольнике $G_j^{(2)}(\varepsilon)$.* Разлагая функции $\{v_\gamma^-\}$ из (2.3) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = \varepsilon(j + \frac{1}{2})$, получаем

$$v(\varepsilon, x) \approx W_0^{(j)}(x_2, \eta_1) + \varepsilon W_1^{(j)}(x_2, \eta_1) + \varepsilon^2 W_2^{(j)}(x_2, \eta_1) + \dots, \quad (2.7)$$

где

$$W_0^{(j)}(x_2, \eta_1) = v_0^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} W_1^{(j)}(x_2, \eta_1) &= v_1^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\ &+ \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial v_0^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} W_2^{(j)}(x_2, \eta_1) &= v_2^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\ &+ \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial v_1^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 v_0^-}{\partial x_1^2} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$.

Подставляя (2.1) и (2.7) в задачу (1.21) вместо $\Lambda_n(\varepsilon)$ и $v_n(\varepsilon, \cdot)$ соответственно и собирая члены при равных степенях ε , мы выписываем следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta_1 \eta_1}^2 W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) &= 0, \quad \eta_1 \in \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2} \right), \\ \partial_{\eta_1} W_\gamma^{(j)} \left(x_2, \frac{1 \pm h_2}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

для $\gamma \in \{0, 1\}$. Здесь переменная x_2 рассматривается в качестве параметра, а $\partial_{\eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1}$. Из (2.11) заключаем, что решения $W_\gamma^{(j)}$, $\gamma \in \{0, 1\}$, не зависят от η_1 .

Далее, для $\gamma = 2$ мы получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta_1 \eta_1}^2 W_2^{(j)}(x_2, \eta_1) &= \partial_{x_2 x_2}^2 W_0^{(j)}(x_2), \quad \eta_1 \in \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2} \right), \\ \partial_{\eta_1} W_2^{(j)} \left(x_2, \frac{1 \pm h_2}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

условие разрешимости которой дает соотношение

$$\partial_{x_2 x_2}^2 W_0^{(j)}(x_2) = 0, \quad x_2 \in (-l_2, 0),$$

или в эквивалентной форме

$$\partial_{x_2 x_2}^2 v_0^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), x_2 \right) = 0, \quad x_2 \in (-l_2, 0), \quad (2.13)$$

в силу (2.8). Имея в виду граничные условия исходной задачи при $x_2 = -l_2$, мы добавляем условие $\partial_{x_2} v_0^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), -l_2 \right) = 0$ к (2.13). Это, в частности, означает, что v_0^- не зависит от x_2 .

При $\gamma = 3$ мы имеем

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta_1 \eta_1}^2 W_3^{(j)}(x_2, \eta_1) &= \partial_{x_2 x_2}^2 W_1^{(j)}(x_2) + \delta_{2,m} \lambda_0 W_0^{(j)}(x_2), \quad \eta_1 \in \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2} \right), \\ \partial_{\eta_1} W_3^{(j)} \left(x_2, \frac{1 \pm h_2}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Условие разрешимости задачи (2.14) имеет следующий вид:

$$\partial_{x_2 x_2}^2 W_1^{(j)}(x_2) = \delta_{2,m} \lambda_0 W_0^{(j)}(x_2), \quad x_2 \in (-l_2, 0).$$

Аналогично, используя (2.9), мы получаем

$$\begin{aligned} v_1^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), x_2, \eta_1 - j \right) &= \delta_{2,m} \left(-\frac{1}{2} x_2^2 - l_2 x_2 \right) \lambda_0 v_0^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\quad + T(\eta_1) \frac{\partial v_0^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) + \Phi_1 \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

а используя (2.10), соответственно выводим

$$\begin{aligned} v_2^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), x_2, \eta_1 - j \right) &= \delta_{3,m} \left(-\frac{1}{2} x_2^2 - l_2 x_2 \right) \lambda_0 v_0^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ T(\eta_1) \frac{\partial v_1^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} T^2(\eta_1) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) + \Phi_2 \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где Φ_1, Φ_2 – некоторые функции от x_1 , а $T(\eta_1) = -\eta_1 + \frac{1}{2} + [\eta_1]$ и $[\eta_1]$ – целая часть числа η_1 . Здесь $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Поскольку мы строим только ведущие члены асимптотики, полагаем $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv 0$.

Точки $\{x_1 = \varepsilon(j + \frac{1}{2}) : j = 0, \dots, N-1\}$ образуют ε -сеть на интервале $(0, a)$, поэтому мы продолжаем соотношения (2.15) и (2.16) на весь интервал $(0, a)$.

2.1.2. Решения в зоне соединения. Перейдем в (1.21) к “быстрым” переменным $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$. При такой замене и при $\varepsilon \rightarrow 0$ область Ω_0 переходит в $\{\eta : \eta_i > 0, i = 1, 2\}$, тонкий прямоугольник $G_0^{(2)}(\varepsilon)$ переходит в полуполосу

$$\Pi^- = \left(\frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) \times (-\infty, 0],$$

а тонкий прямоугольник $G_0^{(1)}(d_k, \varepsilon)$ – в фиксированный прямоугольник

$$\Pi_k = \left(d_k - \frac{h_1}{2}, d_k + \frac{h_1}{2} \right) \times (-l_1, 0].$$

Принимая во внимание периодическую структуру области Ω_ε в окрестности I_0 , мы рассматриваем следующую ячейку периодичности:

$$\Pi = \Pi^- \cup \Pi^+ \cup \Pi_{l_1},$$

в которой мы будем рассматривать краевые задачи для определения коэффициентов Z, X ряда (2.4). Здесь $\Pi^+ = (0, 1) \times (0, +\infty)$, $\Pi_{l_1} := \bigcup_{k=1}^4 \bar{\Pi}_k$ (рис. 3).

Рис. 3. Ячейка периодичности

Чтобы найти задачи для этих коэффициентов, мы должны посчитать

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_1} v(\varepsilon, x) \approx & \varepsilon^0 (\partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0)[1 + \partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}] + \partial_{\eta_1} Z_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0) + \partial_{\eta_1} Z_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) \\
 & + \varepsilon^1 \left(\partial_{\eta_1} X_2^{(0)} v_1^+(x_1, 0) + \partial_{x_1} v_1^+(x_1, 0)[1 + \partial_{\eta_1} X_2^{(1)}] \right. \\
 & + \partial_{\eta_1} X_2^{(2)} \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) + Z_1^{(0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \\
 & + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_1 x_i}^2 v_0^+(x_1, 0) + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \partial_{\eta_1} Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) \Big) \\
 & + \varepsilon^2 (\partial_{\eta_1} Z_3^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \partial_{\eta_1} Z_3^{(1)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_x v(\varepsilon, x) \approx & \varepsilon^{-1} \left(\Delta_\eta Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 \Delta_\eta Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\
 & + \varepsilon^0 \left(\Delta_\eta X_2^{(0)}(\eta) v_1^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 \Delta_\eta X_2^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_1^+(x_1, 0) \right. \\
 & + \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0)[1 + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta)] + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \\
 & + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(2)}(\eta) \partial_{x_1 x_2}^2 v_0^+(x_1, 0) + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \Delta_\eta Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) \Big) \\
 & + \varepsilon (\Delta_\eta Z_3^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \Delta_\eta Z_3^{(1)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Учитывая (2.17) и (2.18), подставляя ряды (2.4) и (2.1) в задачу (1.21) и собирая члены при соответствующих степенях ε , мы получаем задачи для определения коэффициентов $\{Z_1^{(i)}\}_{i=0}^2$, $\{X_2^{(i)}\}_{i=0}^2$, $\{Z_2^{(\beta)}\}_{\beta \in \mathcal{B}}$. Очевидно, эти решения должны быть 1-периодическими по η_1 . Следовательно, мы требуем выполнения следующих условий периодичности:

$$\begin{aligned}
 \partial_{\eta_1}^s Z(0, \eta_2) &= \partial_{\eta_1}^s Z(1, \eta_2), & \eta_2 > 0, & \quad s = 0, 1, \\
 \partial_{\eta_1}^s X(0, \eta_2) &= \partial_{\eta_1}^s X(1, \eta_2), & \eta_2 > 0, & \quad s = 0, 1,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

на вертикальной границе полуполосы Π^+ . Кроме того, легко заметить, что все решения должны удовлетворять условию Неймана

$$\begin{aligned}
 \partial_{\eta_2} Z(\eta_1, 0) &= 0, & (\eta_1, 0) \in \partial\Pi, & \quad \partial_{\eta_2} Z(\eta_1, -l_1) = 0, & (\eta_1, -l_1) \in \partial\Pi, \\
 \partial_{\eta_2} X(\eta_1, 0) &= 0, & (\eta_1, 0) \in \partial\Pi, & \quad \partial_{\eta_2} X(\eta_1, -l_1) = 0, & (\eta_1, -l_1) \in \partial\Pi,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

на горизонтальных отрезках границы области Π .

Пусть $\partial\Pi_\parallel$ – вертикальная часть границы $\partial\Pi$, лежащая в $\{\eta: \eta_2 < 0\}$.

Таким образом, мы получили следующие задачи (к каждой задаче надо добавить соответствующие условия (2.19) и (2.20)):

$$\begin{aligned}
 -\Delta_\eta Z_1^{(0)}(\eta) &= \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \lambda_0, & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\
 \partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta) &= 0, & \eta \in \partial\Pi_\parallel;
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_1^{(i)}(\eta) &= 0, & \eta \in \Pi, \\ \partial_{\eta_1} Z_1^{(i)}(\eta) &= -\delta_{1i}, & \eta \in \partial\Pi_\parallel, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(0,0)}(\eta) &= \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \lambda_1 + \lambda_0 Z_1^{(0)}(\eta), & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(0,0)}(\eta) &= 0, & \eta \in \partial\Pi_\parallel; \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(1,0)}(\eta) &= \begin{cases} 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta), & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta) + \lambda_0 Z_1^{(1)}(\eta), & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(1,0)}(\eta) &= -Z_1^{(0)}(\eta), & \eta \in \partial\Pi_\parallel; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(0,1)}(\eta) &= \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \lambda_0 Z_1^{(2)}(\eta), & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(0,1)}(\eta) &= 0, & \eta \in \partial\Pi_\parallel; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(2,0)}(\eta) &= 1 + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta), & \eta \in \Pi, \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(2,0)}(\eta) &= -Z_1^{(1)}(\eta), & \eta \in \partial\Pi_\parallel. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Задачи для $\{X_2^{(k)}\}$ совпадают с задачами для $\{Z_1^{(k)}\}$ (задачи (2.21) и (2.22)). Следовательно, $X_2^{(k)} \equiv Z_1^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$.

Существование и основные асимптотические соотношения для решений этих задач могут быть получены из общих результатов об асимптотическом поведении решений эллиптических краевых задач в областях с различными выходами на бесконечность [30]–[33]. Однако если область, где рассматривается задача, имеет некоторую симметрию, то асимптотические соотношения можно определить точно и обнаружить другие свойства решений в зоне соединения (см. [34, лемма 4.1, следствие 4.1]). Используя этот подход, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Существуют решения $Z_1^{(i)} \in H_{\text{loc}, \eta_2}^1(\Pi)$, $i = 0, 1, 2$, задачи (2.21) и задачи (2.22), и решения $Z_2^{(\beta)} \in H_{\text{loc}, \eta_2}^1(\Pi)$, $\beta \in \mathcal{B}$, задач (2.23)–(2.26), которые имеют следующие дифференцируемые асимптотики:*

$$Z_1^{(0)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 + C_1^{(0)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.27)$$

$$Z_1^{(1)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \left(-\eta_1 + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$Z_1^{(2)}(\eta) = \begin{cases} \eta_2 + \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{\eta_2}{h_2} + C_1^{(2)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$Z_2^{(0,0)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}}{h_2} \eta_2 + C_2^{(0,0)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$Z_2^{(1,0)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 \left(-\eta_1 + \frac{1}{2}\right) + C_2^{(1,0)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$Z_2^{(0,1)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{\lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta}{h_2} \eta_2 + C_2^{(0,1)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$Z_2^{(2,0)}(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \eta_2^2 + \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{2} T^2(\eta_1) + \frac{\varsigma_{(2,0)}}{h_2} \eta_2 + C_2^{(2,0)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.31)$$

где

$$\varsigma_{(0,0)} = \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(0)}(\eta) d\eta, \quad \varsigma_{(2,0)} = \int_{\Pi_{l_1} \cup \Pi^-} (1 + \partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta)) d\eta. \quad (2.32)$$

Более того, функции $Z_1^{(1)}$ и $Z_2^{(1,0)}$ являются нечетными по η_1 относительно $\frac{1}{2}$; функции $Z_1^{(0)}$, $Z_2^{(2,0)}$, $Z_1^{(2)}$, $Z_2^{(0,0)}$ и $Z_2^{(0,1)}$ являются четными по η_1 относительно $\frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1], [2].

2.2. Усредненные задачи и корректоры. Мы формально построили ведущие члены асимптотических разложений (2.2)–(2.4) в трех различных частях соединения Ω_ε . Следуя методу А. М. Ильина согласования асимптотических разложений (см. [35]–[38]), мы приравниваем асимптотику внешнего разложения (2.2) и (2.3) при $x_2 \rightarrow \pm 0$ и соответствующую асимптотику внутреннего разложения (2.4) при $\eta_2 \rightarrow \pm \infty$ соответственно.

Записывая ряд Тейлора для v_0^+ , v_1^+ и v_2^+ в малой окрестности точки $(x_1, 0)$, где $x_1 \in (0, a)$, и переходя к переменным $\eta_2 = \varepsilon^{-1} x_2$, мы выводим

$$v(\varepsilon, x) = v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^1 (v_1^+(x_1, 0) + \eta_2 \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) + \varepsilon^2 \left(\eta_2 \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) + \frac{1}{2} \eta_2^2 \partial_{x_2 x_2}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) + \dots \quad (2.33)$$

Учитывая асимптотики функций $Z_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, $Z_2^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{B}$, при $\eta_2 \rightarrow +\infty$ (см. (2.27)–(2.31)), записываем асимптотику

$$v(\varepsilon, x) = v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^1 (v_1^+(x_1, 0) + \eta_2 \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) + \varepsilon^2 \left(\eta_2 \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) - \frac{1}{2} \eta_2^2 \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) + \dots \quad (2.34)$$

Поскольку $\Delta v_0^+ = 0$, ведущие члены в (2.33) и (2.34) совпадают при ε^0 , ε^1 и ε^2 .

Для того чтобы согласовать (2.3) и (2.4), записываем асимптотику (2.3) при $x_2 \rightarrow -0$ и переходим к быстрым переменным; в результате получаем

$$v(\varepsilon, x) = v_0^-(x_1) + \varepsilon \underbrace{v_1^-(x_1, 0, \eta_1)} + \varepsilon^2 (v_2^-(x_1, 0, \eta_1) + \delta_{2,m} \partial_{x_2}^2 v_1^-(x_1, 0, \eta_1)) + \dots \quad (2.35)$$

Имея в виду асимптотику функций $Z_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, и $Z_2^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{B}$, при $\eta_2 \rightarrow -\infty$, находим асимптотику (2.4):

$$\begin{aligned} v(\varepsilon, x) = & v_0^+(x_1, 0) \\ & + \varepsilon \left(\underbrace{v_1^+(x_1, 0) + T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0)} + \underbrace{\frac{\eta_2}{h_2} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)} \right) \\ & + \underbrace{\frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 v_0^+(x_1, 0) + C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0)} + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{4h_1 l_1 \lambda_0 \eta_2}{h_2} + C_1^{(0)} \right) v_1^+(x_1, 0) \right. \\ & + T(\eta_1) \partial_{x_1} v_1^+(x_1, 0) + \left(\frac{\eta_2}{h_2} + C_1^{(2)} \right) \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) \\ & + \left(\frac{4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}}{h_2} \eta_2 + C_2^{(0,0)} \right) v_0^+(x_1, 0) \\ & + \left(\frac{\lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta}{h_2} \eta_2 + C_2^{(0,1)} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ & + \left(\frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 T(\eta_1) + C_2^{(1,0)} \right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} T^2(\eta_1) + \frac{\varsigma_{(2,0)} \eta_2}{h_2} + C_2^{(2,0)} \right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) + \dots \quad (2.36) \end{aligned}$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты в (2.35) и (2.36) при ε^0 , получаем

$$v_0^+(x_1, 0) = v_0^-(x_1), \quad x_1 \in (0, a). \quad (2.37)$$

Применяя аналогичную процедуру при ε^1 , получаем следующие соотношения:

$$\partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + 4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (0, a), \quad (2.38)$$

для слагаемых, обрамленных фигурной скобкой сверху, и

$$\begin{aligned} v_1^-(x_1, 0, \eta_1) = & v_1^+(x_1, 0) + T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \\ & + C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a), \quad (2.39) \end{aligned}$$

для слагаемых, обрамленных фигурной скобкой снизу, или в терминах скачка

$$\begin{aligned} [v_1] \left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) = & -T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) - C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ & - C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a), \quad (2.40) \end{aligned}$$

для всех $m \geq 2$.

Соотношение (2.38) замыкает задачу (2.5). Таким образом, v_0^+ и число λ_0 являются собственной функцией и соответствующим собственным значением задачи Стеклова

$$\begin{aligned}\Delta_x v_0^+(x) &= 0, & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &= 0, & x \in \Gamma_2, \\ v_0^+(x) &= 0, & x \in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0), & x_1 \in (0, a),\end{aligned}\tag{2.41}$$

которую мы называем *усредненной спектральной задачей* для задачи (1.21).

Напомним, что число λ_0 называется собственным значением задачи (2.41), если существует функция $v_0 \in \mathcal{H}_0 := \{u \in H^1(\Omega_0) : u|_{\Gamma_1} = 0\}$, $v_0 \neq 0$, которая называется собственной функцией, соответствующей λ_0 , такая, что имеет место следующее интегральное тождество:

$$\langle v_0, \varphi \rangle_{\mathcal{H}_0} = \lambda_0 (\mathcal{T}_0 v_0, \mathcal{T}_0 \varphi)_{\mathcal{V}_0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0, \tag{2.42}$$

где $\langle v_0, \varphi \rangle_{\mathcal{H}_0} := \int_{\Omega_0} \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi \, dx$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}_0$; пространство $\mathcal{V}_0$ является весовым пространством $L_2(I_0)$ со следующим скалярным произведением:

$$(\mathcal{T}_0 v_0, \mathcal{T}_0 \varphi)_{\mathcal{V}_0} := 4h_1 l_1 (\mathcal{T}_0 v_0, \mathcal{T}_0 \varphi)_{L_2(I_0)},$$

и $\mathcal{T}_0 : \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$ – оператор следа.

Пусть $A_0 \equiv \mathcal{T}_0^* \circ \mathcal{T}_0 : \mathcal{V}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$, где $\mathcal{T}_0^*$ – сопряженный оператор к оператору $\mathcal{T}_0$. Легко проверить (см., например, [21]), что A_0 – самосопряженный положительный компактный оператор и спектральная задача (2.41) эквивалентна спектральной задаче

$$A_0(\mathcal{T}_0 v_0) = \frac{1}{\lambda_0} \mathcal{T}_0 v_0 \quad \text{в } \mathcal{V}_0. \tag{2.43}$$

Таким образом, собственные значения задачи (2.41) образуют последовательность

$$0 < \lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_0^{(n)} \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty, \tag{2.44}$$

перенумерованную с учетом кратности. Соответствующая последовательность собственных функций $\{v_0^{+,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ может быть ортонормирована следующим образом:

$$4h_1 l_1 \int_{I_0} v_0^{+,n}(x_1, 0) v_0^{+,k}(x_1, 0) \, dx_1 = \delta_{n,k}, \quad \{n, k\} \in \mathbb{N}. \tag{2.45}$$

Далее, пусть λ_0 – собственное значение задачи (2.41), v_0^+ – соответствующая собственная функция, нормированная в соответствии с (2.45). Приравнявая члены порядка $\varepsilon^2 \eta_2$ в (2.35) и (2.36), выводим

$$\begin{aligned}& \frac{1}{h_2} \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) + \frac{4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}}{h_2} v_0^+(x_1, 0) + \frac{\lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta}{h_2} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\& + \frac{\varsigma_{(2,0)}}{h_2} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) + \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} v_1^+(x_1, 0) \\& = \delta_{2,m} \partial_{x_2} v_1^-(x_1, 0, \eta_1),\end{aligned}\tag{2.46}$$

или в терминах скачка

$$\begin{aligned} & \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) - h_2 \delta_{2,m} \partial_{x_2} v_1^-(x_1, 0, \eta_1) \\ &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+(x_1, 0) - (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ & \quad - \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) - 4h_1 l_1 \lambda_0 T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Продолжая процедуру согласования, мы приравняем $v_2^-(x_1, 0, \eta_1)$ к оставшимся членам в (2.36).

В случае $m \geq 3$ функция $v_1^-(x_1, \eta_1)$ не зависит от x_2 и, следовательно, формула (2.47) задает граничное условие для функции v_1^+ , которая является функцией только от x и η_1 . Таким образом, получили следующую задачу:

$$\begin{aligned} & (\Delta_x v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} = 0, \quad x \in \Omega_0, \\ & (\partial_\nu v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} = 0, \quad x \in \Gamma_2; \quad v_1^+(x, \eta_1) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ & \partial_{x_2} v_1^+ \left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) = -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+ \left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) - (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) \\ & \quad - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) - \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \\ & \quad - 4h_1 l_1 \lambda_0 T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Условие разрешимости дает следующую формулу:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= -\frac{\varsigma_{(0,0)}}{4h_1 l_1} - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\ & \quad - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\ & \quad - 4h_1 l_1 \lambda_0 \int_{I_0} T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Используя [13, лемма 1.6] (см. также лемму 1.1 из [39, § 1.4]), выводим

$$\left| \int_{I_0} T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \right| \leq K\varepsilon. \quad (2.50)$$

Следовательно,

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1 \varepsilon, \quad k_1 = \text{const}, \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\varsigma_{(0,0)}}{4h_1 l_1} - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\ & \quad - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) dx_1. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Представим решение задачи (2.48) в форме

$$v_1^+ \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) = v_1^+(x) + \dots, \quad (2.53)$$

где $v_1^+(x)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta_x v_1^+(x) &= 0, & x &\in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_1^+(x) &= 0, & x &\in \Gamma_2, & v_1^+(x) &= 0, & x &\in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+(x_1, 0) - (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) \\ &- \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) - \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0), & x_1 &\in (0, a). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Условие разрешимости задачи (2.54) удовлетворяется благодаря (2.52). Легко увидеть, что решения задач (2.54) и (2.48) определены с точностью до аддитивного слагаемого $\varkappa v_0^+(x)$, $\varkappa$ – произвольная постоянная. Для единственности решения задачи (2.54) мы предполагаем выполнение следующего условия ортогональности:

$$\int_{I_0} v_1^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 = 0, \quad (2.55)$$

т. е. мы на данном этапе находим и фиксируем константу $\varkappa$. Теперь мы можем оценить разность между решениями задач (2.54) и (2.48) с фиксированной константой $\varkappa$ в пространстве Соболева. Применяя (2.50), получаем оценку

$$\left\| v_1^+\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) - v_1^+(x) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C\varepsilon. \quad (2.56)$$

В случае $m = 2$ формула (2.40) является первым условием сопряжения, а формула (2.47) задает второе условие сопряжения для функций $v_1^-(x_1, \eta_1)$, $v_1^+(x, \eta_1)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} -(\Delta_x v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} &= \lambda_0 v_0^+(x), & x &\in \Omega_0, \\ -(\partial_{x_2 x_2}^2 v_1^-(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} &= \lambda_0 v_0^-(x_1), & x &\in D_2, \\ (\partial_\nu v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} &= 0, & x &\in \Gamma_2, & v_1^+\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) &= 0, & x &\in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_1^-\left(x_1, -l_2, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) &= 0, & x_1 &\in (0, a), \\ [v_1] \left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) &= -T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) - C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ &- C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0), & x_1 &\in (0, a), \\ \partial_{x_2} v_1^+\left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) - h_2 \partial_{x_2} v_1^-\left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+\left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \\ &- (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ &- \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) - 4h_1 l_1 \lambda_0 T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0), & x_1 &\in (0, a). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Принимая во внимание (2.15), решаем задачу в D_2 . В итоге получаем краевую задачу для определения v_1^+ в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 & -(\Delta_x v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} = \lambda_0 v_0^+(x), \quad x \in \Omega_0, \\
 & (\partial_\nu v_1^+(x, \eta_1)) \Big|_{\eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad v_1^+\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\
 & \partial_{x_2} v_1^+\left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) = -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+\left(x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) - (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) \quad (2.58) \\
 & \quad - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) - \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \\
 & \quad - 4h_1 l_1 \lambda_0 T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) - l_2 h_2 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a).
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости дает формулу

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\varepsilon) = & -\frac{l_2 h_2 \lambda_0 + \varsigma_{(0,0)}}{4h_1 l_1} - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\
 & - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 + \lambda_0 \int_{\Omega_0} (v_0^+(x))^2 dx \\
 & - 4h_1 l_1 \lambda_0 \int_{I_0} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Повторяя процедуру, описанную в случае $m \geq 3$, выводим

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1 \varepsilon, \quad k_1 = \text{const}, \quad (2.60)$$

где

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = & -\frac{\lambda_0}{4h_1 l_1} \left(h_2 l_2 + \int_{\Omega_0} (v_0^+)^2 dx \right) - \frac{\varsigma_{(0,0)}}{4h_1 l_1} - \varsigma_{(2,0)} \int_{I_0} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 \\
 & - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) dx_1, \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

и представляем $v_1^+(x, \frac{x_1}{\varepsilon}) = v_1^+(x) + \dots$, где $v_1^+(x)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned}
 & -\Delta_x v_1^+(x) = \lambda_0 v_0^+(x), \quad x \in \Omega_0, \\
 & \partial_\nu v_1^+(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad v_1^+(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\
 & \partial_{x_2} v_1^+(x_1, 0) = -4h_1 l_1 \lambda_0 v_1^+(x_1, 0) - (4h_1 l_1 \lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}) v_0^+(x_1, 0) \quad (2.62) \\
 & \quad - \lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) - \varsigma_{(2,0)} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \\
 & \quad - l_2 h_2 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a),
 \end{aligned}$$

которое может быть выбрано, чтобы имела место оценка

$$\left\| v_1^+\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) - v_1^+(x) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C\varepsilon. \quad (2.63)$$

2.3. Глобальное асимптотическое приближение в области Ω_ε и оценка невязки. Для любого заданного собственного значения λ_0 усредненной спектральной задачи (2.41) и соответствующей собственной функции v_0^+ , нормированной в (2.45), мы можем определить λ_1 с помощью (2.52) для $m \geq 3$ (соответственно (2.61) для $m = 2$) и единственное решение v_1^+ задачи (2.54) для $m \geq 3$ (соответственно (2.62) для $m = 2$).

Аппроксимирующая функция R_ε строится как сумма первых членов внешнего разложения (2.2), (2.3) и внутреннего разложения (2.4) с вычитанием одинаковых членов их асимптотик (при $x_2 \rightarrow \pm 0$ и $\eta_2 \rightarrow \pm\infty$ соответственно), поскольку они просуммированы дважды. Благодаря (2.37) мы получаем

$$R_\varepsilon(x) = \begin{cases} v_0^+(x) + \varepsilon v_1^+(x) + \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathcal{N}_\varepsilon^+\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_0, \\ v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon v_1^+(x_1, 0) + \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in G_\varepsilon^{(1)}, \\ v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon v_1^-\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_1^-\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \\ \quad + \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad (2.64)$$

где χ – такая гладкая срезающая функция, что $\chi(s) = 1$ при $|s| \leq 1/2$; функция v_1^- – решение задачи (2.62) при $m = 2$ и решение задачи (2.54) при $m \geq 3$; здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta) = & \varepsilon \left(Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 (Z_1^{(i)}(\eta) - \delta_{i,2} \eta_2) \partial_{x_i} v_1^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(X_2^{(0)}(\eta) v_1^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 (X_2^{(i)}(\eta) - \delta_{i,2} \eta_2) \partial_{x_i} v_1^+(x_1, 0) \right. \\ & + Z_2^{(0,0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + Z_2^{(1,0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + Z_2^{(0,1)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ & \left. + \left(Z_2^{(2,0)}(\eta) + \frac{1}{2} \eta_2^2 \right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

а также

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta) = & \varepsilon \left(Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(X_2^{(0)}(\eta) v_1^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 X_2^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_1^+(x_1, 0) + Z_2^{(0,0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & \left. + Z_2^{(1,0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + Z_2^{(0,1)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + Z_2^{(2,0)}(\eta) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta) = & \varepsilon \left(Z_1^{(1)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + \left(Z_1^{(2)}(\eta) - \frac{\eta_2}{h_2} - C_1^{(2)} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & \left. + \left(Z_1^{(0)}(\eta) - \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 - C_1^{(0)} \right) v_0^+(x_1, 0) \right) + \varepsilon^2 \left(X_2^{(1)}(\eta) \partial_{x_1} v_1^+(x_1, 0) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -T(\eta_1)\partial_{x_1}v_1^-(x_1, 0, \eta_1) + \left(X_2^{(2)}(\eta) - \frac{\eta_2}{h_2}\right)\partial_{x_2}v_1^+(x_1, 0) \\
& + \left(X_2^{(0)}(\eta) - \frac{4h_1l_1\lambda_0}{h_2}\eta_2\right)v_1^+(x_1, 0) \\
& + \left(Z_2^{(0,0)}(\eta) - \frac{4h_1l_1\lambda_1 + \varsigma_{(0,0)}}{h_2}\eta_2\right)v_0^+(x_1, 0) \\
& + \left(Z_2^{(1,0)}(\eta) - \frac{4h_1l_1\lambda_0}{h_2}T(\eta_1)\eta_2\right)\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) \\
& + \left(Z_2^{(0,1)}(\eta) - \frac{\lambda_0 \int_{\Pi_{l_1}} Z_1^{(2)}(\eta) d\eta}{h_2}\eta_2\right)\partial_{x_2}v_0^+(x_1, 0) \\
& + \left(Z_2^{(2,0)}(\eta) - \frac{\varsigma_{(2,0)}}{h_2}\eta_2\right)\partial_{x_1x_1}^2v_0^+(x_1, 0). \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Легко проверить, что $R_\varepsilon|_{x_2=0+} = R_\varepsilon|_{x_2=0-}$ на Q_ε , т. е. $R_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1)$. Используя соотношения (2.38), (2.54) (при $m \geq 3$) и (2.62) (при $m = 2$), можно проверить, что

$$\partial_{x_2}R_\varepsilon|_{x_2=0+} - \partial_{x_2}R_\varepsilon|_{x_2=0-} = -\varepsilon \left(\frac{4h_1l_1\lambda_0}{h_2} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) \right) \quad \text{на } Q_\varepsilon. \tag{2.68}$$

2.3.1. Невязка в уравнении задачи (1.21). Подставляя R_ε и $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$ в дифференциальное уравнение задачи (1.21) вместо $v(\varepsilon, \cdot)$ и $\Lambda(\varepsilon)$ соответственно и находя невязку, учитывая задачи (2.21), (2.22), (2.23)–(2.26), (2.41) и (2.54) для $m \geq 3$ (соответственно (2.62) для $m = 2$), получаем в Ω_0 равенство

$$\begin{aligned}
& \Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{m-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)R_\varepsilon(x) = -\varepsilon\delta_{2,m}\lambda_0v_0^+(x) + \varepsilon^{m-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)R_\varepsilon(x) \\
& + \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\chi'_s(s)\Big|_{s=\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}}(\partial_{\eta_2}\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_2}\left(\chi'_s(s)\Big|_{s=\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}}\mathcal{N}_\varepsilon^+\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\
& + \varepsilon^{-1}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\partial_{x_1\eta_1}^2\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} + \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\partial_{x_1}((\partial_{x_1}\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}) \\
& + \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\Delta_\eta\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}; \tag{2.69}
\end{aligned}$$

в $G_\varepsilon^{(1)}$ имеем

$$\begin{aligned}
& \Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)R_\varepsilon(x) = -\varepsilon\delta_{2,m}\lambda_0v_0^+(x) + \varepsilon\lambda_1v_1^+(x_1, 0) \\
& + \varepsilon^{-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-1}(\partial_{x_1\eta_1}^2\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \partial_{x_1}(\partial_{x_1}\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} - \lambda_0Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0^+(x_1, 0) \\
& - 2\partial_{\eta_1}Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) - \lambda_0Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) \\
& - \lambda_0Z_1^{(2)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2}v_0^+(x_1, 0) - 2\partial_{\eta_1}Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1x_1}^2v_0^+(x_1, 0); \tag{2.70}
\end{aligned}$$

и в $G_\varepsilon^{(2)}$ получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{m-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)R_\varepsilon(x) = & -\varepsilon T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1x_1x_1}^3 v_0^+(x_1, 0) - \varepsilon\delta_{2,m}\lambda_0 v_0^+(x) \\
& + \varepsilon^2\left(\partial_{x_1}\left(T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1x_1}^2 v_1^-(x, \eta_1)\right)\right)\Big|_{\eta_1=\frac{x_1}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_2x_2}^2 v_1^-\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \\
& + \varepsilon^{m-1}(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\chi'_s(s)\Big|_{s=\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}}(\partial_{\eta_2}\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_2}\left(\chi'_s(s)\Big|_{s=\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}}\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \varepsilon^{-1}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\partial_{x_1\eta_1}^2\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\partial_{x_1}((\partial_{x_1}\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}) + \varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\Delta_\eta\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Используя (2.21)–(2.26), выводим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\Delta_\eta\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} = & -\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)2((\partial_{\eta_1}Z_1^{(0)}(\eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) \\
& + (\partial_{\eta_1}Z_1^{(1)}(\eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}\partial_{x_1x_1}^2 v_0^+(x_1, 0)) \quad \text{в } \Omega_0, \\
\varepsilon^{-2}\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\Delta_\eta\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} = & -\chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)2((\partial_{\eta_1}Z_1^{(0)}(\eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) \\
& + (\partial_{\eta_1}Z_1^{(1)}(\eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}\partial_{x_1x_1}^2 v_0^+(x_1, 0)) \quad \text{в } G_\varepsilon^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

2.3.2. Невязка на границе. Легко проверить, что $R_\varepsilon = 0$ на Γ_1 и $\partial_\nu R_\varepsilon = 0$ на всей границе $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_1$, за исключением вертикальных частей,

$$\partial_{x_1}R_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\partial_{x_1}\mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \tag{2.73}$$

на вертикальных частях $\partial\Omega_0$,

$$\partial_{x_1}R_\varepsilon(x) = (\partial_{x_1}\mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \tag{2.74}$$

на вертикальных частях $\partial G_\varepsilon^{(1)}$, а согласно (2.21)–(2.26) имеем

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}R_\varepsilon(x) = & -\varepsilon\left(Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1}v_0^+(x_1, 0) + Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1x_1}^2 v_0^+(x_1, 0)\right) \\
& + \varepsilon^2\left(T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_{x_1x_1}^2 v_1^-(x, \eta_1)\right)\Big|_{\eta_1=\frac{x_1}{\varepsilon}} + \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)(\partial_{x_1}\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))\Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

на вертикальных частях $\partial G_\varepsilon^{(2)}$.

2.3.3. *Невязка в интегральном тождестве.* Умножая (2.69)–(2.71) на произвольную функцию $\psi \in \mathcal{H}_\varepsilon$, интегрируя по частям и принимая во внимание (2.68) и (2.73)–(2.75), выводим

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x R_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi \, dx + \varepsilon^{m-1} (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1) \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} R_\varepsilon \psi \, dx \\ + \varepsilon^{-1} (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1) \int_{G_\varepsilon^{(1)}} R_\varepsilon \psi \, dx = \ell_\varepsilon(\psi); \end{aligned} \quad (2.76)$$

здесь линейный функционал ℓ_ε определен следующим образом:

$$\ell_\varepsilon(\psi) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9 + l_{10} + l_{11} + l_{12}, \quad (2.77)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \varepsilon^{m-1} (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1) \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} R_\varepsilon \psi \, dx - \varepsilon \lambda_0 \delta_{2,m} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} v_0^+ \psi \, dx, \\ l_2 &= \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_1 x_1}^2 v_1^+(x_1, 0) \psi \, dx + \varepsilon \lambda_1 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_1^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_3 &= -\varepsilon \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \int_{I_0} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx_1 \\ &\quad - \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1 x_1 x_1}^3 v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_4 &= \varepsilon^{-1} (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1) \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) \psi \, dx - \lambda_0 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_5 &= -\lambda_0 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx - \lambda_0 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Z_1^{(2)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_6 &= -\varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon^{(2)}} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) (\partial_{x_1 x_1}^2 v_1^-(x, \eta_1))|_{\eta_1 = \frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \psi \, dx \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{G_\varepsilon^{(2)}} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2 x_2}^2 v_1^-\left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \psi \, dx, \\ l_7 &= \varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta = \frac{x}{\varepsilon}} \psi \, dx - 2 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta)|_{\eta = \frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx \\ &\quad - 2 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta)|_{\eta = \frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_8 &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi'_s(s)|_{s = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}} (\partial_{\eta_2} \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta))|_{\eta = \frac{x}{\varepsilon}} \psi \, dx \\ &\quad - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega_0} \chi'_s(s)|_{s = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathcal{N}_\varepsilon\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} \psi \, dx, \\ l_9 &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi'_s(s)|_{s = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathcal{N}_\varepsilon\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} \psi \, dx \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi'_s(s)|_{s = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} \psi \, dx, \\ l_{10} &= -\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi'_s(s)|_{s = \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}} T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} \psi \, dx, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
l_{11} = & \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \psi dx \\
& - 2 \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) ((\partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \\
& \quad + (\partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0)) \psi dx, \\
l_{12} = & - \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) (\partial_{x_1} \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \psi dx \\
& - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_1} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \psi dx.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}_\varepsilon$ совпадает с $\mathcal{N}_\varepsilon^+$ на Ω_0 и с $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-$ на $G_\varepsilon^{(2)}$.

Оценим $|\ell_\varepsilon(\psi)|$. Легко увидеть, что $|l_1|$ в (2.78) порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{m-1})$, если $m \geq 3$, и порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, если $m = 2$.

Интегралы в $|l_2|$ оцениваем с помощью следующего неравенства типа Фридрихса:

$$\varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v^2 dx \leq C_3 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in \mathcal{H}_\varepsilon, \quad (2.79)$$

доказанного в [40]. Имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_1 x_1}^2 v_1^+(x_1, 0) \psi dx \right| & \leq \varepsilon^2 C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \\
\varepsilon \lambda_1 \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_1^+(x_1, 0) \psi dx \right| & \leq \varepsilon^2 C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Интегралы в l_3 оцениваются с помощью леммы 1.6 из [13, §1], и они имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Главный член в l_4 оцениваем с помощью неравенства (2.79). Имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \lambda_1 \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^+(x_1, 0) \psi dx \right| & \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}} C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \left| Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx} \\
& \leq \varepsilon^2 C_2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \sqrt{\int_{\Pi_{l_1}} |Z_1^{(0)}(\eta)|^2 d\eta} \leq \varepsilon^2 C_3 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.
\end{aligned} \quad (2.80)$$

Аналогично оцениваем члены в l_7 , которые также имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Интегралы в l_6 в силу [13, лемма 1.6] имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Используя асимптотические соотношения (2.27)–(2.29), заключаем, что интегралы в l_8 из (2.78) являются экспоненциально малыми, интегралы в l_9 имеют вместе порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ и интегралы в l_{10} имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ в силу [13, лемма 1.6]. Используя [19, лемма 3.1], оцениваем интегралы в l_{11} из (2.78), которые имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{2-\delta})$, где δ – произвольное положительное число.

Первый интеграл в l_{12} имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$, а последний интеграл в l_{12} имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Таким образом, имеем

$$|\ell_\varepsilon(\psi)| \leq c_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \quad (2.81)$$

С помощью оператора $A_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$, определенного в (1.22), мы выводим из (2.76) и (2.81) следующее неравенство:

$$\|R_\varepsilon - (\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)A_\varepsilon R_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (2.82)$$

§ 3. Обоснование асимптотики

Для обоснования построенного выше асимптотического разложения мы используем схему, предложенную в [22] для исследования асимптотического поведения собственных значений и собственных функций семейства абстрактных операторов $\{A_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Данная схема обобщает процедуру обоснования асимптотического поведения собственных значений и собственных функций краевых задач в возмущенной области, которая была предложена в [13]. В нашем случае это семейство операторов $\{A_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, определенное в (1.22). Напомним, что оператор A_ε соответствует задаче (1.21).

Для функций, заданных в густых соединениях, не существует оператора продолжения, равномерно ограниченного по ε в пространстве Соболева H^1 (см. [19]). Однако, как было показано в [19], для собственных функций спектральной задачи в густом соединении возможно построить специальное продолжение, которое ограничено на каждой собственной функции. Такой оператор продолжения построен для собственных функций задачи (1.1) в случае, когда $\alpha \in (0, 1]$, в наших работах [1], [2]. Повторяя шаг за шагом доказательство теоремы 4.1 (см. [1], [2]), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Существует оператор продолжения $\mathbf{P}_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto H^1(\Omega, \Gamma_1)$ такой, что для любой собственной функции $v_n(\varepsilon, \cdot)$, нормированной по формуле (1.24), существуют положительные константы C_n и ε_n такие, что для всех значений параметра ε из интервала $(0, \varepsilon_n)$ имеет место следующая оценка:*

$$\|\mathbf{P}_\varepsilon v_n(\varepsilon, \cdot)\|_{H^1(\Omega, \Gamma_1)} \leq C_n \|v_n(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq C'_n, \quad (3.1)$$

где Ω – внутренность объединения $\bar{\Omega}_0 \cup \bar{D}_2$.

3.1. Условия D₁–D₅. Для удобства изложения сформулируем здесь условия схемы из работы [22], которые модифицированы для задач (1.21) и (2.41).

Пусть $N(\frac{1}{\mu}, A_0)$ – собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\frac{1}{\mu}$ оператора A_0 , определенного в (2.43), и пусть $\{(v_n(\varepsilon, \cdot), \Lambda_n(\varepsilon))\}_{\varepsilon>0}$ – последовательность, члены которой являются собственными функциями v_n ($\|v_n\|_{\mathcal{V}_\varepsilon} = 1$) и соответствующими характеристическими числами оператора A_ε .

Условие D₁. Существует линейный оператор $S_\varepsilon: \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$ такой, что

$$\|S_\varepsilon u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c_1 \|u\|_{\mathcal{H}_0} \quad \forall u \in \mathcal{H}_0,$$

где константа c_1 не зависит от ε и u .

Условие D₂. Существует линейный оператор $P_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_0$ такой, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists c_2 > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0): \quad \|P_\varepsilon v_n(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathcal{H}_0} \leq c_2 \|v_n(\varepsilon, \cdot)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.$$

Условие D₃. Для произвольной последовательности $\{(v_n(\varepsilon, \cdot), \Lambda_n(\varepsilon))\}_{\varepsilon>0}$ и любой подпоследовательности $\{\varepsilon'\}$ из $\{\varepsilon\}$ такой, что $P_{\varepsilon'} v_n(\varepsilon', \cdot) \rightarrow v_n^0$ слабо в $\mathcal{H}_0$, имеет место

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} (v_n(\varepsilon', \cdot), S_{\varepsilon'} \varphi)_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}} = (v_n^0, \varphi)_{\mathcal{H}_0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0.$$

Условие D₄. Если для функций $w^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ имеет место $P_\varepsilon w^\varepsilon \rightarrow w^0$ и $P_\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow v^0$ слабо в $\mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (w^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = (\mathcal{T}_0 w^0, \mathcal{T}_0 v^0)_{\mathcal{V}_0}.$$

Если $v \in \mathcal{H}_0$, то $P_\varepsilon(S_\varepsilon v) \rightarrow v$ слабо в $\mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Условие D₅. Существует число $\varpi_0 > 0$ такое, что для любого $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A_0)$ существует такой линейный оператор $\mathcal{R}_\varepsilon: N(\frac{1}{\mu}, A_0) \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$, что для любой собственной функции $v \in N(\frac{1}{\mu}, A_0)$, нормированной следующим образом: $\|\mathcal{T}_0 v\|_{\mathcal{V}_0} = 1$, имеем

$$\mathcal{R}_\varepsilon v = S_\varepsilon v + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{в } \mathcal{V}_\varepsilon, \quad \|\mathcal{R}_\varepsilon v\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = c_v + \mathcal{O}(\varepsilon);$$

более того, существуют такие константы $c_3, \varepsilon_0, \rho, \tau$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon v - (\mu + \varepsilon^\tau \rho) A_\varepsilon(\mathcal{R}_\varepsilon v)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c_3 \varepsilon^{\varpi_0}.$$

Чтобы прояснить эти условия, мы используем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\varepsilon & \xrightarrow{J_\varepsilon} & \mathcal{V}_\varepsilon \\ P_\varepsilon \uparrow & & \downarrow S_\varepsilon \\ \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & \mathcal{V}_0 \end{array}$$

Условия D₁ и D₂ являются связывающими условиями между пространствами $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$. Условия D₃ и D₄ усиливают предыдущие связывающие условия через некоторые типы сходимости. Условие D₅ означает, что по любому собственному значению оператора A_0 и соответствующей собственной функции возможно построить некоторые асимптотические приближения (так называемые почти собственные значения и собственные функции) для оператора A_ε .

Для наших задач (1.21) и (2.41) оператор $J_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_\varepsilon$ является тождественным оператором вложения, оператор $\mathcal{T}_0: \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{V}_0$ является оператором следа (см. (2.42)), где указанные пространства определены в пп. 1.1, 4.2 соответственно. Оператор $P_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_0$ из условия D₂ определяется следующим образом: $P_\varepsilon v_n = (\mathbf{P}_\varepsilon v_n)|_{\Omega_0}$, где $\mathbf{P}_\varepsilon$ – оператор продолжения из теоремы 1. Оператор $S_\varepsilon: \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$ сопоставляет с каждой функцией $v \in \mathcal{H}_0$ ее ограниченное продолжение Ev до $H^1(\Omega, \Gamma_1)$, а затем сужает Ev на Ω_ε , т.е. $S_\varepsilon = (Ev)|_{\Omega_\varepsilon}$.

Теперь проверим условия D₁–D₅. Понятно, что оператор S_ε равномерно ограничен по ε . Таким образом, удовлетворяется условие D₁. На основании теоремы 1 следует выполнение условия D₂.

Проверим условие D₃. Рассмотрим последовательность $\{v_n(\varepsilon, \cdot)\}_{\varepsilon>0}$ для любого фиксированного индекса $n \in \mathbb{N}$. Из теоремы 1 следует существование

некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (которую мы также обозначаем $\{\varepsilon\}$) такой, что $\mathbf{P}_\varepsilon v_n(\varepsilon, \cdot) \rightarrow v_0$ слабо в $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{D_2} \chi_{h_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \mathbf{P}_\varepsilon(v_n(\varepsilon, x)) \phi(x) dx \\ = - \int_{D_2} \chi_{h_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \mathbf{P}_\varepsilon(v_n(\varepsilon, x)) \partial_{x_2} \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(D_2), \end{aligned}$$

получаем

$$\chi_{h_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \mathbf{P}_\varepsilon(v_n(\varepsilon, x)) \rightarrow h_2 \partial_{x_2} v_n^0(x) \quad \text{слабо в } L_2(D_2) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\chi_{h_2}(\eta_1)$, $\eta_1 \in \mathbb{R}$, — 1-периодическая функция, равная 1 на интервале $(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2})$ и равная 0 на остальной части отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим соответствующее интегральное тождество для задачи (1.21) с пробной функцией

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}, \\ \varepsilon T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \phi(x), & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad \phi \in C_0^\infty(D_2),$$

где T определено в (4.25). Получим

$$\int_{D_2} \chi_{h_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \mathbf{P}_\varepsilon(v_n(\varepsilon, x)) \phi dx = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Благодаря второму неравенству в (3.1) легко проверить, что

$$\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla v_n(\varepsilon, x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega, \Gamma_1). \quad (3.4)$$

Соответствующее интегральное тождество задачи (1.21) с пробной функцией $\phi \in C_0^\infty(D_2)$ принимает форму

$$\int_{G_\varepsilon^{(2)}} \nabla v_n(\varepsilon, x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \varepsilon^{\alpha-1} \Lambda_n(\varepsilon) \int_{G_\varepsilon^{(2)}} v_n(\varepsilon, x) \phi(x) dx \quad (3.5)$$

для достаточно малых ε . Учитывая предельные соотношения (3.2), (3.3) и ограниченность $\Lambda_n(\varepsilon)$ по ε (см. лемму 1), из (3.5) мы выводим, что

$$h_2 \int_{D_2} \partial_{x_2} v_n^0 \partial_{x_2} \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(D_2),$$

т.е. $\partial_{x_2} v_n^0$ — некоторая функция от x_1 почти всюду в D_2 . С другой стороны, $\partial_{x_2} v_n^0|_{x_2=-l_2} = 0$, так как $\partial_{x_2} v_n(\varepsilon, \cdot)|_{x_2=-l_2} = 0$. Следовательно, $v_n^0(x) = v_n^0(x_1, 0)$ для почти всех $x \in D_2$.

Таким образом, мы установили, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_n(\varepsilon, \cdot), S_\varepsilon \varphi)_{\mathcal{H}_\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_0} \nabla v_n(\varepsilon, x) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla v_n(\varepsilon, x) \cdot \nabla (E\varphi)|_{G_\varepsilon^{(1)}} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{D_2} \chi_{h_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \nabla (\partial_{x_2} \mathbf{P}_\varepsilon(v_n(\varepsilon, x))) \cdot \nabla (E\varphi)|_{D_2} dx \right) \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla v_n^0(x) \cdot \nabla \varphi dx = (v, \varphi)_{\mathcal{H}_0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0, \end{aligned}$$

т.е. удовлетворяется условие D_3 .

Пусть для функций $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ выполняется $\mathbf{P}_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u^0$ и $\mathbf{P}_\varepsilon v^\varepsilon \rightarrow v^0$ слабо в $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\mathcal{V}_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} u^\varepsilon v^\varepsilon dx. \quad (3.6)$$

Используя неравенство

$$\varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\varphi(x) - \varphi(x_1, 0))^2 dx \leq \varepsilon l_1 \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_2} \varphi(x))^2 dx \quad \forall \varphi \in H^1(G_\varepsilon^{(1)}),$$

заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} u^\varepsilon v^\varepsilon dx = 4h_1 l_1 \int_{I_0} u^0(x_1, 0) v^0(x_1, 0) dx_1.$$

Это означает, что выполняется первая часть условия D_4 . Вторая часть условия D_4 в этом случае очевидна.

Условие D_5 , фактически, будет проверено в п. 4.3, а именно действие оператора $\mathcal{R}_\varepsilon$ в D_5 – построение аппроксимирующей функции R_ε на основе собственной функции усредненной задачи (2.41). Кроме того, аппроксимирующая функция удовлетворяет неравенству (4.38), которое является аналогом соответствующего неравенства в условии D_5 .

3.2. Основной результат. Таким образом, выполнены все условия D_1 – D_5 схемы из [22]. Применяя эту схему и учитывая (1.20), получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon^{1-\alpha} \lambda_n(\varepsilon) \rightarrow \lambda_0^{(n)} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\{\lambda_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – упорядоченная последовательность (1.2) собственных значений задачи (1.1), $\{\lambda_0^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – упорядоченная последовательность (2.44) собственных значений усредненной задачи (2.41). Существует подпоследовательность последовательности $\{\varepsilon\}$ (обозначаемая также $\{\varepsilon\}$) такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{2}} \mathbf{P}_\varepsilon u_n(\varepsilon, \cdot) \rightarrow v_0^n \quad \text{слабо в } H^1(\Omega, \Gamma_1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$v_0^n(x) = \begin{cases} v_0^{+,n}(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^{+,n}(x_1, 0), & x \in D_2 = (0, a) \times (-l_2, 0), \end{cases}$$

$\{u_n(\varepsilon, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность собственных функций, ортонормированных условием (1.3), $\{v_0^{+,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – собственные функции усредненной задачи (2.41), которые удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$(v_0^{+,n}, v_0^{+,k})_{\mathcal{V}_0} = 4h_1 l_1 \int_{I_0} v_0^{+,n}(x_1, 0) v_0^{+,k}(x_1, 0) dx_1 = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\lambda_0^{(n+1)} = \dots = \lambda_0^{(n+r)}$ – r -кратное собственное значение усредненной задачи (2.41); соответствующие собственные функции $v_0^{+,n+1}, \dots, v_0^{+,n+r}$ ортонормированы в $\mathcal{V}_0$. Используя формулу (2.52) для $m \geq 3$ (или (2.61) для $m = 2$), мы построили члены $\varepsilon \lambda_1^{(n+i)}$, $i = 1, \dots, r$, асимптотического разложения (2.1) и определили единственное решение $v_1^{+,n+i}$ задачи (2.54) для $m \geq 3$ (или задачи (2.62) для $m = 2$).

Формулируем следующую теорему при условии, что все $\lambda_1^{(n+i)}$, $i = 1, \dots, r$, являются различными и

$$\lambda_1^{(n+1)} < \lambda_1^{(n+2)} < \dots < \lambda_1^{(n+r)}. \quad (3.7)$$

В общем случае формулировка остается такой же, как в [2, теоремы 5.4, 5.6].

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены неравенства (3.7). Тогда для любого достаточно малого положительного δ и любого $i \in \{1, \dots, r\}$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{1-\alpha} \lambda_{n+i}(\varepsilon) - (\lambda_0^{(n+i)} + \varepsilon \lambda_1^{(n+i)})| &\leq C_1(n) \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\ \left\| \varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{2}} u_{n+i}(\varepsilon, \cdot) - \frac{R_\varepsilon^{(n+i)}}{\|R_\varepsilon^{(n+i)}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_2(n) \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $R_\varepsilon^{(n+i)}$ – аппроксимирующая функция, построенная по формуле (2.64) с помощью решений $v_0^{+,n+i}$, $v_1^{-,n+i}$, $v_1^{+,n+i}$ и $Z_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, и $Z_2^{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{B}$.

§ 4. Асимптотика при $\alpha \in (m, m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

4.1. Построение асимптотики. Случай $\alpha \in (m, m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, характерен тем, что полностью меняется шкала, относительно которой строятся асимптотические разложения, а именно асимптотические анзацы для собственных значений $\Lambda_n(\varepsilon)$ и собственных функций $v_n(\varepsilon, \cdot)$ имеют следующий вид (индекс n также не выписываем):

$$\Lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m} + \dots, \quad (4.1)$$

$$v(\varepsilon, x) \approx v_0^+(x) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x) + \dots \quad \text{в области } \Omega_0, \quad (4.2)$$

$$v(\varepsilon, x) \approx v_0^- \left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j \right) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^- \left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j \right) + \dots, \quad (4.3)$$

в тонких прямоугольниках $G_j^{(2)}(\varepsilon)$, $j = 0, \dots, N-1$; и в области соединения соответственно:

$$\begin{aligned} v(\varepsilon, x) &\approx v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots \\ &\dots + \varepsilon \left(Z_1^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\ &+ \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(Z_{\alpha-m+1}^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_0^+(x_1, 0) + Z_{\alpha-m+1}^{(2)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + X_{\alpha-m+1}^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 X_{\alpha-m+1}^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots \\
& \dots + \varepsilon^2 \sum_{|\beta| \leq 2} Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) + \dots, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

где смысл троеточия между плюсами в (4.4) объяснен в п. 1.2.

Подставляя (4.1) и (4.2) в (1.21) и собирая члены при одинаковых степенях, при ε^0 получаем задачу (2.5) для v_0^+ и, соответственно, при $\varepsilon^{\alpha-m}$ получаем задачу

$$\begin{aligned}
-\Delta_x v_{\alpha-m}^+(x) &= 0, & x \in \Omega_0, \\
\partial_\nu v_{\alpha-m}^+(x)|_{x \in \Gamma_2} &= 0, & v_{\alpha-m}^+(x)|_{x \in \Gamma_1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Условия для I_0 в этих задачах получим в п. 4.2.

4.1.1. *Формальная асимптотика на каждом тонком прямоугольнике $G_j^{(2)}(\varepsilon)$.* Используя разложение Тейлора для функций $\{v_\gamma^-\}$ из (4.3) в окрестности $x_1 = \varepsilon(j + \frac{1}{2})$, выводим

$$\begin{aligned}
v(\varepsilon, x) &\approx W_0^{(j)}(x_2, \eta_1) + \varepsilon^{\alpha-m} W_{\alpha-m}^{(j)}(x_2, \eta_1) + \dots + \varepsilon W_1^{(j)}(x_2, \eta_1) \\
&+ \varepsilon^{\alpha-m+1} W_{\alpha-m+1}^{(j)}(x_2, \eta_1) + \dots + \varepsilon^2 W_2^{(j)}(x_2, \eta_1) + \dots, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

где

$$W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) = v_\gamma^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right), \quad \gamma \in \{0, \alpha - m\}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) &= v_\gamma^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\
&+ \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial v_{\gamma-1}^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \tag{4.8}
\end{aligned}$$

при $\gamma \in \{1, \alpha - m + 1\}$ и

$$\begin{aligned}
W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) &= v_\gamma^-\left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\
&+ \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial v_{\gamma-1}^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 v_{\gamma-2}^-}{\partial x_1^2} \left(\varepsilon\left(j + \frac{1}{2}\right), x_2, \eta_1 - j\right) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

при $\gamma \in \{2, \alpha - m + 2\}$.

Подставляя (4.1) и (4.6) в (1.21) вместо $\Lambda_n(\varepsilon)$ и $v_n(\varepsilon, \cdot)$ соответственно, собирая члены при одинаковых степенях ε , получаем следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned}
-\partial_{\eta_1 \eta_1}^2 W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) &= 0, & \eta_1 \in \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2}\right), \\
\partial_{\eta_1} W_\gamma^{(j)}\left(x_2, \frac{1 \pm h_2}{2}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

при $\gamma \in \{0, \alpha - m, 1, \alpha - m + 1\}$. Здесь x_2 рассматривается как параметр. Из (4.10) выводим, что $W_\gamma^{(j)}$, $\gamma \in \{0, \alpha - m, 1, \alpha - m + 1\}$, независимы от η_1 .

Тогда для $\gamma \in \{2, 3, \alpha - m + 2, \alpha - m + 3\}$ получаем задачи

$$\begin{aligned} -\partial_{\eta_1 \eta_1}^2 W_\gamma^{(j)}(x_2, \eta_1) &= \partial_{x_2 x_2}^2 W_{\gamma-2}^{(j)}(x_2), \quad \eta_1 \in \left(\frac{1-h_2}{2}, \frac{1+h_2}{2} \right), \\ \partial_{\eta_1} W_2^{(j)} \left(x_2, \frac{1 \pm h_2}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Условие разрешимости для (4.11) задает соотношения

$$\partial_{x_2 x_2}^2 W_{\gamma-2}^{(j)}(x_2) = 0, \quad x_2 \in (-l_2, 0), \quad \gamma \in \{2, 3, \alpha - m + 2, \alpha - m + 3\}.$$

Если $\gamma = 2$ и $\gamma = \alpha - m + 2$, это эквивалентно

$$\partial_{x_2 x_2}^2 v_{\gamma-2}^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), x_2 \right) = 0, \quad x_2 \in (-l_2, 0), \quad (4.12)$$

в силу (4.7). Учитывая краевые условия исходной задачи при $x_2 = -l_2$, добавляем условие $\partial_{x_2} v_{\gamma-2}^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), -l_2 \right) = 0$ к (4.12). Эти два соотношения означают, что v_0^- и $v_{\alpha-m}^-$ не зависят от x_2 .

Аналогично, но учитывая теперь (4.8), получаем

$$v_1^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), \eta_1 - j \right) + \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial v_0^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) = \Phi_1 \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right), \quad (4.13)$$

если $\gamma = 3$, и

$$\begin{aligned} v_{\alpha-m+1}^- \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right), \eta_1 - j \right) + \left(\eta_1 - j - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial v_{\alpha-m}^-}{\partial x_1} \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \\ = \Phi_{\alpha-m+1} \left(\varepsilon \left(j + \frac{1}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

если $\gamma = \alpha - m + 3$; значения функций Φ_1 и $\Phi_{\alpha-m+1}$ определяются далее, в п. 4.2.

Поскольку точки $\{x_1 = \varepsilon(j + \frac{1}{2}) : j = 0, \dots, N-1\}$ образуют ε -сеть на интервале $(0, a)$, мы распространяем соотношения (4.13) и (4.14) на весь интервал $(0, a)$.

4.1.2. Решения в пограничном слое соединения. Для того чтобы найти Z , X из соотношений (4.4), пересчитываем для этого случая

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} v(\varepsilon, x) &\approx \varepsilon^0 (\partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) [1 + \partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}] + \partial_{\eta_1} Z_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0) \\ &\quad + \partial_{\eta_1} Z_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) + \varepsilon^{\alpha-m} (\partial_{\eta_1} Z_{\alpha-m+1}^{(0)} v_0^+(x_1, 0) \\ &\quad + \partial_{\eta_1} X_{\alpha-m+1}^{(0)} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) [1 + \partial_{\eta_1} X_{\alpha-m+1}^{(1)}] \\ &\quad + \partial_{\eta_1} X_{\alpha-m+1}^{(2)} \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \partial_{\eta_1} Z_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)) \\ &\quad + \varepsilon \left(Z_1^{(0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_1 x_i}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq 2} \partial_{\eta_1} Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) \Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-m+1}), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_x v(\varepsilon, x) \approx & \varepsilon^{-1} \left(\Delta_\eta Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 \Delta_\eta Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^{\alpha-m-1} \left(\Delta_\eta Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \Delta_\eta Z_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & + \Delta_\eta X_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 \Delta_\eta X_{\alpha-m+1}^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \Big) \\ & + \varepsilon^0 \left(\partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) [1 + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(1)}(\eta)] + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & + 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(2)}(\eta) \partial_{x_1 x_2}^2 v_0^+(x_1, 0) + \sum_{|\beta| \leq 2} \Delta_\eta Z_2^{(\beta)}(\eta) D^\beta v_0^+(x_1, 0) \Big) + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Учитывая соотношения (4.15) и (4.16), подставляя ряды (4.4) и (4.1) в задачу (1.21) и собирая соответствующие члены, получаем задачи для $Z_1^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ (задачи (2.21), (2.22)), $X_{\alpha-m+1}^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, $Z_{\alpha-m+1}^{(i)}$, $i = 0, 2$, и $Z_2^{(\beta)}$, $|\beta| \leq 2$ (задачи (2.23)–(2.26) для $\beta \in \mathcal{B}$). Повторяя рассуждения из п. 2.1.2, получаем следующие задачи, к которым добавлены соответствующие условия (2.19) и (2.20):

$$-\Delta_\eta Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \lambda_{\alpha-m}, & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\partial_{\eta_1} Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) = 0, \quad \eta \in \partial\Pi_{\parallel};$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(0,2)}(\eta) &= 0, & \eta \in \Pi, \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(0,2)}(\eta) &= 0, & \eta \in \partial\Pi_{\parallel}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta Z_2^{(1,1)}(\eta) &= 2\partial_{\eta_1} Z_1^{(2)}(\eta), & \eta \in \Pi, \\ \partial_{\eta_1} Z_2^{(1,1)}(\eta) &= -Z_1^{(2)}(\eta), & \eta \in \partial\Pi_{\parallel}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Задачи для $\{X_{\alpha-m+1}^{(k)}\}$ совпадают с задачами для $\{Z_1^{(k)}\}$, а задачи для $Z_{\alpha-m+1}^{(2)}$ совпадают с задачами для $Z_1^{(2)}$. Следовательно, $X_{\alpha-m+1}^{(k)} \equiv Z_1^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, и $Z_{\alpha-m+1}^{(2)} \equiv Z_1^{(2)}$.

Аналогично тому, как это сделано выше, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Существуют решения $Z_2^{(\beta)} \in H_{\text{loc}, \eta_2}^1(\Pi)$, $\beta = (0, 2)$, $\beta = (1, 1)$, задач (4.18) и (4.19) и $Z_{\alpha-m+1}^{(0)} \in H_{\text{loc}, \eta_2}^1(\Pi)$ – задачи (4.17), которые имеют дифференцируемые асимптотики*

$$Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{4h_1 l_1 \lambda_{\alpha-m}}{h_2} \eta_2 + C_{\alpha-m+1}^{(0)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1} \eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$Z_2^{(0,2)}(\eta) = \begin{cases} \eta_2 + \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{\eta_2}{h_2} + C_1^{(2)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$Z_2^{(1,1)}(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow +\infty, \\ \frac{\eta_2}{h_2} \left(-\eta_1 + \frac{1}{2}\right) + C_2^{(1,1)} + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}\eta_2)), & \eta_2 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.21)$$

При этом $Z_2^{(1,1)}$ – нечетная функция по η_1 относительно $\frac{1}{2}$, а функции $Z_{\alpha-m+1}^{(0)}$ и $Z_2^{(0,2)}$ четные по η_1 относительно $\frac{1}{2}$.

4.2. Усредненная задача и корректоры. Мы формально построили ведущие члены асимптотических разложений (4.2)–(4.4) в трех различных частях соединения Ω_ε . Далее используем метод согласования асимптотических разложений. Запишем разложение Тейлора для v_0^+ и $v_{\alpha-m}^+$ в окрестности точки $(x_1, 0)$, где $x_1 \in (0, a)$, и, переходя к переменным $\eta_2 = \varepsilon^{-1}x_2$, выводим

$$v(\varepsilon, x) = v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots + \varepsilon \eta_2 \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m+1} \eta_2 \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots \quad (4.22)$$

Учитывая асимптотики функций $Z_1^{(k)}$, $X_{\alpha-m+1}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, $Z_{\alpha-m+1}^{(0)}$, $Z_2^{(\beta)}$, $|\beta| < 2$, при $\eta_2 \rightarrow +\infty$ (см. (2.27)–(2.31)), записываем

$$v(\varepsilon, x) = v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots + \varepsilon \eta_2 \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m+1} \eta_2 \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots \quad (4.23)$$

Таким образом, ведущие члены в (4.22) и (4.23) совпадают при ε^0 , $\varepsilon^{\alpha-m}$, ε и $\varepsilon^{\alpha-m+1}$.

Для того чтобы согласовать (4.3) и (4.4), записываем (4.3) при $x_2 \rightarrow -0$ и переходим к быстрым переменным

$$v(\varepsilon, x) = v_0^-(x_1) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^-(x_1) + \dots + \varepsilon \left(\underbrace{\Phi_1(x_1)}_{\text{}} + T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^-(x_1) \right) + \varepsilon^{\alpha-m+1} (\Phi_{\alpha-m+1}(x_1) + T(\eta_1) \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^-(x_1)) + \dots \quad (4.24)$$

Имея в виду асимптотики $Z_1^{(k)}$, $X_{\alpha-m+1}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, $Z_{\alpha-m+1}^{(0)}$ и $Z_{\alpha-m+1}^{(2)}$ при $\eta_2 \rightarrow -\infty$, находим асимптотику (4.4):

$$v(\varepsilon, x) = v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \dots$$

$$\dots + \varepsilon \left(T(\eta_1) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) + \overbrace{\frac{\eta_2}{h_2} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)}^{\text{}} + \underbrace{C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0)}^{\text{}} \right)$$

$$+ \overbrace{\frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 v_0^+(x_1, 0) + C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0)}^{\text{}} + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(\left(\frac{\eta_2}{h_2} + C_1^{(0)} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right.$$

$$+ \left(\frac{4h_1 l_1 \lambda_{\alpha-m}}{h_2} \eta_2 + C_{\alpha-m+1}^{(0)} \right) v_0^+(x_1, 0) + \left(\frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 + C_1^{(0)} \right) v_{\alpha-m}^+(x_1, 0)$$

$$+ T(\eta_1) \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \left(\frac{\eta_2}{h_2} + C_1^{(2)} \right) \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \Big) + \dots, \quad (4.25)$$

где $T(\eta_1) = -\eta_1 + \frac{1}{2} + [\eta_1]$ и $[\eta_1]$ – целая часть числа η_1 .

Приравнивая соответствующие коэффициенты в (4.24) и (4.25) при ε^0 и $\varepsilon^{\alpha-m}$, получаем

$$v_0^+(x_1, 0) = v_0^-(x_1), \quad v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) = v_{\alpha-m}^-(x_1), \quad x_1 \in (0, a). \quad (4.26)$$

Приравнивая коэффициенты при ε^1 , выводим

$$\partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + 4h_1 l_1 \lambda_0 v_0^+(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (0, a), \quad (4.27)$$

для членов, обрамленных фигурной скобкой сверху, и

$$\Phi_1(x_1) = C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + C_1^{(0)} v_0^+(x_1, 0), \quad x_1 \in (0, a), \quad (4.28)$$

для слагаемых, обрамленных фигурной скобкой снизу. Более того, принимая во внимание равенство (4.13), выводим

$$v_1^-\left(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) = \Phi_1(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0), \quad x \in G_\varepsilon^{(2)}. \quad (4.29)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha-m+1}(x_1) &= C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + C_1^{(0)} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \\ &\quad + C_1^{(2)} \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) + C_{\alpha-m+1}^{(0)} v_0^+(x_1, 0). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Более того, учитывая (4.14), получаем

$$v_{\alpha-m+1}^-\left(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) = \Phi_{\alpha-m+1}(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0), \quad x \in G_\varepsilon^{(2)}. \quad (4.31)$$

Окончательно имеем

$$\partial_{x_2} v_{\alpha-m+1}^+(x_1, 0) = -4h_1 l_1 \lambda_0 v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) - 4h_1 l_1 \lambda_{\alpha-m} v_0^+(x_1, 0) - \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0). \quad (4.32)$$

Соотношение (4.27) замыкает задачу (2.5). Таким образом, функция v_0^+ и число λ_0 удовлетворяют задаче Стеклова (2.41). Далее, пусть λ_0 – собственное значение задачи (2.41), v_0^+ – соответствующая собственная функция, нормированная в соответствии с соотношением (2.45).

Аналогично, соотношение (4.32) замыкает задачу (4.5). Таким образом для $v_{\alpha-m}^+$ и $\lambda_{\alpha-m}$ получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta_x v_{\alpha-m}^+(x) &= 0, \quad x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_{\alpha-m}^+(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad v_{\alpha-m}^+(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) &= -4h_1 l_1 \lambda_0 v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) - 4h_1 l_1 \lambda_{\alpha-m} v_0^+(x_1, 0) - \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Поскольку λ_0 – собственное значение задачи (2.41), мы выбираем $\lambda_{\alpha-m}$ таким, чтобы выполнялось условие разрешимости для задачи (4.33). Записывая интегральное тождество (2.42) задачи (2.41) с пробной функцией $v_{\alpha-m}^+$ и соответствующее интегральное тождество задачи (4.33) с пробной функцией v_0^+ и учитывая (2.45) и (4.35), вычитаем одно из другого. Имеем

$$\lambda_{\alpha-m} = -\frac{1}{4h_1 l_1} \int_{I_0} v_0^+(x_1, 0) \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) dx_1. \quad (4.34)$$

Очевидно, решение задачи (4.33) определяется не единственным образом, поэтому для единственности требуем выполнения следующего условия ортогональности:

$$\int_{I_0} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) v_0^+(x_1, 0) dx_1 = 0. \quad (4.35)$$

4.3. Глобальное асимптотическое приближение в Ω_ε и оценка невязки. Аппроксимирующую функцию строим аналогично тому, как было сделано в § 3. Имеем

$$R_\varepsilon(x) = \begin{cases} v_0^+(x) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x) + \chi_0(x_2) \mathcal{N}_\varepsilon^+\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_0, \\ v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in G_\varepsilon^{(1)}, \\ v_0^+(x_1, 0) + \varepsilon^{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \varepsilon \left(\Phi_1(x_1) \right. \\ \quad \left. + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \right) + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(\Phi_{\alpha-m+1}(x_1) \right. \\ \quad \left. + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \right) + \chi_0(x_2) \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad (4.36)$$

где χ_0 – гладкая срезающая функция такая, что $\chi_0(x_2) = 1$ при $|x_2| \leq \tau_0/2$ и $\chi_0(x_2) = 0$ при $|x_2| \geq \tau_0$ ($\tau_0 < \min\{\delta_0, l_2\}$ (см. п. 1.1));

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta) = & \varepsilon \left(Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 (Z_1^{(i)}(\eta) - \delta_{i,2} \eta_2) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left((Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) - \eta_2) v_0^+(x_1, 0) + (Z_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) - \eta_2) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & \left. + (X_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) - \eta_2) v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 (X_{\alpha-m+1}^{(i)}(\eta) - \delta_{i,2} \eta_2) \partial_{x_i} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta) = & \varepsilon \left(Z_1^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_0^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) v_0^+(x_1, 0) + Z_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & \left. + X_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \sum_{i=1}^2 X_{\alpha-m+1}^{(i)}(\eta) \partial_{x_i} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta) = & \varepsilon \left((Z_1^{(1)}(\eta) - T(\eta_1)) \partial_{x_1} v_0^+(x_1, 0) \right. \\ & + \left(Z_1^{(2)}(\eta) - \frac{\eta_2}{h_2} - C_1^{(2)} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\ & + \left(Z_1^{(0)}(\eta) - \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 - C_1^{(0)} \right) v_0^+(x_1, 0) \\ & \left. + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(\left(Z_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) - \frac{4h_1 l_1 \lambda_{\alpha-m}}{h_2} \eta_2 \right) v_0^+(x_1, 0) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Z_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) - \frac{\eta_2}{h_2} \right) \partial_{x_2} v_0^+(x_1, 0) \\
& + \left(X_{\alpha-m+1}^{(0)}(\eta) - \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2} \eta_2 \right) v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \\
& + (X_{\alpha-m+1}^{(1)}(\eta) - T(\eta_1)) \partial_{x_1} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \\
& + \left(X_{\alpha-m+1}^{(2)}(\eta) - \frac{\eta_2}{h_2} \right) \partial_{x_2} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \Bigg). \tag{4.39}
\end{aligned}$$

В силу (4.28) и (4.30) легко проверить, что $R_\varepsilon|_{x_2=0+} = R_\varepsilon|_{x_2=0-}$ на Q_ε , т. е. $R_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1)$. Также, используя (4.27) и (4.32), можно проверить, что

$$\partial_{x_2} R_\varepsilon|_{x_2=0+} = \partial_{x_2} R_\varepsilon|_{x_2=0-} \quad \text{на } Q_\varepsilon. \tag{4.40}$$

4.3.1. *Невязка в уравнении задачи (1.21).* Подставляя R_ε и $\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}$ в дифференциальное уравнение задачи (1.21) вместо $v(\varepsilon, \cdot)$ и $\Lambda(\varepsilon)$ соответственно и вычисляя невязки с учетом задач (2.21)–(2.26), (4.17)–(4.19) и задач (2.41), (4.33), получаем

$$\begin{aligned}
& \Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{\alpha-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) R_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\alpha-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) R_\varepsilon(x) \\
& + \varepsilon^{-1} \chi_0'(x_2) (\partial_{\eta_2} \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} + \partial_{x_2} \left(\chi_0'(x_2) \mathcal{N}_\varepsilon^+ \left(x_1, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\
& + \varepsilon^{-1} \chi_0(x_2) (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} + \chi_0(x_2) \partial_{x_1} ((\partial_{x_1} \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}) \quad \text{в } \Omega_0, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) R_\varepsilon(x) \\
& = \varepsilon^{\alpha-m} \partial_{x_1 x_1}^2 v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) + \varepsilon^{2\alpha-2m-1} \lambda_{\alpha-m} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \\
& + \varepsilon^{-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^- \left(x_1, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-1} (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \partial_{x_1} ((\partial_{x_1} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}) \quad \text{в } G_\varepsilon^{(1)}, \tag{4.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_x R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{\alpha-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) R_\varepsilon(x) \\
& = \varepsilon \partial_{x_1} \left(\partial_{x_1} \Phi_1(x_1) + T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) \\
& + \varepsilon^{\alpha-m+1} \partial_{x_1} \left(\partial_{x_1} \Phi_{\alpha-m+1}(x_1) + T \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \right) \\
& + \varepsilon^{\alpha-1}(\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) R_\varepsilon(x) + \varepsilon^{-1} \chi_0'(x_2) (\partial_{\eta_2} \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \partial_{x_2} \left(\chi_0'(x_2) \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^- \left(x_1, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + \varepsilon^{-1} \chi_0(x_2) (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \\
& + \chi_0(x_2) \partial_{x_1} ((\partial_{x_1} \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}}) \quad \text{в } G_\varepsilon^{(2)}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

4.3.2. *Невязка на границе.* Легко проверить, что $R_\varepsilon = 0$ на Γ_1 и $\partial_\nu R_\varepsilon = 0$ на всей границе $\partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_1$, за исключением вертикальных частей;

$$\partial_{x_1} R_\varepsilon(x) = \chi_0(x_2) (\partial_{x_1} \mathcal{N}_\varepsilon^+(x_1, \eta))|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \tag{4.44}$$

на вертикальной части $\partial\Omega_0$,

$$\partial_{x_1} R_\varepsilon(x) = (\partial_{x_1} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \quad (4.45)$$

на вертикальной части $\partial G_\varepsilon^{(1)}$, и

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} R_\varepsilon(x) = & \varepsilon \left(\partial_{x_1} \Phi_1(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) \\ & + \varepsilon^{\alpha-m+1} \left(\partial_{x_1} \Phi_{\alpha-m+1}(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_{\alpha-m+1}^+(x_1, 0) \right) \\ & + \chi_0(x_2) (\partial_{x_1} \mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

на вертикальной части $\partial G_\varepsilon^{(2)}$.

4.3.3. Невязка в интегральном тождестве. Умножая (4.41)–(4.43) на произвольную функцию $\psi \in \mathcal{H}_\varepsilon$, интегрируя по частям и учитывая соотношения (4.40) и (4.44)–(4.46), выводим

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x R_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi \, dx + \varepsilon^{\alpha-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} R_\varepsilon \psi \, dx \\ + \varepsilon^{-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \int_{G_\varepsilon^{(1)}} R_\varepsilon \psi \, dx = \ell_\varepsilon(\psi); \end{aligned} \quad (4.47)$$

здесь линейный функционал ℓ_ε определен следующим образом:

$$\ell_\varepsilon(\psi) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9, \quad (4.48)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \varepsilon^{\alpha-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \int_{\Omega_0} R_\varepsilon \psi \, dx, \\ l_2 &= \varepsilon^{2\alpha-2m-1} \lambda_{\alpha-m} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \psi \, dx \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha-m} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_1 x_1}^2 v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \psi \, dx, \\ l_3 &= \varepsilon^{-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) \psi \, dx \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \psi \, dx, \\ l_4 &= -\varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \left(\partial_{x_1} \Phi_1(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_0^+(x_1, 0) \right) \partial_{x_1} \psi \, dx, \\ l_5 &= -\varepsilon^{\alpha-m+1} \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \left(\partial_{x_1} \Phi_{\alpha-m+1}(x_1) + T\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1 x_1}^2 v_{\alpha-m+1}^+(x_1, 0) \right) \partial_{x_1} \psi \, dx, \\ l_6 &= \varepsilon^{\alpha-1} (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) \int_{G_\varepsilon^{(2)}} R_\varepsilon \psi \, dx, \\ l_7 &= \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi_0'(x_2) (\partial_{\eta_2} \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \psi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi_0'(x_2) \mathcal{N}_\varepsilon\left(x_1, \frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} \psi \, dx, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}
l_8 &= \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi_0(x_2) (\partial_{x_1 \eta_1}^2 \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \psi \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}} \chi_0(x_2) (\partial_{x_1} \mathcal{N}_\varepsilon(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \psi \, dx, \\
l_9 &= - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} (\partial_{x_1} \mathcal{N}_{1,\varepsilon}^-(x_1, \eta)) \Big|_{\eta=\frac{x}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \psi \, dx.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}_\varepsilon$ совпадает с $\mathcal{N}_\varepsilon^+$ на Ω_0 и с $\mathcal{N}_{2,\varepsilon}^-$ на $G_\varepsilon^{(2)}$.

Оценим $|\ell_\varepsilon(\psi)|$. Легко заметить, что интеграл в l_1 из (4.49) имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})$.

Интегралы в l_2 можно оценить с помощью неравенства типа Фридрихса (2.79) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{2\alpha-2m-1} \left| \lambda_{\alpha-m} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_{\alpha-m}^+(x_1, 0) \psi \, dx \right| \\
\leq \varepsilon^{2\alpha-2m-\frac{1}{2}} C_1 \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \leq \varepsilon^{2(\alpha-m)} C_2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Главный член в первом интеграле l_3 из (4.49) оцениваем также с помощью неравенства (2.79). Получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \left| \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Z_1^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v_0^+(x_1, 0) \psi \, dx \right| &\leq \sqrt{\varepsilon} C_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \sqrt{\int_{G_\varepsilon^{(1)}} \left| Z_1^{(0)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx} \\
&\leq \varepsilon C_2 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \sqrt{\int_{\Pi_{l_1}} |Z_1^{(0)}(\eta)|^2 d\eta} \leq \varepsilon C_3 \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем второй интеграл в l_3 , который оказывается порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Можно легко проверить, что интеграл в l_4 имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$, интеграл в l_5 имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-m+1})$, а интеграл в l_6 из (4.49) имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})$.

Используя (2.27)–(2.29), получаем, что первый интеграл в l_7 из (4.49) является экспоненциально малым, а второй имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-m+1})$. В силу [19, лемма 3.1] интегралы в l_8 из (4.49) имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{1-\delta})$, где δ – произвольное положительное число.

Очевидно, интеграл в l_9 имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$.

Таким образом, имеем

$$|\ell_\varepsilon(\psi)| \leq \begin{cases} c_1(\delta) \varepsilon^{2(\alpha-m)} \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, & \text{если } \alpha \in \left(m, m + \frac{1}{2}\right), \\ c_2(\delta) \varepsilon^{1-\delta} \|\psi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, & \text{если } \alpha \in \left[m + \frac{1}{2}, m + 1\right). \end{cases} \quad (4.51)$$

С помощью оператора $A_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon \mapsto \mathcal{H}_\varepsilon$, определенного в (1.22), мы выводим из (4.47) и (4.51) следующую оценку:

$$\|R_\varepsilon - (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}) A_\varepsilon R_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leq c(\delta) \varepsilon^{\nu(\alpha)}, \quad (4.52)$$

где $\nu(\alpha) = 2(\alpha-m)$, если $\alpha \in (m, m + \frac{1}{2})$, или $\nu(\alpha) = 1-\delta$, если $\alpha \in [m + \frac{1}{2}, m + 1)$; δ – достаточно малое произвольное положительное число.

4.4. Основные утверждения. Обоснование асимптотики проводится тем же путем, что и в § 3.

В этом случае теорема 2 остается верной без изменений.

Пусть $\lambda_0^{(n+1)} = \dots = \lambda_0^{(n+r)}$ – r -кратное собственное значение усредненной задачи (2.41); соответствующие собственные функции $v_0^{+,n+1}, \dots, v_0^{+,n+r}$ ортонормированы в $\mathcal{V}_0$. С использованием формулы (4.34) нами построены члены $\varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}^{(n+i)}$, $i = 1, \dots, r$, асимптотического разложения (4.1) и определено единственное решение $v_{\alpha-1}^{+,n+i}$ задачи (4.33).

Сформулируем следующее утверждение, предполагая, что все $\lambda_{\alpha-m}^{(n+i)}$, $i = 1, \dots, r$, различны и

$$\lambda_{\alpha-m}^{(n+1)} < \lambda_{\alpha-m}^{(n+2)} < \dots < \lambda_{\alpha-m}^{(n+r)}. \quad (4.53)$$

Как было отмечено выше, в общем случае можно обратиться к работе [2].

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены оценки (4.53). Тогда для любого положительного достаточно малого δ и любого $i \in \{1, \dots, r\}$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{1-\alpha} \lambda_{n+i}(\varepsilon) - (\lambda_0^{(n+i)} + \varepsilon^{\alpha-m} \lambda_{\alpha-m}^{(n+i)})| &\leq C_1(n, \delta) \varepsilon^{\nu(\alpha)}, \\ \left\| \varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{2}} u_{n+i}(\varepsilon, \cdot) - \frac{R_\varepsilon^{(n+i)}}{\|R_\varepsilon^{(n+i)}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_2(n, \delta) \varepsilon^{\nu(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где значение $\nu(\alpha)$ определено в (4.52), $R_\varepsilon^{(n+i)}$ – аппроксимирующая функция, построенная в (4.36) с помощью решений $v_0^{+,n+i}$, $v_{\alpha-m}^{+,n+i}$ и $Z_1^{(k)}$, $Z_{\alpha-m+1}^{(0)}$, $Z_{\alpha-m+1}^{(2)}$, $X_{\alpha-m+1}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$.

§ 5. Высокочастотные ячеичные колебания

Известно, что в спектральных задачах в областях с концентрированными массами бывают низкочастотные и высокочастотные колебания (см. [9] и [12]–[17]). В работе [16] было показано, что высокие частоты колебаний могут присутствовать только в диапазоне $[T, +\infty)$, где

$$T = \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_n(\varepsilon)$$

– порог низкочастотных колебаний.

Для нашей задачи (1.1) (см. [2, теорема 5.2] и лемму 1) имеем

$$T = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2l_2} \right)^2, & \text{если } \alpha \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } \alpha \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Эти значения еще раз показывают качественные отличия в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций задачи (1.1) для различных значений параметра α .

В работе [2] мы изучали некоторые типы высокочастотных колебаний в задаче (1.1) в случае $\alpha \in (0, 1]$. Здесь мы показываем, что существует новый

тип высокочастотных колебаний в задаче (1.1) для любого $\alpha \in (0, +\infty)$. Обычно такой тип высокочастотных колебаний определяется соответствующей локальной спектральной задачей. В нашем случае он соответствует следующей спектральной ячейочной задаче:

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta \mathcal{Z}(\eta) &= \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \Lambda \mathcal{Z}, & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\ \partial_{\eta_1} \mathcal{Z}(\eta) &= 0, \quad \eta \in \partial \Pi_\parallel, \\ \partial_{\eta_1}^s \mathcal{Z}(0, \eta_2) &= \partial_{\eta_1}^s \mathcal{Z}(1, \eta_2), \quad \eta_2 > 0, \quad s = 0, 1, \\ \partial_{\eta_2} \mathcal{Z}(\eta_1, 0) &= 0, \quad (\eta_1, 0) \in \partial \Pi, \\ \partial_{\eta_2} \mathcal{Z}(\eta_1, -l_1) &= 0, \quad (\eta_1, -l_1) \in \partial \Pi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть $\widehat{C}_0^\infty(\overline{\Pi})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Pi}$, которые удовлетворяют условию периодичности (2.19) и являются финитными по η_2 , т. е.

$$\forall v \in \widehat{C}_0^\infty(\overline{\Pi}) \quad \exists R > 0: \forall \eta \in \overline{\Pi}, \quad |\eta_2| \geq R \implies v(\eta) = 0.$$

Пусть $\mathcal{H}$ – пополнение пространства $\widehat{C}_0^\infty(\overline{\Pi})$ по норме

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = (\|\nabla_\eta u\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\rho u\|_{L_2(\Pi)}^2)^{1/2},$$

где $\rho(\eta_2) = (1 + |\eta_2|)^{-1}$, $\eta_2 \in \mathbb{R}$.

Число Λ – собственное значение задачи (5.1), если существует функция $\mathcal{Z} \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ такая, что выполняется следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Pi} \nabla_\eta \mathcal{Z} \cdot \nabla_\eta v \, d\eta = \Lambda \int_{\Pi_{l_1}} \mathcal{Z} v \, d\eta \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (5.2)$$

Применяя неравенство типа Харди

$$\int_0^{+\infty} (1 + \eta_2)^{-2} \phi^2(\eta_2) \, d\eta_2 \leq 4 \int_0^{+\infty} |\partial_{\eta_2} \phi|^2 \, d\eta_2 \quad \forall \phi \in C^1([0, +\infty)), \quad \phi(0) = 0,$$

можно показать (см., например, [20, лемма 3.1]), что задача (5.1) эквивалентна спектральной задаче для некоторого положительного самосопряженного компактного оператора. Поэтому собственные значения задачи (5.1) образуют последовательность

$$0 = \Lambda_0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

с учетом кратности. Соответствующая последовательность собственных функций $\{\mathcal{Z}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{H}$ может быть ортонормирована следующим образом:

$$\int_{\Pi_{l_1}} \mathcal{Z}_n \mathcal{Z}_k \, d\eta = \delta_{n,k}, \quad \{n, k\} \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.3)$$

Из результатов [20, § 3.1] также следует, что собственные функции имеют следующую асимптотику:

$$\mathcal{Z}_n(\eta) = \begin{cases} \mathcal{O}(\exp(-2\pi\eta_2)) & \text{при } \eta_2 \rightarrow +\infty \text{ в } \Pi^+, \\ C_n(h_2) + \mathcal{O}(\exp(\pi h_2^{-1}\eta_2)) & \text{при } \eta_2 \rightarrow -\infty \text{ в } \Pi^- \end{cases}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Теперь, учитывая гармоничность $\mathcal{Z}_n(\eta)$ в $\Pi^+ \cup \Pi^-$, можно утверждать, что $C_n(h_2) = 0$, более того, $\mathcal{Z}_n(\eta) = 0$ при $\eta \in \Pi^-$ и существует $\varrho_0 > 0$ такое, что для любых $\eta \in \Pi^+$, $\eta_2 \geq \varrho_0$ выполняется $\mathcal{Z}_n(\eta) = 0$.

Теперь рассмотрим любое положительное собственное значение Λ задачи (5.1) и соответствующую собственную функцию $\mathcal{Z}$, четную по η_1 относительно $\frac{1}{2}$ (благодаря симметричности области Π относительно прямой $\{\eta: \eta_1 = \frac{1}{2}\}$ такая собственная функция всегда существует). Далее, продолжаем ее периодически вдоль оси $O\eta_1$. Отметим, что в силу (5.3) имеет место асимптотика

$$\left\| \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{\varepsilon} = \sqrt{(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})_{\mathcal{H}_{\varepsilon}}} \sim c\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

Подставляя $\mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ и $\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda$ в дифференциальное уравнение задачи (1.1) вместо $u(\varepsilon, \cdot)$ и $\lambda(\varepsilon)$ соответственно и учитывая приведенные выше свойства функции $\mathcal{Z}$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_x \left(\mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) + \varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{в } \Omega_0, \\ \Delta_x \left(\mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) + \varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= 0 \quad \text{в } G_{\varepsilon}^{(2)}, \\ \Delta_x \left(\mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) + \varepsilon^{-\alpha}\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \mathcal{Z}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= 0 \quad \text{в } G_{\varepsilon}^{(1)}, \end{aligned}$$

и при этом $\mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи (1.1). В результате получаем

$$\left(\mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), v \right)_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} - \varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \left(\mathcal{A}_{\varepsilon} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), v \right)_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} = \varepsilon^{\alpha-2}\Lambda \int_{\Omega_0} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\varepsilon}, \quad (5.5)$$

где $\mathcal{A}_{\varepsilon}: \mathcal{H}_{\varepsilon} \mapsto \mathcal{H}_{\varepsilon}$ — соответствующий оператор задачи (1.1), который определен следующим равенством:

$$(\mathcal{A}_{\varepsilon} u, v)_{\mathcal{H}_{\varepsilon}} = \int_{\Omega_0 \cup G_{\varepsilon}^{(2)}} uv \, dx + \varepsilon^{-\alpha} \int_{G_{\varepsilon}^{(1)}} uv \, dx \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_{\varepsilon}.$$

Учитывая неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_0} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) v \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega_0^{\varepsilon}} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) v \, dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega_0^{\varepsilon}} \left| \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega_0^{\varepsilon}} |v|^2 dx} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\int_{\Pi^+} |\mathcal{Z}(\eta)|^2 d\eta} \varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \|v\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_0 \varepsilon^{1-\delta} \|v\|_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.6)$$

(в последней строке мы использовали [13, лемма 1.5]; здесь $\Omega_0^{\varepsilon} := \Omega_0 \cap \{x: x_2 \in (0, \varepsilon\varrho_0)\}$), первое утверждение леммы Вишика–Люстерника (см. [41, лемма 12]) и соотношение (5.4), выводим

$$\min_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda} - \frac{1}{\lambda_n(\varepsilon)} \right| \leq \left\| \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{\varepsilon}^{-1} \left\| \mathcal{A}_{\varepsilon} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda} \mathcal{Z}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon^{1-\delta}, \quad (5.7)$$

где δ — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Используя второе утверждение леммы Вишика–Люстерника (см. [41, лемма 12]), доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого положительного собственного значения Λ задачи (5.1) существует собственное значение $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ задачи (1.1) ($n(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) такое, что*

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda} - \frac{1}{\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)} \right| \leq C_1 \varepsilon^{1-\delta}. \quad (5.8)$$

Кроме того, для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ существует конечная линейная комбинация

$$\tilde{U}_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} d_i(\varepsilon) u_{k(\varepsilon)+i}(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon \quad \left(\|\tilde{u}_\varepsilon\|_\varepsilon^2 = 1 = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} d_i^2(\varepsilon) \lambda_{k(\varepsilon)+i}(\varepsilon) \right),$$

таких собственных функций, соответствующих всем собственным значениям

$$\lambda_{k(\varepsilon)}^{-1}(\varepsilon), \lambda_{k(\varepsilon)+1}^{-1}(\varepsilon), \dots, \lambda_{k(\varepsilon)+p(\varepsilon)}^{-1}(\varepsilon)$$

оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ из отрезка $[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda} - C_1 \varepsilon^\delta, \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}\Lambda} + C_1 \varepsilon^\delta]$, что

$$\left\| \frac{\mathcal{Z}(\frac{\cdot}{\varepsilon})}{\|\mathcal{Z}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_\varepsilon} - \tilde{U}_\varepsilon \right\|_\varepsilon \leq 2\varepsilon^{1-2\delta}. \quad (5.9)$$

Работа была написана в Математическом институте Обервольфаха, Германия (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach) в ноябре 2013 г. при поддержке программы “Исследование в парах” (“Research in Pairs”). Авторы выражают глубокую благодарность за гостеприимство и предоставленные отличные условия для работы. Авторы выражают признательность рецензентам, замечания которых помогли улучшить изложение материала статьи.

Список литературы

1. G. A. Chechkin, T. A. Mel'nyk, *Asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions to a spectral problem in a thick cascade junction with concentrated masses*, Preprint 2011-12, Oberwolfach Preprints (OWP), MFO, Oberwolfach-Walke, Germany, 2011, 39 pp., ISSN 1864-7596.
2. G. A. Chechkin, T. A. Mel'nyk, “Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses”, *Appl. Anal.*, **91**:6 (2012), 1055–1095.
3. G. A. Chechkin, T. A. Mel'nyk, *Spatial-skin effect for a spectral problem with “slightly heavy” concentrated masses in a thick cascade junction*, Preprint 2012-10, Oberwolfach Preprints (OWP), MFO, Oberwolfach-Walke, Germany, 2012, ISSN 1864-7596.
4. Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, “О новых типах колебаний густых каскадных соединений с концентрированными массами”, *Докл. РАН*, **448**:6 (2013), 642–647; англ. пер.: T. A. Mel'nik, G. A. Chechkin, “On new types of vibrations of thick cascade junctions with concentrated masses”, *Dokl. Math.*, **87**:1 (2013), 102–106.
5. G. A. Chechkin, T. A. Mel'nyk, “Spatial-skin effect for eigenvibrations of a thick cascade junction with “heavy” concentrated masses”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **37**:1 (2014), 56–74.

6. G. A. Chechkin, T. A. Mel'nyk, "High frequency cell-vibrations and spatial skin-effect in thick cascade junction with heavy concentrated masses", *C. R. Mécanique*, **342**:4 (2014), 221–228.
7. Y. Amirat, G. A. Chechkin, R. R. Gadyl'shin, "Asymptotics of the solution of a Dirichlet spectral problem in a junction with highly oscillating boundary", *C. R. Mécanique*, **336**:9 (2008), 693–698.
8. Т. П. Чечкина, "Усреднение в каскадных соединениях с "широкой" трансмиссионной областью", *Уравнения в частных производных*, СМФН, **39**, РУДН, М., 2011, 151–162; англ. пер.: Т. P. Chechkina, "Averaging in cascade junctions with a "wide" transmission domain", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **190**:1 (2013), 157–169.
9. E. Sánchez-Palencia, "Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses", *Trends and applications of pure mathematics to mechanics* (Palaiseau, 1983), Lecture Notes in Phys., **195**, Springer, Berlin, 1984, 346–368.
10. М. Е. Перес, Г. А. Чечкин, Е. И. Яблокова, "О собственных колебаниях тела с "легкими" концентрированными массами на поверхности", *УМН*, **57**:6(348) (2002), 195–196; англ. пер.: М. E. Perez, G. A. Chechkin, E. I. Yablokova, "On eigenvibrations of a body with "light" concentrated masses on the surface", *Russian Math. Surveys*, **57**:6 (2002), 1240–1242.
11. G. A. Chechkin, M. E. Pérez, E. I. Yablokova, "Non-periodic boundary homogenization and "light" concentrated masses", *Indiana Univ. Math. J.*, **54**:2 (2005), 321–348.
12. M. Lobo, E. Pérez, "A skin effect for systems with many concentrated masses", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb*, **327**:8 (1999), 771–776.
13. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990, 312 с.; англ. пер.: О. A. Oleĭnik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, Stud. Math. Appl., **26**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992, xiv+398 pp.
14. Т. А. Мельник, С. А. Назаров, "Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами", *Докл. РАН*, **333**:1 (1993), 13–15; англ. пер.: Т. A. Mel'nik, S. A. Nazarov, "Asymptotic structure of the spectrum in a problem on harmonic vibrations of a hub with heavy spokes", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:3 (1994), 428–432.
15. M. Lobo, E. Perez, "On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **3**:2 (1993), 249–273.
16. Т. А. Mel'nyk, "Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **11**:6 (2001), 1001–1027.
17. M. Lobo, E. Pérez, "Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review", *C. R. Mécanique*, **331**:4 (2003), 303–317.
18. Т. А. Mel'nyk, S. A. Nazarov, "Asymptotic structure of the spectrum of the Neumann problem in a thin comb-like domain", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**:12 (1994), 1343–1348.
19. Т. А. Мельник, С. А. Назаров, "Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа «густого гребешка»", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1996, №19, 138–174; англ. пер.: Т. A. Mel'nik, S. A. Nazarov, "The asymptotics of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense-comb" type", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **85**:6 (1997), 2326–2346.
20. Т. А. Mel'nyk, "Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1", *Math. Methods Appl. Sci.*, **23**:4 (2000), 321–346.
21. Т. А. Mel'nyk, "Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction", *Nonlinear Oscil.*, **4**:1 (2001), 91–105.

22. T. A. Mel'nyk, "Scheme of investigation of the spectrum of a family of perturbed operators and its application to spectral problems in thick junctions", *Nonlinear Oscil. (N. Y.)*, **6**:2 (2003), 232–249.
23. C. Leal, J. Sanchez-Hubert, "Perturbation of the eigenvalues of a membrane with a concentrated mass", *Quart. Appl. Math.*, **47**:1 (1989), 93–103.
24. O. A. Oleinik, J. Sanchez-Hubert, G. A. Yosifian, "On vibrations of a membrane with concentrated masses", *Bull. Sci. Math.*, **115**:1 (1991), 1–27.
25. M. Lobo, E. Pérez, "Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **5**:5 (1995), 565–585.
26. S. A. Nazarov, "Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions", *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **27**:6 (1993), 777–799.
27. G. A. Chechkin, "On the vibration of a partially fastened membrane with many "light" concentrated masses on the boundary", *C. R. Mécanique*, **332**:12 (2004), 949–954.
28. Г. А. Чечкин, "Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "легких" концентрированных масс. Двумерный случай", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 161–204; англ. пер.: G. A. Chechkin, "Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions of an elliptic operator in a domain with many "light" concentrated masses situated on the boundary. Two-dimensional case", *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 805–846.
29. Г. А. Чечкин, "Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области с большим количеством "легких" концентрированных масс, редко расположенных на границе. Двумерный случай", Тр. ММО, **70**, МЦНМО, М., 2009, 102–182; англ. пер.: G. A. Chechkin, "Asymptotic expansion of eigenelements of the Laplace operator in a domain with a large number of "light" concentrated masses sparsely situated on the boundary. Two-dimensional case", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2009** (2009), 71–134.
30. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, "Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях", *УМН*, **38**:2(230) (1983), 3–76; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, O. A. Oleinik, "Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains", *Russian Math. Surveys*, **38**:2 (1983), 1–66.
31. Е. М. Ландис, Г. П. Панасенко, "Об одном варианте теоремы Фрагмена–Линделёфа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1979, № 5, 105–136; англ. пер.: E. M. Landis, G. P. Panasenko, "A variant of a Phragmén–Lindelöf theorem for elliptic equations with coefficients that are periodic functions of all variables except one", *Topics in modern mathematics, Petrovskii Semin.*, Contemp. Soviet Math., **5**, Consultants Bureau [Plenum], New York, 1985, 133–172.
32. Е. М. Ландис, Г. П. Панасенко, "Теорема об асимптотике решений эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной", *Докл. АН СССР*, **235**:6 (1977), 1253–1255; англ. пер.: E. M. Landis, G. P. Panasenko, "A theorem on the asymptotics of solutions of elliptic equations with coefficients periodic in all variables except one", *Soviet Math. Dokl.*, **18**:4 (1977), 1140–1143.
33. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, De Gruyter Exp. Math., **13**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994, viii+525 pp.
34. T. A. Mel'nyk, "Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction", *Z. Anal. Anwendungen*, **18**:4 (1999), 953–975.
35. А. М. Ильин, "Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай", *Матем. сб.*, **99(141)**:4 (1976),

- 514–537; англ. пер.: А. М. П'ін, “A boundary value problem for the elliptic equation of second order in a domain with a narrow slit. 1. The two-dimensional case”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:4 (1976), 459–480.
36. А. М. Ильин, “Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием”, *Матем. сб.*, **103**(145):2(6) (1977), 265–284; англ. пер.: А. М. П'ін, “A boundary value problem for the second order elliptic equation in a domain with a narrow slit. 2. Domain with a small cavity”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 227–244.
37. А. М. Ильин, “Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 1981, № 6, 57–82; англ. пер.: А. М. П'ін, “Investigation of the asymptotic behavior of the solution of an elliptic boundary-value problem in a domain with a small hole”, *J. Sov. Math.*, **33** (1986), 994–1014.
38. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989, 336 с.; англ. пер.: А. М. П'ін, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+281 pp.
39. А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения*, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2007, 264 с.; англ. пер.: G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, A. S. Shamaev, *Homogenization. Methods and Applications*, Transl. Math. Monogr., **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, x+234 pp.
40. Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, “Усреднение краевой задачи в густом каскадном соединении”, *Проблемы матем. анализа*, **37** (2008), 47–72; англ. пер.: Т. А. Mel'nik, G. A. Chechkin, “Homogenization of a boundary value problem in a thick cascade junction”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **154**:1 (2008), 50–77.
41. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122; англ. пер.: М. I. Višik, L. A. Ljusternik, “Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **20** (1962), 239–364.

ТАРАС АНАТОЛЬЕВИЧ МЕЛЬНИК
(TARAS A. MEL'NYK)
Киевский национальный университет
им. Т. Шевченко,
механико-математический факультет, Украина
E-mail: melnyk@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
07.04.2014
14.11.2014

ГРИГОРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ЧЕЧКИН
(GREGORY A. CHECHKIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: chechkin@mech.math.msu.su