Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, А. Ю. Дуплищева, Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:32:20

УДК 517.9

А. Г. Баскаков, А. Ю. Дуплищева

Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка

Изучаются линейные разностные операторы (уравнения) второго порядка. Приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения. Основные результаты получены на основе сопоставления исследуемого оператора с операторной матрицей второго порядка и последующего использования теории разностных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: линейный разностный оператор, обратимый оператор, спектр оператора, экспоненциальная дихотомия, состояние обратимости линейного оператора, асимптотическое поведение решений.

DOI: 10.4213/im8248

§ 1. Введение. Основные результаты

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ – банахова алгебра операторов, действующих в X . В банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, двусторонних последовательностей векторов из X с нормой

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l^p, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad x \in l^\infty,$$

рассматривается разностное уравнение второго порядка вида

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $f \in l^p$, $B_k: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$, $k = 1, 2$, – ограниченные операторнозначные функции, т.е. $B_k \in l^\infty(\mathbb{Z}, \text{End } X)$, $k = 1, 2$. Через S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p : $S \in \text{End } l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

Любой последовательности $x \in l^p$ поставим в соответствие последовательность $y: \mathbb{Z} \rightarrow X^2 = X \times X$ вида (в декартовом произведении X^2 рассматривается норма $\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$, $(x_1, x_2) \in X^2$)

$$y(n) = (x_1(n), x_2(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = Sx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00378, 14-01-31196), гранта РНФ (проект № 14-21-00066) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 1110).

Непосредственно из определения последовательности y следует, что последовательность $x \in l^p$ есть решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда последовательность $y \in l^p(\mathbb{Z}, X^2)$ удовлетворяет уравнению (рассматриваемому в $l^p(\mathbb{Z}, X^2)$)

$$z(n+1) + U(n)z(n) = \tilde{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где $\tilde{f} \in l^p(\mathbb{Z}, X^2)$, $\tilde{f}(n) = (0, f(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, и операторнозначная функция $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X^2$ имеет следующий вид: каждый оператор $U(n) \in \text{End } X^2$ задается (определяется) в $X \times X$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Иногда мы отождествляем матрицу оператора, действующего в декартовом произведении банаховых пространств, с оператором, который задается этой матрицей (по возможности, мы старались этого избегать). Кроме того, используется канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z}, X^2)$, $l^p(\mathbb{Z}, X) \times l^p(\mathbb{Z}, X)$. Через I обозначается тождественный оператор в любом из банаховых пространств.

Прием, использующий сведение дифференциальных и разностных уравнений высокого порядка к соответствующим дифференциальным и разностным уравнениям первого порядка, широко применяется в теории дифференциальных и разностных уравнений и, более того, излагается в университетских курсах по теории дифференциальных и разностных уравнений.

Уравнения (1) и (2) запишем в операторном виде

$$\mathcal{D}x = f, \quad f \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, X), \quad \mathbb{D}y = g, \quad g \in l^p(\mathbb{Z}, X \times X), \quad (4)$$

где разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ определяется формулой

$$\mathcal{D} = S^2 + \tilde{B}_1 S + \tilde{B}_2.$$

В этой формуле $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ – операторы умножения в $l^p(\mathbb{Z}, X)$ на операторные функции $B_1, B_2: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(n) = B_k(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X), \quad k = 1, 2.$$

Оператор $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X^2)$ в (4) имеет вид $\mathbb{D} = \mathbb{S} + \mathbb{B}$, где операторы $\mathbb{S}, \mathbb{B} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X^2)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathbb{S}x &= (Sx_1, Sx_2), \quad (\mathbb{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \\ n \in \mathbb{Z}, \quad x &= (x_1, x_2) \in l^p(\mathbb{Z}, X^2) \simeq l^p(\mathbb{Z} \times X) \times l^p(\mathbb{Z} \times X). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\mathbb{D}$ определяется в $l^p \times l^p$ матрицей вида

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

При описанном выше подходе сведения уравнения (1) к уравнению (2) одновременно обратимы оператор $\mathcal{D}$ и оператор

$$\tilde{\mathbb{D}}: \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix}, \quad x \in l^p,$$

определенный на подпространстве $\{(x, Sx) \in l^p(\mathbb{Z}, X^2), x \in l^p(\mathbb{Z}, X)\}$ со значениями в подпространстве $\{0\} \times l^p(\mathbb{Z}, X)$. Неудобство использования оператора $\tilde{\mathbb{D}}$ связано с тем, что он действует между разными пространствами и отсутствуют работы по его изучению. В свою очередь, спектральные свойства оператора $\mathbb{D}$ достаточно хорошо изучены [1]–[11]. Возникает естественный вопрос о близости таких свойств операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$, как совпадение размерностей ядер, одновременной замкнутости их образов, совпадение размерностей кообразов, одновременной их обратимости. При утвердительном ответе на эти вопросы изучение свойств разностного оператора $\mathcal{D}$ второго порядка, связанных с его обратимостью, сводятся к выяснению соответствующих свойств разностного оператора первого порядка $\mathbb{D}$. Следовательно, появляется возможность применения результатов работ [1]–[16].

Всюду далее используется следующее важное определение, рассматриваемое в статьях [8], [11]–[13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и $A \in \text{End } \mathcal{X}$. Рассмотрим следующие условия:

- 1) $\text{Ker } A = \{x \in \mathcal{X} : Ax = 0\} = \{0\}$ (т. е. A – инъективный оператор);
- 2) $1 \leq n = \dim \text{Ker } A < \infty$;
- 3) $\text{Ker } A$ – бесконечномерное подпространство в $\mathcal{X}$ ($\dim \text{Ker } A = \infty$);
- 4) $\text{Ker } A$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;
- 5) $\overline{\text{Im } A} = \text{Im } A$ (образ оператора A замкнут в $\mathcal{X}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in \mathcal{X} \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

где $\text{dist}(x, \text{Ker } A) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } A} \|x - x_0\|$ – расстояние от вектора x до подпространства $\text{Ker } A$;

- 6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;
- 7) $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$ конечной коразмерности $\text{codim } \text{Im } A = m \geq 1$;
- 8) $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство в пространстве $\mathcal{X}$ бесконечной коразмерности $\text{codim } \text{Im } A = \infty$;
- 9) $\text{Im } A \neq \mathcal{X}$, $\overline{\text{Im } A} = \mathcal{X}$;
- 10) $\overline{\text{Im } A} \neq \mathcal{X}$;
- 11) $\text{Im } A = \mathcal{X}$ (A – сюръективный оператор);
- 12) оператор A обратим (т. е. $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\text{Im } A = \mathcal{X}$).

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 12$, то будем говорить, что оператор A находится в *состоянии обратимости* σ . Множество всех состояний обратимости оператора A обозначим через $\text{St}_{\text{inv}} A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3], [4], [8]. Если оператор $A \in \text{End } \mathcal{X}$ имеет конечномерное ядро, т. е. выполнено одно из условий 1), 2) определения 1, и замкнутый образ конечной коразмерности, т. е. выполнено одно из условий 7), 11), то оператор называется *фредгольмовым*. Если оператор A имеет замкнутый образ и конечно одно из чисел $\dim \text{Ker } A$, $\text{codim Im } A = \dim(\mathcal{X}/\text{Im } A)$, то оператор A называется *полуфредгольмовым*. Число $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \text{codim Im } A$ называется *индексом фредгольмова* (полуфредгольмова) оператора A .

Вводимое понятие состояний обратимости оператора играет важную роль в классификации спектров операторов (более разнообразной, чем общепринятая [17]). Отметим, что аналогичное определение (без изменений) дается для линейного ограниченного оператора $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, действующего из банахова пространства $\mathcal{X}$ в другое банахово пространство $\mathcal{Y}$, и, более того, для линейных отношений [8], [11].

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Множества состояний обратимости разностных операторов $\mathcal{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$, $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X \times X)$ совпадают, т. е.*

$$\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathbb{D}). \quad (5)$$

Равенство (5) означает, что если одно из двенадцати условий определения 1 выполнено для одного из операторов $\mathcal{D}$, $\mathbb{D}$, то оно выполнено и для другого оператора.

Для доказательства теоремы 1 и других формулируемых в этом параграфе утверждений (результатов) о разностном операторе $\mathcal{D}: l^p \rightarrow l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, $p \in [1, \infty]$, существенно используются результаты о разностном операторе $\mathbb{D} \in \text{End}(l^p \times l^p)$, которые получены в статьях [5]–[11], [16] для более общего разностного оператора $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y)$, $p \in [1, \infty]$, вида

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, Y),$$

где Y – комплексное банахово пространство и $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$.

Изучение оператора $\mathfrak{D}$ осуществляется с использованием ряда выписываемых далее понятий. По функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y$ построим (дискретное) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\} \rightarrow \text{End } Y$. Оно определяется равенствами

$$\mathcal{U}(n, m) = \begin{cases} U(n)U(n-1) \cdots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases} \quad (6)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$. Исследование разностного оператора $\mathfrak{D}$ проводилось в [6]–[8] с существенным использованием понятия экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } Y$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на подмножестве $\mathbb{J}$ из $\mathbb{Z}$, если существуют ограниченная проекторнозначная функция $P: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } Y$ и постоянные $M_0 \geq 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие свойства:

- 1) $\mathcal{U}(n, m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n, m)$, $n \geq m$, $m, n \in \mathbb{J}$;
- 2) $\|\mathcal{U}(n, m)P(m)\| \leq M_0 \exp(-\gamma(n - m))$ для $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{J}$;
- 3) для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathcal{U}_{n,m}: Y'(m) \rightarrow Y'(n)$ оператора $\mathcal{U}(m, n)$ на область значений $Y(m) = \text{Im } Q(m)$ дополнительного к $P(m)$ проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $Y'(m)$ и $Y'(n) = \text{Im } Q(n)$ (мы полагаем оператор $\mathcal{U}(m, n) \in \text{End } Y$ равным $\mathcal{U}_{n,m}^{-1}$ на $Y'(n)$ и равным нулевому оператору на $Y(n) = \text{Im } P(n) \subset Y$);
- 4) $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq M_0 \exp \gamma(m - n)$ для всех $n \geq m$ из $\mathbb{J}$.

Пару проекторнозначных функций $P, Q: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } Y$, участвующих в определении 3, назовем *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на $\mathbb{J}$.

В статье [7, теорема 4] установлена

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы разностный оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y)$, определяемый функцией $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, \text{End } Y)$, был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$. Если оператор $\mathfrak{D}$ обратим, то оператор $\mathfrak{D}^{-1} \in \text{End } l^p$ определяется формулой*

$$(\mathfrak{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(n, m)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^p,$$

где функция Грина $G: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } Y$ имеет вид

$$G(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m)P(m), & m \leq n, \\ -\mathcal{U}(n, m)Q(m), & m > n, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l^p$ вида*

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p,$$

обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$, построенных по операторнозначной функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$, где оператор $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, задается матрицей вида (3), допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим разностный оператор

$\mathcal{D}: l^p \rightarrow l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1x(n+1) + B_2x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$, с постоянными операторными коэффициентами $B_1, B_2 \in \text{End } X$. Далее используется функция

$$H = H_{\mathcal{D}}: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } X, \quad H(\gamma) = \gamma^2 I + \gamma B_1 + B_2, \quad \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\},$$

которую назовем *характеристической функцией* оператора $\mathcal{D}$. Дополнение $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ к (открытому) множеству

$$\rho(H) = \{\gamma_0 \in \mathbb{T}: H(\gamma_0) - \text{обратимый оператор из } \text{End } X\}$$

назовем *сингулярным* множеством функции.

ТЕОРЕМА 4. *Разностный оператор $\mathcal{D}$ (с постоянными операторными коэффициентами B_1, B_2) обратим тогда и только тогда, когда множество $s(H)$ пусто. Если $s(H) = \emptyset$, то обратный оператор $\mathcal{D}^{-1} \in \text{End } l^p$ представим в виде*

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(n) = (G * x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n - m)x(m), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X). \quad (7)$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, \text{End } X)$ (со сверткой функций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n d\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Вернемся к рассмотрению оператора $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y)$ и семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } Y$, построенного по U . Далее считается выполненным следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}$, $\mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций $P_-, Q_-: \mathbb{Z}_{-,a} \rightarrow \text{End } Y$, $P_+, Q_+: \mathbb{Z}_{b,+} \rightarrow \text{End } Y$.

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b), \quad \mathcal{N}_{b,a}x = Q_+(b)\mathcal{U}(b,a)x, \quad x \in \text{Im } Q_-(a).$$

Если $a = b$, то полагается $\mathcal{U}(b,a) = I$. Этот оператор был определен в статьях [6], [8] и назван *узловым*. Важность его рассмотрения обусловлена тем, что он действует между подпространствами “фазового” пространства Y , а не в $l^p(\mathbb{Z}, Y)$.

ТЕОРЕМА 5 [8, теорема 1.12]. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда*

$$\text{St}_{\text{inv}} \mathfrak{D} = \text{St}_{\text{inv}} \mathcal{N}_{b,a}.$$

В частности, оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$. Если оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов, то

$$\dim \text{Ker } \mathcal{D} = \dim \text{Ker } \mathcal{N}_{b,a}, \quad \text{codim Im } \mathcal{D} = \text{codim Im } \mathcal{N}_{b,a}, \quad \text{ind } \mathcal{D} = \text{ind } \mathcal{N}_{b,a}.$$

ТЕОРЕМА 6 [8, теорема 5.4]. *Пусть выполнено предположение 1 при $Q^\pm = 0$. Тогда оператор $\mathfrak{D}$ обратим.*

В условиях следующей теоремы будем полагать, что существуют (в равномерной операторной топологии) пределы

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} B_1(n) = B_1^\pm \in \text{End } X, \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} B_2(n) = B_2^\pm \in \text{End } X.$$

Спектры $\sigma(\mathbb{B}^\pm)$ операторов $\mathbb{B}^\pm \in \text{End } X^2$, определяемых операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^\pm & B_1^\pm \end{pmatrix}$, совпадают со спектром $\sigma(L^\pm)$ соответствующего операторного пучка $L^\pm(\lambda) = \lambda^2 I - B_1^\pm \lambda + B_2^\pm$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что по определению

$$\sigma(L^\pm) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L^\pm(\lambda) - \text{необратимый оператор в алгебре } \text{End } X\}.$$

В свою очередь, равенства $\sigma(\mathbb{B}^\pm) = \sigma(L^\pm)$ непосредственно следуют из теоремы 1.

Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l^p$ обратим, если спектральные радиусы $r(L^\pm) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(L^\pm)\}$ операторных пучков $L^\pm$ меньше единицы.*

Следующая теорема может служить основой для получения необходимых и достаточных условий фредгольмовости изучаемого оператора $\mathcal{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$.

ТЕОРЕМА 8 [8, теорема 1.6]. *Оператор $\mathfrak{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, Y)$, определяемый формулой $(\mathfrak{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$, является фредгольмовым тогда и только тогда, когда для семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } Y$, определенных равенствами (6), выполнено предположение 1 и узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a} : \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$ является фредгольмовым. При условии фредгольмовости одного из них их индексы совпадают, а также совпадают размерности ядер и коразмерности образов.*

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть X – конечномерное пространство. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End}(X \times X)$, построенных равенствами (6) по функции $U : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$, определяемой матрицей вида (3), удовлетворяет условиям предположения 1.*

ТЕОРЕМА 10. *Пусть выполнены условия теоремы 7, операторы $B_1(n)$, $B_2(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, компактны и $\sigma(\mathbb{B}^\pm) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Тогда оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ фредгольмов.*

ТЕОРЕМА 11. *Операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ одновременно обратимы, и обратный к $\mathbb{D}$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) & \mathcal{D}^{-1} \\ S\mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) - I & S\mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Далее, в теореме 12, получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения второго порядка (уравнения (1) с $f = 0$).

Рассмотрим однородное уравнение (1) (т. е. при $f = 0$) на $\mathbb{Z}_+$ и сделаем

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функции $B_1, B_2 : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ являются постоянными ($B_k(n) \equiv B_k \in \text{End } X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 1, 2$) и все решения однородного (т. е. $f = 0$) разностного уравнения (1), рассматриваемого на $\mathbb{Z}_+$, ограничены.

При сделанном предположении 2 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ уравнения (1) (с $f = 0$) удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (9)$$

Из ограниченности всех решений уравнения (1) и представления (9), а также принципа равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза [17, гл. II]), следует, что

$$\sup_{n \geq 0} \|\mathbb{B}^n\| = M(\mathbb{B}) < \infty, \quad (10)$$

где $\mathbb{B}$ – оператор из $\text{End}(X \times X)$, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$. Из соотношения (10) следует, что спектральный радиус оператора $\mathbb{B}$ не превосходит единицы, т. е.

$$\sigma(\mathbb{B}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть выполнены предположение 2 и условие $\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End}(X^2))$, $1 \leq k \leq m$, такие, что для любого решения $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ уравнения (1) имеют место следующие представления

$$(x(n), x(n+1)) = \left(\sum_{k=1}^m \gamma_k^n A_k(n) \right) (x(0), x(1)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции A_k , $1 \leq k \leq m$, обладают следующими свойствами:

- 1) операторы $A_k(n) \in \text{End}(X^2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре $\mathcal{A}_{\mathbb{B}}$ из $\text{End } X^2$, содержащей оператор $\mathbb{B}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n+1) - A_k(n)\| = 0$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}A_k(n) - \gamma_k A_k(n)\| = 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k(n)A_j(n)\| = 0$ для $k \neq j$, $1 \leq k, j \leq m$.

Теорема 12 непосредственно следует из [16, теорема 1].

§ 2. Абстрактный случай. Доказательство теорем 1, 3, 11

В настоящем параграфе будет получен аналог теоремы 1 (теорема 13) для более общего класса операторов, чем разностные, а теорема 1 будет являться ее частным случаем.

Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и A, C_1, C_2 – операторы из алгебры $\text{End } \mathcal{X}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 \in \text{End } \mathcal{X}$. Наряду с оператором $\mathcal{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in \text{End } \mathcal{X}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A+C_1 \end{pmatrix}$, т. е.

$$\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + (A + C_1)x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2.$$

ТЕОРЕМА 13. Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадают: $\text{St}_{\text{inv}} \mathcal{A} = \text{St}_{\text{inv}} \mathbb{A}$.

Докажем сначала свойства, касающиеся ядер операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

ЛЕММА 1. Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор

$$J: \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ker } \mathbb{A}, \quad Jx = (x, Ax), \quad x \in \text{Ker } \mathcal{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \text{Ker } \mathcal{A}$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, Ax) = (0, 0)$, то $(x, Ax) \in \text{Ker } \mathbb{A}$, т.е. оператор J определен корректно. Очевидно, что он инъективен. Установим его сюръективность. Пусть $(x_1, x_2) \in \text{Ker } \mathbb{A}$. Тогда

$$\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + Ax_2 + C_1x_2) = (0, 0).$$

Таким образом, $x_2 = Ax_1$. Поэтому $Ax_1 = C_2x_1 + A^2x_1 + C_1Ax_1 = 0$ и, следовательно, $Jx_1 = (x_1, x_2) = (x_1, Ax_1)$, $x_1 \in \text{Ker } \mathcal{A}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 1 следует, что условия 1)–3) из определения 1 выполнены для оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда они выполнены для оператора $\mathbb{A}$. При этом $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathbb{A}$. Отметим, что ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ являются замкнутыми подпространствами в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ соответственно.

Теперь рассмотрим вопрос дополняемости ядер операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$, $\mathcal{P}_{\text{Ker } \mathbb{A}}$ – множества непрерывных проекторов на ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ соответственно. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) если $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}$, принадлежит $\mathcal{P}_{\text{Ker } \mathbb{A}}$;
- 2) если проектор $\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathbb{A}}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, то $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор из $\mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $P \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$. Непосредственно проверяется, что оператор $\mathbb{P} \in \text{End } \mathcal{X}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}$, является проектором. Докажем, что $\mathbb{P}$ – проектор на подпространство $\text{Ker } \mathbb{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Включение $\text{Im } \mathbb{P} \subset \text{Ker } \mathbb{A}$ вытекает из следующих равенств:

$$\mathbb{A}\mathbb{P}x = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP - AP & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Если $(x, Ax) \in \text{Ker } \mathbb{A}$, то $x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ (см. лемму 1), и тогда

$$\mathbb{P} \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px \\ APx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}.$$

Итак, $\text{Im } \mathbb{P} = \text{Ker } \mathbb{A}$, т.е. $\mathbb{P}$ – проектор на ядро оператора $\mathbb{A}$.

2) Пусть $\tilde{\mathbb{P}}$ – один из проекторов на $\text{Ker } \mathbb{A}$, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Докажем, что оператор $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор на $\text{Ker } \mathcal{A}$, т.е. $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\text{Ker } \mathcal{A}}$.

Пусть x – произвольный вектор из $\mathcal{X}$. Тогда $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (P_{11}x + P_{12}Ax, P_{21}x + P_{22}Ax) \in \text{Ker } \mathbb{A}$. Поэтому повторное применение проектора $\tilde{\mathbb{P}}$ к вектору $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax)$ дает вектор

$$((P_{11} + P_{12}A)^2x, y) = ((P_{11} + P_{12}A)x, y),$$

где $y = P_{21}x + P_{22}Ax$. Следовательно, $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор. Докажем, что $\tilde{P}$ – проектор на $\text{Ker } A$.

Сначала докажем, что $\text{Im } \tilde{P} \subset \text{Ker } A$. Поскольку (в силу леммы 1) $\text{Ker } \mathbb{A} = \{(x, Ax), x \in \text{Ker } A\}$, то $\tilde{\mathbb{P}}(x, 0) = (P_{11}x, P_{21}x) = (P_{11}x, AP_{11}x)$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$. Следовательно, $P_{21} = AP_{11}$. Применяя проектор $\tilde{\mathbb{P}}$ к вектору $(0, x)$, где $x \in \mathcal{X}$, аналогичным образом устанавливаем, что $P_{21} = AP_{11}$. Итак, проектор $\tilde{\mathbb{P}}$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ AP_{11} & AP_{12} \end{pmatrix}$. Из этого представления проектора $\tilde{\mathbb{P}}$ следует, что $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (\tilde{P}x, A\tilde{P}x)$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$. Следовательно, из леммы 1 следует, что $\text{Im } \tilde{P} \subset \text{Ker } A$.

Пусть теперь x – произвольный вектор из $\text{Ker } A$. Тогда в силу леммы 1 вектор (x, Ax) принадлежит $\text{Ker } \mathbb{A}$. Поэтому $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (\tilde{P}x, A\tilde{P}x) = (x, Ax)$. Следовательно, $\tilde{P}x = x$.

Итак, $\text{Im } \tilde{P} = \text{Ker } A$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 1 (см. замечание 1) и теоремы 14 следует, что условия 1)–4) из определения 1 выполнены для операторов A и $\mathbb{A}$ одновременно.

Теперь рассмотрим свойства 5)–12) из определения 1 для образов операторов A и $\mathbb{A}$.

ЛЕММА 2. Вектор $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора A тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $z \in \text{Im } A$; тогда найдется элемент $x \in \mathcal{X}$ такой, что $z = Ax$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, z)$, то $(0, z) \in \text{Im } \mathbb{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что пара $(0, z)$ принадлежит $\text{Im } \mathbb{A}$. Тогда найдется пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ такая, что $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + (A + C_1)x_2) = (0, z)$. Из этих равенств следует $Ax_1 = z$, т. е. $z \in \text{Im } A$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y = y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Рассмотрим произвольную пару (y_1, y_2) из $\text{Im } \mathbb{A}$. Тогда найдется такая пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, что выполнены равенства $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + (A + C_1)x_2) = (y_1, y_2)$. Следовательно, $x_2 = Ax_1 - y_1$, и поэтому $Ax_1 = y_2 + (A + C_1)y_1$. Итак, $y_2 + (A + C_1)y_1 \in \text{Im } A$.

Достаточность. Пусть пара (y_1, y_2) такова, что вектор $y = y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора A . Поэтому существует вектор $x \in \mathcal{X}$ такой, что $Ax = y$. Свойство $(y_1, y_2) \in \text{Im } \mathbb{A}$ будет вытекать из следующих равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(x, Ax - y_1) &= (Ax - Ax + y_1, C_2x + (A + C_1)(Ax - y_1)) \\ &= (y_1, Ax - (A + C_1)y_1) = (y_1, y_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обратимся теперь к доказательству одновременной замкнутости образов операторов A и $\mathbb{A}$.

ЛЕММА 4. *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут. Рассмотрим последовательность (u_n, v_n) , $n \geq 1$, принадлежащую $\text{Im } \mathbb{A}$ и сходящуюся к элементу $(u_0, v_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Докажем, что $(u_0, v_0) \in \text{Im } \mathbb{A}$. В силу леммы 3 последовательность $v_n + (A + C_1)u_n$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. В силу замкнутости подпространства $\text{Im } \mathcal{A}$ получаем, что $v_0 + (A + C_1)u_0$ принадлежит $\text{Im } \mathcal{A}$. Еще раз используя лемму 3, получаем, что $(u_0, v_0) \in \text{Im } \mathbb{A}$.

Достаточность. Пусть $\overline{\text{Im } \mathbb{A}} = \text{Im } \mathbb{A}$. Докажем замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$. Пусть последовательность (z_n) из $\text{Im } \mathcal{A}$ является сходящейся к элементу $z_0 \in \mathcal{X}$ и (x_n) – последовательность, для которой $z_n = \mathcal{A}x_n$, $n \geq 1$. Из леммы 2 следует, что последовательность $(0, z_n)$, $n \geq 1$, принадлежит $\text{Im } \mathbb{A}$ и сходится к $(0, z_0) \in \text{Im } \mathbb{A}$. Из той же леммы 2 следует, что $z_0 \in \text{Im } \mathcal{A}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Одновременное выполнение свойства 6) из определения 1 для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ следует из леммы 4 и леммы 1.

Для доказательства одновременного выполнения свойств 7)–12) из определения 1 для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ воспользуемся следующим представлением матрицы оператора $\mathbb{A}$ в виде

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & A + C_1 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ представим в виде произведения:

$$\mathbb{A} = \mathcal{J}\mathbb{B}\mathcal{V}, \quad (11)$$

где операторы $\mathcal{J}, \mathbb{B}, \mathcal{V} \in \text{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ определяются соответствующими матрицами. При этом $\mathcal{J}^2 = I$ и $\mathcal{J}, \mathcal{V}$ – обратимые операторы, матрица оператора $\mathbb{B}$ верхнетреугольная.

Далее через $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}, \mathcal{P}_{\text{Im } \mathcal{A}}, \mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{B}}$ обозначим множества (непрерывных) проекторов на подпространства $\text{Im } \mathbb{A}, \text{Im } \mathcal{A}, \text{Im } \mathbb{B}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Непосредственно из представления (11) оператора $\mathbb{A}$ следует, что имеет место равенство

$$\text{Im } \mathbb{A} = \mathcal{J}(\text{Im } \mathbb{B}).$$

Кроме того, если $\tilde{\mathbb{P}} \in \text{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ – проектор на $\text{Im } \mathbb{B}$, то оператор $\mathbb{P} = \mathcal{J}\tilde{\mathbb{P}}\mathcal{J}^{-1}$ есть проектор на $\text{Im } \mathbb{A}$.

Из замечания 4 следует, что при описании множества проекторов $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$ достаточно описать множество $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{B}}$. Далее оператор $A + C_1$ будет иногда обозначаться через B .

ЛЕММА 5. *Если $P \in \mathcal{P}_{\text{Im } \mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-P)_B & P \end{pmatrix}$, принадлежит $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $\mathbb{P}$ из $\text{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-P)_B & P \end{pmatrix}$. Непосредственная проверка показывает, что квадрат этой матрицы совпадает с этой матрицей. Следовательно, $\mathbb{P}$ – проектор.

Докажем теперь, что $\text{Im } \mathbb{P} = \text{Im } \mathbb{A}$. Пусть (y_1, y_2) – произвольная пара из образа оператора $\mathbb{A}$. Из леммы 3 получаем, что вектор $y = y_1 + (A + C_1)y_2$ принадлежит $\text{Im } \mathcal{A}$ и, следовательно, $(I - P)y = 0$. Поэтому имеют место равенства

$$\mathbb{P}(y_1, y_2) = (y_1, Py_2 - (I - P)(A + C_1)y_1) = (y_1, y_2 - (I - P)y) = (y_1, y_2).$$

Итак, доказано включение $\text{Im } \mathbb{A} \subset \text{Im } \mathbb{P}$.

Докажем включение $\text{Im } \mathbb{P} \subset \text{Im } \mathbb{A}$. Пусть (z_1, z_2) – некоторая пара из $\text{Im } \mathbb{P}$. Следовательно, данная пара может быть представлена в виде $z_1 = y_1$, $z_2 = Py_2 - (I - P)(A + C_1)y_1$. Для того чтобы доказать включение $(z_1, z_2) \in \text{Im } \mathbb{A}$, следует согласно лемме 3 доказать, что вектор $z_2 + (A + C_1)z_1$ принадлежит $\text{Im } \mathcal{A}$. Действительно,

$$\begin{aligned} z_2 + (A + C_1)z_1 &= Py_2 - (I - P)(A + C_1)y_1 + (A + C_1)y_1 = Py_2 + P(A + C_1)y_1 \\ &= P(y_2 + (A + C_1)y_1) \in \text{Im } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство $\text{Im } \mathbb{P} = \text{Im } \mathbb{A}$. Итак, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 15. *Операторы $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ обратимы одновременно, и обратный к $\mathbb{A}$ оператор задается матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A + C_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A + C_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления оператора $\mathbb{A}$ в виде (11) – произведения трех обратимых операторов – следует, что $\mathbb{A}^{-1} = \mathcal{V}^{-1}\mathbb{B}^{-1}\mathcal{J}^{-1}$. Матрицы операторов $\mathcal{V}^{-1}$, $\mathbb{B}^{-1}$, $\mathcal{J}^{-1}$ имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} & \mathcal{A}^{-1}(A + C_1) \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому прямые вычисления ведут к представлению матрицы оператора $\mathbb{A}^{-1}$ в виде (12). Теорема доказана.

В следующей лемме, фактически вытекающей из леммы 2, используется оператор $\mathbb{B}$ из равенства (11).

ЛЕММА 6. *Если $\text{Im } \mathbb{B}$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, то $\text{Im } \mathcal{A}$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$. Размерности кообразов подпространств $\text{Im } \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathbb{B}$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $\mathcal{U} \in \text{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & A+C_1 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Он обратим, и обратный к $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{U}^{-1}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} I & -(A+C_1) \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbb{P}$ – проектор на образ $\text{Im } \mathbb{B}$ оператора $\mathbb{B}$. Непосредственная проверка показывает, что оператор $\mathbb{P}_0 = \mathcal{U}\mathbb{P}\mathcal{U}^{-1}$, где $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$, является

проектором (см. замечание 4) на образ $\text{Im } \mathbb{A}_0$ оператора $\mathbb{A}_0 \in \text{End}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbb{P}_0$ задается матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Из равенства $\mathbb{P}_0 \mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_0$ следует, что $P_{11}A = A$, $P_{12} = 0$, $P_{22} = I$, $P_{21}A = 0$. Из равенства $\mathbb{P}_0^2 = \mathbb{P}_0$ вытекает, что $P_{11}^2 = P_{11}$, $P_{21}P_{11} = 0$, т.е. P_{11} – проектор. Включение $\text{Im } A \subset \text{Im } P_{11}$ следует из равенства $P_{11}A = A$. Докажем включение $\text{Im } P_{11} \subset \text{Im } A$. Поскольку $\text{Im } \mathbb{A}_0 = \text{Im } A \times \mathcal{X}$ и $\mathbb{P}_0(x_1, x_2) = (P_{11}x_1, P_{21}x_1 + x_2)$ для любой пары $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, то $P_{11}x_1 \in \text{Im } A$ для любого вектора x_1 из $\mathcal{X}$. Итак, P_{11} – проектор на $\text{Im } A$, т.е. $\text{Im } A$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$. Из равенства $\text{Im } \mathbb{A}_0 = \text{Im } A \times \mathcal{X}$ следует, что размерности подпространств (кообразов) $\text{Im}(I - \mathbb{P})$, $\text{Im}(I - \mathbb{P}_0)$ в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и $\text{Im } A$ в $\mathcal{X}$ совпадают. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательств лемм 5, 6 и теоремы 15 выводится, что множество $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$ проекторов на $\text{Im } \mathbb{A}$ описывается следующим образом. Для каждого проектора $\mathbb{P}$ из $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$ найдутся проектор $P \in \mathcal{P}_{\text{Im } A}$ и оператор $C \in \text{End } \mathcal{X}$ со свойством $CA = 0$ такие, что проектор $\mathbb{P}$ задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} -CB + I & -C \\ PB + B(CB - I) & P + BC \end{pmatrix}.$$

В частности, если $P \in \mathcal{P}_{\text{Im } A}$ и $C = 0$, то оператор, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & 0 \\ (P - I)_B & P \end{pmatrix}$, является проектором на $\text{Im } \mathbb{A}$ (что соответствует лемме 5).

Одновременное выполнение свойств 7)–11) из определения 1 можно получить из взаимоотношений между множеством проекторов $\mathcal{P}_{\text{Im } A}$ и $\mathcal{P}_{\text{Im } \mathbb{A}}$, отмеченных в замечании 5.

В следующей лемме применяется другой подход, основанный на использовании сопряженных к A и $\mathbb{A}$ операторов. Сопряженный к A оператор A^* имеет вид

$$A^* = (A^*)^2 + (A^*C_1^* + C_2^*) \in \text{End } \mathcal{X}.$$

Для описания сопряженного оператора к $\mathbb{A}$ сопряженное $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$ к $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ пространство канонически отождествляется с пространством

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^* \quad ((\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) &= \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2), \\ (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \quad (\xi_1, \xi_2) &= \xi \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*). \end{aligned}$$

Сопряженный к $\mathbb{A}$ оператор $\mathbb{A}^* \in \text{End}(\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A^* & C_2^* \\ -I & A^* + C_1^* \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 7. Ядра $\text{Ker } A^*$, $\text{Ker } \mathbb{A}^*$ операторов A^* , $\mathbb{A}^*$ изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор

$$J_1: \text{Ker } A^* \rightarrow \text{Ker } \mathbb{A}^*, \quad J_1\xi = ((A^* + C_1^*)\xi, \xi), \quad \xi \in \text{Ker } A^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \text{Ker } A^*$. Поскольку $\mathbb{A}^*((A^* + C_1^*)\xi, \xi) = (0, 0)$, то $J_1\xi \in \text{Ker } \mathbb{A}^*$. Таким образом, оператор J_1 корректно определен. Поскольку оператор J_1 инъективен, осталось доказать его сюръективность. Пусть $(\xi_1, \xi_2) \in \text{Ker } \mathbb{A}^*$, и поэтому

$$\mathbb{A}^*(\xi_1, \xi_2) = (A^*\xi_1 + C_2^*\xi_2, -\xi_1 + (A^* + C_1^*)\xi_2) = (0, 0).$$

Следовательно, $\xi_1 = (A^* + C_1^*)\xi_2$ и $A^*\xi_2 = 0$, т. е. $\xi_2 \in \text{Ker } A^*$. Из этих равенств получаем, что $J_1\xi_1 = (\xi_1, \xi_2) = ((A^* + C_1^*)\xi_1, \xi_1)$. Лемма доказана.

Для любого линейного подпространства M из $\mathcal{X}$ через $M^\perp$ обозначим (замкнутое) подпространство из $\mathcal{X}^*$ вида $\{\xi \in \mathcal{X}^* : \xi(x) = 0 \text{ для любого } x \in M\}$. В следующей лемме используются равенства (см. [18, теорема 4.12])

$$(\text{Im } \mathbb{A})^\perp = \text{Ker } \mathbb{A}^*, \quad (\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Ker } \mathcal{A}^*. \quad (13)$$

ЛЕММА 8. *Для образов операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ свойства 7)–11) из определения 1 выполняются одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что образы операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ одновременно дополняемы. При условии их дополняемости из равенства (13) и леммы 7 следует, что коразмерности образов операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ совпадают. Если один из операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ сюръективен (для определенности пусть $\mathcal{A}$), то образ $\text{Im } \mathbb{A}$ замкнут в силу леммы 4. Поэтому из леммы 8 следует, что $\text{Ker } \mathbb{A}^* = \{0\}$, т. е. $\text{Im } \mathbb{A} = \mathcal{X}$.

При выполнении свойства 11) определения 1 для одного из операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ из равенств (13) следует, что ядро соответствующего оператора нулевое. Следовательно, нулевым будет ядро второго оператора, и поэтому свойство 9) из определения 1 выполняется одновременно для обоих операторов (образ второго оператора не может совпасть со всем пространством, так как тогда в силу доказанного и первый оператор был бы сюръективным). Одновременное выполнение свойства 10) из определения 1 для операторов $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ следует из равенств (13) и изоморфности ядер их сопряженных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 следует из доказанной теоремы 13, примененной к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{D}, \mathbb{A} = \mathbb{D}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 1 (из совпадения свойства 12) для операторов $\mathcal{D}, \mathbb{D}$) следует, что операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ одновременно обратимы. Осталось к оператору $\mathbb{D}$ применить теорему 2. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Учитывая одновременную обратимость операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$, применим теорему 15 к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{D}, \mathbb{A} = \mathbb{D}$. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теорем 4, 7, 9, 10

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Согласно теореме 15 оператор $\mathcal{D}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим соответствующий ему оператор $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X^2)$ с постоянным операторным коэффициентом $\mathbb{B} \in \text{End } X^2$, заданным в X^2 матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$. Согласно [7, теорема 7] оператор $\mathbb{D}$ (и, следовательно, $\mathcal{D}$) обратим тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(\mathbb{B})$ оператора $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \quad (14)$$

В силу теоремы 15 условие (14) эквивалентно выполнению условия $s(H) = \emptyset$.

Если $s(H) = \emptyset$, то непосредственная проверка показывает, что обратный оператор $\mathcal{D}^{-1}$ определяется с помощью формул (7), (8). Отметим, что в этих формулах функция $\gamma \mapsto H^{-1}(\gamma): \mathbb{T} \rightarrow \text{End } X$ является преобразованием Фурье функции G . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Рассмотрим наряду с оператором $\mathcal{D}$ оператор $\mathbb{D} \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, \text{End } X^2)$. Они одновременно обратимы в силу теоремы 15. Оператор $\mathbb{D}$ задается операторной функцией $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$ из условий этой теоремы. Из условий теоремы также следует, что в равномерной операторной топологии существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U(n) = \mathbb{B}^\pm \in \text{End}(X \times X)$, определяемые операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^\pm & B_1^\pm \end{pmatrix}$. Как отмечалось перед формулировкой теоремы, спектры $\sigma(\mathbb{B}^\pm)$ операторов $\mathbb{B}^\pm$ совпадают со спектрами $\sigma(L^\pm)$ соответствующих операторных пучков $L^\pm$. По условию теоремы спектральные радиусы $r(\mathbb{B}^\pm)$ операторов меньше единицы.

Введем в рассмотрение последовательность разностных операторов $\mathcal{D}_k \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $n \geq 1$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, вида $\mathcal{D}_n = I - \mathcal{D}_n^0$:

$$(\mathcal{D}_n^0 x)(k) = \begin{cases} \mathcal{U}(n+k)x(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Данная последовательность сходится в равномерной операторной топологии к оператору $\mathcal{D}_0 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $\mathcal{D}_0 = I - \tilde{\mathcal{D}}_0$, где

$$(\tilde{\mathcal{D}}_0 x)(k) = \begin{cases} B^+ x(k-1), & k \geq 1, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X), \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Операторы $(\tilde{\mathcal{D}}_0)^m$, $m \geq 1$, имеют вид

$$(\tilde{\mathcal{D}}_0^m x)(k) = \begin{cases} (B^+)^m x(k-m), & k \geq m, \\ 0, & 0 \leq k \leq m, \end{cases}$$

где $x \in l^p(\mathbb{Z}_+, X)$. Имеют место равенства $\|\tilde{\mathcal{D}}_0^m\| = \|(B^+)^m\|$, $m \geq 1$, и поэтому $r(\tilde{\mathcal{D}}_0) = r(B^+) < 1$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_n^0 - \tilde{\mathcal{D}}_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n+1} \|U(k) - B^+\| = 0,$$

существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $r(\mathcal{D}_n^0) < 1$ для всех $n \geq n_0$. Следовательно, операторы $\mathcal{D}_n = I - \mathcal{D}_n^0$, $n \geq n_0$, обратимы. Из условия $r(\mathcal{D}_n^0) < 1$ (более подробно см. [14, теорема 5]) следует, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow \text{End } X$, построенное по рассматриваемой функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$, допускает тривиально экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{N}_m^+ = m_+ + \mathbb{N}$ при достаточно большом m_+ . При этом расщепляющая пара $P_+, Q_+ \in \text{End } X$ имеет вид $P_+(n) = I$, $Q_+(n) = 0$, $n \geq m_+ + 1$. Аналогичным образом устанавливается, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множества $\mathbb{N}_{m,-} = \{k \in \mathbb{Z}: k \leq m_-\}$ при некотором m_+ из $\mathbb{Z}$ с расщепляющей парой $P_-(n) = I$, $n \in \mathbb{N}_{m,-}$, $Q_-(n) = 0$, $n \leq m_-$. Таким образом, выполнены условия теоремы 6, из которой вытекает обратимость оператора $\mathbb{D}$ и, следовательно, оператора $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Согласно теоремам 6, 8 условие фредгольмовости оператора $\mathcal{D}$ сводится к условиям фредгольмовости узлового оператора $\mathcal{N}_{b,a}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b)$. Поскольку X – конечномерное пространство, то $\text{Im } Q_-(a)$, $\text{Im } Q_+(b)$ – конечномерные пространства. Поэтому $\mathcal{N}_{b,a}$ – фредгольмов оператор. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Так же, как и при доказательстве теоремы 7, рассмотрим (используются обозначения из ее доказательства) последовательность разностных операторов $\mathcal{D}_n = I - D_n^0$, $n \geq 1$. Она сходится в равномерной операторной топологии к оператору $\mathcal{D}_0 = I - \tilde{\mathcal{D}}_0$. Оператор $\mathcal{D}_0 \in \text{End } l^p(\mathbb{Z}, X)$ является корректным (равномерно инъективным) в силу [15, лемма 7, теорема 7] (см. также [11]), причем он обратим слева. Из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_n - \mathcal{D}_0\| = 0$ следует обратимость слева операторов $\mathcal{D}_n$, $n \geq n_0$, для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Еще раз используя указанные результаты из [15], получаем, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$, построенное по операторной функции $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(X \times X)$ (определяемой с помощью матричной функции (3)), допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{J}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ с некоторой расщепляющей парой $P_+, Q_+: \mathbb{J}_0 \rightarrow \text{End}(X \times X)$. Непосредственно из свойства 3) определения 3 экспоненциальной дихотомии следует, что операторы

$$\mathcal{U}_{n,m}: \mathcal{Y}(m) \rightarrow \mathcal{Y}(n), \quad n, m \in \mathbb{J}_0,$$

где $\mathcal{Y} = X \times X$, осуществляют изоморфизм пространств $\mathcal{Y}(m) = \text{Im } Q_+(m)$, $\mathcal{Y}(n) = \text{Im } Q_+(n)$. Поскольку операторы $\mathcal{U}(n, m)$ при $n - m \geq 2$ являются компактными (при $n - m = 1$ они не компактны), все подпространства $\mathcal{Y}(k)$, $k \geq n_0$, конечномерны. Такие же рассуждения проводятся для $n \leq 0$. В итоге получаем, что узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$ (для достаточно больших b , $|a|$, $a < b$) действует между конечномерными пространствами $\text{Im } Q_-(a)$, $\text{Im } Q_+(b)$ и поэтому является фредгольмовым. Теперь непосредственно из теоремы 3 следует фредгольмовость оператора $\mathbb{D}$. Следовательно, согласно теореме 1 фредгольмовым будет оператор $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в случае, если в уравнении (1) присутствует множитель $B_0(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, стоящий перед $x(n+2)$, причем операторные коэффициенты необратимы, то соответствующее ему уравнение (2) содержит неограниченный операторный коэффициент $U_0(n)$ перед $z(n+1)$. В этом случае имеется аналог излагаемой здесь теории, где для изучения возникающих здесь разностных операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ применяется теория линейных отношений, развиваемая в статьях [19]–[21].

Список литературы

1. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985, 376 с.; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., 840, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, iv+348 pp.

2. M.I. Gil', *Difference equations in normed spaces. Stability and oscillations*, North-Holland Math. Stud., **206**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2007, xvi+362 pp.
3. A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994, viii+504 pp.
4. А.Б. Антонеvич, *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Изд-во «Университетское», Минск, 1988, 232 с.; англ. пер.: *Linear functional equations. Operator approach*, Oper. Theory Adv. Appl., **83**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, viii+179 pp.
5. А.Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 1–11; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:3 (1996), 149–157.
6. А.Г. Баскаков, “Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов”, *Матем. заметки*, **67**:6 (2000), 816–827; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Invertibility and the Fredholm property of difference operators”, *Math. Notes*, **67**:6 (2000), 690–698.
7. А.Г. Баскаков, А.И. Пастухов, “Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1231–1243; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. I. Pastukhov, “Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42**:6 (2001), 1026–1036.
8. А.Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68**:1(409) (2013), 77–128; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations”, *Russian Math. Surveys*, **68**:1 (2013), 69–116.
9. М.С. Бичегкуев, “О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:1 (2010), 80–83; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On the spectrum of difference and differential operators in weighted spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:1 (2010), 65–68.
10. М.С. Бичегкуев, “К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Матем. сб.*, **204**:11 (2013), 3–20; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Spectral analysis of difference and differential operators in weighted spaces”, *Sb. Math.*, **204**:11 (2013), 1549–1564.
11. А.Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 215–278.
12. В.Б. Диденко, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейными отношениями”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 226–240; англ. пер.: V. B. Didenko, “On the spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation”, *Math. Notes*, **89**:2 (2011), 224–237.
13. В.Б. Диденко, “О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 5–22; англ. пер.: V. B. Didenko, “On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multi-valued impulse effects”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 3–19.

14. А. Г. Баскаков, “Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 811–820; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators”, *Math. Notes*, **59**:6 (1996), 586–593.
15. А. Г. Баскаков, “О корректности линейных дифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 3–28; англ. пер.: A. G. Baskakov, “On correct linear differential operators”, *Sb. Math.*, **190**:3 (1999), 323–348.
16. А. Г. Баскаков, “Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве операторов на банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 174–190; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces”, *Math. Notes*, **97**:2 (2015), 12–26.
17. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. I: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962, 895 с.; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, v. I: *General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958, xiv+858 pp.
18. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975, 443 с.; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973, xiii+397 pp.
19. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, “Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
20. А. Г. Баскаков, “Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 175–192; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Linear relations as generators of semigroups of operators”, *Math. Notes*, **84**:2 (2008), 166–183.
21. А. Г. Баскаков, А. С. Загорский, “К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **81**:1 (2007), 17–31; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. S. Zagorskii, “Spectral theory of linear relations on real Banach spaces”, *Math. Notes*, **81**:1 (2007), 15–27.

АНАТОЛИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ БАСКАКОВ
(ANATOLY G. BASKAKOV)
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступило в редакцию
29.04.2014

АНАСТАСИЯ ЮРЬЕВНА ДУПЛИЩЕВА
(ANASTASIYA YU. DUPLISCHEVA)
Воронежский государственный университет
E-mail: dupl_ayu@mail.ru