Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова, Расширенные тензорные произведения и операторнозначная теорема об отображении спектра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 4, 71–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:39:28

УДК 512.647.3+517.984.3

В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова

Расширенные тензорные произведения и операторнозначная теорема об отображении спектра

Вводится понятие расширенного тензорного произведения банаховых пространств X и Y . Оно определяется как набор трех объектов: банахова пространства $X \boxtimes Y$ и двух наполненных подалгебр $\mathbf{B}_0(X)$ и $\mathbf{B}_0(Y)$ алгебр $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в X и Y соответственно. Предполагается, что $X \boxtimes Y$ – расширение обычного тензорного произведения $X \otimes Y$, а функционалы из $X^* \otimes Y^*$ и операторы из $\mathbf{B}_0(X) \otimes \mathbf{B}_0(Y)$ имеют каноническое продолжение с $X \otimes Y$ на $X \boxtimes Y$. Всякая псевдорезольвента в алгебре $\mathbf{B}_0(Y)$ порождает функциональное исчисление, сопоставляющее аналитическим функциям, определенным в окрестности сингулярного множества псевдорезольвенты и принимающим значения в $\mathbf{B}_0(X)$, операторы, действующие в $X \boxtimes Y$. Доказано, что для такого функционального исчисления справедлив аналог теоремы об отображении спектра.

Библиография: 33 наименования.

Ключевые слова: тензорное произведение, псевдорезольвента, теорема об отображении спектра.

DOI: 10.4213/im8249

§ 1. Введение

Хорошо известно [1]–[5], что тензорное произведение $X \otimes L_1[0, 1]$, где X – банахово пространство, канонически вкладывается в $L_1([0, 1], X)$ в качестве всюду плотного подпространства. Это позволяет каждой паре линейных ограниченных операторов $A: X \rightarrow X$ и $B: L_1[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ сопоставить однозначно определенный оператор $\overline{A \otimes B}: L_1([0, 1], X) \rightarrow L_1([0, 1], X)$ путем продолжения оператора $A \otimes B: X \otimes L_1[0, 1] \rightarrow X \otimes L_1[0, 1]$ по непрерывности. В случае $p = \infty$ естественный образ $X \otimes L_\infty[0, 1]$ уже не всегда является всюду плотным в $L_\infty([0, 1], X)$. Тем не менее, для *некоторых* пар операторов $A: X \rightarrow X$ и $B: L_\infty[0, 1] \rightarrow L_\infty[0, 1]$ возможно каноническое расширение $\overline{A \otimes B}: L_\infty([0, 1], X) \rightarrow L_\infty([0, 1], X)$. Имеются и другие примеры банаховых пространств, обладающих рядом свойств тензорных произведений, в которых, тем не менее, тензорные произведения не образуют всюду плотных подмножеств. В статье выделен набор таких свойств, обычно играющих ключевую

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 1306), работа второго автора – РФФИ (гранты № 13-01-00378, 14-11-00305).

роль при работе с кросс-нормами на тензорном произведении банаховых пространств. Соответствующий класс пространств назван расширенными тензорными произведениями. В качестве примера использования этого понятия операторнозначная теорема об отображении спектра переносится на случай операторов, действующих в расширенных тензорных произведениях.

Простейший вариант операторнозначного функционального исчисления (см., например, [6]–[11] и ссылки в этих работах) – это отображение

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \otimes (\lambda \mathbf{1} - T)^{-1} d\lambda,$$

где f – аналитическая функция, значениями которой являются линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве X , а T – линейный ограниченный оператор, действующий в другом банаховом пространстве Y . Одним из основных свойств отображения Φ является теорема об отображении спектра:

$$\sigma[\Phi(f)] = \bigcup_{\lambda \in \sigma(T)} \sigma(f(\lambda)).$$

В настоящей работе эта формула доказывается (теорема 42) для случая, когда резольвента $(\lambda \mathbf{1} - T)^{-1}$ оператора T заменена произвольной псевдорезольвентой R_{λ} [12], а произведение $f(\lambda)$ и R_{λ} действует в расширенном тензорном произведении $X \boxtimes Y$ пространств X и Y . Важными примерами псевдорезольвент являются резольвента неограниченного оператора [12]–[14] и резольвента операторного пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$ [15]–[17].

В § 2, 5, 7 приводятся необходимые вспомогательные сведения и уточняется терминология. В § 3 вводится и обсуждается понятие расширенного тензорного произведения. В § 4 напоминаются свойства пространства аналитических функций, используемого при построении функционального исчисления, а в § 6 обсуждается конструкция функционального исчисления. В § 8 доказывается теорема 42 об отображении спектра для псевдорезольвент в расширенном тензорном произведении. В § 9 описывается применение этой теоремы для функциональных исчислений, порожденных операторным пучком.

§ 2. Банаховы алгебры

В данном параграфе уточняется терминология, связанная с банаховыми алгебрами.

Все линейные пространства и алгебры предполагаются комплексными. Все рассматриваемые алгебры [12], [14], [18] предполагаются имеющими единицу.

Пусть X и Y – банаховы пространства. Через $\mathbf{B}(X, Y)$ обозначается множество всех линейных ограниченных операторов $A: X \rightarrow Y$. Если $X = Y$, то используется сокращенная запись $\mathbf{B}(X)$. Через $\mathbf{1} = \mathbf{1}_X$ обозначается тождественный оператор, X^* – сопряженное к X пространство, $\langle x, x^* \rangle$ – результат применения функционала $x^* \in X^*$ к вектору $x \in X$, а $\langle x^{**}, x^* \rangle$ – результат применения $x^{**} \in X^{**}$ к $x^* \in X^*$. Через A^* обозначается сопряженный к оператору $A \in \mathbf{B}(X, Y)$. Предсопряженным к оператору $A \in \mathbf{B}(Y^*, X^*)$ называют оператор $A^0 \in \mathbf{B}(X, Y)$ такой, что $(A^0)^* = A$.

Если единица $\mathbf{1}_B$ алгебры B содержится в подалгебре $R \subset B$, то говорят, что R – подалгебра с единицей.

Пусть B – алгебра и $A \in B$. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что элемент $\lambda \mathbf{1} - A$ не имеет обратного, называют *спектром* элемента A (в алгебре B) и обозначают через $\sigma(A)$. Дополнение $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ называют *резольвентным множеством* A . Функцию

$$R_\lambda = (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1}$$

называют *резольвентой* элемента A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [12, теорема 4.8.1]. *Резольвента R_λ любого элемента A алгебры B удовлетворяет тождеству Гильберта*

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu, \quad \lambda, \mu \in \rho(A).$$

Пусть A и B – алгебры. Отображение $\varphi: A \rightarrow B$ называют *морфизмом алгебр с единицей* [18], если

$$\begin{aligned} \varphi(A + B) &= \varphi(A) + \varphi(B), & \varphi(\alpha A) &= \alpha \varphi(A), \\ \varphi(AB) &= \varphi(A)\varphi(B), & \varphi(\mathbf{1}_A) &= \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

Если A и B – банаховы алгебры и морфизм φ непрерывен, то говорят, что φ – *морфизм банаховых алгебр*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть A и B – алгебры с единицей, а $\varphi: A \rightarrow B$ – морфизм алгебр с единицей. Если элемент $A \in A$ обратим, то $\varphi(A)$ также обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить φ к равенствам $AA^{-1} = \mathbf{1}$ и $A^{-1}A = \mathbf{1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть A и B – алгебры с единицей и $\varphi: A \rightarrow B$ – морфизм алгебр с единицей. Тогда*

$$\sigma_B(\varphi(A)) \subseteq \sigma_A(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложения 2.

Подалгебру R с единицей алгебры B называют *наполненной* [18, гл. 1, § 1, п. 4], если всякий элемент $B \in R$, обратимый в B , также обратим и в R . В силу единственности обратного это определение эквивалентно следующему: если для $B \in R$ существует $B^{-1} \in B$ такой, что $BB^{-1} = B^{-1}B = \mathbf{1}$, то $B^{-1} \in R$.

ПРИМЕР 4. Пусть X – банахово пространство. Тогда множество $B_0(X^*)$ всех операторов, имеющих предсопряженный, образует наполненную подалгебру в алгебре $B(X^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [18, гл. 1, § 2, п. 5, предложение 5]. *Для любого подмножества M алгебры R существует наименьшая наполненная подалгебра, содержащая M . Для любого подмножества M банаховой алгебры R существует наименьшая замкнутая наполненная подалгебра, содержащая M .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей, а $\mathbf{R}$ – ее наполненная подалгебра (содержащая единицу алгебры $\mathbf{B}$). Тогда спектр любого элемента $A \in \mathbf{R}$ в алгебре $\mathbf{B}$ совпадает с его спектром в подалгебре $\mathbf{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3 следует, что $\sigma_{\mathbf{B}}(A) \subseteq \sigma_{\mathbf{R}}(A)$. Докажем обратное включение. Возьмем любое $\lambda \in \sigma_{\mathbf{R}}(A)$. Поскольку λ – точка спектра элемента A в алгебре $\mathbf{R}$, то в $\mathbf{R}$ не существует обратного к $\lambda \mathbf{1} - A$. Следовательно, обратного не существует и в алгебре $\mathbf{B}$, поскольку если бы обратный в $\mathbf{B}$ существовал, то в силу наполненности он должен был бы принадлежать и $\mathbf{R}$, т. е. должно было бы быть $\lambda \notin \sigma_{\mathbf{R}}(A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [18, гл. 1, § 2, п. 5, предложение 5]. Замыкание наполненной подалгебры банаховой алгебры – также наполненная подалгебра. Замыкание наименьшей наполненной подалгебры банаховой алгебры, содержащей множество M , есть наименьшая замкнутая наполненная подалгебра, содержащая M .

Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей, а $M \subseteq \mathbf{B}$ – произвольное подмножество. Коммутантом множества M называют множество

$$M' = \{B \in \mathbf{B} : \forall A \in M \ AB = BA\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 [14, теорема 11.22], [18, гл. 1, § 1, п. 4]. Коммутант любого множества M является наполненной подалгеброй. Эта подалгебра замкнута, если $\mathbf{B}$ нормирована.

СЛЕДСТВИЕ 9 [18, гл. 1, § 1, п. 4]. Бикоммутант

$$M'' = \{C \in \mathbf{B} : \forall B \in M' \ CB = BC\}$$

любого множества M является (замкнутой, если $\mathbf{B}$ нормирована) наполненной подалгеброй, содержащей M . Если элементы множества M коммутируют друг с другом, то M'' – коммутативная алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 [18, гл. 1, § 1, п. 4]. Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра с единицей и $A \in \mathbf{B}$. Тогда наименьшая наполненная подалгебра, содержащая A , совпадает с множеством всех рациональных функций¹ от элемента A . Следовательно, наименьшая замкнутая наполненная подалгебра $\mathbf{B}(A)$, содержащая A , совпадает с замыканием множества всех рациональных функций от элемента A . В частности, $\mathbf{B}(A)$ коммутативна.

§ 3. Расширенное тензорное произведение

Через $X \otimes Y$ обозначим тензорное произведение [1]–[5] линейных пространств X и Y . Чтобы отличать $X \otimes Y$ от его расширений, будем называть $X \otimes Y$ алгебраическим тензорным произведением.

Пусть X и Y – банаховы пространства. Норму $\alpha(\cdot) = \|\cdot\|_{\alpha}$ на $X \otimes Y$ называют кросс-нормой [2], [4], [5], если

$$\|x \otimes y\|_{\alpha} = \|x\| \cdot \|y\|$$

¹знаменатели которых являются обратимыми элементами.

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Пополнение $X \overline{\otimes}_\alpha Y$ алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ по кросс-норме α будем называть *топологическим тензорным произведением* банаховых пространств X и Y .

Всякий элемент $v^* = \sum_{l=1}^m x_l^* \otimes y_l^* \in X^* \otimes Y^*$ задает функционал

$$v^*: \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \mapsto \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_l^* \rangle \langle y_k, y_l^* \rangle \quad (1)$$

на пространстве $X \otimes Y$. Норму α^* на $X^* \otimes Y^*$, сопряженную к кросс-норме α , определим по правилу

$$\|v^*\|_{\alpha^*} = \sup\{|\langle v, v^* \rangle| : v \in X \otimes Y, \|v\|_\alpha \leq 1\}.$$

Кросс-норму α называют **-равномерной*, если α^* конечна и является кросс-нормой.

Пусть X и Y – банаховы пространства. Пространство $\mathbf{B}(X) \otimes \mathbf{B}(Y)$ имеет естественную структуру алгебры. Каждый элемент $T = \sum_{l=1}^m A_l \otimes B_l \in \mathbf{B}(X) \otimes \mathbf{B}(Y)$ задает линейный оператор

$$T: \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \mapsto \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n (A_l x_k) \otimes (B_l y_k)$$

в $X \otimes Y$. Определим норму $\tilde{\alpha}$ оператора $T \in \mathbf{B}(X) \otimes \mathbf{B}(Y)$, порожденную кросс-нормой α на пространстве $X \otimes Y$, по формуле

$$\|T\|_{\tilde{\alpha}} = \sup\{\|Tv\| : v \in X \otimes Y, \|v\|_\alpha \leq 1\}.$$

Кросс-норму α называют *равномерной* [2], если $\tilde{\alpha}$ конечна и является кросс-нормой. Всякая равномерная кросс-норма является *-равномерной [19].

Пусть X и Y – банаховы пространства. *Расширенным тензорным произведением* X и Y назовем набор трех объектов: банахово пространство $X \boxtimes Y$ (которое мы с целью сокращения речи будем называть расширенным тензорным произведением) и две (не обязательно замкнутые) наполненные подалгебры $\mathbf{B}_0(X)$ и $\mathbf{B}_0(Y)$ с единицами алгебр $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ соответственно, удовлетворяющих следующим условиям.

(А) Задано линейное отображение j алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ в $X \boxtimes Y$. Далее $j(x \otimes y)$ будем обозначать через $x \boxtimes y$. Предполагается, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется равенство

$$\|x \boxtimes y\|_{X \boxtimes Y} = \|x\|_X \|y\|_Y. \quad (2)$$

(В) Задано линейное отображение J алгебраического тензорного произведения $X^* \otimes Y^*$ в $(X \boxtimes Y)^*$. Далее для $J(x^* \otimes y^*)$ используется обозначение $x^* \boxtimes y^*$. Предполагается, что

$$\langle x \boxtimes y, x^* \boxtimes y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle \quad (3)$$

для любых $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$, $x \in X$ и $y \in Y$. Кроме того, для любых $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$ выполняется равенство

$$\|x^* \boxtimes y^*\|_{(X \boxtimes Y)^*} = \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}. \quad (4)$$

(С) Задан морфизм $\mathfrak{J}$ алгебр с единицей из алгебраического тензорного произведения $\mathbf{B}_0(X) \otimes \mathbf{B}_0(Y)$ в $\mathbf{B}(X \boxtimes Y)$. Далее для $\mathfrak{J}(A \otimes B)$ используется обозначение $A \boxtimes B$. Предполагается, что

$$(A \boxtimes B)(x \boxtimes y) = (Ax) \boxtimes (By) \quad (5)$$

для любых $A \in \mathbf{B}_0(X)$, $B \in \mathbf{B}_0(Y)$, $x \in X$ и $y \in Y$, а также

$$(A \boxtimes B)^*(x^* \boxtimes y^*) = (A^*x^*) \boxtimes (B^*y^*) \quad (6)$$

для любых $A \in \mathbf{B}_0(X)$, $B \in \mathbf{B}_0(Y)$, $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$, причем для любых $A \in \mathbf{B}_0(X)$ и $B \in \mathbf{B}_0(Y)$ выполняется равенство

$$\|A \boxtimes B: X \boxtimes Y \rightarrow X \boxtimes Y\| = \|A: X \rightarrow X\| \|B: Y \rightarrow Y\|. \quad (7)$$

Целесообразность использования расширенных тензорных произведений $X \boxtimes Y$ связана с тем, что пространства, возникающие в некоторых приложениях (см. пример 12), действительно оказываются шире, чем пополнение алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ по какой-либо кросс-норме, но обладают теми же основными алгебраическими свойствами. Отметим, что при этом не для всякой пары операторов A и B их тензорное произведение $A \otimes B$ допускает естественное продолжение с $X \otimes Y$ на $X \boxtimes Y$. Поэтому приходится сужать алгебры $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ до подалгебр $\mathbf{B}_0(X)$ и $\mathbf{B}_0(Y)$, состоящих из операторов, для которых такое продолжение возможно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Части*

$$\|x^* \boxtimes y^*\| \geq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}, \quad \|A \boxtimes B\| \geq \|A\| \|B\|$$

равенств (4) и (7) являются следствиями (3), (5) и (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \|x^* \boxtimes y^*\| &\geq \sup\{|\langle x^* \boxtimes y^*, x \boxtimes y \rangle|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle x^*, x \rangle| |\langle y^*, y \rangle|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \|x^*\| \|y^*\|, \\ \|A \boxtimes B\| &\geq \sup\{\|(A \boxtimes B)(x \boxtimes y)\|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(Ax) \boxtimes (By)\|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Ax\| \|By\|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРИМЕР 12. (а) Пусть α – кросс-норма на алгебраическом тензорном произведении $X \otimes Y$. В качестве $X \boxtimes Y$ возьмем пополнение $X \overline{\otimes}_\alpha Y$ пространства $X \otimes Y$ по кросс-норме α , а в качестве $\mathbf{B}_0(X)$ и $\mathbf{B}_0(Y)$ – алгебры $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$. Условие (4) означает, что кросс-норма α является **-равномерной*, а условие (7) – что кросс-норма α является *равномерной*.

(б) Пусть X и Y – произвольные банаховы пространства. Обозначим через $\mathbf{K}(X, Y)$ банахово пространство всех билинейных форм $K: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, ограниченных относительно нормы $\|K\| = \sup\{|K(x, y)|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

Представим $\mathbf{K}(X, Y)$ в виде расширенного тензорного произведения $X^* \boxtimes Y^*$. В качестве $\mathbf{B}_0(X^*)$ и $\mathbf{B}_0(Y^*)$ возьмем подалгебры алгебр $\mathbf{B}(X^*)$ и $\mathbf{B}(Y^*)$, состоящие из всех операторов, имеющих предсопряженный. Проверим выполнение условий (A), (B) и (C).

Прежде всего покажем, что всякая билинейная форма $K \in \mathbf{K}(X, Y)$ каноническим образом с сохранением нормы расширяется на $X^{**} \times Y^{**}$ (отметим, что это частный случай конструкции из [20]). Каждому $y \in Y$ поставим в соответствие функционал $f_y: x \mapsto K(x, y)$ на пространстве X . Продолжим этот функционал каноническим образом на X^{**} . Затем рассмотрим билинейную форму $K_1(x^{**}, y) = \langle x^{**}, f_y \rangle$ на $X^{**} \times Y$. Далее каждому $x^{**} \in X^{**}$ поставим в соответствие функционал $g_{x^{**}}: y \mapsto K_1(x^{**}, y)$ на пространстве Y . Каноническим образом расширим этот функционал на Y^{**} . Затем рассмотрим билинейную форму $\bar{K}(x^{**}, y^{**}) = \langle g_{x^{**}}, y^{**} \rangle$ на $X^{**} \times Y^{**}$. Нетрудно видеть, что $\|\bar{K}\| \leq \|K_1\| \leq \|K\|$. Обратное неравенство $\|\bar{K}\| \geq \|K\|$ очевидно. Таким образом, $\|\bar{K}\| = \|K\|$. Продолжения K_1 и $\bar{K}$ будем называть *каноническими*.

Определим отображения j , J и $\mathfrak{J}$ правилами (продолженными по линейности)

$$\begin{aligned} [x^* \boxtimes y^*](x, y) &= \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle, \\ \langle x^{**} \boxtimes y^{**}, K \rangle &= \bar{K}(x^{**}, y^{**}), \\ [(A \boxtimes B)K](x, y) &= K(A^0 x, B^0 y). \end{aligned}$$

Справедливость соотношения (2), означающего в нашем случае равенство

$$\|x^* \boxtimes y^*\|_{X^* \boxtimes Y^*} = \|x^*\| \cdot \|y^*\|,$$

вытекает из определения нормы линейного функционала.

Проверим выполнение (3). Поскольку квадратичная форма, порожденная вектором $x^* \boxtimes y^*$, имеет вид $K(x, y) = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle$, ее расширение на $X^{**} \times Y^{**}$, очевидно, задается формулой

$$\bar{K}(x^{**}, y^{**}) = \langle x^{**}, x^* \rangle \langle y^{**}, y^* \rangle.$$

Отсюда имеем

$$\langle x^{**} \boxtimes y^{**}, x^* \boxtimes y^* \rangle = \bar{K}(x^{**}, y^{**}) = \langle x^{**}, x^* \rangle \langle y^{**}, y^* \rangle.$$

Проверим выполнение (4). Имеем

$$|(x^{**} \boxtimes y^{**})K| = |\bar{K}(x^{**}, y^{**})| \leq \|\bar{K}\| \|x^{**}\| \|y^{**}\| = \|K\| \|x^{**}\| \|y^{**}\|,$$

откуда $\|x^{**} \boxtimes y^{**}\| \leq \|x^{**}\| \|y^{**}\|$. Обратное неравенство вытекает из предложения 11.

В качестве вспомогательного утверждения отметим, что для любых $A \in \mathbf{B}_0(X^*)$, $B \in \mathbf{B}_0(Y^*)$, $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$ справедливо тождество

$$(A \boxtimes B)(x^* \boxtimes y^*) = \langle A^0 \cdot, x^* \rangle \langle B^0 \cdot, y^* \rangle. \quad (8)$$

Действительно, для $K = x^* \boxtimes y^*$ в силу определений имеем

$$[(A \boxtimes B)K](x, y) = K(A^0 x, B^0 y) = [x^* \boxtimes y^*](A^0 x, B^0 y) = \langle A^0 x, x^* \rangle \langle B^0 y, y^* \rangle.$$

Проверим выполнение (5). В силу (8) имеем

$$\begin{aligned} [(A \boxtimes B)(x^* \boxtimes y^*)](x, y) &= \langle A^0 x, x^* \rangle \langle B^0 y, y^* \rangle = \langle x, Ax^* \rangle \langle y, By^* \rangle \\ &= (Ax^* \boxtimes By^*)(x, y). \end{aligned}$$

В качестве вспомогательного утверждения покажем, что для любой $K \in \mathbf{K}(X, Y)$ и любых $A \in \mathbf{B}_0(X^*)$ и $B \in \mathbf{B}_0(Y^*)$ расширение билинейной формы

$$(x, y) \mapsto K(A^0 x, B^0 y)$$

на $X^{**} \times Y^{**}$ задается формулой

$$(x^{**}, y^{**}) \mapsto \overline{K}(A^* x^{**}, B^* y^{**}), \quad (9)$$

где $\overline{K}$ – расширение K на $X^{**} \times Y^{**}$. Проверим, действительно ли это так. Обозначим через K_1 каноническое продолжение билинейной формы K на $X^{**} \times Y$. Тем самым,

$$K_1(x^{**}, y) = \langle x^{**}, f_y \rangle$$

для любых $x^{**} \in X^{**}$ и $y \in Y$, где $\langle x, f_y \rangle = K(x, y)$. Зафиксируем $y \in Y$. Обозначим через $f_{B^0 y}$ функционал $x \mapsto K(x, B^0 y)$. Очевидно, функционал $x \mapsto K(A^0 x, B^0 y)$ можно представить в виде

$$x \mapsto \langle A^0 x, f_{B^0 y} \rangle = \langle x, Af_{B^0 y} \rangle.$$

Его каноническое продолжение на X^{**} имеет вид

$$x^{**} \mapsto \langle x^{**}, Af_{B^0 y} \rangle = \langle A^* x^{**}, f_{B^0 y} \rangle = K_1(A^* x^{**}, B^0 y).$$

Рассуждая далее аналогичным образом, видим, что каноническое продолжение билинейной формы $(x, y) \mapsto K(A^0 x, B^0 y)$ на $X^{**} \times Y^{**}$ совпадает с (9).

Проверим выполнение (6). Для любой билинейной формы $K \in \mathbf{K}(X, Y)$ имеем (в этих выкладках используется (9))

$$\begin{aligned} \langle (A \boxtimes B)^*(x^{**} \boxtimes y^{**}), K \rangle &= \langle (x^{**} \boxtimes y^{**}), (A \boxtimes B)K \rangle = \langle (x^{**} \boxtimes y^{**}), K(A^0 \cdot, B^0 \cdot) \rangle \\ &= \overline{K(A^0 \cdot, B^0 \cdot)}(x^{**}, y^{**}) = \overline{K}(A^* x^{**}, B^* y^{**}) = \langle (A^* x^{**}) \boxtimes (B^* y^{**}), K \rangle. \end{aligned}$$

Проверим выполнение (7). Неравенство

$$\|(A \boxtimes B)K\| \leq \|K\| \|A\| \|B\|$$

очевидно. Обратное неравенство вытекает из предложения 11.

(с) Пусть X и Y – банаховы пространства, а $X \overline{\otimes}_\alpha Y$ – пополнение пространства $X \otimes Y$ по некоторой равномерной кросс-норме α . Покажем, что сопряженное пространство $(X \overline{\otimes}_\alpha Y)^*$ можно рассматривать как расширенное тензорное произведение $X^* \boxtimes Y^*$, если в качестве $\mathbf{B}_0(X^*)$ и $\mathbf{B}_0(Y^*)$ взять подалгебры алгебр $\mathbf{B}(X^*)$ и $\mathbf{B}(Y^*)$, состоящие из операторов, имеющих предсопряженный. Отметим, что этот пример является обобщением (b), поскольку $\mathbf{K}(X, Y) \cong (X \overline{\otimes}_\pi Y)^*$, где π – наибольшая кросс-норма [2], [4], [5].

Проверим (A). Определим $j: X^* \otimes Y^* \rightarrow X^* \boxtimes Y^* = (X \overline{\otimes}_\alpha Y)^*$ как каноническое вложение (1). В частности, для $\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \in X \otimes Y$, $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$ имеем

$$\left\langle \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, x^* \boxtimes y^* \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \langle y_k, y^* \rangle. \quad (10)$$

Тождество (2), имеющее для рассматриваемого случая вид

$$\|x^* \boxtimes y^*\|_{X^* \boxtimes Y^*} = \|x^*\| \|y^*\|,$$

означает *-равномерность кросс-нормы α .

Проверим (B). Определим $J: X^{**} \otimes Y^{**} \rightarrow (X^* \boxtimes Y^*)^* = (X \overline{\otimes}_\alpha Y)^{**}$. Для этого каждому функционалу $w^* \in X^* \boxtimes Y^* = (X \overline{\otimes}_\alpha Y)^*$ поставим в соответствие билинейную форму $K_{w^*}(x, y) = \langle x \otimes y, w^* \rangle$ на $X \times Y$. Очевидно, $\|K_{w^*}\| \leq \|w^*\|_{\alpha^*}$. В примере (b) мы уже видели, что K_{w^*} с сохранением нормы канонически продолжается до билинейной формы $\overline{K_{w^*}}$ на $X^{**} \times Y^{**}$. Отметим, что

$$\|\overline{K_{w^*}}\| \leq \|w^*\|_{\alpha^*}. \quad (11)$$

Для $\sum_{k=1}^n x_k^{**} \otimes y_k^{**} \in X^{**} \otimes Y^{**}$ положим

$$\left\langle J\left(\sum_{k=1}^n x_k^{**} \otimes y_k^{**}\right), w^* \right\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{K_{w^*}}(x_k^{**}, y_k^{**}). \quad (12)$$

Тем самым отображение $J: X^{**} \otimes Y^{**} \rightarrow (X^* \boxtimes Y^*)^* = (X \overline{\otimes}_\alpha Y)^{**}$ определено.

Проверим (3). Пусть $w^* = x^* \boxtimes y^*$, где $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$. В силу (10) имеем $K_{w^*}(x, y) = \langle x \otimes y, x^* \boxtimes y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle$. Продолжение этой билинейной формы на $X^{**} \times Y^{**}$ (как отмечалось выше) есть, очевидно,

$$\overline{K_{w^*}}(x^{**}, y^{**}) = \langle x^{**}, x^* \rangle \langle y^{**}, y^* \rangle.$$

Поэтому для любых $x^{**} \in X^{**}$ и $y^{**} \in Y^{**}$ в силу определения (12) имеем

$$\langle x^{**} \boxtimes y^{**}, x^* \boxtimes y^* \rangle = \overline{K_{w^*}}(x^{**}, y^{**}) = \langle x^{**}, x^* \rangle \langle y^{**}, y^* \rangle,$$

что в нашем случае означает (3).

Проверим (4), означающее в нашем случае, что

$$\|x^{**} \boxtimes y^{**}\|_{(X \overline{\otimes}_\alpha Y)^{**}} = \|x^{**}\|_{X^{**}} \|y^{**}\|_{Y^{**}}$$

для любых $x^{**} \in X^{**}$ и $y^{**} \in Y^{**}$. В силу определения (12) и оценки (11) имеем

$$|\langle x^{**} \boxtimes y^{**}, w^* \rangle| = |\overline{K_{w^*}}(x^{**}, y^{**})| \leq \|w^*\| \|x^{**}\| \|y^{**}\|,$$

откуда следует, что

$$\|x^{**} \boxtimes y^{**}\| \leq \|x^{**}\| \|y^{**}\|.$$

С другой стороны, в силу предложения 11

$$\|x^{**} \boxtimes y^{**}\| \geq \|x^{**}\| \|y^{**}\|.$$

Проверим выполнение условия (C). Пусть $A_k \in \mathbf{B}_0(X^*)$ и $B_k \in \mathbf{B}_0(Y^*)$. Оператор $\mathfrak{J}(\sum_{k=1}^n A_k \otimes B_k) \in \mathbf{B}((X \overline{\otimes}_\alpha Y)^*)$ определим как сопряженный к оператору $\sum_{k=1}^n A_k^0 \otimes B_k^0: X \overline{\otimes}_\alpha Y \rightarrow X \overline{\otimes}_\alpha Y$.

Покажем справедливость (5). Для $A \in \mathbf{B}_0(X^*)$ и $B \in \mathbf{B}_0(Y^*)$ в силу определения $A \boxtimes B$ для любых $\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \in X \otimes Y$, $x^* \in X^*$ и $y^* \in Y^*$ имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, (A \boxtimes B)(x^* \boxtimes y^*) \right\rangle &= \left\langle (A^0 \otimes B^0) \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, (x^* \boxtimes y^*) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n A^0 x_k \otimes B^0 y_k, x^* \boxtimes y^* \right\rangle \stackrel{(10)}{=} \sum_{k=1}^n \langle A^0 x_k, x^* \rangle \langle B^0 y_k, y^* \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x_k, Ax^* \rangle \langle y_k, By^* \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, (Ax^*) \boxtimes (By^*) \right\rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец последней формулы, получаем соотношение

$$(A \boxtimes B)(x^* \boxtimes y^*) = (Ax^*) \boxtimes (By^*),$$

означающее (5) в рассматриваемом случае.

Проверим (6). Пусть $A \in \mathbf{B}_0(X^*)$ и $B \in \mathbf{B}_0(Y^*)$, $x^{**} \in X^{**}$ и $y^{**} \in Y^{**}$, а $w^* \in X^* \boxtimes Y^* = (X \overline{\otimes}_\alpha Y)^*$. По определению (12) имеем

$$\langle (A \boxtimes B)^*(x^{**} \boxtimes y^{**}), w^* \rangle = \langle x^{**} \boxtimes y^{**}, (A \boxtimes B)w^* \rangle = \overline{K_{(A \boxtimes B)w^*}}(x^{**}, y^{**}),$$

где

$$K_{(A \boxtimes B)w^*}(x, y) = \langle x \otimes y, (A \boxtimes B)w^* \rangle = \langle (A^0 \otimes B^0)(x \otimes y), w^* \rangle = \langle A^0 x \otimes B^0 y, w^* \rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle (A^* x^{**}) \boxtimes (B^* y^{**}), w^* \rangle = \overline{K_{w^*}}(A^* x^{**}, B^* y^{**}),$$

где $K_{w^*}(x, y) = \langle x \otimes y, w^* \rangle$.

Из очевидного равенства

$$K_{(A \boxtimes B)w^*}(x, y) = K_{w^*}(A^0 x, B^0 y)$$

в силу (9) следует, что

$$\overline{K_{(A \boxtimes B)w^*}}(x^{**}, y^{**}) = \overline{K_{w^*}}(A^* x^{**}, B^* y^{**}).$$

Отсюда уже вытекает выполнение равенства

$$(A \boxtimes B)^*(x^{**} \boxtimes y^{**}) = (A^* x^{**}) \boxtimes (B^* y^{**}),$$

означающего в нашем случае (6).

Равенство (7) вытекает из равномерности кросс-нормы α (а также равенства нормы оператора и его сопряженного):

$$\|A \boxtimes B\| = \|A^0 \otimes B^0\| = \|A^0\| \|B^0\| = \|A\| \|B\|.$$

(d) Пусть $X = L_\infty[a, b]$, а $Y = L_\infty[c, d]$. В силу примера (с) пространство $L_\infty[a, b] \times [c, d]$ можно рассматривать как расширенное тензорное произведение $L_\infty[a, b] \boxtimes L_\infty[c, d]$. Отметим, что в качестве $\mathbf{B}_0(X)$ и $\mathbf{B}_0(Y)$ следует взять подалгебры алгебр $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$, состоящие из операторов, имеющих предсопряженный (напомним, что пространство $L_\infty[a, b]$ является сопряженным к пространству $L_1[a, b]$).

(е) Пусть X и Y – произвольные банаховы пространства. Представим пространство $\mathbf{B}(Y, X)$ в виде расширенного тензорного произведения $X \boxtimes Y^*$. Для этого возьмем в качестве $\mathbf{B}_0(X)$ всю алгебру $\mathbf{B}(X)$, а в качестве $\mathbf{B}_0(Y^*)$ – подалгебру алгебры $\mathbf{B}(Y^*)$, состоящую из операторов, имеющих предсопряженный. Определим отображения j , J и $\mathfrak{J}$ правилами (продолженными по линейности)

$$\begin{aligned}(x \boxtimes y^*)y &= x\langle y, y^* \rangle, & \langle U, x^* \boxtimes y^{**} \rangle &= \langle y^{**}, U^*x^* \rangle, \\ (A \boxtimes B)U &= AUB^0.\end{aligned}$$

Проверим выполнение (2). Имеем

$$\begin{aligned}\|x \boxtimes y^*\| &= \sup\{\|(x \boxtimes y^*)y\| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|x\langle y, y^* \rangle\| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|x\| |\langle y, y^* \rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} = \|x\| \|y^*\|.\end{aligned}$$

Проверим выполнение (3). Для $U = x \boxtimes y^* = x\langle \cdot, y^* \rangle$, очевидно, имеем

$$U^{**}y^{**} = x\langle y^{**}, y^* \rangle,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}\langle x \boxtimes y^*, x^* \boxtimes y^{**} \rangle &= \langle U, x^* \boxtimes y^{**} \rangle = \langle y^{**}, U^*x^* \rangle = \langle U^{**}y^{**}, x^* \rangle \\ &= \langle x\langle y^{**}, y^* \rangle, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle \langle y^{**}, y^* \rangle.\end{aligned}$$

Проверим выполнение (4). Имеем

$$|\langle U, x^* \boxtimes y^{**} \rangle| = |\langle y^{**}, U^*x^* \rangle| \leq \|U^*\| \|y^{**}\| \|x^*\|,$$

откуда

$$\|x^* \boxtimes y^{**}\| \leq \|x^*\| \|y^{**}\|.$$

Обратное неравенство вытекает из предложения 11.

Проверим выполнение (5). Имеем

$$\begin{aligned}[(A \boxtimes B)(x \boxtimes y^*)]y &= [(A \boxtimes B)(x\langle \cdot, y^* \rangle)]y = [Ax\langle B^0 \cdot, y^* \rangle]y \\ &= Ax\langle B^0y, y^* \rangle = Ax\langle y, By^* \rangle = [(Ax) \boxtimes (By^*)]y.\end{aligned}$$

Проверим выполнение (6). Имеем

$$\begin{aligned}\langle U, (A \boxtimes B)^*(x^* \boxtimes y^{**}) \rangle &= \langle (A \boxtimes B)U, x^* \boxtimes y^{**} \rangle = \langle AUB^0, x^* \boxtimes y^{**} \rangle \\ &= \langle y^{**}, (AUB^0)^*x^* \rangle = \langle B^*y^{**}, U^*A^*x^* \rangle = \langle U, (A^*x^*) \boxtimes (B^*y^{**}) \rangle.\end{aligned}$$

Проверим выполнение (7). Очевидно,

$$\begin{aligned}\|A \boxtimes B\| &= \sup\{\|(A \boxtimes B)U\| : U \in \mathbf{B}(Y, X), \|U\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|AUB^0\| : U \in \mathbf{B}(Y, X), \|U\| \leq 1\} \leq \|A\| \|B^0\| = \|A\| \|B\|.\end{aligned}$$

Обратное неравенство вытекает из предложения 11.

(f) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть X – банахово пространство. Обозначим через $C(\mathbb{R}^n, X)$ банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций $u: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ с нормой $\|u\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \|u(t)\|$. Представим пространство $C(\mathbb{R}^n, X)$ в виде расширенного тензорного произведения пространств X и $Y = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, положив $(x \boxtimes y)(t) = x \cdot y(t)$ для $x \in X$ и $y \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. В качестве $\mathbf{B}_0(X)$ возьмем всю алгебру $\mathbf{B}(X)$. В качестве $\mathbf{B}_0(Y) = \mathbf{B}_0(C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$ возьмем наполненную [9, предложение 4.1.2, теорема 5.2.7] подалгебру всевозможных операторов свертки

$$(By)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} y(t-s)\mu(ds),$$

где μ – ограниченная комплексная мера на $\mathbb{R}^n$. Расширенное тензорное произведение оператора $A \in \mathbf{B}(X)$ на оператор B определим по правилу

$$((A \boxtimes B)u)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} Au(t-s)\mu(ds),$$

а расширенное тензорное произведение функционалов – по формуле

$$(x^* \boxtimes y^*)u = \langle u(\cdot), x^* \rangle, y^* \rangle.$$

Условия (A), (B) и (C), очевидно, выполнены.

Аналогичным образом пространство $L_\infty(\mathbb{R}^n, X)$ можно представить в виде расширенного тензорного произведения пространств X и $Y = L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

§ 4. Алгебра аналитических функций

В настоящем параграфе уточняются определения и напоминаются некоторые факты, связанные с алгеброй аналитических функций, к которым обычно применяют функциональное исчисление.

Через $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим одноточечную компактификацию комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть X – банахово пространство (важный нетривиальный пример: $X = \mathbb{C}$), а $\mathbf{B}_0(X)$ – наполненная подалгебра алгебры $\mathbf{B}(X)$. Пусть $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ – замкнутое подмножество. Обозначим через $\mathbf{O}(K) = \mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$ множество всех аналитических² функций $f: U \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$, каждая из которых определена на некотором открытом множестве U , где $K \subset U \subset \overline{\mathbb{C}}$ (предполагается, что каждой функции f соответствует своя окрестность U). Будем говорить, что две функции $f_1: U_1 \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$ и $f_2: U_2 \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$ эквивалентны, если существует³ такая

²Функцию f называют аналитической в бесконечно удаленной точке [21, гл. 1, § 2, п. 6], если функция $\mu \mapsto f(1/\mu)$ является аналитической в нуле. Допускается, что областью определения аналитической функции является несвязное множество.

³Может случиться так, что f_1 и f_2 эквивалентны, но на $U_1 \cap U_2$ они не совпадают.

открытая окрестность $U \subseteq U_1 \cap U_2$ множества K , что f_1 и f_2 совпадают на U , т.е. $f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$ для всех $\lambda \in U$. Таким образом, элементами $\mathbf{O}(K)$, строго говоря, являются классы эквивалентных функций.

Следующие два предложения очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Множество $\mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$ является алгеброй с единицей $u(\lambda) = \mathbf{1}_X$ относительно поточечных операций.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. (а) *Для того чтобы функция $f \in \mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$ была обратима в алгебре $\mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$, необходимо, чтобы ее значения $f(\lambda)$ во всех точках $\lambda \in K$ были обратимыми операторами, и достаточно, чтобы были обратимыми операторами ее значения $f(\lambda)$ во всех точках $\lambda \in U$ для некоторого открытого множества $U \supset K$.*

(б) *Спектр функции $f \in \mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$ в алгебре $\mathbf{O}(K, \mathbf{B}_0(X))$ совпадает с множеством $\bigcup_{\lambda \in K} \sigma(f(\lambda))$.*

Напомним определение естественной топологии на алгебре $\mathbf{O}(K)$. Для каждого открытого множества $U \supset K$ обозначим через $\mathbf{O}(U)$ линейное пространство всех аналитических функций $f: U \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$. Введем на $\mathbf{O}(U)$ топологию компактной сходимости [22, гл. X, § 3, п. 4], [23, гл. III, § 3]. Базу окрестностей нуля этой топологии образуют множества

$$T(N, \varepsilon) = \{f: \|f(\lambda)\| < \varepsilon, \lambda \in N\},$$

где $N \subseteq U$ – компактное множество, а $\varepsilon > 0$; с расширением N окрестность $T(N, \varepsilon)$ уменьшается, поэтому достаточно ограничиться множествами N , внутренность которых содержит K . Очевидно, имеются канонические отображения

$$g_U: \mathbf{O}(U) \rightarrow \mathbf{O}(K).$$

Отображения g_U не всегда являются инъективными. Тем не менее, допуская вольность речи, будем интерпретировать пространства $\mathbf{O}(U)$ как подпространства пространства $\mathbf{O}(K)$.

Будем рассматривать $\mathbf{O}(K)$ с топологией индуктивного предела [23, гл. II, § 6]. Напомним [23, гл. II, теорема 6.1], что линейное отображение $\varphi: \mathbf{O}(K) \rightarrow \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – банахово пространство, непрерывно тогда и только тогда, когда все суперпозиции $\varphi \circ g_U: \mathbf{O}(U) \rightarrow \mathbb{E}$, где $U \supset K$, непрерывны, т.е. для любой окрестности нуля $W \subseteq \mathbb{E}$ найдутся компактное множество N , внутренность которого содержит K , и число $\delta > 0$ такие, что $\varphi(T(N, \delta)) \subseteq W$. Отметим, что, поскольку $\mathbb{E}$ банахово, в качестве W достаточно ограничиться ε -окрестностями нуля. В дальнейшем, допуская обычную вольность речи, отображение $\varphi \circ g_U$ будем обозначать сокращенно по-прежнему через φ .

Будем пользоваться только кусочно гладкими контурами. Контур Γ называют *ориентированной огибающей* [12, § 5.2] замкнутого множества $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно замкнутого множества $K_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, где $K \cap K_1 = \emptyset$, если при проходе вдоль контура Γ множество K остается слева, а множество K_1 – справа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Пусть $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ – открытое множество. Тогда естественный образ тензорного произведения $\mathbf{B}_0(X) \otimes \mathbf{O}(U, \mathbb{C})$ всюду плотен в $\mathbf{O}(U, \mathbf{B}_0(X))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко выводится из теории тензорных произведений ядерных пространств [1, ч. 2, с. 81, пример 2].

§ 5. Псевдорезольвенты

Понятие псевдорезольвенты [12], обобщающее понятие резольвенты линейного оператора, является наиболее общим объектом, позволяющим построить функциональное исчисление.

Пусть $\mathbf{B}$ – банахова алгебра с единицей и $U \subseteq \mathbb{C}$ – некоторое подмножество. Псевдорезольвентой (со значениями в $\mathbf{B}$) называют [12, гл. 5, §2] функцию $\lambda \mapsto R_\lambda$, определенную на U , принимающую значения в $\mathbf{B}$ и удовлетворяющую на U тождеству Гильберта

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu. \quad (13)$$

Псевдорезольвенту называют максимальной [24], если она не может быть продолжена на более широкое множество с сохранением тождества (13). В дальнейшем (теорема 18) мы увидим, что всякая псевдорезольвента единственным образом продолжается до максимальной. Область определения $\rho(R_{(\cdot)})$ максимальной псевдорезольвенты называют регулярным множеством исходной псевдорезольвенты, а дополнение $\sigma(R_{(\cdot)})$ к регулярному множеству $\rho(R_{(\cdot)})$ – сингулярным множеством [25].

ПРИМЕР 16. Примерами псевдорезольвент являются:

- (а) резольвента элемента банаховой алгебры с единицей (предложение 1);
- (б) функция-константа $\lambda \mapsto N$, где $N \in \mathbf{B}$ – произвольный элемент, квадрат которого равен нулю; здесь сингулярное множество пусто;
- (с) в частности, тождественно нулевая функция;
- (д) резольвента замкнутого линейного оператора [12, теорема 5.8.1]; здесь ∞ принадлежит расширенному сингулярному множеству, определяемому ниже;
- (е) резольвента операторного пучка [15]–[17];
- (ф) резольвента линейного отношения [24], [26], [27];
- (г) прямые суммы резольвент из предыдущих примеров.

Простейший пример максимальной псевдорезольвенты приводится в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Резольвента произвольного элемента $A \in \mathbf{B}$ является максимальной псевдорезольвентой, т. е. не может быть продолжена на более широкое, чем $\sigma(A)$, множество с сохранением тождества Гильберта (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $\mu \in \rho(A)$. Предположим противное: пусть резольвенту элемента A можно продолжить в точку $\lambda \notin \rho(A)$ так, что тождество Гильберта будет иметь место хотя бы для двух рассматриваемых точек λ и μ . Преобразуем тождество Гильберта для этих

двух точек. Имеем цепочку эквивалентных равенств:

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= -(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu, & R_\lambda + (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu &= R_\mu, \\ R_\lambda(\mathbf{1} + (\lambda - \mu)R_\mu) &= R_\mu, & R_\lambda((\mu\mathbf{1} - A)R_\mu + (\lambda - \mu)R_\mu) &= R_\mu, \\ R_\lambda((\mu\mathbf{1} - A) + (\lambda - \mu)\mathbf{1})R_\mu &= R_\mu, \\ R_\lambda((\mu\mathbf{1} - A) + (\lambda - \mu)\mathbf{1}) &= \mathbf{1}, & R_\lambda(\lambda\mathbf{1} - A) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что R_λ является обратным к $\lambda\mathbf{1} - A$ слева. Аналогичным образом доказывается, что R_λ является обратным к $\lambda\mathbf{1} - A$ справа. Таким образом, точка λ на самом деле принадлежит резольвентному множеству.

ТЕОРЕМА 18 [12, теорема 5.8.6]. *Всякая псевдорезольвента, область определения которой содержит хотя бы одну точку $\mu \in \mathbb{C}$, единственным образом продолжается до максимальной. Областью определения максимальной псевдорезольвенты является множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $\mathbf{1} + (\lambda - \mu)R_\mu$ обратим. Это продолжение можно определить по формуле*

$$R_\lambda = R_\mu(\mathbf{1} + (\lambda - \mu)R_\mu)^{-1}. \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 19 [12, теорема 5.8.2]. *Область определения максимальной псевдорезольвенты является открытым множеством, а сама псевдорезольвента – аналитической функцией как функция со значениями в $\mathbf{B}$. А именно, в окрестности любой точки $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$ максимальная псевдорезольвента раскладывается в степенной ряд:*

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R_\mu^{n+1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20 [12, теорема 5.8.3]. *Максимальная псевдорезольвента $\hat{R}_{(\cdot)}$ является резольвентой некоторого элемента $T \in \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда элемент $\hat{R}_\mu$ обратим при всех (равносильный вариант – хотя бы при одном) $\mu \in \rho(\hat{R}_{(\cdot)})$. При этом $T = \lambda\mathbf{1} - (\hat{R}_\lambda)^{-1}$ для всех $\lambda \in \rho(\hat{R}_{(\cdot)})$.*

Пусть фиксирована псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$. Обозначим через $\mathbf{B}_R$ наименьшую замкнутую подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, содержащую все элементы R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$, ее расширения до максимальной псевдорезольвенты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. *Алгебра $\mathbf{B}_R$ совпадает с замыканием линейной оболочки семейства элементов R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$, и является коммутативной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, замыкание линейной оболочки семейства R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$, содержится в $\mathbf{B}_R$. Из тождества Гильберта (13) видно, что $R_\lambda R_\mu$ при $\lambda \neq \mu$ принадлежит линейной оболочке семейства R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$. Тогда по непрерывности элемент $R_\lambda R_\mu$ при $\lambda = \mu$ принадлежит замыканию линейной оболочки семейства элементов R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$. Отсюда видно, что замыкание линейной оболочки семейства R_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$, уже образует замкнутую подалгебру.

В силу следствия 9 бикоммутант семейства $\{R_\lambda\}$, состоящего из коммутирующих элементов, является коммутативной алгеброй. Очевидно, бикоммутант содержит алгебру $\mathbf{B}_R$. Поэтому алгебра $\mathbf{B}_R$ коммутативна. Предложение доказано.

Если алгебра $\mathbf{B}_R$ не содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, то через $\tilde{\mathbf{B}}_R$ обозначим алгебру $\mathbf{B}_R$, к которой присоединена единица алгебры ⁴ $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{B}_R$ содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, то под $\tilde{\mathbf{B}}_R$ будем понимать исходную алгебру $\mathbf{B}_R$.

ТЕОРЕМА 22. *Подалгебра $\tilde{\mathbf{B}}_R$ совпадает с наименьшей замкнутой наполненной подалгеброй $\mathbf{B}(R_\mu)$ алгебры $\mathbf{B}$, содержащей произвольный элемент R_μ , $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$. Формула (14) показывает, что R_λ является функцией

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{1 + (\lambda - \mu)z}$$

от элемента R_μ . Таким образом, все значения псевдорезольвенты являются рациональными функциями одного элемента R_μ . В виде линейной комбинации функций $u(z) = 1$ и $v_k(z) = z^k$ и степеней функций f_λ , $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$, можно представить любой многочлен и любую элементарную дробь ⁵, знаменатель которой не обращается в нуль на спектре элемента R_μ . Значит [28, § 3.5], можно представить и любую рациональную функцию, знаменатель которой не обращается в нуль на спектре элемента R_μ . Тем самым, алгебра $\tilde{\mathbf{B}}_R$ обязана содержать любую рациональную функцию от элемента R_μ , знаменатель которой не обращается в нуль на спектре элемента R_μ .

В силу предложения 10 такие рациональные функции образуют наполненную подалгебру. Ее замыкание также образует (предложение 7) наполненную подалгебру и содержится в $\tilde{\mathbf{B}}_R$. Чтобы получить подалгебру $\tilde{\mathbf{B}}_R$, ничего добавлять не нужно, поскольку все элементы R_λ в этой подалгебре уже содержатся. Тем самым, мы получили эффективное описание алгебры $\tilde{\mathbf{B}}_R$, роль единицы в которой играет единица $\mathbf{1}$ алгебры $\mathbf{B}$. Теорема доказана.

Расширенным регулярным множеством $\bar{\rho}(R_{(\cdot)})$ псевдорезольвенты $R_{(\cdot)}$ (в алгебре $\mathbf{B}$) назовем регулярное множество $\rho(R_{(\cdot)})$, к которому добавим точку ∞ , если максимальное продолжение псевдорезольвенты допускает аналитическое продолжение в точку ∞ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda = \mathbf{1}$. Дополнение $\bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ к расширенному регулярному множеству назовем *расширенным сингулярным множеством* псевдорезольвенты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. *Следующие свойства максимальной псевдорезольвенты равносильны:*

- (a) $\infty \in \bar{\rho}(R_{(\cdot)})$;
- (b) *максимальная псевдорезольвента является резольвентой некоторого элемента $T \in \mathbf{B}_R$.*

⁴При присоединении $\mathbf{1}$ к $\mathbf{B}_R$ получается замкнутая подалгебра, поскольку при сложении замкнутого подпространства с подпространством размерности один получается замкнутое подпространство.

⁵Под элементарной дробью имеется в виду функция вида $\lambda \mapsto \frac{A}{(\lambda - \lambda_0)^n}$, где $\lambda_0, A \in \mathbb{C}$ [28].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (а). Тогда элемент R_λ обратим при достаточно больших λ . Поэтому в силу предложения 20 выполнено (b).

Пусть выполнено (b). Тогда из представления

$$(\lambda \mathbf{1} - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^2}{\lambda^3} + \dots$$

видно, что выполнено (а). Предложение доказано.

§ 6. Функциональное исчисление

В настоящем параграфе сначала приводятся в удобной для нас формулировке теоремы о скалярном функциональном исчислении для псевдорезольвент (теоремы 24 и 25), а затем с их помощью строится функциональное исчисление в расширенном тензорном произведении (теоремы 26 и 27).

Пусть X – банахово пространство. Предположим, что в $\mathbf{B}(X)$ задана максимальная псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$. Напомним, что через $\mathbf{B}_R$ обозначена минимальная замкнутая подалгебра, порожденная $R_{(\cdot)}$. Если алгебра $\mathbf{B}_R$ не содержит единицу алгебры $\mathbf{B}(X)$, то через $\tilde{\mathbf{B}}_R$ обозначена алгебра $\mathbf{B}_R$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(X)$. Если $\mathbf{B}_R$ содержит единицу алгебры $\mathbf{B}(X)$, то под $\tilde{\mathbf{B}}_R$ понимается исходная алгебра $\mathbf{B}_R$.

ТЕОРЕМА 24. Пусть $R_{(\cdot)}$ – максимальная псевдорезольвента в $\mathbf{B}(X)$, причем $\infty \notin \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\varphi: \mathbf{O}(\sigma(R_{(\cdot)}), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{B}_R$, определенное по формуле

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_\lambda d\lambda, \quad (15)$$

где Γ – ориентированная огибающая сингулярного множества $\sigma(R_{(\cdot)})$ относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f (рис. 1, а), является непрерывным морфизмом алгебр с единицей.

В частности, функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ в тождественный оператор $\mathbf{1}_X$. При этом функция $v(\lambda) = \lambda$ переводится морфизмом φ в элемент T , порождающий максимальную псевдорезольвенту $R_{(\cdot)}$ в соответствии с предложением 23, а функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(R_{(\cdot)})$, переводится морфизмом φ в R_{λ_0} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично обычному доказательству [12, теорема 5.2.5], [14, теорема 10.27], [18, гл. 1, § 4, теорема 3] теоремы о функциональном исчислении для ограниченных операторов.

ТЕОРЕМА 25. Пусть $R_{(\cdot)}$ – максимальная псевдорезольвента в $\mathbf{B}(X)$, причем $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\varphi: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_R$, определенное по формуле

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_\lambda d\lambda + f(\infty) \mathbf{1}, \quad (16)$$

где Γ – ориентированная огибающая расширенного сингулярного множества $\bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ относительно дополнения к области определения функции f (рис. 1, б), является непрерывным морфизмом алгебр с единицей.

Рис. 1. a – контур Γ является ориентированной огибающей множества σ относительно ∞ и дополнения к области определения функции f ; b – контур Γ является ориентированной огибающей множества σ и точки ∞ относительно дополнения к области определения функции f ; локализация дополнения к области определения функции f обозначена $\boxed{f}$

В частности, функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ в тождественный оператор $\mathbf{1}_X$. Функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(R_{(\cdot)})$, переводится морфизмом φ в R_{λ_0} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству [12, теорема 5.11.2] теоремы о функциональном исчислении для неограниченных операторов.

Перейдем к обсуждению функционального исчисления в расширенном тензорном произведении.

ТЕОРЕМА 26. Пусть задано расширенное тензорное произведение $X \boxtimes Y$ банаховых пространств X и Y . Пусть в алгебре $\mathbf{B}(Y)$ задана псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$, принимающая значения в $\mathbf{B}_0(Y)$, причем $\infty \notin \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\Phi: \mathbf{O}(\sigma(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X)) \rightarrow \mathbf{B}(X \boxtimes Y)$, определенное по формуле

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes R_{\lambda} d\lambda, \quad (17)$$

где Γ – ориентированная огибающая сингулярного множества $\sigma(R_{(\cdot)})$ псевдорезольвенты относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f (см. рис. 1, a), является непрерывным морфизмом алгебр с единицей. При этом для любых $A \in \mathbf{B}_0(X)$ и $h \in \mathbf{O}(\sigma(R_{(\cdot)}), \mathbb{C})$ функция $f(\lambda) = Ah(\lambda)$ переводится морфизмом Φ в оператор $A \boxtimes \varphi(h)$, где φ определено, как в теореме 24.

В силу свойства (C) из определения расширенного тензорного произведения функция $\lambda \mapsto f(\lambda) \boxtimes R_{\lambda}$, принимающая значения в $\mathbf{B}(X \boxtimes Y)$, является аналитической. Поэтому, как и в случае обычного функционального исчисления, в силу теоремы Коши (см. [12, теорема 3.11.1] или [14, теорема 3.31]) интеграл в (17) не зависит от выбора Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 26. Сначала проверим непрерывность. Поскольку топология пространства $\mathbf{O}(\sigma(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$ является индуктивным пределом топологий пространств $\mathbf{O}(U, \mathbf{B}_0(X))$, где $U \supset \sigma(R_{(\cdot)})$, достаточно доказать непрерывность $\Phi: \mathbf{O}(U, \mathbf{B}_0(X)) \rightarrow \mathbf{B}(X \boxtimes Y)$ для каждого U . Для до-

казательства последнего достаточно взять множество $N \subset U$ из определения топологии на $\mathbf{O}(U)$, содержащее Γ , и воспользоваться (7).

В соответствии с предложением 15 отождествим $\mathbf{B}_0(X) \otimes \mathbf{O}(U, \mathbb{C})$ со всюду плотным подпространством пространства $\mathbf{O}(U, \mathbf{B}_0(X))$. Ограничение отображения Φ на $\mathbf{B}_0(X) \otimes \mathbf{O}(U, \mathbb{C})$ является продолжением по линейности соответствия

$$A \otimes f \mapsto A \boxtimes \varphi(f).$$

В силу условия (C) из определения расширенного тензорного произведения и теоремы 24 оно является морфизмом алгебр с единицей. Поэтому Φ , как его продолжение по непрерывности, также является морфизмом алгебр с единицей.

Второе утверждение теоремы по сути уже доказано.

ТЕОРЕМА 27. Пусть $X \boxtimes Y$ – расширенное тензорное произведение банаховых пространств X и Y . Пусть в алгебре $\mathbf{B}(Y)$ задана псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$, принимающая значения в $\mathbf{B}_0(Y)$, причем $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\Phi: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X)) \rightarrow \mathbf{B}(X \boxtimes Y)$, определенное по формуле

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes R_{\lambda} d\lambda + f(\infty) \boxtimes \mathbf{1}, \quad (18)$$

где Γ – ориентированная огибающая расширенного сингулярного множества $\bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ псевдорезольвенты относительно дополнения к области определения функции f (см. рис. 1, b), является непрерывным морфизмом алгебр с единицей. При этом для любых $A \in \mathbf{B}_0(X)$ и $h \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbb{C})$ функция $f(\lambda) = Ah(\lambda)$ переводится морфизмом Φ в оператор $A \boxtimes \varphi(h)$, где φ определено, как в теореме 25.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 26.

ПРИМЕР 28. Пусть X – банахово пространство. Представим пространство $C(\mathbb{R}, X)$ в виде расширенного тензорного произведения пространств X и $Y = C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (см. пример 12, (f)). Рассмотрим оператор $D \in \mathbf{B}(C(\mathbb{R}, X))$, определенный по формуле

$$(Du)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k u(t-k),$$

где $A_k \in \mathbf{B}(X)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\varepsilon|k|} \|A_k\| < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что оператор D представим в виде $\Phi(f)$, где

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \lambda^k,$$

а морфизм Φ порождается резольventой $R_{\lambda} = (\lambda \mathbf{1} - S)^{-1}$ оператора

$$(Su)(t) = x(t-1),$$

спектр которого задается формулой $\sigma(S) = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$.

§ 7. Нижние нормы

Нижние нормы [9], [29]–[31] представляют собой удобный инструмент для исследования обратимости операторов. Они позволяют заменить некоторые рассуждения вычислениями. Грубо говоря, две нижние нормы связаны с двумя типами односторонней обратимости. Нижние нормы потребуются в доказательстве теоремы 41, хотя и не будут упоминаться в ее формулировке.

Пусть X и Y – банаховы пространства, а $A \in \mathbf{B}(X, Y)$. Положим

$$|A|_+ = |A: X \rightarrow Y|_+ = \inf\{\|Ax\|: \|x\| = 1\},$$

$$|A|_- = |A: X \rightarrow Y|_- = \sup\{l \geq 0: lB_Y \subseteq AB_X\},$$

где $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ и $B_Y = \{y \in Y: \|y\| \leq 1\}$ – единичные шары в X и Y соответственно. Величины $|A|_+$ и $|A|_-$ будем называть *нижними нормами* оператора A . Их также называют *минимальным (или инъективным) модулем* и *сюръективным модулем* оператора A соответственно [29]–[31].

Очевидно, $|A|_+$ является наилучшей константой в оценке $\|Ax\| \geq |A|_+ \|x\|$. Таким образом,

$$|A|_+ = \sup\{l \geq 0: \|Ax\| \geq l\|x\| \text{ для всех } x \in X\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. Для того чтобы $|A|_+ = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности x_n , $\|x_n\| = 1$, выполнялось равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0$.

ТЕОРЕМА 30 (см., например, [9, теорема 1.3.2]). Справедливы следующие утверждения:

(а) $|A|_+ > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\text{Im } A$ замкнут, при этом

$$|A|_+ = \frac{1}{\|(A_0)^{-1}\|},$$

где $A_0: X \rightarrow \text{Im } A$ – сужение оператора A ;

(б) $|A|_- > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Im } A = Y$, при этом

$$|A|_- = \frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|},$$

где $\tilde{A}: X/\text{Ker } A \rightarrow Y$ – фактороператор;

(с) оператор A обратим тогда и только тогда, когда $|A|_+ > 0$ и $|A|_- > 0$, при этом

$$|A|_+ = |A|_- = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31 [30, В.3.8], [14, лемма 4.13(b)], [9, предложение 1.3.4]. Для любого оператора $A \in \mathbf{B}(X, Y)$ справедливы равенства

$$|A^*|_- = |A|_+, \quad |A^*|_+ = |A|_-.$$

СЛЕДСТВИЕ 32. Для того чтобы $|A|_- = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности $y_n^* \in Y^*$, $\|y_n^*\| = 1$, выполнялось равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} A^* y_n^* = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложений 29 и 31.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 33 [30, В.3.11], [29, лемма 2.2]. Для любых $A, B \in \mathbf{B}(X, Y)$

$$|A|_+ - |B|_+ \leq \|A - B\|, \quad |A|_- - |B|_- \leq \|A - B\|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 34 (см., например, [9, предложение 1.3.7]). Для любых $B \in \mathbf{B}(X, Y)$ и $A \in \mathbf{B}(Y, Z)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |A|_+ |B|_+ &\leq |AB|_+ \leq \|A\| |B|_+, & |A|_+ \|B\| &\leq \|AB\|, \\ |A|_- |B|_- &\leq |AB|_- \leq \|A\| |B|_-, & \|A\| |B|_- &\leq \|AB\|. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 35. Пусть оператор $A \in \mathbf{B}(X, Y)$ необратим, но является пределом по норме последовательности обратимых операторов A_n . Тогда как $|A|_+ = 0$, так и $|A|_- = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть $|A|_+ = \varepsilon > 0$. Тогда в силу предложения 33 $|A_n|_+ > \varepsilon/2$ при достаточно больших n . Однако в силу обратимости A_n и теоремы 30, (а) имеем $\|A_n^{-1}\| = \frac{1}{|A_n|_+} < \frac{2}{\varepsilon}$. Отсюда в силу теоремы 30, (с) и предложения 33 следует, что оператор A обратим.

Случай $|A|_- > 0$ разбирается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 36. Пусть X – банахово пространство и $R_{(\cdot)}$ – псевдорезольвента в $\mathbf{B}(X)$. Если $|R_\mu|_+ > 0$ хотя бы при одном $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$, то $|R_\lambda|_+ > 0$ при всех $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$. Если $|R_\mu|_- > 0$ хотя бы при одном $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$, то $|R_\lambda|_- > 0$ при всех $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $|R_\mu|_+ > 0$. Тогда из формулы (14) и предложения 34 следует, что $|R_\lambda|_+ > 0$ при всех $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$. Второе утверждение доказывается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 37. Пусть X – банахово пространство и $R_{(\cdot)}$ – псевдорезольвента в $\mathbf{B}(X)$. Пусть ∞ является предельной точкой $\rho(R_{(\cdot)})$, но $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Тогда как $|R_\lambda|_+ = 0$, так и $|R_\lambda|_- = 0$ при всех $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, то в силу предложений 23, 20 оператор R_μ необратим хотя бы при одном $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$. В силу теоремы 30, (с) это означает, что $|R_\mu|_+ = 0$ или $|R_\mu|_- = 0$. Отсюда в силу предложения 36 имеем $|R_\lambda|_+ = 0$ или $|R_\lambda|_- = 0$ при всех $\lambda \in \rho(R_{(\cdot)})$.

Предположим, что выполнено лишь одно из равенств $|R_\mu|_+ = 0$, $|R_\mu|_- = 0$. Пусть для определенности $|R_\mu|_- > 0$. По условию существует последовательность $\lambda_n \in \rho(R_{(\cdot)})$, сходящаяся к ∞ . В силу предложения 33 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - \mu} \mathbf{1} + R_\mu \right|_- = |R_\mu|_- > 0$. Напомним, что в силу теоремы 18 операторы $\mathbf{1} + (\lambda_n - \mu)R_\mu$ и, следовательно, операторы $\frac{1}{\lambda_n - \mu} \mathbf{1} + R_\mu$ обратимы. Поэтому в силу теоремы 30, (с)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - \mu} \mathbf{1} + R_\mu \right|_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - \mu} \mathbf{1} + R_\mu \right|_- > 0.$$

С другой стороны, в силу предложения 33

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - \mu} \mathbf{1} + R_\mu \right|_+ = |R_\mu|_+.$$

Следовательно, $|R_\mu|_+ > 0$. Одновременно с неравенством $|R_\mu|_- > 0$ это означает, что оператор R_μ обратим. Полученное противоречие показывает, что $|R_\mu|_- = 0$.

§ 8. Теорема об отображении спектра

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 42. Теорема 41 представляет собой основной промежуточный этап доказательства теоремы 42.

Через $\bar{\sigma}$, σ° и $\partial\sigma$ будем обозначать замыкание, внутренность и границу множества σ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 38. Пусть $U \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ – открытое множество. Предположим, что замкнутое множество $\sigma_1 \subset U$ не совпадает с U . Пусть для множества $\sigma_0 \subseteq U$, замкнутого в U , пересечение

$$\sigma_0 \cap \sigma_1$$

не пусто. Тогда существует точка $\nu \in U$, принадлежащая $\partial\sigma_0 \cap \sigma_1$ или $\sigma_0 \cap \partial\sigma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $\lambda \in \sigma_0 \cap \sigma_1$. Обозначим через N связную компоненту множества σ_1 , содержащую точку λ . Возможны два случая: (а) $N \subseteq \sigma_0$, (б) множество $N \setminus \sigma_0$ не пусто.

Предположим, что $N \subseteq \sigma_0$. В этом случае в качестве ν возьмем произвольную точку из ∂N . Очевидно, $\nu \in \partial\sigma_1 \cap \sigma_0$.

Предположим, что множество $\Omega = N \setminus \sigma_0$ не пусто. Очевидно, Ω открыто в N ; кроме того, $\Omega \neq N$, так как $\lambda \in N$ и $\lambda \in \sigma_0$. Поскольку N замкнуто, замыкание $\bar{\Omega}$ множества Ω содержится в N . В то же время, поскольку N связно, а Ω открыто в N , замыкание $\bar{\Omega}$ не может совпадать с Ω . В качестве ν возьмем произвольную точку из $\bar{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$. Поскольку $\nu \in N \setminus \Omega$, имеем $\nu \in \sigma_0 \cap N$. С другой стороны, в любой окрестности точки ν найдется точка из $\Omega = N \setminus \sigma_0$. Таким образом, $\nu \in \partial\sigma_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 39. Пусть $\sigma \subset \bar{\mathbb{C}}$ – замкнутое множество; $U \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ – открытое множество, содержащее σ ; $f: U \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$ – аналитическая функция. Тогда для любых $\nu \in \sigma \cap \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ функция f допускает представление

$$f(\lambda) = \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu) + \left(1 + \frac{\nu - \mu}{\mu - \lambda}\right) g(\lambda),$$

где g – функция со значениями в $\mathbf{B}_0(X)$, определенная и аналитическая в некоторой окрестности множества σ , т. е. $g \in \mathbf{O}(\sigma, \mathbf{B}_0(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_0(\lambda) = f(\lambda) - \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu).$$

Поскольку $\mu \notin \sigma$, имеем $f_0 \in \mathbf{O}(\sigma)$. Очевидно, $f_0(\nu) = \mathbf{0}$. Далее рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = \frac{\mu - \lambda}{\nu - \lambda} f_0(\lambda).$$

Очевидно, в точке $\lambda = \nu$ функция g имеет устранимый разрыв 1-го рода (а именно, $\lim_{\lambda \rightarrow \nu} g(\lambda) = -(\mu - \nu)f'_0(\nu)$). Поэтому можно считать, что $g \in \mathbf{O}(\sigma)$. Окончательно получаем представление

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu) + f_0(\lambda) = \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu) + \frac{\nu - \lambda}{\mu - \lambda} g(\lambda) \\ &= \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu) + \left(1 + \frac{\nu - \mu}{\mu - \lambda}\right) g(\lambda). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 40. Пусть $\bar{\sigma} \subset \bar{\mathbb{C}}$ – замкнутое множество, содержащее ∞ ; $U \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ – открытое множество, содержащее $\bar{\sigma}$; $f: U \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$ – аналитическая функция. Тогда для любого $\mu \notin \bar{\sigma}$ функция f допускает представление

$$f(\lambda) = f(\infty) + \frac{1}{\mu - \lambda} g(\lambda),$$

где g – функция со значениями в $\mathbf{B}_0(X)$, определенная и аналитическая в некоторой окрестности множества $\bar{\sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию f в ряд по степеням $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda - \mu}$ в окрестности бесконечности:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \mu)^k}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = (\mu - \lambda)[f(\lambda) - f(\infty)].$$

Из представления

$$g(\lambda) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \mu)^{k-1}}$$

видно, что в точке $\lambda = \infty$ функция g имеет устранимый разрыв 1-го рода. Поэтому можно считать, что $g \in \mathbf{O}(\bar{\sigma})$. Окончательно получаем представление

$$f(\lambda) = f(\infty) + \frac{1}{\mu - \lambda} g(\lambda).$$

Предложение доказано.

Пусть $f: U \rightarrow \mathbf{B}_0(X)$ – аналитическая функция. Положим

$$\sigma(f) = \{\lambda \in U: \text{оператор } f(\lambda) \text{ необратим}\}.$$

ТЕОРЕМА 41. Пусть задано расширенное тензорное произведение $X \boxtimes Y$ банаховых пространств X и Y . Пусть в алгебре $\mathbf{B}(Y)$ задана псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$, принимающая значения в $\mathbf{B}_0(Y)$. Пусть $f \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$. Если $\infty \notin \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, то определим оператор $\Phi(f)$ по формуле (17). Если $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, то определим оператор $\Phi(f)$ по формуле (18). Тогда для того чтобы оператор $\Phi(f): X \boxtimes Y \rightarrow X \boxtimes Y$ был необратим, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\lambda \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ оператор $f(\lambda) \in \mathbf{B}_0(X)$ был необратим, или, что равносильно,

$$\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)}) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ пусто, то обратимость $\Phi(f)$ вытекает из наполненности подалгебры $\mathbf{B}_0(X)$, теорем 26, 27, а также предложения 2.

Докажем обратное: если множество $\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ не пусто, то оператор $\Phi(f)$ необратим. В силу предложения 38 возможны четыре случая:

- (а) имеется конечная точка $\nu \in \sigma(f) \cap \partial\bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$;
- (б) имеется конечная точка $\nu \in \partial\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$;
- (с) $\infty \in \sigma(f) \cap \partial\bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$;
- (д) $\infty \in \partial\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$.

Рассмотрим их отдельно.

Случай (а). Пусть имеется конечная точка $\nu \in \sigma(f) \cap \partial\sigma(R_{(\cdot)})$. Зафиксируем произвольную точку $\mu \in \rho(R_{(\cdot)})$. В соответствии с предложением 39 представим функцию f в виде

$$f(\lambda) = \frac{\mu - \nu}{\mu - \lambda} f(\nu) + h(\lambda)g(\lambda),$$

где $g \in \mathbf{O}(\sigma(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$, а

$$h(\lambda) = 1 + \frac{\nu - \mu}{\mu - \lambda}.$$

В силу теорем 26, 27, а также теорем 24, 25 имеем

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + \Phi(g)(\mathbf{1} \boxtimes \varphi(h)) \\ &= f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + (\mathbf{1} \boxtimes \varphi(h))\Phi(g). \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что

$$\varphi(h) = \mathbf{1} + (\nu - \mu)R_\mu. \quad (20)$$

Напомним, что в силу теоремы 18 имеем $\nu \in \rho(R_{(\cdot)})$ тогда и только тогда, когда оператор (20) обратим. В нашем случае $\nu \in \partial\sigma(R_{(\cdot)})$. Поэтому в силу предложения 35 имеем как $|\varphi(h)|_+ = 0$, так и $|\varphi(h)|_- = 0$.

По условию $\nu \in \sigma(f)$. Это означает, что оператор $f(\nu)$ необратим. Поэтому в силу теоремы 30, (с) имеет место $|f(\nu)|_+ = 0$ или $|f(\nu)|_- = 0$.

Сначала рассмотрим случай $|f(\nu)|_+ = 0$. В этом случае в силу предложения 29 существует такая последовательность $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, что $f(\nu)x_n \rightarrow 0$. Аналогично из условия $|\varphi(h)|_+ = 0$ вытекает существование такой последовательности $y_n \in Y$, $\|y_n\| = 1$, что $\varphi(h)y_n \rightarrow 0$. Для последовательности $x_n \boxtimes y_n$ в силу определения расширенного тензорного произведения имеем $\|x_n \boxtimes y_n\| = 1$ и

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(x_n \boxtimes y_n)\| &= \|[f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + \Phi(g)(\mathbf{1} \boxtimes \varphi(h))](x_n \boxtimes y_n)\| \\ &\leq \|[f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu](x_n \boxtimes y_n)\| + \|\Phi(g)(\mathbf{1} \boxtimes \varphi(h))(x_n \boxtimes y_n)\| \\ &= \|(f(\nu)x_n) \boxtimes ((\mu - \nu)R_\mu y_n)\| + \|\Phi(g)(x_n \boxtimes \varphi(h)y_n)\| \\ &= \|(f(\nu)x_n) \boxtimes ((\mu - \nu)R_\mu y_n)\| + \|\Phi(g)\| \cdot \|x_n \boxtimes \varphi(h)y_n\| \\ &= \|f(\nu)x_n\| \cdot \|(\mu - \nu)R_\mu y_n\| + \|\Phi(g)\| \cdot \|x_n\| \cdot \|\varphi(h)y_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что в силу предложения 29 означает, что

$$|\Phi(f)|_+ = |f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + \Phi(g)(1 \boxtimes \varphi(h))|_+ = 0.$$

Отсюда и из теоремы 30, (с) следует, что оператор $\Phi(f)$ необратим.

Затем рассмотрим случай $|f(\nu)|_- = 0$. В этом случае в силу следствия 32 существует такая последовательность $x_n^* \in X^*$, $\|x_n^*\| = 1$, что $[f(\nu)]^* x_n^* \rightarrow 0$. Аналогично из условия $|\varphi(h)|_- = 0$ вытекает существование такой последовательности $y_n^* \in Y^*$, $\|y_n^*\| = 1$, что $[\varphi(h)]^* y_n^* \rightarrow 0$. Для последовательности $x_n^* \boxtimes y_n^*$ имеем $\|x_n^* \boxtimes y_n^*\| = 1$ и

$$\begin{aligned} \|[\Phi(f)]^*(x_n^* \boxtimes y_n^*)\| &= \|[f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + (1 \boxtimes \varphi(h))\Phi(g)]^*(x_n^* \boxtimes y_n^*)\| \\ &\leq \| [f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu]^*(x_n^* \boxtimes y_n^*) \| + \| [(1 \boxtimes \varphi(h))\Phi(g)]^*(x_n^* \boxtimes y_n^*) \| \\ &\leq \| [f(\nu)]^* x_n^* \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu^* y_n^* \| + \| x_n^* \boxtimes [\varphi(h)]^* y_n^* \| \cdot \|\Phi(g)\| \\ &\leq \| [f(\nu)]^* x_n^* \| \cdot \|(\mu - \nu)R_\mu^* y_n^*\| + \|x_n^*\| \cdot \|[\varphi(h)]^* y_n^*\| \cdot \|\Phi(g)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда в силу предложения 29 получаем

$$|\Phi(f)|_- = |f(\nu) \boxtimes (\mu - \nu)R_\mu + (1 \boxtimes \varphi(h))\Phi(g)|_- = 0.$$

Случай (b). Пусть имеется конечная точка $\nu \in \partial\sigma(f) \cap \sigma(R_{(\cdot)})$. Вновь имеем представление (19). По предположению оператор $\varphi(h)$ не имеет обратного. В силу теоремы 30, (с) это значит, что $|\varphi(h)|_+ = 0$ или $|\varphi(h)|_- = 0$. Кроме того, в силу предложения 35 имеем $|f(\nu)|_+ = 0$ и $|f(\nu)|_- = 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим.

Случай (d). Рассмотрим теперь случай, когда $\infty \in \partial\sigma(f) \cap \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. В этом случае в силу предложения 40 функция f допускает представление

$$f(\lambda) = f(\infty) + \frac{1}{\mu - \lambda}g(\lambda),$$

где $g \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$, а $\mu \notin \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Из этого представления в силу теорем 27, 25 следует, что

$$\Phi(f) = f(\infty) \boxtimes 1 + \Phi(g)(1 \boxtimes R_\mu) = f(\infty) \boxtimes 1 + (1 \boxtimes R_\mu)\Phi(g). \quad (21)$$

Поскольку ∞ является предельной точкой множества $\sigma(f)$, имеем $|f(\infty)|_+ = 0$ и $|f(\infty)|_- = 0$. Кроме того, поскольку $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, в силу предложений 23, 20 оператор R_μ не имеет обратного. Поэтому по теореме 30, (с) либо $|R_\mu|_+ = 0$, либо $|R_\mu|_- = 0$.

Сначала рассмотрим случай $|R_\mu|_+ = 0$. В этом случае существует такая последовательность $y_n \in Y$, $\|y_n\| = 1$, что $R_\mu y_n \rightarrow 0$. Аналогично из условия $|f(\infty)|_+ = 0$ вытекает существование такой последовательности $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, что $f(\infty)x_n \rightarrow 0$. Для последовательности $x_n \boxtimes y_n$ имеем $\|x_n \boxtimes y_n\| = 1$ и

$$\|[f(\infty) \boxtimes 1 + \Phi(g)(1 \boxtimes R_\mu)](x_n \boxtimes y_n)\| = \|f(\infty)x_n \boxtimes y_n + \Phi(g)(x_n \boxtimes R_\mu y_n)\| \rightarrow 0.$$

Затем рассмотрим случай $|R_\mu|_- = 0$. В этом случае существует такая последовательность $y_n^* \in Y^*$, $\|y_n^*\| = 1$, что $[R_\mu]^* y_n^* \rightarrow 0$. Аналогично из

условия $|f(\infty)|_- = 0$ вытекает существование последовательности $x_n^* \in X^*$, $\|x_n^*\| = 1$, такой, что $[f(\infty)]^* x_n^* \rightarrow 0$. Для последовательности $x_n^* \boxtimes y_n^*$ имеем $\|x_n^* \boxtimes y_n^*\| = 1$ и

$$\begin{aligned} & \| [f(\infty) \boxtimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} \boxtimes R_\mu) \Phi(g)]^* (x_n^* \boxtimes y_n^*) \| \\ &= \| [f(\infty)]^* (x_n^* \boxtimes y_n^*) + [\Phi(g)]^* (x_n^* \boxtimes [R_\mu]^* y_n^*) \| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Случай (с). Рассмотрим, наконец, случай, когда $\infty \in \sigma(f) \cap \partial \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$. Вновь имеем представление (21). По предположению оператор $f(\infty)$ не имеет обратного. В силу теоремы 30, (с) это значит, что $|f(\infty)|_+ = 0$ или $|f(\infty)|_- = 0$. Кроме того, в силу предложения 37 имеем $|R_\mu|_+ = 0$ и $|R_\mu|_- = 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим.

ТЕОРЕМА 42. Пусть задано расширенное тензорное произведение $X \boxtimes Y$ банаховых пространств X и Y . Пусть в алгебре $\mathbf{B}_0(Y)$ задана псевдорезольвента $R_{(\cdot)}$. Пусть $f \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$. Если $\infty \notin \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, то определим оператор $\Phi(f)$ по формуле (17). Если $\infty \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$, то определим оператор $\Phi(f)$ по формуле (18). Тогда спектр оператора $\Phi(f): X \boxtimes Y \rightarrow X \boxtimes Y$ совпадает с множеством

$$\sigma[\Phi(f)] = \bigcup_{\lambda \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})} \sigma(f(\lambda)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через u функцию из $\mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$, тождественно равную $\mathbf{1}_X$. В силу предложения 13 функция u является единицей алгебры $\mathbf{O}(\bar{\sigma}(R_{(\cdot)}), \mathbf{B}_0(X))$, а в силу теорем 26, 27 оператор Φ является морфизмом алгебр. Поэтому

$$\Phi(u) = \mathbf{1}.$$

Отсюда имеем

$$\lambda \mathbf{1} - \Phi(f) = \Phi(\lambda u - f).$$

Применим теорему 41: для того чтобы оператор $\lambda \mathbf{1} - \Phi(f) = \Phi(\lambda u - f)$ был необратим, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\lambda_0 \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ оператор $\lambda \mathbf{1}_X - f(\lambda_0)$ был необратим, т. е. чтобы при некотором $\lambda_0 \in \bar{\sigma}(R_{(\cdot)})$ число λ попало в спектр оператора $f(\lambda_0)$.

§ 9. Операторные пучки

В этом параграфе обсуждается частный случай теоремы 42.

Пусть X и Y – банаховы пространства, а $F, G \in \mathbf{B}(X, Y)$ – два линейных ограниченных оператора. Пучком (линейным операторным) называют [15], [16] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

Резольвентным множеством пучка (22) называют множество $\rho(F, G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим, а резольвентой пучка – функцию

$$R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}.$$

Дополнение $\sigma(F, G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка. Пучок называют *регулярным*, если его резольвентное множество не пусто. В дальнейшем все рассматриваемые пучки предполагаются регулярными.

ПРИМЕР 43. Пусть Y – банахово пространство, а $G: Y \rightarrow Y$ – замкнутый линейный оператор с областью определения $X \subseteq Y$. Введем на X норму графика $\|x\|_X = \|x\|_Y + \|Gx\|_Y$. Тогда резольвента $R_\lambda = (\lambda \mathbf{1} - G)^{-1}$ неограниченного оператора G может рассматриваться как резольвента пучка $\lambda \mapsto \lambda \mathbf{1} - G: X \rightarrow Y$.

Расширенным резольвентным множеством пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$ назовем подмножество $\bar{\rho}(F, G)$ расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, состоящее из $\rho(F, G)$ и, возможно, точки ∞ . Точку ∞ отнесем к расширенному резольвентному множеству $\bar{\rho}(F, G)$ пучка, если оператор F обратим. В противном случае точку ∞ отнесем к *расширенному спектру* $\bar{\sigma}(F, G)$ пучка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 44. Если точка ∞ принадлежит $\bar{\rho}(F, G)$, то резольвента $R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}$ определена в проколотой окрестности точки $\lambda = \infty$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda = F^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 45. Функции $\lambda \mapsto (\lambda F - G)^{-1}F$ и $\lambda \mapsto F(\lambda F - G)^{-1}$ являются псевдорезольвентами в $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}(Y)$ соответственно, т. е. при $\lambda, \mu \in \rho(F, G)$ удовлетворяют тождеству Гильберта (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает, например, из [17, предложение 5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 46. Псевдорезольвенты $\lambda \mapsto (\lambda F - G)^{-1}F$ и $\lambda \mapsto F(\lambda F - G)^{-1}$ являются максимальными, а точнее, их расширенные сингулярные множества совпадают с $\bar{\sigma}(F, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим псевдорезольвенту $S_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}F$. Зафиксируем точку $\mu \in \rho(F, G)$. Предположим, что псевдорезольвенту $S_{(\cdot)}$ можно продолжить в точку $\lambda \in \mathbb{C}$. Согласно теореме 18 это равносильно тому, что оператор $\mathbf{1} + (\lambda - \mu)S_\mu$ обратим (см. также теорему 22). Преобразуем представление оператора $\mathbf{1} + (\lambda - \mu)S_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} + (\lambda - \mu)S_\mu &= \mathbf{1} + (\lambda - \mu)(\mu F - G)^{-1}F = (\mu F - G)^{-1}[(\mu F - G) + (\lambda - \mu)F] \\ &= (\mu F - G)^{-1}[\mu F - G + \lambda F - \mu F] = (\mu F - G)^{-1}(\lambda F - G). \end{aligned}$$

Из этого представления в силу обратимости оператора $(\mu F - G)^{-1}$ видно, что оператор $\mathbf{1} + (\lambda - \mu)S_\mu$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\lambda F - G$, т. е. когда $\lambda \in \rho(F, G)$.

Пусть $\infty \in \bar{\rho}(S_{(\cdot)})$. В силу предложения 23 это означает, что псевдорезольвента $S_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}F$ является резольвентой некоторого элемента $T \in \mathbf{B}_R$. Отсюда в соответствии с предложением 20 следует, что при некотором μ обратим оператор $S_\mu = (\mu F - G)^{-1}F$. Тогда обратим оператор F , что означает $\infty \in \bar{\rho}(F, G)$.

Обратно, пусть $\infty \in \bar{\rho}(F, G)$. Тогда оператор F обратим и в силу предложения 44 резольвента $R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}$ определена в проколотой окрестности точки $\lambda = \infty$, причем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda F - G)^{-1} = F^{-1}$. Отсюда следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda S_\lambda = \mathbf{1}$, а это согласно определению означает, что $\infty \in \bar{\rho}(S_{(\cdot)})$.

Случай второй псевдорезольвенты разбирается аналогично.

Будучи псевдорезольвентами, функции $\lambda \mapsto (\lambda F - G)^{-1}F$ и $\lambda \mapsto F(\lambda F - G)^{-1}$ порождают функциональные исчисления, которые мы назовем *левым* и *правым* (ср. [32]). Перечислим их основные свойства.

ТЕОРЕМА 47. Пусть $\infty \notin \bar{\sigma}(F, G)$, т.е. оператор F обратим. Тогда левое и правое функциональные исчисления

$$\varphi_l: \mathbf{O}(\sigma(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(X), \quad \varphi_r: \mathbf{O}(\sigma(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Y)$$

могут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_l(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}F d\lambda, \\ \varphi_r(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)F(\lambda F - G)^{-1} d\lambda, \end{aligned}$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей спектра $\sigma(F, G)$ пучка относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f .

Функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ_l в единицу $\mathbf{1}_X$ алгебры $\mathbf{B}(X)$, а морфизмом φ_r – в единицу $\mathbf{1}_Y$ алгебры $\mathbf{B}(Y)$. Функция $v(\lambda) = \lambda$ переводится морфизмом φ_l в оператор $F^{-1}G$, а морфизмом φ_r – в оператор GF^{-1} . Функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(F, G)$, переводится морфизмом φ_l в $R_{\lambda_0}F$, а морфизмом φ_r – в FR_{λ_0} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 24.

ТЕОРЕМА 48. Пусть $\infty \in \bar{\sigma}(F, G)$, т.е. оператор F необратим. Тогда левое и правое функциональные исчисления

$$\varphi_l: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(X), \quad \varphi_r: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Y)$$

могут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_l(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda F - G)^{-1}F d\lambda + f(\infty)\mathbf{1}_X, \\ \varphi_r(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)F(\lambda F - G)^{-1} d\lambda + f(\infty)\mathbf{1}_Y, \end{aligned}$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей расширенного спектра $\bar{\sigma}(F, G)$ (включая бесконечно удаленную точку) относительно дополнения к области определения функции f .

Функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ_l в единицу $\mathbf{1}_X$ алгебры $\mathbf{B}(X)$, а морфизмом φ_r – в единицу $\mathbf{1}_Y$ алгебры $\mathbf{B}(Y)$. Функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(F, G)$, переводится морфизмом φ_l в $R_{\lambda_0}F$, а морфизмом φ_r – в FR_{λ_0} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 25.

В силу предложения 45 в соответствии с теоремами 26, 27 левое и правое функциональные исчисления порождают функциональные исчисления в расширенных тензорных произведениях.

ТЕОРЕМА 49. Пусть задано расширенное тензорное произведение $Z \boxtimes X$ банаховых пространств Z и X , причем $\mathbf{B}_0(X)$ содержит все значения псевдорезольвенты $R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}F$. Пусть $f \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G), \mathbf{B}_0(Z))$. Если $\infty \notin \bar{\sigma}(F, G)$, то определим $\Phi_l: \mathbf{O}(\sigma(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Z \boxtimes X)$ по формуле

$$\Phi_l(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes (\lambda F - G)^{-1}F d\lambda,$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей спектра $\sigma(F, G)$ пучка относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f . Если $\infty \in \bar{\sigma}(F, G)$, то определим $\Phi_l: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Z \boxtimes X)$ по формуле

$$\Phi_l(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes (\lambda F - G)^{-1}F d\lambda + f(\infty) \boxtimes \mathbf{1},$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей расширенного спектра $\bar{\sigma}(F, G)$ относительно дополнения к области определения функции f . Тогда спектр оператора $\Phi_l(f): Z \boxtimes X \rightarrow Z \boxtimes X$ совпадает с множеством

$$\sigma[\Phi_l(f)] = \bigcup_{\lambda \in \bar{\sigma}(F, G)} \sigma(f(\lambda)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 42 и предложения 46.

ТЕОРЕМА 50. Пусть задано расширенное тензорное произведение $Z \boxtimes Y$ банаховых пространств Z и Y , причем $\mathbf{B}_0(Y)$ содержит все значения псевдорезольвенты $R_\lambda = F(\lambda F - G)^{-1}$. Пусть $f \in \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G), \mathbf{B}_0(Z))$. Если $\infty \notin \bar{\sigma}(F, G)$, то определим $\Phi_r: \mathbf{O}(\sigma(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Z \boxtimes Y)$ по формуле

$$\Phi_r(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes F(\lambda F - G)^{-1} d\lambda,$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей спектра $\sigma(F, G)$ пучка относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f . Если $\infty \in \bar{\sigma}(F, G)$, то определим $\Phi_r: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(F, G)) \rightarrow \mathbf{B}(Z \boxtimes Y)$ по формуле

$$\Phi_r(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes F(\lambda F - G)^{-1} d\lambda + f(\infty) \boxtimes \mathbf{1},$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей расширенного спектра $\bar{\sigma}(F, G)$ относительно дополнения к области определения функции f . Тогда спектр оператора $\Phi_r(f): Z \boxtimes Y \rightarrow Z \boxtimes Y$ совпадает с множеством

$$\sigma[\Phi_r(f)] = \bigcup_{\lambda \in \bar{\sigma}(F, G)} \sigma(f(\lambda)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 49.

ПРИМЕР 51. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A, B \in \mathbf{B}(X)$ и $F, G \in \mathbf{B}(Y)$ – заданные линейные ограниченные операторы, а $C \in \mathbf{K}(X, Y)$ – квадратичная форма. Неявным уравнением Сильвестра относительно $K \in \mathbf{K}(X, Y)$ назовем (ср. [33]) уравнение

$$K(Ax, Fy) + K(Bx, Gy) = C(x, y), \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

или, короче,

$$K(A \cdot, F \cdot) + K(B \cdot, G \cdot) = C(\cdot, \cdot). \quad (23)$$

Предположим, что хотя бы один из пучков $\lambda \mapsto \lambda B + A$ или $\lambda \mapsto \lambda F - G$ является регулярным. Покажем, что для того чтобы неявное уравнение Сильвестра (23) при любом $C \in \mathbf{K}(X, Y)$ имело единственное решение $K \in \mathbf{K}(X, Y)$, необходимо и достаточно, чтобы расширенные спектры пучков $\lambda \mapsto \lambda B + A$ и $\lambda \mapsto \lambda F - G$ не пересекались. Аналогичное утверждение для операторного уравнения Сильвестра $AKF + BKG = C$ доказывалось многими авторами (см., например, [6, теорема 3.2]).

Пусть для определенности регулярным является пучок $\lambda \mapsto \lambda F - G$. Покажем, что без ограничения общности хотя бы один из операторов F или G можно считать обратимым. Предположим, что $\lambda_0 \in \rho(F, G)$. Заметим, что уравнение (23) равносильно уравнению

$$K((A + \lambda_0 B) \cdot, F \cdot) + K(B \cdot, (G - \lambda_0 F) \cdot) = C(\cdot, \cdot).$$

В этом уравнении оператор $\tilde{G} = G - \lambda_0 F$ является заведомо обратимым. При этом пучки, соответствующие новому уравнению, имеют вид $\lambda \mapsto (\lambda + \lambda_0)B + A$ и $\lambda \mapsto (\lambda + \lambda_0)F - G$, так что условие о пустоте пересечения их расширенных спектров не изменилось.

Чтобы не усложнять обозначения, для определенности будем считать, что обратим оператор F .

Рассмотрим расширенное тензорное произведение $X^* \boxtimes Y^* \simeq \mathbf{K}(X, Y)$ (см. пример 12, (b)). Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \lambda B^* + A^*: X^* \rightarrow X^*$ и пучок $\lambda \mapsto \lambda F^* - G^*: Y^* \rightarrow Y^*$. Очевидно, спектр этого пучка совпадает с $\sigma(F, G)$. Рассмотрим преобразование

$$\Phi_r(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \boxtimes F^*(\lambda F^* - G^*)^{-1} d\lambda \right).$$

В силу теорем 26, 47 имеем

$$\Phi_r(f) = A^* \boxtimes \mathbf{1}^* + B^* \boxtimes (G^* F^{-1*}).$$

Отсюда получаем

$$\Phi_r(f) \circ (\mathbf{1}^* \boxtimes F^*) = A^* \boxtimes F^* + B^* \boxtimes G^*,$$

что совпадает с преобразованием, стоящим в левой части уравнения (23).

В силу обратимости F преобразование $\Phi_r(f) \circ (\mathbf{1}^* \boxtimes F^*): \mathbf{K}(X, Y) \rightarrow \mathbf{K}(X, Y)$ обратимо одновременно с преобразованием $\Phi_r(f): \mathbf{K}(X, Y) \rightarrow \mathbf{K}(X, Y)$. Последнее в силу теоремы 50 обратимо тогда и только тогда, когда спектры пучков $\lambda \mapsto \lambda B + A$ и $\lambda \mapsto \lambda F - G$ не пересекаются.

Авторы глубоко благодарны рецензенту за ценные замечания и рекомендации.

Список литературы

1. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **1955**, no. 16, 1955, 140 pp.

2. R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Ann. of Math. Stud., **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1950, vii+153 pp.
3. G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Grundlehren Math. Wiss., **159**, Springer-Verlag, New York, 1969, xv+456 pp.
4. G. Köthe, *Topological vector spaces. II*, Grundlehren Math. Wiss., **237**, Springer-Verlag, New York, 1979, xii+331 pp.
5. А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004, 552 с.; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *Lectures and exercises on functional analysis*, Transl. Math. Monogr., **233**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, xviii+468 pp.
6. M. R. Embry, M. Rosenblum, "Spectra, tensor products, and linear operator equations", *Pacific J. Math.*, **53**:1 (1974), 95–107.
7. В. Г. Курбатов, "О спектре оператора с соизмеримыми отклонениями аргумента и постоянными коэффициентами", *Дифференц. уравнения*, **13**:10 (1977), 1770–1775; англ. пер.: V. G. Kurbatov, "The spectrum of an operator with commensurable deviations of the argument and with constant coefficients", *Differential Equations*, **13**:10 (1977), 1231–1235.
8. В. Г. Курбатов, И. С. Фролов, "Об операторном варианте принципа максимума", *Матем. заметки*, **36**:4 (1984), 531–535; англ. пер.: V. G. Kurbatov, I. S. Frolov, "An operator variant of the maximum principle", *Math. Notes*, **36**:4 (1984), 763–765.
9. V. G. Kurbatov, *Functional differential operators and equations*, Math. Appl., **473**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, xx+433 pp.
10. M. I. Gil', "Invertibility and spectra of operators in tensor products of Hilbert spaces", *Glasg. Math. J.*, **46**:1 (2004), 101–116.
11. M. I. Gil', "Estimates for resolvents and functions of operator pencils on tensor products of Hilbert spaces", *Kyoto J. Math.*, **51**:3 (2011), 673–686.
12. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957, xii+808 pp.
13. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
14. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975, 443 с.; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973, xiii+397 pp.
15. А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986, 260 с.; англ. пер.: A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Transl. Math. Monogr., **71**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, iv+250 pp.
16. Х. Д. Икрамов, "Матричные пучки – теория, приложения, численные методы", *Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ.*, **29**, ВИНТИ, М., 1991, 3–106; англ. пер.: Kh. D. Ikramov, "Matrix pencils: Theory, applications, and numerical methods", *J. Soviet Math.*, **64**:2 (1993), 783–853.
17. И. В. Курбатова, "Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком", *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 394–401; англ. пер.: I. V. Kurbatova, "Banach algebras associated with linear operator pencils", *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 361–367.
18. Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Элементы математики, Вып. 32, Мир, М., 1972, 183 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Fasc. XXXII. Théories spectrales. Chap. I: Algèbres normées. Chap. II: Groupes localement compacts commutatifs, Actualités Sci. Indust., **1332**, Hermann, Paris, 1967, iv+166 pp.

19. B. Simon, "Uniform crossnorms", *Pacific J. Math.*, **46**:2 (1973), 555–560.
20. R. Arens, "The adjoint of a bilinear form", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**:6 (1951), 839–848.
21. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М., 1969, 576 с.
22. Н. Бурбаки, *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов*, *Элементы математики*, **3**, Наука, М., 1975, 408 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Fasc. X. Première partie. Livre III: Topologie générale. Chapitre 10: Espaces fonctionnels, *Actualités Sci. Indust.*, **1084**, Hermann, Paris, 1961, 96 pp.
23. Х. Шеффер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971, 359 с.; пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, The Macmillan Co., New York; Collier–Macmillan Ltd., London, 1966, ix+294 pp.
24. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, "Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов", *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, "Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups", *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
25. F. Rübiger, M. P. H. Wolff, "Spectral and asymptotic properties of resolvent-dominated operators", *Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis*, **7**:1 (1997/1998), 217–235.
26. М. С. Бичегкуев, "Условия разрешимости разностных включений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 25–36; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, "Conditions for solubility of difference inclusions", *Izv. Math.*, **72**:4 (2008), 647–658.
27. И. В. Курбатова, "Некоторые свойства линейных отношений", *Вестн. ф-та ПММ, ВГУ, Воронеж*, 2009, 68–89.
28. Л. Д. Кудрявцев, *Краткий курс математического анализа*, Наука, М., 1989, 736 с.
29. H. A. Gindler, A. E. Taylor, "The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory", *Studia Math.*, **22** (1962/63), 15–41.
30. А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982, 536 с.; пер. с англ.: A. Pietsch, *Operator ideals*, Math. Monogr., **16**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 451 pp.
31. L. W. Weis, "On the computation of some quantities in the theory of Fredholm operators", *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 1984, suppl., № 5, 109–133.
32. А. Г. Баскаков, "Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов", *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151; англ. пер.: A. G. Baskakov, "Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:4 (2006), 4885–5036.
33. Х. Д. Икрамов, *Численное решение матричных уравнений*, Наука, М., 1984, 192 с.

Виталий Геннадьевич Курбатов

(VITALII G. KURBATOV)

Воронежский государственный университет

E-mail: kv51@inbox.ru

Поступило в редакцию

29.04.2014

Ирина Витальевна Курбатова

(IRINA V. KURBATOVA)

Военно-воздушная академия

им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина,

г. Воронеж

E-mail: la_soleil@bk.ru