Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Хачатрян, О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 07:57:06

УДК 517.968.4

Х. А. Хачатрян

О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой

Исследованы некоторые классы нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой. Указанные классы уравнений возникают в теории переноса излучения в ядерных реакторах, в кинетической теории газов, в нелинейных конкуренционных системах Риккера для бегущих волн. Сочетание специальных итерационных методов с методами теории построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора позволяет доказать конструктивные теоремы существования положительных решений в различных функциональных пространствах. Приведены примеры, иллюстрирующие эти уравнения, для которых выполнены все условия сформулированных теорем.

Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна, условие Каратеодори, монотонность, индукция, итерации, сходимость.

DOI: 10.4213/im8245

§ 1. Введение

Нелинейными интегральными уравнениями типа Гаммерштейна вида

$$f(x) = \int_E K(x-t)H(t, f(t)) dt, \quad x \in E \equiv \begin{cases} \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \\ \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

относительно вещественной и измеримой функции $f(x)$ описывается ряд задач современного естествознания. В частности, такие уравнения возникают в теории переноса излучения в ядерных реакторах, в кинетической теории газов, в нелинейных конкуренционных системах Риккера для бегущих волн (см. [1]–[5]).

В уравнении (1.1) ядро K – определенная на числовой оси $\mathbb{R}$, неотрицательная, суммируемая и существенно ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, а $H(t, u)$ – определенная на $E \times \mathbb{R}^+$ вещественная измеримая функция, обладающая условием “критичности”:

$$H(t, 0) \geq 0, \quad (1.2)$$

при всяком $t \in E$ и удовлетворяющая определенным условиям (см. формулировки основных результатов).

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13YR-1A0003.

Первые результаты исследований нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна были получены в начале прошлого столетия в работах [6], [7]. Затем в 1950–1970 годах были начаты систематические исследования этих уравнений в работах М. А. Красносельского и его учеников. В частности, в работах [8]–[12] получены различные необходимые и достаточные условия, обеспечивающие компактность (или полную непрерывность) операторов Гаммерштейна вида

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, t)H(t, f(t)) dt, \quad x \in (a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty. \quad (1.3)$$

Аналогичные вопросы исследовались на Западе научной школой Ф. Браудера (см., например, [13]–[15]).

С использованием условий полной непрерывности и различных ограничений на нелинейность доказаны также теоремы существования и единственности решений для соответствующих уравнений Гаммерштейна. Однако в этих работах существенную роль играла компактность соответствующих нелинейных отображений (в конкретных банаховых пространствах), а в некоторых случаях также ограниченность области интегрирования.

В последнее время в связи с развитием современной математической физики возрос интерес к нелинейным интегральным уравнениям, ассоциирующимся с уравнениями сверточного типа на полуоси и всей прямой. Отметим, что в них соответствующий оператор Гаммерштейна не обладает свойством компактности в рассматриваемых функциональных пространствах и удовлетворяет условию критичности (см. (1.2)), в чем заключена основная трудность исследования.

В работе [16] впервые были обсуждены вопросы разрешимости уравнения (1.1) и изучены асимптотические свойства полученных решений в предположении, что ядро уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$E = \mathbb{R}^+, \quad K(-x) = K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1, \quad (1.4)$$

$$\mu_j(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^j K(x) dx < +\infty, \quad j = 1, 2, \quad (1.5)$$

а функция $H(t, u)$ представлена в виде

$$H(t, u) = u - \omega(u), \quad (1.6)$$

где $\omega \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$, $\omega \downarrow$ по u на некотором полубесконечном интервале $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, $C_0(\mathbb{R}^+)$ – пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$ с нулевым пределом в бесконечности.

В работах автора [17]–[19] уравнение (1.1) (и его некоторые обобщения) исследовалось в случае, когда

$$E = \mathbb{R}^+, \quad \nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx \leq 0, \quad K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1,$$

$H(t, u) = u - \dot{\omega}(t, u)$, где $0 \leq \dot{\omega}(t, u) \leq \omega(u)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u \geq \delta > 0$, а ω удовлетворяет условиям, приведенным выше.

Далее, в работах [20]–[22] получены достаточные условия, налагаемые на ядро K для обеспечения существования (а в некоторых случаях также единственности) положительных монотонных и ограниченных решений уравнения (1.1) с функцией

$$H(t, u) \equiv G(u), \quad (1.7)$$

где

$$G \in C[0, \eta], \quad G(u) \geq u, \quad u \in [0, \eta], \quad G(\eta) = \eta, \quad G \uparrow \text{ на } [0, \eta]. \quad (1.8)$$

В случае, когда

$$E = \mathbb{R}, \quad K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad H(t, u) \equiv u^q, \quad q \in (0, 1), \quad (1.9)$$

уравнение (1.1) в связи с его важным применением в p -адической теории открытой струны для скалярного поля тахионов исследовалось в работах В. С. Владимирова и его научной школы (см., например, [23]–[26]).

В настоящей работе при весьма иных ограничениях, налагаемых на K и H , доказаны конструктивные теоремы существования положительных решений уравнения (1.1) и исследовано их асимптотическое поведение в бесконечности с использованием специальных итерационных методов, некоторых априорных оценок, известных свойств операций свертки, а также методов теории построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора. В зависимости от условий, налагаемых на H и K , для рассматриваемого уравнения на полуоси доказано, что его решение либо имеет интегральную асимптотику $O(x)$, когда $x \rightarrow \infty$, либо принадлежит пространству $L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Здесь $L_1^0(\mathbb{R}^+)$ – пространство суммируемых на $\mathbb{R}^+$ функций с нулевым пределом в $+\infty$, а $L_\infty(\mathbb{R}^+)$ – пространство существенно ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций.

Если $E = \mathbb{R}$, то здесь доказывается, что уравнение (1.1) кроме тривиального решения либо обладает положительным и ограниченным решением, либо имеет суммируемое на $\mathbb{R}$ решение, причем предел этого решения в $\pm\infty$ равен нулю.

В конце работы приведены иллюстрирующие примеры этих уравнений (представляющие самостоятельный интерес), для которых выполняются соответствующие условия сформулированных теорем.

§ 2. Вспомогательные факты

2.1. О некоторых свойствах операции свертки. В ходе наших последующих рассуждений существенным образом будет применено следующее свойство операции свертки (см. [27]).

Пусть φ и ψ – произвольные функции из $L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда для свертки $g = \varphi * \psi$ этих функций,

$$g(t) = (\varphi * \psi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\psi(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 0. \quad (2.2)$$

Докажем следующий простой, но важный факт, который мы используем в дальнейшем.

ЛЕММА 2.1. Пусть K и Q – суммируемые соответственно на множествах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ функции, для которых

$$\mu_p(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p |K(x)| dx < +\infty, \quad m_p(Q) \equiv \int_0^{\infty} t^p |Q(t)| dt < +\infty \quad (2.3)$$

при некотором $p \geq 0$. Тогда для функции

$$F(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)Q(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (2.4)$$

имеет место следующее неравенство:

$$m_p(F) = \int_0^{\infty} x^p |F(x)| dx \leq 2^{p-1} (m_p(Q)\mu_0(K) + \mu_p(K)m_0(Q)) < +\infty. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для произвольного $r > 0$ оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^r x^p |F(x)| dx &= \int_0^r x^p \left| \int_0^{\infty} K(x-t)Q(t) dt \right| dx \leq \int_0^r x^p \int_0^{\infty} |K(x-t)| |Q(t)| dt dx \\ &= \int_0^{\infty} |Q(t)| \int_0^r |K(x-t)| x^p dx dt = \int_0^{\infty} |Q(t)| \int_{-t}^{r-t} |K(y)|(t+y)^p dy dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |Q(t)| \int_{-t}^{r-t} |K(y)|(t+|y|)^p dy dt \equiv I_r. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пользуясь неравенством

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad a, b \geq 0, \quad p \geq 0, \quad (2.7)$$

и отправляясь от (2.6), получим

$$\begin{aligned} \int_0^r x^p |F(x)| dx &\leq I_r \leq 2^{p-1} \int_0^{\infty} |Q(t)| \int_{-t}^{r-t} |K(y)|(t+|y|)^p dy dt \\ &\leq 2^{p-1} (m_p(Q)\mu_0(K) + \mu_p(K)m_0(Q)) < +\infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Устремляя r к $+\infty$ в (2.8), приходим к (2.5). Лемма доказана.

Ниже напомним второе известное свойство операции свертки, которое также нам понадобится (см. [28]).

Пусть $K(\tau) \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $K \in L_1(\mathbb{R})$, а Q – определенная на $\mathbb{R}^+$ измеримая ограниченная функция, причем существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) < +\infty$. Тогда для функции $F(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)Q(t) dt$, $x \in \mathbb{R}^+$, справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t). \quad (2.9)$$

2.2. О консервативных интегральных уравнениях свертки. Приведем некоторые факты из теории консервативных неоднородных интегральных уравнений Винера–Хопфа.

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)\varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (2.10)$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$ с консервативным ядром $K(x)$:

$$K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1. \quad (2.11)$$

Предполагается, что

$$g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+). \quad (2.12)$$

Из результатов работы [28] следует, что если $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|K(x) dx < +\infty$, то уравнение (2.10) имеет неотрицательное локально интегрируемое на $\mathbb{R}^+$ решение, причем:

а) если $\nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx = 0$, $m_1(g) = \int_0^{\infty} xg(x) dx < +\infty$, то

$$\int_0^x \varphi(t) dt = O(x), \quad x \rightarrow +\infty;$$

б) если $\nu(K) < 0$ и $m_p(g) = \int_0^{\infty} x^p g(x) dx < +\infty$, $p \geq 1$, то

$$m_{p-1}(\varphi) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \varphi(x) dx < +\infty; \quad (2.13)$$

в) если $\nu(K) > 0$ и выполняется условие (2.12), то

$$\int_0^x \varphi(t) dt = O(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

В случае $E = \mathbb{R}$ наши рассуждения будут основаны на следующей теореме С. Карлина из теории неоднородных интегральных уравнений свертки на всей оси.

ТЕОРЕМА 2.1 [29]. *Рассмотрим интегральное уравнение свертки на всей оси*

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

относительно искомой функции $\psi(x)$. Пусть K удовлетворяет условиям

$$K(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|K(x) dx < +\infty, \quad (2.15)$$

$$\nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx \neq 0, \quad (2.16)$$

а свободный член g обладает свойствами

$$g \in L_1(\mathbb{R}), \quad g(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0. \quad (2.17)$$

Пусть, далее, ψ – ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая уравнению (2.14). Тогда пределы $\psi(\pm\infty)$ существуют, причем

$$\psi(+\infty) - \psi(-\infty) = \frac{1}{\nu(K)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx. \quad (2.18)$$

Отметим, что Н. Б. Енгибарян в работе [30] показал, что в условиях теоремы Карлина ограниченность g является необходимым и достаточным условием для существования ограниченного решения уравнения (2.14).

Комбинируя результаты С. Карлина и Н. Б. Енгибаряна, заключаем, что если g и K удовлетворяют (2.15)–(2.17) и при этом g – ограниченная функция, то уравнение (2.14) имеет ограниченное решение и справедлива формула (2.18).

2.3. О преобразованиях Лапласа консервативных ядер. Априорные оценки. Пусть $K(x)$ – определенная на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx < +\infty, \quad (2.19)$$

$$\alpha = \int_0^{\infty} K(x) dx > 0. \quad (2.20)$$

Обозначим через $F(p)$ преобразование Лапласа функции K , когда $p \in [0, +\infty)$:

$$F(p) \equiv \int_0^{\infty} e^{-pt} K(t) dt, \quad p \geq 0. \quad (2.21)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 2.2. При выполнении условий (2.19) и (2.20) уравнение $F(p) = \frac{2}{3}\alpha$ имеет единственное положительное решение p_0 . Если, дополнительно,

$$m_1(K) = \int_0^{\infty} tK(t) dt < +\infty, \quad K \in L_2(\mathbb{R}^+), \quad (2.22)$$

то это решение принадлежит отрезку

$$\left[\frac{\alpha}{3m_1(K)}, \frac{9\|K\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}^2}{8\alpha^2} \right]. \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\chi(p) = F(p) - \frac{2}{3}\alpha, \quad p \in [0, +\infty). \quad (2.24)$$

Заметим, что

$$\chi(0) = \frac{\alpha}{3} > 0, \quad \chi(+\infty) = -\frac{2}{3}\alpha < 0, \quad \chi(p) \downarrow \text{ по } p \text{ на } [0, +\infty), \quad (2.25)$$

$$\chi \in C[0, +\infty).$$

Следовательно, по теореме Коши уравнение

$$F(p) = \frac{2}{3}\alpha \quad (2.26)$$

имеет единственное положительное решение p_0 .

Для завершения доказательства остается показать принадлежность решения p_0 отрезку (2.23) при условии (2.22). Действительно, если p_0 – решение уравнения (2.26), то из (2.26), (2.21) с применением известного неравенства $e^{-p_0 t} \geq 1 - p_0 t$, $t \in \mathbb{R}^+$, будем иметь

$$\frac{2}{3}\alpha = \int_0^\infty e^{-p_0 t} K(t) dt \geq \int_0^\infty (1 - p_0 t) K(t) dt,$$

откуда следует, что $p_0 \geq \frac{\alpha}{3m_1(K)}$.

Далее, применение неравенства Гёльдера к интегралу (2.21) сведет (2.26) к следующему неравенству:

$$\frac{2}{3}\alpha = \int_0^\infty e^{-p_0 t} K(t) dt \leq \left(\int_0^\infty K^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-2p_0 t} dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \|K\|_{L_2(\mathbb{R}^+)},$$

откуда $p_0 \leq \frac{9\|K\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}^2}{8\alpha^2}$. Таким образом, лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

ЛЕММА 2.3. Пусть функция K удовлетворяет условиям (2.19), (2.20). Тогда уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p|t|} K(t) dt = \frac{\gamma}{2}, \quad p \in [0, +\infty), \quad (2.27)$$

имеет единственное положительное решение p^* . При дополнительном условии

$$\mu_1(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| K(t) dt < +\infty, \quad K \in L_2(\mathbb{R}), \quad (2.28)$$

решение p^* принадлежит отрезку

$$\left[\frac{\gamma}{2\mu_1(K)}, \frac{4\|K\|_{L_2(\mathbb{R})}^2}{\gamma^2} \right]. \quad (2.29)$$

Отметим, что в дальнейших построениях числа p_0 и p^* будут играть важную роль.

§ 3. О разрешимости уравнения (1.1) на полуоси

3.1. Построение суммируемого и ограниченного решения. Налагая некоторые условия на K и H , докажем существование положительного суммируемого и ограниченного решения с нулевым пределом в $+\infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в уравнении (1.1) ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям (2.19), (2.20). Пусть, далее, существуют число $\eta \in (0, 1)$ и суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$ (число p_0 определяется из леммы 2.2), такие, что для функции $H(t, u)$ имеют место следующие условия:

- $H(t, u) \leq \frac{\eta u}{\xi(t)} + \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u \geq e^{-p_0 t}$, $\xi(t) \equiv \int_{-t}^\infty K(y) dy$, $t \in \mathbb{R}^+$;
- $H(t, e^{-p_0 t}) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$;
- функция $H(t, u)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ монотонно возрастает по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$;

d) $H(t, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ измерима по t , и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ она непрерывна по u на $\mathbb{R}^+$.

Тогда если $K(-x) \geq K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то уравнение (1.1) имеет положительное суммируемое и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение. Если, дополнительно, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0$, то это решение также стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^\infty K(x-t)H(t, f_n(t)) dt, \\ f_0(x) &= e^{-p_0 x}, \quad x \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ниже индукцией по n докажем:

- i) $f_n(x) \uparrow$ по n ;
- ii) $f_n \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Сначала докажем i). В силу монотонности $H(t, u)$ по u и условий, налагаемых на ядро K , из (3.1) с учетом леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^\infty K(x-t)H(t, e^{-p_0 t}) dt \geq \frac{3}{2\alpha} \int_0^\infty K(x-t)e^{-p_0 t} dt \\ &= \frac{3}{2\alpha} \int_{-\infty}^x K(y)e^{-p_0(x-y)} dy \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 x} \int_{-\infty}^0 K(y)e^{p_0 y} dy \\ &= \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 x} \int_0^\infty K(-t)e^{-p_0 t} dt \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 x} \int_0^\infty K(t)e^{-p_0 t} dt \\ &= \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 x} F(p_0) = e^{-p_0 x} = f_0(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предполагая, что $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, учитывая монотонность функции $H(t, u)$ по u и неотрицательность ядра K , из (3.1) получим

$$f_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty K(x-t)H(t, f_{n-1}(t)) dt = f_n(x). \quad (3.3)$$

Перейдем к доказательству ii). В случае $n = 0$ это включение очевидно. Пусть $f_n \in L_1(\mathbb{R}^+)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, и пусть $r > 0$ – произвольное число. Тогда, учитывая условие а) теоремы, из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^r f_{n+1}(x) dx &\leq \int_0^r \int_0^\infty K(x-t) \left(\frac{\eta f_n(t)}{\xi(t)} + \beta(t) \right) dt dx \\ &\leq \eta \int_0^\infty \frac{f_n(t)}{\xi(t)} \int_0^r K(x-t) dx dt + \int_0^\infty \beta(t) \xi(t) dt \\ &\leq \eta \int_0^\infty f_n(t) dt + \gamma \int_0^\infty \beta(t) dt < +\infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4), устремляя r к $+\infty$, получим $f_{n+1} \in L_1(\mathbb{R}^+)$. В силу монотонности последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ из (3.4) следует, что

$$\int_0^\infty f_{n+1}(t) dt \leq \frac{\gamma}{1-\eta} \int_0^\infty \beta(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Таким образом, учитывая интегральную оценку (3.5) и свойство монотонности i), заключаем, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем предельная функция f принадлежит $L_1(\mathbb{R}^+)$.

В силу условия Каратеодори (см. d)) и предельной теоремы Б. Леви f удовлетворяет уравнению (1.1). Теперь докажем, что $f \in L_{\infty}(\mathbb{R}^+)$. Действительно, так как $C \equiv \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} K(x) < +\infty$, из (1.1) с учетом неравенства а) теоремы будем иметь

$$f(x) \leq \eta C \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\xi(t)} dt + C \int_0^{\infty} \beta(t) dt \leq \frac{\eta C}{\alpha} \int_0^{\infty} f(t) dt + C \int_0^{\infty} \beta(t) dt < +\infty,$$

откуда следует, что $f \in L_{\infty}(\mathbb{R}^+)$.

Для завершения доказательства осталось убедиться в истинности последней части утверждения теоремы, т. е. если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. С этой целью наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее вспомогательное линейное интегральное уравнение:

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} K(x-t)\beta(t) dt + \eta \int_0^{\infty} K(x-t) \frac{\Phi(t)}{\xi(t)} dt, \quad x \geq 0, \quad (3.6)$$

относительно функции $\Phi(x)$.

Аналогичными рассуждениями, как и выше, можно убедиться в том, что уравнение (3.6) имеет положительное, ограниченное и суммируемое на $\mathbb{R}^+$ решение $\Phi(x)$.

В силу (2.9) (см. п. 2.1) имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} K(x-t)\beta(t) dt = \gamma \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0. \quad (3.7)$$

Докажем, что и для второго слагаемого в (3.6) также

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} K(x-t) \frac{\Phi(t)}{\xi(t)} dt = 0. \quad (3.8)$$

Действительно, сначала имеем

$$0 \leq \int_0^{\infty} K(x-t) \frac{\Phi(t)}{\xi(t)} dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} K(x-t)\Phi(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\tilde{\Phi}(t) dt \equiv \rho(x), \quad (3.9)$$

где

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(x), & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$, $\tilde{\Phi} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$, согласно (2.2) (см. п. 2.1) получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = 0. \quad (3.10)$$

Учитывая (3.9) и (3.10), приходим к (3.8). Следовательно, из (3.7) и (3.8) получаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$.

С другой стороны, индукцией по n нетрудно убедиться в том, что

$$f_n(x) \leq \Phi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.11)$$

Отсюда с учетом монотонности последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ по n для ее предельной функции $f(x)$ приходим к двойному неравенству

$$e^{-p_0 x} \leq f(x) \leq \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.12)$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, из (3.12) заключаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Теорема доказана.

Теперь построим положительное ограниченное и суммируемое решение уравнения (1.1) в случае, когда $K(-x) > K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, и $H(t, u) \leq \frac{u}{\gamma} + \beta(t)$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K уравнения (1.1) удовлетворяет условиям (2.19), (2.20), причем $\mu_1(K) < +\infty$. Пусть, далее, существует суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$ (здесь число p_0 то же, что и в теореме 3.1), $m_1(\beta) < +\infty$, такая, что функция $H(t, u)$ обладает свойствами:

$$a_1) \quad H(t, u) \leq \frac{u}{\gamma} + \beta(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u \geq e^{-p_0 t};$$

$$a_2) \quad H(t, e^{-p_0 t}) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

$a_3)$ функция $H(t, u)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ монотонно возрастает по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$;

$a_4)$ $H(t, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Тогда если $K(-x) > K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то уравнение (1.1) имеет положительное суммируемое и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение. Более того, если к тому же $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее неоднородное интегральное уравнение Винера–Хопфа:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^\infty \tilde{K}(x-t) \tilde{f}(t) dt, \quad x \geq 0, \quad (3.14)$$

относительно измеримой функции $\tilde{f}(x)$, где

$$\tilde{K}(x) = \frac{1}{\gamma} K(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = \int_0^\infty K(x-t) \beta(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.15)$$

Из (2.19) и условий $K(-x) > K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\mu_1(K) < +\infty$ следует, что

$$\tilde{K}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(x) dx = 1, \quad (3.16)$$

$$\nu(\tilde{K}) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x \tilde{K}(x) dx < 0. \quad (3.17)$$

Поскольку $\mu_1(K) < +\infty$, $m_1(\beta) < +\infty$, из леммы 2.1 следует, что

$$\tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty. \quad (3.18)$$

Таким образом, согласно результатам, приведенным в п. 2.2 (см. формулу (2.13)), уравнение (3.14) имеет положительное и суммируемое решение. Поскольку

$$C \equiv \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} K(x) < +\infty,$$

из (3.14) имеем

$$\tilde{f}(x) \leq C \int_0^\infty (\beta(t) + \tilde{f}(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

и, следовательно, функция $\tilde{f}(x)$ также ограничена.

Рассмотрим следующие специальные итерации:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^\infty K(x-t)H(t, f_n(t)) dt, \\ f_0(x) &= \tilde{f}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Индукцией по n убедимся в том, что

$$f_n(x) \geq e^{-p_0 x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Действительно, в случае $n = 0$ неравенство (3.20) является естественным следствием цепочек неравенств

$$f_0(x) = \tilde{f}(x) \geq \tilde{g}(x) \geq \frac{3}{2\alpha} \int_0^\infty K(x-t)e^{-p_0 t} dt \geq e^{-p_0 x}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.21)$$

Предполагая, что $f_n(x) \geq e^{-p_0 x}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, в силу условия a_1) и монотонности $H(t, u)$ по u из (3.19) получим утверждение (3.20) для следующего члена последовательности

$$f_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty K(x-t)H(t, e^{-p_0 t}) dt \geq \frac{3}{2\alpha} \int_0^\infty K(x-t)e^{-p_0 t} dt \geq e^{-p_0 x}.$$

Индукцией легко также проверяется, что

$$f_n(x) \downarrow \text{ по } n. \quad (3.22)$$

Таким образом, из (3.20) и (3.22) заключаем, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем в силу условия a_4) и теоремы Б. Леви предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1). Из (3.20) и (3.22) следует также, что

$$e^{-p_0 x} \leq f_n(x) \leq \tilde{f}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

в котором, устремляя n к $+\infty$, получим

$$e^{-p_0 x} \leq f(x) \leq \tilde{f}(x), \quad x \geq 0. \quad (3.23)$$

Поскольку $\tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, из (3.23) следует, что $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Повторяя те же выводы, что и при доказательстве теоремы 3.1, можно утверждать, что если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Теорема доказана.

Проведя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.2, и при этом используя лемму 2.1, а также результаты, изложенные в п. 2.2, приходим к следующим результатам.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K уравнения (1.1) удовлетворяет условиям (2.19), (2.20), причем $\mu_p(K) < +\infty$ при некотором $p \geq 1$. Пусть, далее, существует суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $m_p(\beta) < +\infty$, такая, что выполняются условия $a_1) - a_4)$ теоремы 3.2, где число p_0 то же, что и в теореме 3.1. Тогда если $K(-x) > K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то уравнение (1.1) имеет положительное решение $f(x)$, причем $m_{p-1}(f) < +\infty$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K уравнения (1.1) удовлетворяет условию (2.20), причем $\mu_1(K) < +\infty$. Предположим также, что существует суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция $\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, такая, что выполняются условия $a_1) - a_4)$ теоремы 3.2, где число p_0 то же, что и в теореме 3.1. Тогда если $K(-x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то уравнение (1.1) имеет положительное решение с интегральной асимптотикой $\int_0^x f(t) dt = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

3.2. Построение положительных решений в $L_q(\mathbb{R}^+)$ для уравнения (1.1) на полуоси. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K уравнения (1.1) удовлетворяет условиям (2.19), (2.20). Предположим, далее, что существуют число $\eta \in (0, 1)$ и функция $\beta(t) \in L_q(\mathbb{R}^+)$, $q > 1$, $\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, такие, что:

$$b_1) H(t, u) \leq \frac{\eta u}{(2\gamma)^{\frac{q-1}{q}} \xi^{\frac{1}{q}}(t)} + \beta(t), u \geq e^{-p_0 t}, t \in \mathbb{R}^+;$$

$b_2) H(t, u)$ удовлетворяет условиям $a_2) - a_4)$ теоремы 3.2, где число p_0 то же, что и в теореме 3.1.

Тогда если $K(-x) \geq K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то уравнение (1.1) имеет положительное решение в пространстве $L_q(\mathbb{R}^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим итерации (3.1) для уравнения (1.1). Как и при доказательстве теоремы 3.1, проверяется, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n. \quad (3.24)$$

Индукцией докажем, что $f_n \in L_q(\mathbb{R}^+)$, $q > 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В случае $n = 0$ утверждение очевидно.

Пусть $f_n \in L_q(\mathbb{R}^+)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного числа $r > 0$ с использованием условия $b_1)$, учитывая (2.7) и неравенство Гёльдера, из (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^r f_{n+1}^q(x) dx &\leq \int_0^r \left(\int_0^\infty K(x-t) \left(\frac{\eta f_n(t)}{(2\gamma)^{(q-1)/q} \xi^{1/q}(t)} + \beta(t) \right) dt \right)^q dx \\ &= \int_0^r \left(\frac{\eta}{(2\gamma)^{(q-1)/q}} \int_0^\infty K(x-t) \frac{f_n(t)}{\xi^{1/q}(t)} dt + \int_0^\infty K(x-t) \beta(t) dt \right)^q dx \\ &\leq \frac{2^{q-1} \eta^q}{(2\gamma)^{q-1}} \int_0^r \left(\int_0^\infty K(x-t) \frac{f_n(t)}{\xi^{1/q}(t)} dt \right)^q dx + 2^{q-1} \int_0^r \left(\int_0^\infty K(x-t) \beta(t) dt \right)^q dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2^{q-1}\eta^q}{(2\gamma)^{q-1}} \int_0^r \left(\int_0^\infty K^{1/q}(x-t) \frac{f_n(t)}{\xi^{1/q}(t)} K^{1/q_*}(x-t) dt \right)^q dx \\
&\quad + 2^{q-1} \int_0^r \left(\int_0^\infty K^{1/q}(x-t) \beta(t) K^{1/q_*}(x-t) dt \right)^q dx \\
&\leq \frac{2^{q-1}\eta^q}{(2\gamma)^{q-1}} \int_0^r \int_0^\infty K(x-t) \frac{f_n^q(t)}{\xi(t)} dt \left(\int_0^\infty K(x-t) dt \right)^{q-1} dx \\
&\quad + 2^{q-1} \int_0^r \int_0^\infty K(x-t) \beta^q(t) dt \left(\int_0^\infty K(x-t) dt \right)^{q-1} dx \equiv I_r, \quad (3.25)
\end{aligned}$$

так как числа q и q_* связаны соотношением $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_*} = 1$.

Используя введенные выше обозначения $\xi(t) = \int_{-t}^{+\infty} K(u) du$, $\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du$, из соотношения (3.25) получим

$$\begin{aligned}
I_r &\leq \eta^q \int_0^\infty \frac{f_n^q(t)}{\xi(t)} \int_0^r K(x-t) dx dt + (2\gamma)^{q-1} \int_0^\infty \beta^q(t) \int_0^r K(x-t) dx dt \\
&\leq \eta^q \int_0^\infty f_n^q(t) dt + 2^{q-1} \gamma^q \int_0^\infty \beta^q(t) dt. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Комбинируя неравенства (3.25) и (3.26), имеем

$$\int_0^r f_{n+1}^q(t) dt \leq \eta^q \int_0^\infty f_n^q(t) dt + 2^{q-1} \gamma^q \int_0^\infty \beta^q(t) dt < +\infty. \quad (3.27)$$

Устремляя r к $+\infty$ в (3.27), получим

$$\int_0^\infty f_{n+1}^q(t) dt \leq \eta^q \int_0^\infty f_n^q(t) dt + 2^{q-1} \gamma^q \int_0^\infty \beta^q(t) dt < +\infty, \quad (3.28)$$

т. е. $f_{n+1} \in L_q(\mathbb{R}^+)$.

Поскольку $f_n(x) \uparrow$ по n , из (3.28) следует, что

$$\int_0^\infty f_{n+1}^q(t) dt \leq \frac{2^{q-1} \gamma^q}{1 - \eta^q} \int_0^\infty \beta^q(t) dt. \quad (3.29)$$

Таким образом, из (3.24), (3.1) и (3.29) заключаем, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1) и следующим соотношениям:

$$f(x) \geq e^{-p_0 x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^\infty f^q(t) dt \leq \frac{2^{q-1} \gamma^q}{1 - \eta^q} \int_0^\infty \beta^q(t) dt. \quad (3.30)$$

Тем самым теорема полностью доказана.

§ 4. Разрешимость уравнения (1.1) на всей оси

4.1. Построение суммируемых и ограниченных решений с нулевым пределом в $\pm\infty$. Рассмотрим уравнение (1.1) в случае, когда $E = \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) H(t, f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

относительно измеримой на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$.

Предполагается, что ядро K удовлетворяет условию (2.19). Ниже при наличии некоторых условий, налагаемых на $H(t, u)$, докажем существование положительного ограниченного и суммируемого на $\mathbb{R}$ решения с нулевым пределом в $\pm\infty$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K удовлетворяет условию (2.19). Пусть, далее, существуют число $\eta \in (0, 1)$ и ограниченная суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $\beta(t) \geq \frac{2}{\gamma} e^{-p^*|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что для функции $H(t, u)$ имеют место следующие условия:*

- $c_1)$ $H(t, u) \leq \frac{\eta u}{\gamma} + \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \geq e^{-p^*|t|}$;
- $c_2)$ $H(t, e^{-p^*|t|}) \geq \frac{2}{\gamma} e^{-p^*|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ (число p^* определяется из леммы 2.3);
- $c_3)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $H(t, u) \uparrow$ по u на $[e^{-p^*|t|}, +\infty)$;
- $c_4)$ $H(t, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Тогда уравнение (4.1) имеет положительное, ограниченное и суммируемое на $\mathbb{R}$ решение с нулевым пределом в $\pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)H(t, f_n(t)) dt, \\ f_0(x) &= e^{-p^*|x|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

С использованием леммы 2.3 индукцией по n убедимся в том, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n. \quad (4.3)$$

Действительно, с учетом $c_2)$ из (4.2) имеем

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \frac{2}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)e^{-p^*|t|} dt = \frac{2}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)e^{-p^*|x-y|} dy \\ &\geq \frac{2}{\gamma} e^{-p^*|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)e^{-p^*|y|} dy = e^{-p^*|x|} = f_0(x). \end{aligned}$$

Предполагая, что $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, и учитывая монотонность функции $H(t, u)$ по u на $[e^{-p^*|t|}, +\infty)$, из (4.2) получим $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Учитывая (4.3) и условия $c_1)$, $c_3)$, индукцией по n получим

$$f_n \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \leq \frac{\gamma}{1-\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt. \quad (4.4)$$

Следовательно, последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем предельная функция в силу условия $c_4)$ и предельной теоремы Б. Леви удовлетворяет уравнению (4.1). Из соотношений (4.3) и (4.4) следует также, что

$$f(x) \geq e^{-p^*|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\gamma}{1-\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt. \quad (4.5)$$

Ниже убедимся в том, что $f \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Действительно, так как $C \equiv \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} K(x) < +\infty$, из (4.1) с учетом c_1) имеем

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\beta(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)f(t) dt \\ &\leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) \leq C \left(\frac{2-\eta}{1-\eta} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt < +\infty, \end{aligned}$$

и, следовательно, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Нам осталось доказать, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Поскольку $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $\beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ и $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, из оценки

$$e^{-p^*|x|} \leq f(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\beta(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)f(t) dt$$

с учетом предельного соотношения (2.2) получим $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Теорема доказана.

4.2. Существование ограниченного решения уравнения (4.1). С использованием теоремы С. Карлина, результатов работы [30] и предельного соотношения (2.2) докажем существование положительного и ограниченного решения уравнения (4.1) в случае $H(t, u) \leq \frac{u}{\gamma} + \beta(t)$ и $\nu(K) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что ограниченное на $\mathbb{R}$ ядро K удовлетворяет условию (2.19), причем $\mu_1(K) < +\infty$ и $\nu(K) \neq 0$. Пусть существует ограниченная и суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $\beta(t) \geq \frac{2}{\gamma} e^{-p^*|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что для функции $H(t, u)$ имеют место неравенство*

$$H(t, u) \leq \frac{u}{\gamma} + \beta(t), \quad u \geq e^{-p^*|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

и условия $c_2)$ – $c_4)$ теоремы 4.1. Тогда уравнение (4.1) обладает положительным ограниченным решением, которое оценивается снизу функцией $e^{-p^*|x|}$ при $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Помимо уравнения (4.1) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение свертки на всей оси:

$$p(x) = q(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x-t)p(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

где

$$q(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\beta(t) dt, \quad K^*(x) = \frac{1}{\gamma} K(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Очевидно, что

$$q \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x) dx = 1. \quad (4.9)$$

Поскольку $\beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ и $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, из предельного соотношения (2.2) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = 0. \quad (4.10)$$

Учитывая (4.8)–(4.10), теорему С. Карлина (см. [29]) и теорему о существовании ограниченных решений Н. Б. Енгибаряна (см. [30]), заключаем, что уравнение (4.7) имеет ограниченное решение $p(x)$, причем

$$\kappa_{\pm} \equiv \lim_{t \rightarrow \pm\infty} p(t) < +\infty,$$

$$\kappa_+ - \kappa_- = \frac{1}{\nu(K)} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) dt = \frac{\gamma}{\nu(K)} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt.$$

Введем следующие итерации:

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)H(t, f_n(t)) dt, \quad (4.11)$$

$$f_0(x) = p(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Индукцией по n нетрудно убедиться в том, что

- 1) $f_n(x) \downarrow$ по n ;
- 2) $f_n(x) \geq e^{-p^*|x|}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Следовательно, последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел, когда $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, а предельная функция удовлетворяет уравнению (4.1) и следующему двойному неравенству:

$$e^{-p^*|x|} \leq f(x) \leq p(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Поскольку $p \in L_{\infty}(\mathbb{R})$, из (4.12) следует, что $f \in L_{\infty}(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

§ 5. Примеры функции $H(t, u)$

5.1. Примеры функции $H(t, u)$ для теорем 3.1–3.5. Приведем несколько наглядных примеров функции $H(t, u)$, для которых выполняются условия сформулированных теорем 3.1–3.5.

Рассмотрим следующий класс функций:

$$H(t, u) = c(t, u)\sqrt{ue^{-p_0 t}}, \quad (5.1)$$

где $c(t, u)$ – определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- j₁) $c(t, u) \geq \frac{3}{2\alpha}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u \geq e^{-p_0 t}$, где число α определяется формулой (2.20);
- j₂) $c_0 \equiv \text{essup}_{(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} c(t, u) < +\infty$;
- j₃) $c(t, u) \uparrow$ по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$.

В качестве $c(t, u)$ можно выбрать, например, функцию

$$c(t, u) = \frac{2\alpha + 3}{2\alpha} - e^{-t^2 u}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Тогда $c(t, u) \uparrow$ по u , $c(t, u) \geq \frac{3}{2\alpha}$, а $c_0 = \frac{2\alpha+3}{2\alpha}$.

Убедимся в том, что если

$$\beta(t) = \max\left(\frac{c_0^2 \gamma}{4\eta}, \frac{3}{2\alpha}\right) e^{-p_0 t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.2)$$

то для функций вида (5.1) все условия теоремы 3.1 будут выполнены.

Действительно, условия с) и d) очевидным образом имеют место, ибо функции $c(t, u)$, $\sqrt{ue^{-p_0t}} \uparrow$ по u и $c(t, u)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Убедемся в справедливости условий:

а) неравенство

$$c(t, u)\sqrt{ue^{-p_0t}} \leq \frac{\eta u}{\xi(t)} + \beta(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u \geq e^{-p_0t},$$

будет выполняться, если

$$c_0\sqrt{ue^{-p_0t}} \leq \frac{\eta u}{\xi(t)} + \beta(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u \geq e^{-p_0t},$$

что равносильно неравенству

$$\frac{\eta^2 u^2}{\xi^2(t)} + \left(\frac{2\eta\beta(t)}{\xi(t)} - c_0^2 e^{-p_0t} \right) u + \beta^2(t) \geq 0 \quad (5.3)$$

при $u \geq e^{-p_0t}$, $t \in \mathbb{R}^+$;

б) в силу j₁) имеем

$$H(t, e^{-p_0t}) = c(t, e^{-p_0t})e^{-p_0t} \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0t}.$$

Очевидно, что если имеет место

$$\left(\frac{2\eta\beta(t)}{\xi(t)} - c_0^2 e^{-p_0t} \right)^2 - \frac{4\eta^2\beta^2(t)}{\xi^2(t)} \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.4)$$

то неравенство (5.3) автоматически будет выполнено, а (5.4), в свою очередь, равносильно следующему неравенству:

$$\beta(t) \geq \frac{c_0^2 \xi(t)}{4\eta} e^{-p_0t}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (5.5)$$

Поэтому убедимся в том, что функция, определенная по формуле (5.2), удовлетворяет неравенству (5.5).

Имеем

$$\beta(t) \geq \frac{c_0^2 \gamma}{4\eta} e^{-p_0t} \geq \frac{c_0^2 \xi(t)}{4\eta} e^{-p_0t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.6)$$

ибо $\xi(t) \leq \gamma$, $t \in \mathbb{R}^+$. С другой стороны, из (5.2) следует, что

$$\beta(t) \geq \frac{3}{2\alpha} e^{-p_0t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, класс функций вида (5.1) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Если в качестве $\beta(t)$ выберем функцию

$$\beta(t) = \max\left(\frac{c_0^2 \gamma}{4}, \frac{3}{2\alpha}\right) e^{-p_0t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.7)$$

то будут выполнены все условия теорем 3.2–3.4 для функций вида (5.1), а если определить функцию $\beta(t)$ в виде

$$\beta(t) = \max\left(\frac{c_0^2 \gamma 2^{\frac{q-1}{q}}}{4\eta}, \frac{3}{2\alpha}\right) e^{-p_0t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5.8)$$

то для функций вида (5.1) будут выполнены все условия теоремы 3.5.

Отметим, что соответствующий оператор Гаммерштейна на полуоси с нелинейностью (5.1) не обладает свойством компактности в $L_1(\mathbb{R}^+)$, поскольку неограниченность области интегрирования, структура ядра K , вид функции $H(t, u)$ и неравенство $c(t, u) \geq \frac{3}{2\alpha}$ приводят к тому, что нарушаются условия теоремы Арцела–Асколи о компактности.

В качестве $H(t, u)$ можно выбрать также функцию вида $H(t, u) = \frac{u}{\gamma} + \beta(t)$, для которой выполнены все условия, например, теоремы 3.2. В данном случае, если $E = \mathbb{R}^+$, уравнение (1.1) превращается в известное интегральное уравнение Винера–Хопфа вида (3.14) с некомпактным оператором.

Рассмотрим другой пример функции $H(t, u)$:

$$H(t, u) = \delta \sqrt{e^{-p_0 t} \ln(u+1)} + c_1(t, u) \sqrt{ue^{-p_0 t}}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u \geq e^{-p_0 t}, \quad (5.9)$$

где $c_1(t, u)$ – определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

d₁) $c_1(t, u) \geq \frac{3}{2\alpha}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u \geq e^{-p_0 t}$, где число α определяется формулой (2.20);

d₂) $\tilde{c} \equiv \operatorname{essup}_{(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} c_1(t, u) \leq c_0 - \delta$, $\delta \in (0, c_0)$;

d₃) $c_1(t, u) \uparrow$ по u на $[e^{-p_0 t}, +\infty)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$.

Выбирая в качестве $\beta(t)$ функции вида (5.2), (5.7) и (5.8) и учитывая известное неравенство $\ln(1+u) \leq u$, $u \geq 0$, аналогичными рассуждениями проверим, что класс функций вида (5.9) также удовлетворяет условиям теорем 3.1–3.5 соответственно.

5.2. Примеры функции $H(t, u)$ для теорем 4.1, 4.2. Следующие примеры удовлетворяют условиям, налагаемым на $H(t, u)$ в теоремах 4.1, 4.2:

A) $H(t, u) = c^*(t, u) \sqrt{ue^{-p^*|t|}}$, $t \in \mathbb{R}$, $u \geq e^{-p^*|t|}$;

B) $H(t, u) = \delta^* \sqrt{e^{-p^*|t|} \ln(u+1)} + c_1^*(t, u) \sqrt{ue^{-p^*|t|}}$, $t \in \mathbb{R}$, $u \geq e^{-p^*|t|}$, где $c^*(t, u)$ и $c_1^*(t, u)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям:

e₁) $c^*(t, u) \geq \frac{2}{\gamma}$, $c_1^*(t, u) \geq \frac{2}{\gamma}$, $t \in \mathbb{R}$, $u \geq e^{-p^*|t|}$;

e₂) $\varkappa^* \equiv \operatorname{essup}_{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} c^*(t, u) < \infty$, $\varkappa_1^* \equiv \operatorname{essup}_{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} c_1^*(t, u) \leq \varkappa^* - \delta^*$, $\delta^* \in (0, \varkappa^*)$;

e₃) $c^*(t, u)$, $c_1^*(t, u) \uparrow$ по u на $[e^{-p_0^*|t|}, +\infty)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$.

Для теоремы 4.1 в качестве $\beta(t)$ выберем функцию вида

$$\beta(t) = \max\left(\frac{(\varkappa^*)^2 \gamma}{4\eta}, \frac{2}{\gamma}\right) e^{-p^*|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Для теоремы 4.2 в качестве β можно выбрать следующую функцию:

$$\beta(t) = \max\left(\frac{(\varkappa^*)^2 \gamma}{4}, \frac{2}{\gamma}\right) e^{-p^*|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Выполнение соответствующих условий теорем 4.1, 4.2 проверяется аналогичным образом, как в п. 5.1.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Н. Б. Енгибарян, “Об одной задаче нелинейного переноса излучения”, *Астрофизика*, **2**:1 (1966), 31–36.
2. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Наука, М., 1967, 440 с.
3. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара–Гросса–Крука”, *ТМФ*, **125**:2 (2000), 339–342; англ. пер.: N. B. Engibaryan, A. Kh. Khachatryan, “Exact linearization of the sliding problem for a dilute gas in the Bhatnagar–Gross–Krook model”, *Theoret. and Math. Phys.*, **125**:2 (2000), 1589–1592.
4. А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях”, *ТМФ*, **172**:3 (2012), 497–504; англ. пер.: A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, “Qualitative difference between solutions for a model of the Boltzmann equation in the linear and nonlinear cases”, *Theoret. and Math. Phys.*, **172**:3 (2012), 1315–1320.
5. Li Kun, Li Xiong, “Asymptotic behavior and uniqueness of traveling wave solutions in Richer competition system”, *J. Math. Anal. Appl.*, **389**:1 (2012), 486–497.
6. A. Hammerstein, “Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen”, *Acta Math.*, **54**:1 (1930), 117–176.
7. П. Урысон, “Об одном типе нелинейных интегральных уравнений”, *Матем. сб.*, **31**:2 (1923), 236–255.
8. М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, “Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве L^p ”, Тр. ММО, **3**, ГИТТЛ, М., 1954, 307–320.
9. В. Я. Стеценко, А. Р. Есаян, “Теоремы о положительных решениях уравнений второго рода с нелинейными операторами”, *Матем. сб.*, **68**(110):4 (1965), 473–486.
10. П. П. Забрейко, М. А. Красносельский, “О разрешимости нелинейных операторных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:3 (1971), 42–44; англ. пер.: P. P. Zabreiko, M. A. Krasnosel'skii, “Solvability of nonlinear operator equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **5**:3 (1971), 206–208.
11. М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, “Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения”, Тр. ММО, **7**, ГИФМЛ, М., 1958, 63–120.
12. П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, “О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p ”, *УМН*, **19**:2(116) (1964), 204–205.
13. F. E. Browder, “Strongly nonlinear integral equations of Hammerstein type”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:5 (1975), 1937–1939.
14. H. Brézis, F. E. Browder, “Some new results about Hammerstein equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**:3 (1974), 567–572.
15. J. Banas, “Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **46**:1 (1989), 61–68.
16. Л. Г. Арабаджян, “О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки”, *Укр. матем. журн.*, **41**:12 (1989), 1587–1595; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, “Existence of nontrivial solutions of certain linear and nonlinear convolution-type equations”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:12 (1989), 1359–1367.
17. Х. А. Хачатрян, “Однопараметрическое семейство решений одного класса нелинейных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси”, *Докл. РАН*, **429**:5 (2009), 595–599; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “One-parameter family of solutions for one class of Hammerstein nonlinear equations on a half-line”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 872–876.

18. Х. А. Хачатрян, “Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами”, *Изв. НАН Армении. Математика*, **46:2** (2011), 71–86; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **46:2** (2011), 89–100.
19. Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76:1** (2012), 173–200; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity”, *Izv. Math.*, **76:1** (2012), 163–189.
20. Х. А. Хачатрян, “Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси”, *Докл. РАН*, **425:4** (2009), 462–465; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “Sufficient conditions for the solvability of the Urysohn integral equation on a half-line”, *Dokl. Math.*, **79:2** (2009), 246–249.
21. А. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, “Existence and uniqueness theorem for a Hammerstein nonlinear integral equation”, *Opuscula Math.*, **31:3** (2011), 393–398.
22. Х. А. Хачатрян, “Некоторые классы нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси”, *Докл. НАН Беларуси*, **55:1** (2011), 5–9.
23. В. С. Владимиров, “Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 55–80; англ. пер.: V. S. Vladimirov, “The equation of the p -adic open string for the scalar tachyon field”, *Izv. Math.*, **69:3** (2005), 487–512.
24. В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны”, *ТМФ*, **138:3** (2004), 355–368; англ. пер.: V. S. Vladimirov, Ya. I. Volovich, “Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory”, *Theoret. and Math. Phys.*, **138:3** (2004), 297–309.
25. И. Я. Арефьева, И. В. Волович, “О нелокальных космологических уравнениях на полуоси”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **1(22)** (2011), 16–27.
26. V. S. Vladimirov, “The equation of p -adic closed strings for the scalar tachyon field”, *Sci. China Ser. A*, **51:4** (2008), 754–764.
27. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа свертки”, *Матем. сб.*, **198:7** (2007), 45–62; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, A. S. Khachatryan, “A class of integral equations of convolution type”, *Sb. Math.*, **198:7** (2007), 949–966.
28. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, N. B. Engibaryan, “Convolution equations and nonlinear functional equations”, *J. Soviet Math.*, **36:6** (1987), 745–791.
29. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975, 443 с.; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973, xiii+397 pp.
30. N. B. Yengibarian, “Renewal equation on the whole line”, *Stochastic Process. Appl.*, **85:2** (2000), 237–247.

ХАЧАТУР АГАВАРДОВИЧ ХАЧАТРЯН
(KHACHATUR A. KHACHATRYAN)

Институт математики НАН Республики Армения,
г. Ереван

E-mail: khach82@rambler.ru

Поступило в редакцию
18.04.2014