Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Рудаков, Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 215–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:07:46

УДК 517.954

И. А. Рудаков

Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями

Доказано существование счетного числа периодических по времени решений квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями и периодической по времени правой частью в случае, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: колебания балки, периодическое по времени решение, вариационный метод, возмущение четных функционалов.

DOI: 10.4213/im8250

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу о периодических колебаниях балки

$$u_{tt} + u_{xxxx} + g(x, t, u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Будем рассматривать следующие граничные условия:

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) - hu(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

В соотношении (1.8) величина h – положительная константа. Условие (1.3) соответствует случаю закрепленных концов, условие (1.4) – случаю, когда левый конец балки закреплен, а правый свободный, условие (1.5) – случаю, когда левый конец балки закреплен, а правый является свободно опертым, и условие (1.6) – случаю, когда оба конца балки свободны [1], [2]. Условие (1.7) соответствует случаю, когда левый конец свободно оперт, а правый свободен, условие (1.8) – случаю, когда правый конец балки закреплен упруго [3]. Заметим, что если в (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) мы поменяем местами граничные условия на

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 1.264.2014).

левым и правом концах балки, то получим эквивалентную задачу, поскольку замена $x = \pi - y$, $u(x, t) = u(\pi - y, t)$ переставляет местами концы отрезка $[0, \pi]$.

Будем искать периодические решения с периодом T , имеющим вид

$$T = 2\pi \frac{b}{a}, \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(a, b) = 1. \quad (1.9)$$

Обозначим $G(x, t, u) = \int_0^u g(x, t, s) ds$, $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. Для функции g выполнены также следующие условия:

- (А) $g \in C^1([0, \pi] \times \mathbb{R}^2)$ T -периодична по t ;
- (В) существуют $\mu > 2$, $r \geq 0$ такие, что $0 < \mu G(x, t, u) \leq ug(x, t, u)$ при всех $(x, t) \in \Omega$, $u \in (-\infty, -r] \cup [r, +\infty)$;
- (С) существуют $p \in [\mu - 1, \mu)$, $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ такие, что $C_1|u|^p - C_2 \leq |g(x, t, u)| \leq C_3|u|^p + C_4$ для любых $(x, t) \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$;
- (D) $g(x, t, -u) = -g(x, t, u)$ для всех $(x, t) \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$.

Задача о существовании периодических колебаний балки со свободно опертыми концами исследована в работах [4]–[6]. В [7] доказана счетная разрешимость задачи (1.1), (1.2) с одним из граничных условий (1.3)–(1.6), когда $f = 0$ или f не зависит от t . При этом в [7] предполагалась монотонность нелинейного слагаемого $g(x, t, u)$ по u . В этом случае доказательство опиралось на идеи Е. Файрайсла [4] и существенно использовало симметрию, которой обладает рассматриваемая задача. Если $f = 0$, то соответствующий данной задаче функционал [7] является нечетным по u , а если f не зависит от t , то этот функционал инвариантен относительно сдвига по времени. Целью настоящей работы является доказательство существования счетного числа периодических решений задачи (1.1), (1.2) с одним из граничных условий (1.3)–(1.8) при любой T -периодической по времени правой части f в случае, когда нелинейное слагаемое g удовлетворяет условиям (А)–(D) без предположения монотонности. При этом используется другой подход в исследовании данной задачи, опирающийся на работы [8]–[10].

§ 2. Исследование линейного случая

Решение задачи будем искать в виде ряда Фурье. Соответствующая ортонормированная система строится с помощью следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \lambda X, \quad 0 < x < \pi. \quad (2.1)$$

При этом условиям (1.3)–(1.8) будут соответствовать следующие граничные условия:

$$X(0) = X'(0) = X(\pi) = X'(\pi) = 0, \quad (2.2)$$

$$X(0) = X'(0) = X''(\pi) = X'''(\pi) = 0, \quad (2.3)$$

$$X(0) = X'(0) = X(\pi) = X''(\pi) = 0, \quad (2.4)$$

$$X''(0) = X'''(0) = X''(\pi) = X'''(\pi) = 0, \quad (2.5)$$

$$X(0) = X''(0) = X''(\pi) = X'''(\pi) = 0, \quad (2.6)$$

$$X(0) = X''(0) = X''(\pi) = X'''(\pi) - hX(\pi, t) = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.1) и одного из условий (2.2)–(2.6) выведем $\lambda = \int_0^\pi (X''(x))^2 dx$. Из (2.1) и (2.7) выведем $\lambda = \int_0^\pi (X''(x))^2 dx + hX^2(\pi)$. Следовательно, $\lambda \geq 0$.

Общее решение уравнения (2.1) можно записать в виде (см. [1])

$$X = C_1(\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}x) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}x)) + C_2(\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}x) - \cos(\sqrt[4]{\lambda}x)) \\ + C_3(\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}x) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}x)) + C_4(\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}x)).$$

Из (2.1) и граничных условий (2.2)–(2.4) следует, что $\lambda > 0$. Задачи (2.1), (2.2); (2.1), (2.3); (2.1), (2.4) имеют полную ортонормированную в $L_2([0, \pi])$ систему собственных функций

$$X_n = A_n(\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n x) - \cos(\bar{\lambda}_n x) - \alpha_n(\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n x) - \sin(\bar{\lambda}_n x))),$$

которым соответствуют собственные значения

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n^4. \quad (2.8)$$

При этом для граничных условий (2.2), (2.4) имеем

$$\alpha_n = \frac{\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n \pi) - \cos(\bar{\lambda}_n \pi)}{\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n \pi) - \sin(\bar{\lambda}_n \pi)};$$

если выполнено граничное условие (2.3), то

$$\alpha_n = \frac{\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n \pi) + \cos(\bar{\lambda}_n \pi)}{\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n \pi) + \sin(\bar{\lambda}_n \pi)}.$$

Для задачи (2.1), (2.5) имеется собственное значение $\lambda = 0$, которому соответствуют две собственные (нормированные) функции

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad X_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

При натуральных значениях $n > 2$ собственные функции имеют вид [1]

$$X_n = A_n(\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n x) + \cos(\bar{\lambda}_n x) - \alpha_n(\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n x) + \sin(\bar{\lambda}_n x))),$$

где

$$\alpha_n = \frac{\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n \pi) - \cos(\bar{\lambda}_n \pi)}{\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n \pi) - \sin(\bar{\lambda}_n \pi)}.$$

Для задачи (2.2), (2.6) имеется также собственное значение $\lambda_1 = 0$, которому соответствует одна нормированная собственная функция

$$X_1 = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}x.$$

При натуральных значениях $n > 1$ собственные функции имеют вид

$$X_n = A_n(\sin(\bar{\lambda}_n x) + \alpha_n \operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n x)), \quad (2.9)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\sin(\bar{\lambda}_n \pi)}{\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n \pi)}.$$

Во всех случаях множители A_n можно считать положительными. Прямые вычисления показывают, что для каждой задачи Штурма–Лиувилля последовательность $\{A_n\}$ имеет положительный предел.

Для задач (2.1), (2.2) и (2.1), (2.5) числа $\bar{\lambda}_n$ (см. [1]) являются положительными корнями уравнения

$$\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n \pi) \cos(\bar{\lambda}_n \pi) = 1. \quad (2.10)$$

При этом в задаче (2.1), (2.5) нумерация начинается с $n = 3$, поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В задаче (2.1), (2.3) числа $\bar{\lambda}_n$ (см. [1], [2]) являются положительными корнями уравнения

$$\operatorname{ch}(\bar{\lambda}_n \pi) \cos(\bar{\lambda}_n \pi) = -1. \quad (2.11)$$

Из условий (2.4), (2.6) вытекает следующее уравнение для чисел $\bar{\lambda}_n$:

$$\operatorname{th}(\bar{\lambda}_n \pi) = \operatorname{tg}(\bar{\lambda}_n \pi). \quad (2.12)$$

Решения уравнений (2.10)–(2.12) можно представить соответственно следующими формулами:

$$\bar{\lambda}_n = n + \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} \theta_n, \quad (2.13)$$

$$\bar{\lambda}_n = n - \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} \theta_n, \quad (2.14)$$

$$\bar{\lambda}_n = n + \frac{1}{4} - \theta_n, \quad (2.15)$$

в которых $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in (0, \frac{1}{4})$. В каждой из формул (2.13)–(2.15) для удобства записи разные величины обозначены одинаково θ_n . В связи с изменением нумерации для задачи (2.1), (2.5) вместо (2.13) нужно записать соотношение $\bar{\lambda}_n = n - \frac{3}{2} + (-1)^{n-1} \theta_n$, $n \geq 3$, а для задачи (2.1), (2.6) вместо (2.15) будем иметь равенство

$$\bar{\lambda}_n = n - \frac{3}{4} - \theta_n, \quad n \geq 2. \quad (2.16)$$

В [7] для формул (2.13), (2.14) получены следующие оценки для θ_n :

$$0 < \frac{b_0}{d^n} < \theta_n < \frac{b_1}{d^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Здесь b_0, b_1 – положительные константы, оцененные в [7], $d = e^\pi$. Величины θ_n в соотношении (2.15) при всех $n \in \mathbb{N}$ имеют следующие оценки [7]:

$$0 < \frac{b_0}{d^{2n}} < \theta_n < \frac{b_1}{d^{2n}}. \quad (2.18)$$

Здесь $b_0 = \frac{1}{\sqrt{d}}$, $b_1 = 1$. В равенстве (2.16) величины θ_n оцениваются так же, как в (2.18), при $n \geq 2$ и $b_0 = d\sqrt{d}$, $b_1 = d^2$.

Собственные функции задачи (2.1), (2.7) имеют вид (2.9), где

$$\alpha_n = \frac{\sin(\bar{\lambda}_n \pi)}{\operatorname{sh}(\bar{\lambda}_n \pi)}.$$

Им соответствуют положительные собственные числа $\lambda_n = \bar{\lambda}_n^4$. При $h > 0$ числа $\bar{\lambda}_n$ являются положительными корнями уравнения

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_n^3} = \frac{1}{2h} (\operatorname{cth}(\bar{\lambda}_n \pi) - \operatorname{ctg}(\bar{\lambda}_n \pi)). \quad (2.19)$$

Обозначим $f(t) = \frac{1}{2h} (\operatorname{cth} t - \operatorname{ctg} t)$. Функция f возрастает на интервалах $(\pi n - \pi, \pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\lim_{t \rightarrow \pi n - 0} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pi n + 0} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0 + 0} f(t) = 0.$$

Таким образом, на каждом интервале $(\pi n - \pi, \pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, существует единственный корень $\bar{\lambda}_n$ данного уравнения. Представляя $\bar{\lambda}_n$ в виде $\bar{\lambda}_n = n - \frac{3}{4} + \theta_n$ и подставляя данное соотношение в уравнение (2.19), выводим

$$\theta_n = \frac{1}{\pi} \beta_n \frac{2h}{(n - 3/4 + \theta_n)^3} \frac{1 - e^{-2t_n} - e^{-2t_n} (n - 3/4 + \theta_n)^3 / h}{2 + \alpha_n e^{-2t_n} - \alpha_n}.$$

Здесь

$$\alpha_n = \frac{2h}{(n - 3/4 + \theta_n)^3}, \quad \beta_n = \frac{\pi \theta_n}{\operatorname{tg}(\pi \theta_n)}, \quad t_n = \pi \left(n - \frac{3}{4} + \theta_n \right).$$

Легко видеть, что найдется $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n \geq n_1$ будем иметь включение $|\theta_n| \in (0, \frac{1}{2})$. Из полученных соотношений вытекает равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ и существование констант b_0, b_1 и $n_0 \in \mathbb{N}$ таких, что

$$0 < \frac{b_0}{n^3} < \theta_n < \frac{b_1}{n^3} \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.20)$$

Если в каждой задаче (2.1) с одним из граничных условий (2.2)–(2.7) нормировать $X_n(x)$ в $L_2(0, \pi)$, то будут выполняться следующие оценки:

$$|X_n(x)| \leq C_0, \quad \left| \frac{d^k X_n(x)}{dx^k} \right| \leq D_k n^k$$

для всех $x \in [0, \pi]$, где $k \in \mathbb{N}$, константы C_0, D_k не зависят от n , $A_n = A_0 + \gamma_n$, $A_0 > 0$, $A_n > 0$, $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это показывается прямыми вычислениями.

Обозначим $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для каждой задачи (1.1) с одним из граничных условий (1.3)–(1.8) обозначим $\mu_{nm} = \lambda_n - \left(\frac{a}{b}m\right)^2$, $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+$, и рассмотрим полную ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} X_n(x), \frac{2}{\sqrt{T}} X_n(x) \cos\left(\frac{a}{b}mt\right), \frac{2}{\sqrt{T}} X_n(x) \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right\}_{m,n \in \mathbb{N}}. \quad (2.21)$$

Определим оператор $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \right. \\ \left. \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm}^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty \right. \right\}$$

так, что

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{nm} X_n \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right)$$

для всех

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \in D(A).$$

Обозначим через $N(A)$, $R(A)$ соответственно ядро и образ A . Стандартно [7] доказываются следующие свойства оператора A :

- 1) A – самосопряженный оператор;
- 2) система (2.21) является системой собственных функций оператора A с собственными значениями μ_{nm} ;
- 3) $L_2(\Omega) = R(A) \oplus N(A)$;
- 4) $\dim N(A) < \infty$.

Для натуральных чисел k обозначим через $H_k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$, $H_k = W_2^k([0, \pi])$ пространства Соболева.

Будем говорить, что *выполнено условие (E)*, если в случае одного из граничных условий (1.3), (1.4), (1.6) число b в условии (1.9) не делится на 4, а в случае граничных условий (1.5), (1.7) или (1.8) число b не делится на 16.

Обозначим $\sigma(A) = \{\mu_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$. Множество $\sigma(A)$ не имеет конечных предельных точек, если выполнено условие (E). Для граничных условий (1.3)–(1.6) этот факт получен в [7]. Для граничных условий (1.7) это также верно, поскольку в этом случае $\lambda_1 = 0$, а остальные собственные значения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля совпадают с собственными значениями задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей граничным условиям (1.5). Для граничных условий (1.8) отсутствие предельных точек вытекает из представления

$$\mu_{nm} = \frac{1}{256b^2} (b^2(4n-3)^4 - (16am)^2) + h_n + \gamma_n,$$

где

$$h_n = 4 \left(n - \frac{3}{4} \right)^3 \theta_n, \quad \gamma_n = 6 \left(n - \frac{3}{4} \right)^2 \theta_n^2 + 4 \left(n - \frac{3}{4} \right) \theta_n^3 + \theta_n^4.$$

Из (2.20) следует ограниченность последовательности $h_n + \gamma_n$. Если выполнено условие (E), то имеет место неравенство

$$|b^2(4n-3)^4 - (16am)^2| \geq b(4n-3)^2 + 16am$$

и $\sigma(A)$ не имеет конечных предельных точек. Если b делится на 16, то множество $\sigma(A)$ имеет предельную точку в отрезке $[b_0, 4b_1]$.

Имеют место следующие свойства оператора A .

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (1.9), (E). Тогда для любой функции $f \in R(A)$ в случае одного из граничных условий (1.3)–(1.7) имеет место включение

$$u = A^{-1}f \in L_2([0, T]; H_2) \cap C(\Omega) \cap H_1(\Omega),$$

а в случае граничных условий (1.8) будем иметь включение $u = A^{-1}f \in C(\Omega) \cap H_1(\Omega)$ и существует классическая производная $u_x \in C(\Omega)$.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (1.9), (E). Тогда для любой функции $f \in H_1(\Omega) \cap R(A)$ и $u = A^{-1}f$ классические производные u_{xx} , u_{xxx} принадлежат $C(\Omega)$ и в случае одного из граничных условий (1.3)–(1.7) имеет место включение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap R(A)$.

В случае граничных условий (1.3)–(1.6) леммы 1, 2 доказаны в [7]. В случае граничных условий (1.7) доказательство аналогично. Для граничных условий (1.8) имеет место представление $\bar{\lambda}_n = n - \frac{3}{4} + \theta_n$ и оценка (2.20). Поэтому доказательство утверждений лемм 1, 2 для граничных условий (1.8) повторяет доказательства соответствующих утверждений лемм 1, 2 в [7].

§ 3. Квазилинейное уравнение

Обозначим

$$D = \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M X_n \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \mid N, M \in \mathbb{N}, a_{nm}, b_{nm} \in \mathbb{R} \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением задач (1.1), (1.2) с одним из граничных условий (1.3)–(1.8) называется функция $u \in D(A)$ такая, что

$$\int_{\Omega} u A \phi \, dx \, dt + \int_{\Omega} (g(x, t, u) - f(x, t)) \phi \, dx \, dt = 0 \quad \forall \phi \in D.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (1.9), (E) и функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет условиям (A)–(D). Тогда для любой T -периодической по t функции $f(x, t) \in H_1(\Omega)$ задача (1.1), (1.2) с одним из граничных условий (1.3)–(1.8) имеет неограниченную в $L_{p+1}(\Omega)$ последовательность обобщенных решений из пространства $C(\Omega) \cap H_1(\Omega)$, для которых вторые и третьи классические производные по x непрерывны в Ω . Для задачи (1.1), (1.2) с одним из граничных условий (1.3)–(1.7) обобщенные решения принадлежат $H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать метод Рабиновича–Танаки–Бари–Берестики [8]–[10] и следовать плану работы [9].

При $q \geq 1$ для функций $u \in L_q(\Omega)$ обозначим $\|u\|_q = \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^q \, dx \, dt \right)^{1/q}$. Если $u \in L_q(\Omega)$, $v \in L_{q/(q-1)}(\Omega)$, то будем использовать обозначение $(u, v) =$

$\int_{\Omega} uv \, dx \, dt$. Для функций $u, v \in D(A)$:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right),$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n \left(a'_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b'_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right),$$

определим

$$\langle u, v \rangle = T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_{n0} a'_{n0} + \frac{T}{2} \sum_{\mu_{nm} \neq 0, m \in \mathbb{N}} |\mu_{nm}| (a_{nm} a'_{nm} + b_{nm} b'_{nm})$$

$$+ \frac{T}{2} \sum_{\mu_{nm} = 0} (a_{nm} a'_{nm} + b_{nm} b'_{nm}),$$

$\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Обозначим, как в [9],

$$E^+ = \overline{\text{span}} \left\{ X_n \cos\left(\frac{a}{b}mt\right), X_n \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \mid \mu_{nm} < 0 \right\},$$

$$E^- = \overline{\text{span}} \left\{ X_n \cos\left(\frac{a}{b}mt\right), X_n \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \mid \mu_{nm} > 0 \right\},$$

$$E^0 = \overline{\text{span}} \left\{ X_n \cos\left(\frac{a}{b}mt\right), X_n \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \mid \mu_{nm} = 0 \right\},$$

где замыкание берется по норме $\|\cdot\|_E$. Тогда $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и любую функцию $u \in E$ можно представить в виде $u = u^+ + u^- + u^0$, где $u^+ \in E^+$, $u^- \in E^-$, $u^0 \in E^0$.

Для любого числа $q \in [1, +\infty)$ существует положительная константа C_q такая, что согласно [9] имеем $\|u\|_q \leq C_q \|u\|_E$ для всех $u \in E$ и вложение $E \rightarrow L_q$ является вполне непрерывным. Оценка нормы вытекает из [7, лемма 3], доказательство вполне непрерывности вложения $E \rightarrow L_q$ стандартно и опирается на тот факт, что при выполнении условия (E) имеет место равенство $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |\mu_{nm}| = \infty$.

На множестве E рассмотрим функционал

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 + \int_{\Omega} (-G(x, t, u) + fu) \, dx \, dt.$$

Критические точки F являются обобщенными решениями задачи (1.1), (1.2) с соответствующим граничным условием (1.3)–(1.8).

Разобьем дальнейшее доказательство на следующие этапы:

- 1) доказательство выполнения для функционала F условия Пале–Смейла (см. [9] и § 4);
- 2) замена F на модифицированный функционал I и установление связи между F и I (см. § 5);
- 3) построение последовательности стационарных точек I (см. § 6);
- 4) оценка снизу критических значений I и доказательство существования бесконечного числа стационарных точек I (см. § 7).

§ 4. Доказательство выполнения для функционала F условия Пале–Смейла

Докажем, что функционал F удовлетворяет условию Пале–Смейла (P-S), состоящего в том, что из любой последовательности $\{u_n\} \in E$ такой, что $F(u_n) \leq M$ для всех n и $F'(u_n) \rightarrow 0$ в E^* при $n \rightarrow \infty$, можно выделить сходящуюся в E подпоследовательность. Здесь и далее F' – производная Фреше функционала F на E .

Из условия (B) вытекает существование положительных констант A_1, A_2, A_3 таких, что

$$\frac{1}{\mu}(ug(x, t, u) + A_1) \geq G(x, t, u) + A_2 \geq A_3|u|^\mu \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Возьмем произвольную последовательность $u_n = u_n^+ + u_n^- + u_n^0$, $u_n^+ \in E^+$, $u_n^- \in E^-$, $u_n^0 \in E^0$, такую, что $F(u_n) \leq M$ для всех n и $F'(u_n) \rightarrow 0$ в E^* при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $m = \sup_n \|F'(u_n)\|_{E^*}$.

Для любой функции $h \in E$ имеет место равенство

$$\langle F'(u_n), h \rangle = \langle u_n^+ - u_n^-, h \rangle - (g(x, t, u_n) - f, h). \quad (4.2)$$

Подставив $h = u_n = u_n^+ + u_n^- + u_n^0$ в (4.2), выведем

$$-\|u_n^+\|_E^2 + \|u_n^-\|_E^2 + (g(x, t, u_n), u_n) - (f, u_n) \leq m\|u_n\|_E. \quad (4.3)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|_E^2 - \frac{1}{2}\|u_n^-\|_E^2 + \int_{\Omega} (-G(x, t, u_n) + fu_n) dx dt \leq M. \quad (4.4)$$

Прибавим к (4.4) неравенство (4.3), умноженное на $\frac{1}{2}$, и в результате получим

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}g(x, t, u_n)u_n - G(x, t, u_n) \right) dx dt + (f, u_n) \leq M + \frac{1}{2}m\|u_n\|_E. \quad (4.5)$$

Поскольку $\mu > 2$, отсюда и из (4.1) выводим

$$\int_{\Omega} G(x, t, u_n) dx dt \leq C(\|u_n\|_E + 1). \quad (4.6)$$

Здесь и далее через C, D и через C, D с индексами будем обозначать различные положительные константы, не зависящие от n . Подставим $h = u_n^+ - u_n^- + u_n^0$ в (4.2) и получим

$$\|u_n^+\|_E^2 + \|u_n^-\|_E^2 \leq \|g(x, t, u_n)\|_{E^*} \|u_n\|_E + C\|u_n\|_E.$$

Обозначив $p_1 = \frac{p}{\mu-p}$ и используя условие (C), получим оценку

$$\begin{aligned} \|g(x, t, u_n)\|_{E^*} &= \sup_{\|h\|_E=1} (g(x, t, u_n), h) \leq \|g(x, t, u_n)\|_{(p_1+1)/p_1} \|h\|_{(p_1+1)} \\ &\leq C_{(p_1+1)} \left(\int_{\Omega} (C|u_n|^p + C)^{(p_1+1)/p_1} dx dt \right)^{p_1/(p_1+1)} \\ &\leq D(\|u_n\|_{\mu}^{\mu p_1/(p_1+1)} + 1) = D(\|u_n\|_{\mu}^p + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\|u_n^+\|_E^2 + \|u_n^-\|_E^2 \leq D(\|u_n\|_\mu^p + 1)\|u_n\|_E. \quad (4.7)$$

Поскольку $p > 1$, $\mu > 2$, из определения нормы $\|\cdot\|_E$ следует

$$\|u_n^0\|_E^2 = \|u_n^0\|_2^2 \leq \|u_n\|_2^2 \leq C_5\|u_n\|_E\|u_n\|_2 \leq C'\|u_n\|_E(\|u_n\|_\mu^p + 1). \quad (4.8)$$

Сложив неравенства (4.7) и (4.8), получим

$$\|u_n\|_E \leq D(\|u_n\|_\mu^p + 1). \quad (4.9)$$

Из (4.1), (4.6), (4.9) выведем $\|u_n\|_\mu^\mu \leq D_1(\|u_n\|_\mu^p + 1)$. Поскольку $\mu > p$, отсюда вытекает ограниченность последовательности $\{\|u_n\|_\mu\}$. Теперь, учитывая (4.9), получаем ограниченность последовательностей $\{\|u_n\|_E\}$, $\{\|u_n^0\|_E\}$.

Поскольку вложение $E \rightarrow L_q$ является вполне непрерывным, то, как в [9], заметим, что

$$F'(u_n) = u_n^+ - u_n^- + B(u_n), \quad (4.10)$$

где B – вполне непрерывный оператор. Отсюда и из конечномерности E^0 вытекает существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что $B(u_{n_k}) \rightarrow u_0 \in E$ и $u_{n_k}^0 \rightarrow u^0$ при $k \rightarrow +\infty$. Поскольку $F'(u_{n_k}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, из (4.10) вытекает $u_{n_k}^+ - u_{n_k}^- \rightarrow -u_0$. Следовательно, $u_0 = u_0^+ + u_0^-$, где $u_0^+ \in E_n^+$, $u_0^- \in E_n^-$, и $u_{n_k} \rightarrow -u_0^+ + u_0^- + u^0$ при $k \rightarrow +\infty$.

§ 5. Замена F на модифицированный функционал I и установление связи между F и I

Используя метод возмущения функционалов, близких к четным, из работ [8]–[10] заменим функционал F на модифицированный функционал I .

Возьмем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $\chi(\tau) = 1$ при $\tau \leq 1$, $\chi(\tau) = 0$ при $\tau \geq 2$ и $-2 \leq \chi'(\tau) \leq 0$, $0 \leq \chi(\tau) \leq 1$ при $\tau \in \mathbb{R}$. Для функции $u \in E$, как в [9], положим

$$\Phi(u) = \bar{a}\sqrt{F^2(u) + 1}, \quad H(u) = \frac{1}{\Phi(u)} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt, \quad \Psi(u) = \chi((H(u)),$$

где $\bar{a} = \frac{12}{\mu-2}$. На пространстве E определим функционал

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|_E^2 - \int_{\Omega} G(x, t, u) dx dt + \Psi(u)(f, u).$$

Сформулируем и докажем в виде лемм свойства функционала I (см. [9, предложение 1.2]).

ЛЕММА 3. *Существует положительная константа $C = C(\|f\|_{\mu/(\mu-1)})$ такая, что*

$$|I(u) - I(-u)| \leq C(|I(u)|^{1/\mu} + 1) \quad \forall u \in E. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Различные положительные константы, не зависящие от u , будем обозначать здесь и далее через C или через C с индексом. Вычислим $|I(u) - I(-u)| = (\Psi(u) + \Psi(-u))(f, u)$.

Если $u \in \text{supp } \Psi$, то

$$\int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \leq 2\bar{a}\sqrt{F^2(u) + 1} \leq 2\bar{a}(|F(u)| + 1).$$

Из (4.1) следует, что $G(x, t, u) + A_2 \geq A_3|u|^\mu$. Поэтому $\|u\|_\mu \leq C(|F(u)|^{1/\mu} + 1)$. Таким образом,

$$|(u, f)| \leq \|u\|_\mu \|f\|_{\mu/(\mu-1)} \leq C(|F(u)|^{1/\mu} + 1).$$

Поскольку $F(u) = I(u) + (1 - \Psi(u))(u, f)$, то

$$|F(u)| \leq |I(u)| + |(u, f)| \leq |I(u)| + C|F(u)|^{1/\mu} + C.$$

Так как $\frac{1}{\mu} < 1$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C > 0$ такая, что при всех $u \in E$ будем иметь неравенство $|F(u)|^{1/\mu} \leq \varepsilon|F(u)| + C$. Следовательно, существует константа $C > 0$ такая, что

$$|F(u)| \leq 2|I(u)| + C, \quad |(u, f)| \leq C(|F(u)|^{1/\mu} + 1) \leq C'(|I(u)|^{1/\mu} + 1).$$

Если $-u \in \text{supp } \Psi$, то аналогично выведем $|(u, f)| \leq C(|F(-u)|^{1/\mu} + 1)$. Поскольку $F(-u) = I(u) + (1 + \Psi(u))(u, f)$, то

$$|F(-u)| \leq |I(u)| + 2|(f, u)| \leq |I(u)| + C|F(-u)|^{1/\mu} + C.$$

Следовательно, найдется константа $C > 0$ такая, что при всех $u \in E$ будем иметь

$$|F(-u)| \leq 2|I(u)| + C \quad \text{и} \quad |(u, f)| \leq C(|F(-u)|^{1/\mu} + 1) \leq C'(|I(u)|^{1/\mu} + 1).$$

Если $u \notin \text{supp } \Psi$ и $-u \notin \text{supp } \Psi$, то $\Psi(u) = \Psi(-u) = 0$, $I(u) - I(-u) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Существует положительная константа $M_0 = M_0(\|f\|_{\mu/(\mu-1)})$ такая, что если $I(u) \geq M_0$ и $\|I'(u)\|_{E^*} \leq 1$, то $I(u) = F(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя работе [9], покажем сначала, что существует положительная константа $M_1 = M_1(\|f\|_{\mu/(\mu-1)})$ такая, что если $I(u) \geq M_1$ и $u \in \text{supp } \Psi$, то $F(u) \geq \frac{1}{3}I(u)$.

Пусть $u \in \text{supp } \Psi$. Из оценок, полученных выше, выведем

$$F(u) = I(u) + (1 - \Psi(u))(u, f) \geq I(u) - C(|F(u)|^{1/\mu} + 1).$$

Обозначим через $\bar{C}$ такую положительную константу, что

$$|F(u)|^{1/\mu} \leq \frac{1}{2\bar{C}}|F(u)| + \bar{C}$$

при всех $u \in E$. Тогда

$$F(u) + \frac{1}{2}|F(u)| + C + C\bar{C} \geq I(u).$$

Пусть $M_1 = 2(C + C\bar{C})$. Тогда при $I(u) \geq M_1$ будем иметь

$$\begin{aligned} F(u) + \frac{1}{2}|F(u)| &\geq C + C\bar{C}, \quad F(u) > 0, \\ F(u) &\geq \frac{2}{3}I(u) - \frac{2}{3}(C + C\bar{C}) = \frac{1}{3}I(u) + \frac{1}{3}(I(u) - M_1) \geq \frac{1}{3}I(u). \end{aligned}$$

Воспользуемся представлением I' из работы [9]:

$$\begin{aligned} \langle I'(u), h \rangle &= \langle u^+ - u^-, h \rangle (1 + T_1(u)) - (g(x, t, u), h) (1 + T_2(u)) \\ &\quad + (f, h) (\Psi(u) + T_1(u)), \quad h \in E. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1(u) &= -\bar{a}^2 \chi(H(u)) \frac{F(u)}{\Phi^3(u)} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \cdot (f, u), \\ T_2(u) &= -T_1(u) + \frac{\chi'(H(u))}{\Phi(u)} (f, u). \end{aligned}$$

Покажем, что [9, лемма A.3]

$$\lim_{M_2 \rightarrow +\infty} \max \{ |T_1(u)|, |T_2(u)| \mid u \in E, I(u) \geq M_2 \} = 0. \quad (5.3)$$

Если $u \notin \text{supp } \Psi$, то $\chi'(H(u)) = 0$ и $T_1 = T_2 = 0$. Если $u \in \text{supp } \Psi$, то $\int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \leq 2\Phi(u)$. Поэтому

$$|T_1(u)| \leq C \frac{|(f, u)|}{\Phi(u)}.$$

По доказанному выше при $u \in \text{supp } \Psi$ имеет место соотношение

$$|(f, u)| \leq C(|F(u)|^{1/\mu} + 1) \leq C(\Phi(u)^{1/\mu} + 1) \leq C_1 \Phi(u)^{1/\mu}, \quad \Phi(u) \geq \bar{a}.$$

Следовательно,

$$T_1(u) < CC_1 \frac{1}{(\Phi(u))^{(\mu-1)/\mu}}.$$

Пусть $u \in \text{supp } \Psi$, $M_2 \geq M_1$ и $I(u) \geq M_2$. Тогда

$$\Phi(u) \geq \bar{a}|F(u)| = aF(u) \geq \frac{1}{3}\bar{a}I(u) \geq \frac{1}{3}\bar{a}M_2, \quad |T_1(u)| \leq C \frac{1}{M_2^{(\mu-1)/\mu}} \rightarrow 0$$

при $M_2 \rightarrow \infty$,

$$|T_2(u)| \leq |T_1(u)| + \frac{|\chi'(H(u))|}{\Phi(u)} |(f, u)| \leq C \frac{1}{M_2^{(\mu-1)/\mu}} + 2 \frac{|(f, u)|}{\Phi(u)} \leq C_2 \frac{1}{M_2^{(\mu-1)/\mu}} \rightarrow 0$$

при $M_2 \rightarrow \infty$. Равенство (5.3) доказано.

Если $\|I'(u)\|_{E^*} \leq 1$, то $|\langle I'(u), u \rangle| \leq \|I'(u)\|_{E^*} \|u\|_E \leq \|u\|_E$. Выберем такое $M_2 > 0$, что при $I(u) > M_2$ выполняются неравенства (см. [9])

$$|T_1(u)| < \frac{1}{2}, \quad |T_2(u)| < 1, \quad \frac{\mu}{2} \frac{1 + T_2(u)}{1 + T_1(u)} - 1 > \frac{\mu - 2}{4} \equiv \bar{b}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u) - \frac{1}{2(1 + T_1(u))} \langle I'(u), u \rangle + \frac{1}{2(1 + T_1(u))} \langle I'(u), u \rangle \\ &= - \int_{\Omega} G(x, t, u) dx dt + \frac{1 + T_2(u)}{2(1 + T_1(u))} \int_{\Omega} (ug(x, t, u) + A_1) dx dt \\ &\quad - A_1 T \pi \frac{1 + T_2(u)}{2(1 + T_1(u))} + (f, u) \left(1 - \frac{\Psi(u) + T_1(u)}{2(1 + T_1(u))} \right) + \frac{1}{2(1 + T_1(u))} \langle I'(u), u \rangle \\ &\geq - \int_{\Omega} G(x, t, u) dx dt \\ &\quad + \frac{1 + T_2(u)}{2(1 + T_1(u))} \mu \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt - 4A_1 T \pi - 3|(f, u)| - \|u\|_E \\ &\geq \bar{b} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt - C(\|u\|_E + 1). \end{aligned}$$

Подставим $h = u^+ - u^-$ в выражение производной (5.2):

$$\begin{aligned} (1 + T_1(u)) (\|u^+\|_E^2 + \|u^-\|_E^2) &= \langle I'(u), u^+ - u^- \rangle \\ &\quad + (1 + T_2(u)) (g(x, t, u), u^+ - u^-) + (f, u^+ - u^-) (\Psi(u) + T_1(u)). \end{aligned}$$

Тогда для $h = u^+ - u^-$ при $I(u) > M_2$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|h\|_E^2 &\leq \|I'(u)\|_{E^*} \|h\|_E + 2\|g(x, t, u)\|_{E^*} \|h\|_E + C\|h\|_E \\ &\leq \|h\|_E (2\|g(x, t, u)\|_{E^*} + C + 1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

При $\alpha \in (0, \mu - p)$ выведем

$$\begin{aligned} \|g(x, t, u)\|_{E^*} &= \sup_{\|v\|_E=1} (g(x, t, u), v) \leq \sup_{\|v\|_E=1} \|g(x, t, u)\|_{(p+\alpha)/p} \|v\|_{(p+\alpha)/\alpha} \\ &\leq C_{(p+\alpha)/\alpha} \|g(x, t, u)\|_{(p+\alpha)/p} \leq C(\|u\|_{p+\alpha}^p + 1) \leq C'(\|u\|_{\mu}^p + 1). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из (5.4), (5.5) и (4.1) получим

$$\|h\|_E \leq C(\|u\|_{\mu}^p + 1) \leq C \left(\left(\frac{1}{A_3} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \right)^{p/\mu} + 1 \right).$$

Кроме того, имеем

$$\|u^0\|_E^2 = \|u^0\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 \leq C\|u\|_{\mu}^2 \leq C \left(\frac{1}{A_3} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \right)^{2/\mu}.$$

Из полученных оценок при $I(u) > M_2$ выведем

$$\|u\|_E \leq C \left(\left(\frac{1}{A_3} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \right)^{p/\mu} + 1 \right) \quad (5.6)$$

и

$$F(u) \geq \bar{b} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt - D \left(\int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \right)^{p/\mu} - D.$$

Поскольку $\frac{p}{\mu} < 1$, то $F(u) \geq \frac{b}{2} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt - D_0$. Положительные константы $\bar{D}$, D_0 не зависят от u .

Легко видеть, что если $I(u) \rightarrow +\infty$, то $\|u\|_E \rightarrow \infty$. Тогда из (5.6) вытекает $\int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \rightarrow +\infty$. Следовательно, найдется $M_0 > M_2$ такое, что если $I(u) > M_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\bar{b}}{6} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt - D_0 &> 0, \\ F(u) &\geq \frac{\bar{b}}{3} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt = \frac{1}{\bar{a}} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(u)} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt &\leq \frac{1}{\bar{a}F(u)} \int_{\Omega} (G(x, t, u) + A_2) dx dt \leq 1, \\ \Psi(u) &= 1, \quad I(u) = F(u). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функционал $I(u)$ удовлетворяет условию Пале-Смейла на множестве $\{u \in E \mid I(u) \geq M_0\}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $u \in E$ удовлетворяет условиям $I(u) \geq M_0$, $I'(u) = 0$, то $I(u) = F(u)$ и $F'(u) = 0$.*

§ 6. Построение последовательности стационарных точек I

Построение неограниченной последовательности стационарных точек функционала I опирается на метод работы [9]. Занумеруем множество $\{\mu_{nm} \mid \mu_{nm} < 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$ отрицательных собственных значений оператора A в порядке невозрастания: $0 > -\mu_1 \geq -\mu_2 \geq -\mu_3 \geq \dots$. Каждое собственное значение $-\mu_i$ ($\mu_i > 0$) в последовательности повторяется столько раз, какова кратность $-\mu_i$. Обозначим через e_i нормированный в E ($\|e_i\|_E = 1$) собственный вектор A , соответствующий собственному значению $-\mu_i$. Подпространство E^+ является замыканием по норме $\|\cdot\|_E$ множества конечных линейных комбинаций множества $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим через $E_n^+ = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$.

Если $u \in E_n^+$, то имеет место неравенство

$$\|u\|_E \leq \sqrt{\mu_n} \|u\|_2. \quad (6.1)$$

Для любой функции $u = u^+ + u^- + u^0 \in E_n^+ \oplus E^- \oplus E^0$, $u^+ \in E_n^+$, $u^- \in E^-$, $u^0 \in E^0$, используя неравенства (4.1), (6.1), оценим

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - \int_{\Omega} G(x, t, u) dx dt + \Psi(u)(f, u) \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C(\|u\|_{\mu}^{\mu} - 1) + C\|u\|_{\mu} \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_5(\|u\|_{\mu}^{\mu} - 1) \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_6\|u\|_2^{\mu} + C_5 \\
 &= \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_7(\|u^+\|_2^2 + \|u^-\|_2^2 + \|u^0\|_2^2)^{\mu/2} + C_5 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_6(\|u^+\|_2^{\mu} + \|u^0\|_2^{\mu}) + C_5 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - C_6 \frac{1}{\mu_n^{\mu/2}} \|u^+\|_E^{\mu} - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_7 \|u^0\|_E^{\mu} + C_5.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\mu > 2$, отсюда вытекает существование $R_n > 0$ такого, что

$$I(u) \leq 0 \quad \forall u \in E_n^+ \oplus E^- \oplus E^0, \quad \|u\|_E \geq R_n. \quad (6.2)$$

Выберем последовательность $\{R_n\}$ таким образом, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $R_n < R_{n+1}$.

Обозначим (см. [9])

$$B_R = \{u \in E \mid \|u\|_E \leq R\}, \quad D_n = B_{R_n} \cap (E_n^+ \oplus E^- \oplus E^0),$$

$\Gamma_n = \{\gamma \in C(D_n, E) \mid \gamma \text{ удовлетворяет условиям } (\gamma_1) - (\gamma_3)\}$:

(γ_1) $\gamma(-u) = -\gamma(u)$ для любого $u \in D_n$;

(γ_2) $\gamma(u) = u$ для любого $u \in \partial D_n$;

(γ_3) $\gamma(u) = \alpha(u)u + k(u)$ для $u \in D_n$, где $\alpha \in C(D_n, [1, \bar{\alpha}])$ – четный функционал ($\bar{\alpha} \geq 1$ зависит от γ) и k – вполне непрерывный оператор такие, что $\alpha(u) = 1$ и $k(u) = 0$ на ∂D_n .

Обозначим также

$$U_n = D_{n+1} \cap \{u \in E \mid \langle u, e_{n+1} \rangle \geq 0\},$$

$\Lambda_n = \{\lambda \in C(U_n, E) \mid \lambda \text{ удовлетворяет условиям } (\lambda_1) - (\lambda_3)\}$:

(λ_1) $\lambda|_{D_n} \in \Gamma_n$;

(λ_2) $\lambda(u) = u$ на $\partial U_n \setminus D_n$;

(λ_3) $\lambda(u) = \tilde{\alpha}(u)u + \tilde{k}(u)$ для $u \in U_n$, где $\tilde{\alpha} \in C(D_n, [1, \bar{\alpha}])$ ($\bar{\alpha} \geq 1$ зависит от λ) и $\tilde{k}$ – вполне непрерывный оператор, причем $\tilde{\alpha}(u)$ четно на D_n и $\tilde{\alpha}(u) = 1$, $\tilde{k}(u) = 0$ на $\partial U_n \setminus D_n$.

В соответствии с работами [8]–[10] определим минимаксные последовательности

$$b_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \sup_{u \in D_n} I(\gamma(u)), \quad c_n = \inf_{\lambda \in \Lambda_n} \sup_{u \in U_n} I(\lambda(u)).$$

Для положительного числа $d > 0$ определим также множество

$$\Lambda_n(d) = \{\lambda \in \Lambda_n \mid I(\lambda(u)) \leq b_n + d \quad \forall u \in D_n\}.$$

В ходе доказательства леммы 4 получено соотношение $I'(u) = (u^+ - u^-)(1 + T_1(u)) + \bar{K}(u)$, где $\bar{K}$ – вполне непрерывный оператор (вложение $E \rightarrow L_q$ при $q > 1$ вполне непрерывно) и $|T_1(u)| \leq \frac{1}{2}$, если $I(u) \geq M_0$. Из этого представления вытекает справедливость для оператора I деформационной леммы 2.1 из [9]. Опираясь на нее, как в [8, лемма 1.57], можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 5. *Если $c_n > b_n > M_0$ и $d \in (0, c_n - b_n)$, то*

$$c_n(d) = \inf_{\lambda \in \Lambda_n(d)} \sup_{u \in \bar{U}_n} I(\lambda(u)) \geq c_n$$

является критическим значением оператора I .

Таким образом, для доказательства существования счетного числа критических точек достаточно проверить, что условие $c_k = b_k$ не может выполняться для всех достаточно больших k .

ЛЕММА 6. *Если существует $K_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $c_k = b_k$ при $k \geq K_1$, то для некоторой положительной константы $\gamma = \gamma(K_1)$ при всех k выполняется неравенство*

$$b_k \leq \gamma k^{\mu/(\mu-1)}. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на лемму 3 и повторяет доказательство леммы 1.64 из работы [8].

§ 7. Оценка снизу критических значений I и доказательство существования бесконечного числа стационарных точек I

Доказательство нижней оценки для b_k , противоречащей (6.3), проводится по плану из работы [9]. Для произвольной функции $u = u^+ + u^- + u^0 \in E^+ \oplus E^- \oplus E^0$ с помощью (4.1) оценим значения I снизу:

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - C_0 \|u\|_\mu^\mu - C_0 \\ &\geq \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - B_0 \|u^+\|_\mu^\mu - \frac{1}{2} \|u^-\|_E^2 - B_0 \|u^-\|_\mu^\mu - B_0 \|u^0\|_\mu^\mu - C_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Константы C_0, B_0 не зависят от n, u . Для функции $u^+ \in E^+$ обозначим

$$K(u^+) = \frac{1}{2} \|u^+\|_E^2 - B_0 \|u^+\|_\mu^\mu.$$

Функционал $K \in C^2(E^+, \mathbb{R})$ и его значения в критических точках используются для оценки снизу для b_k . Этот функционал имеет такой же вид, как соответствующий функционал для волнового уравнения из [9, § 3]. Функционал K и аналогичный ему функционал из [9] можно представить в виде

$$K(u^+) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i| u_i^2 - B_0 \|u^+\|_\mu^\mu, \quad u^+ \in E^+, \quad u_i = \left(u^+, \frac{e_i}{\|e_i\|_2}\right), \quad i \in \mathbb{N}.$$

При этом стандартно доказывается, что, как и в [9], имеет место оценка $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2} < \infty$. Поэтому далее в нашей работе мы можем использовать соответствующие свойства K , полученные в [9]. Из последней оценки (7.1) вытекает неравенство

$$I(u^+) \geq K(u^+) - C_0 \quad \forall u^+ \in E^+. \quad (7.2)$$

Аналогично, как и для оператора I , доказывается, что $K|_{E^+}$ удовлетворяет условию Пале–Смейла. Определим величины

$$\beta_{m,n} = \sup_{\sigma \in A_n^m} \min_{x \in S^{m-n}} K(\sigma(x)).$$

Здесь $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, S^k – единичная сфера в $\mathbb{R}^{k+1}$ и

$$A_n^m = \{\sigma \in C(S^{m-n}, E_m^+) \mid \sigma(-x) = \sigma(x) \forall x \in S^{m-n}\}.$$

Для чисел $\beta_{m,n}$ справедливы следующие свойства (см. [9, утверждение 3.1]):

$$0 \leq \beta_{m,n} \leq \beta_{m,n+1} < \infty, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m > n + 1. \quad (7.3)$$

Существуют последовательности $\{v(n)\}$, $\{\tilde{v}(n)\}$ такие, что

$$0 \leq v(n) \leq \beta_{m,n} \leq \tilde{v}(n), \quad m > n, \quad (7.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = +\infty. \quad (7.5)$$

Из (7.4) вытекает существование последовательности $\{m_j\}$, $m_j \in \mathbb{N}$, такой, что $\lim_{j \rightarrow \infty} m_j = +\infty$ и $\beta_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_{m_j, n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно [9, утверждение 3.2] числа β_n являются критическими значениями функционала K . Из (7.3), (7.4) следует, что последовательность $\{\beta_n\}$ не убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$.

ЛЕММА 7 [9, утверждение 3.3]. *При всех натуральных n имеет место неравенство*

$$b_n + C_0 \geq \beta_n. \quad (7.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $P_m: E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0 \rightarrow E_m^+ \oplus E^- \oplus E^0$ ортогональный в E проектор. Возьмем произвольные $\gamma \in \Gamma_n$, $\sigma \in A_n^m$. Обозначим

$$\tilde{\gamma}(u) = \begin{cases} \gamma(u), & \|u\|_E \leq R_n, \\ u, & \|u\|_E \geq R_n. \end{cases}$$

Из [9, лемма 3.2] следует существование $x_0 \in S^{m-n}$ и $u_0 \in E_n^+ \oplus E^- \oplus E^0$ таких, что $P_m \tilde{\gamma}(u_0) = \sigma(x_0)$. Следовательно,

$$\min_{x \in S^{m-n}} I(\sigma(x)) \leq I(\sigma(x_0)) = I(P_m \tilde{\gamma}(u_0)) \leq \sup_{u \in E^n} I(P_m \tilde{\gamma}(u)).$$

Если $u \in E_n$ и $\|u\|_E \geq R_n$, то $\tilde{\gamma}(u) = u$ и из (6.2) получим $I(P_m \tilde{\gamma}(u)) = I(P_m u) = I(u) \leq 0$. Поскольку $P_m \gamma$ – нечетное отображение и $0 \in D_n$, то $I(P_m \tilde{\gamma}(0)) = I(0) = 0$ и $\sup_{u \in E^n} I(P_m \tilde{\gamma}(u)) = \sup_{u \in D^n} I(P_m \gamma(u))$. Отсюда и из (6.2) выводим оценку

$$\min_{x \in S^{m-n}} K(\sigma(x)) - C_0 \leq \sup_{u \in D^n} I(P_m \gamma(u)).$$

Следовательно,

$$\sup_{\sigma \in A_{\Gamma^n}^m} \min_{x \in S^{m-n}} K(\sigma(x)) - C_0 \leq \inf_{\gamma \in \Gamma^n} \sup_{u \in D^n} I(P_m \gamma(u)).$$

Обозначим $b_{m,n} = \inf_{\gamma \in \Gamma^n} \sup_{u \in D^n} I(P_m \gamma(u))$. Тогда $\beta_n - C_0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} b_{m_j,n}$. Отсюда и из [9, лемма 3.3] следует неравенство (7.6). Лемма доказана.

Для оценки снизу чисел последовательности $\{\beta_n\}$, как в [9], используем

$$\text{index } K''(u) = \max\{\dim H \mid H - \text{подпространство из } E^+ \text{ такое, что} \\ \langle K''(u)h, h \rangle \leq 0 \ \forall h \in H\}.$$

Функционал $K|_{E_m^+}$ удовлетворяет условиям утверждения 2.3 из работы [10], откуда следует, что $K|_{E_m^+}$ можно приблизить функционалами, имеющими конечное число критических точек. Обозначим через $Z(K|_{E_m^+})$ множество критических точек функционала $K|_{E_m^+}$. В [9] показано, что все критические значения функционала $K|_{E_m^+}$ являются неотрицательными и $K(u) < 0$, если $u \in E_m^+$ и норма $\|u\|_E$ достаточно большая. Кроме того, $K|_{E_m^+} \in C^2(E_m^+, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию Пале–Смейла. Из [10, утверждение 2.3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varphi_\varepsilon \in C^2(E_m^+, \mathbb{R})$ такое, что φ_ε имеет конечное число критических точек и

$$|\varphi_\varepsilon(u) - K(u)| \leq \varepsilon, \quad \|\varphi'_\varepsilon(u) - (K|_{E_m^+})'(u)\| \leq \varepsilon, \\ \|\varphi''_\varepsilon(u) - (K|_{E_m^+})''(u)\| \leq \varepsilon \quad \forall u \in E_m^+. \quad (7.7)$$

При $\varepsilon > 0$, $m > 0$ обозначим $\beta_{m,n}(\varepsilon) = \sup_{\sigma \in A_{\Gamma^n}^m} \min_{x \in S^{m-n}} \varphi_\varepsilon(\sigma(x))$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$, существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\beta_{n_k} < \beta_{n_k+1} \quad \forall k. \quad (7.8)$$

Обозначим $\rho_{kj} = \beta_{m_j, n_k+1} - \beta_{m_j, n_k} > 0$. Возьмем убывающую последовательность $\{\delta_l\}$ такую, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \delta_l = 0$ и $\delta_1 = \frac{1}{5}\rho_{kj}$. Пусть $b_{\delta_l} = \beta_{m_j, n_k} + 3\delta_l$. Из (7.8) следует

$$\beta_{m,n} - \varepsilon \leq \beta_{m,n}(\varepsilon) \leq \beta_{m,n} + \varepsilon, \quad \beta_{m_j, n_k}(\delta_l) \leq b_{\delta_l} - 2\delta_l < b_{\delta_l} < \beta_{m_j, n_k+1}(\delta_l).$$

Возьмем $a_{\delta_l} \in (b_{\delta_l}, b_{\delta_l} + \delta_l)$, не являющееся критическим значением φ_{δ_l} . Тогда

$$\beta_{m_j, n_k}(\delta_l) < a_{\delta_l} - 2\delta_l < a_{\delta_l} < \beta_{m_j, n_k+1}(\delta_l) \quad (7.9)$$

и $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{\delta_l} = \beta_{m_j, n_k}$. Обозначим $[\varphi_\varepsilon \geq a]_m = \{u \in E_m^+ \mid \varphi_\varepsilon(u) \geq a\}$. Из (7.9) и [9, лемма 4.1] следует существование $p \in [\varphi_{\delta_l} \geq a_{\delta_l}]_{m_j}$ такого, что абсолютная $(m_j - n_k - 1)$ -мерная гомотопическая группа $\pi_{(m_j - n_k - 1)}([\varphi_{\delta_l} \geq a_{\delta_l}]_{m_j}, p)$ не является тривиальной [11]:

$$\pi_{(m_j - n_k - 1)}([\varphi_{\delta_l} \geq a_{\delta_l}]_{m_j}, p) \neq 0. \quad (7.10)$$

Обозначим $L = \max\{\text{index } \varphi''_{\delta_l}(x) \mid \varphi_{\delta_l}(x) \leq a_{\delta_l}, \varphi'_{\delta_l}(x) = 0\}$. Из [9, лемма 4.2] вытекает соотношение

$$\pi_l([\varphi_{\delta_l} \geq a_{\delta_l}]_{m_j}, p) = 0 \quad \forall p \in [\varphi_{\delta_l} \geq a_{\delta_l}]_{m_j}, \quad (7.11)$$

если

$$l \leq m_j - L - 2. \quad (7.12)$$

Сравнивая (7.10)–(7.12), получим $m_j - n_k - 1 > m_j - L - 2$, $L \geq n_k$. Поэтому существует последовательность $\{u_l\} \in E_{m_j}^+$ такая, что

$$\varphi_{\delta_l}(u_l) \leq a_{\delta_l}, \quad (7.13)$$

$$\varphi'_{\delta_l}(u_l) = 0, \quad (7.14)$$

$$\varphi''_{\delta_l}(u_l) \geq n_k. \quad (7.15)$$

Из соотношений (7.6), (7.13), (7.14) вытекает ограниченность сверху последовательности $\{K(u_l)\}$ и то, что $\lim_{l \rightarrow \infty} K'(u_l) = 0$. Поскольку функционал $K|_{E_{m_j}^+}$ удовлетворяет условию Пале–Смейла, последовательность $\{u_l\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, которую обозначим также через $\{u_l\}$, такую, что $u_l \rightarrow u_{m_j, n_k}$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда из непрерывности K , K' , K'' и из соотношений (7.7), (7.9), (7.13)–(7.15) выведем

$$K(u_{m_j, n_k}) \leq \beta_{m_j, n_k}, \quad (7.16)$$

$$(K|_{E_{m_j}^+})'(u_{m_j, n_k}) = 0, \quad (7.17)$$

$$\text{index}(K|_{E_{m_j}^+})''(u_{m_j, n_k}) \geq n_k. \quad (7.18)$$

Стандартно доказывается модифицированное условие Пале–Смейла, состоящее в том, что из любой последовательности $\{u_m\} \subset E^+$ такой, что $u_m \in E_m^+$, $K(u_m) \leq C$ и $\|(K|_{E_m^+})'(u_m)\|_{(E_m^+)^*} \rightarrow 0$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поэтому из (7.16), (7.17) и [9, лемма 3.3] следует, что при фиксированном n_k существует подпоследовательность, которую также обозначим через $\{u_{m_j, n_k}\}$, такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{m_j, n_k} = u_{n_k}$. Отсюда и из соотношений (7.16), (7.17) следует

$$K(u_{n_k}) \leq \beta_{n_k}, \quad (7.19)$$

$$K'(u_{n_k}) = 0. \quad (7.20)$$

Докажем, что

$$\text{index } K''(u_{n_k}) \geq n_k. \quad (7.21)$$

Используем, как в [9], представление

$$\begin{aligned} \text{index } K''(u) &= \max\{\dim H \mid H - \text{подпространство из } E^+ \text{ такое, что} \\ &\quad \langle K''(u)h, h \rangle \leq 0 \ \forall h \in H\}. \end{aligned}$$

Поскольку $K \in C^2(E_m^+, \mathbb{R})$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется j_0 такое, что при всех $j \geq j_0$ будут выполняться неравенства

$$\|K''(u_{m_j, n_k}) - K''(u_{n_k})\| \leq \varepsilon, \quad \langle (K''(u_{n_k}) - \varepsilon)h, h \rangle \leq \langle K''(u_{m_j, n_k})h, h \rangle$$

при всех $h \in E^+$. Следовательно,

$$\text{index}(K''(u_{n_k}) - \varepsilon) \geq \text{index } K''(u_{m_j, n_k}). \quad (7.22)$$

Заметим, что $K''(u_{n_k}) = I + P$, где I – тождественный оператор, а $P: E \rightarrow L(E, L(E, R))$ такой, что $\langle Ph_1, h_2 \rangle = -B_0\mu(\mu - 1)(|u_{n_k}|^{\mu-2}h_1, h_2)$, $h_1, h_2 \in E$. Таким образом, P является вполне непрерывным самосопряженным оператором. Следовательно, 0 не является предельной точкой множества собственных значений оператора $K''(u_{n_k})$, и найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в интервале $(0, \varepsilon_0)$ не существует собственных значений оператора $K''(u_{n_k})$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$\text{index}(K''(u_{n_k}) - \varepsilon) = \text{index } K''(u_{n_k}). \quad (7.23)$$

Кроме того, поскольку $E_m^+ \subset E^+$, имеем

$$\text{index } K''(u_{m_j, n_k}) \geq \text{index}(K|_{E_m^+})''(u_{m_j, n_k}). \quad (7.24)$$

Из соотношений (7.18), (7.22)–(7.24) следует неравенство (7.21).

Далее получим оценку сверху для $\text{index } K''(u_{n_k})$. При этом будем опираться на метод К. Танаки из [9].

Для функции

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \in L_2(\Omega) \quad (7.25)$$

положим

$$Du = \sum_{\mu_{nm} < 0} \frac{1}{\sqrt{|\mu_{nm}|}} X_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right).$$

Обозначим через L_2^+ замыкание в $L_2(\Omega)$ множества конечных линейных комбинаций собственных функций оператора A с отрицательными собственными значениями. Оператор $D: L_2^+ \rightarrow E^+$ является изометрией. Положив $h = Dv$, $v \in L_2(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \text{index } K''(u) &= \max\{\dim H \mid H \in L_2(\Omega): \\ &B_0\mu(\mu - 1)(D^*(|u|^{\mu-2})Dv, v) \geq \|v\|_2^2 \ \forall v \in H\} = S, \end{aligned}$$

где S – число собственных значений оператора $D^*(B_0\mu(\mu - 1)|u|^{\mu-2})D$, не меньших 1.

Чтобы оценить S , используется теория сингулярных чисел [12]. Для этого представим оператор $D^*(B_0\mu(\mu - 1)|u|^{\mu-2})D$ в следующем виде [9]:

$$D^*(B_0\mu(\mu - 1)|u|^{\mu-2})D = T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}^* T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, t) &= \sqrt{B_0\mu(\mu - 1)}|u|^{(\mu-2)/2}, \quad \tilde{\theta} = \{\tilde{\theta}_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}, \\ \tilde{\theta}_{nm} &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\mu_{nm}|}}, & \mu_{nm} < 0, \\ 0, & \mu_{nm} \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

а оператор $T_{V\theta}$ определен формулой

$$T_{V\theta}u = V(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_{nm} \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right),$$

в которой функция u задана формулой (7.24), V – функция на Ω и $\theta = \{\theta_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+\}$ – последовательность.

Поскольку $|\mu_{nm}| \rightarrow \infty$ при $n, m \rightarrow +\infty$, оператор $D: L_2 \rightarrow L_2$ вполне непрерывен, следовательно, и оператор $T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}$ вполне непрерывен. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ множество собственных значений положительного вполне непрерывного оператора $T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}^* T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}$. Тогда для любого $\alpha \in [1, +\infty)$ имеем

$$S \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha}. \quad (7.26)$$

Обозначим

$$l_q = \left\{ \theta = \{\theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+} \mid \|\theta\|_{l_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\theta_{nm}|^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

для $q \geq 2$ и

$$l_{\infty} = \left\{ \theta = \{\theta_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+} \mid \|\theta\|_{l_{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+} |\theta_{nm}| < \infty \right\}$$

для $q = \infty$.

Для произвольного линейного вполне непрерывного оператора $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ обозначим через $s_n(A)$ сингулярные числа A , занумерованные в порядке невозрастания [12, с. 91]. Обозначим через I_q , $q \geq 1$, множество вполне непрерывных операторов $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которых

$$\|A\|_{I_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (s_n(A))^q \right)^{1/q} < \infty,$$

и через I_{∞} множество ограниченных линейных операторов $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$.

ЛЕММА 8 [9, утверждение 5.2]. *Для $q \in [2, \infty]$, любой функции $V \in L_q(\Omega)$ и $\theta \in l_q$ имеем $T_{V\theta} \in I_q$ и существует не зависящая от V, θ положительная константа B_q такая, что*

$$\|T_{V\theta}\|_{I_q} \leq B_q \|V\|_q \|\theta\|_{l_q} \quad \forall V, \theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку (2.21) является ортонормированной системой, то при $q = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \|T_{V\theta}\|_{I_2}^2 &= \sum_{n, m \in \mathbb{N}} \frac{2}{T} \left(\left\| T_{V\theta} \left(X_n(x) \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \right\|_2^2 + \left\| T_{V\theta} \left(X_n(x) \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right) \right\|_2^2 \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \|T_{V\theta}(X_n(x))\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \left(\left\| V(x,t) \theta_{nm} X_n(x) \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) \right\|_2^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| V(x,t) \theta_{nm} X_n(x) \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right\|_2^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \|V \theta_{n0} X_n(x)\|_2^2 \\
&\leq \frac{2}{T} C_0^2 \sum_{n,m \in \mathbb{N}} |\theta_{nm}|^2 \|V\|_2^2 + \frac{1}{T} C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\theta_{n0}|^2 \|V\|_2^2 \leq \frac{2}{T} C_0^2 \|\theta\|_{l_2}^2 \|V\|_2^2.
\end{aligned}$$

При $q = \infty$ для любой функции $u \in L_2(\Omega)$, представленной по формуле (7.25), имеем

$$\begin{aligned}
\|T_{V\theta} u\|_2 &= \left\| V(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_{nm} X_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right) \right\|_2 \\
&\leq \|V\|_{\infty} \|\theta\|_{l_{\infty}} \|u\|_2.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T_{V\theta}\|_{I_{\infty}} \leq \|V\|_{\infty} \|\theta\|_{l_{\infty}}$. Далее доказательство опирается на теорию полилинейной интерполяции [13] и повторяет доказательство утверждения 5.2 из [9]. Лемма доказана.

При $q > 2$ из (7.26) выведем

$$\begin{aligned}
S &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{q/2} = \|T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}^* T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}\|_{q/2}^{q/2} = \|T_{\tilde{V}\tilde{\theta}}\|_q^q \\
&\leq B_q \|\tilde{V}\|_q \|\tilde{\theta}\|_{l_q} \leq C \| |u|^{(\mu-2)/2} \|_q^q = C \|u\|_{(\mu-2)q/2}^{(\mu-2)q/2}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Сходимость ряда $\sum_{\mu_{nm} \neq 0} \frac{1}{|\mu_{nm}|^{q/2}}$ доказывается стандартно. Из (7.21), (7.27) выведем

$$C \|u_{n_k}\|_{(\mu-2)q/2}^{(\mu-2)q/2} \geq n_k. \tag{7.28}$$

Пусть $q = 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \frac{4}{\mu-2})$. Тогда из (7.28) следует оценка

$$\|u_{n_k}\|_{\mu}^{\mu} \geq C'(n_k)^{\frac{2\mu}{(\mu-2)(2+\varepsilon)}}.$$

Из (7.20) получим соотношение $0 = \langle K'(u_{n_k}), u_{n_k} \rangle = \|u_{n_k}\|_E^2 - \mu B_0 \|u_{n_k}\|_{\mu}^{\mu}$. Отсюда, из (7.19) и леммы 7 выведем

$$b_{n_k} \geq \beta_{n_k} - C_0 \geq K(u_{n_k}) - C_0 = \frac{1}{2} B_0 (\mu - 2) \|u_{n_k}\|_{\mu}^{\mu} - C_0 \geq C''(n_k)^{\frac{2\mu}{(\mu-2)(2+\varepsilon)}} - C_0$$

при всех k . Сравнив данное неравенство и (6.3), получим

$$\frac{\mu}{\mu - 1} \geq \frac{2\mu}{(\mu - 2)(2 + \varepsilon)},$$

что неверно при малом ε . Из полученного противоречия вытекает существование подпоследовательности n_j такой, что $c_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} b_{n_j} = +\infty$. Отсюда и из леммы 5 следует существование бесконечного

числа критических точек u_{n_j} функционала I таких, что $I(u_{n_j}) = c_{n_j}(d) \geq c_{n_j}$. Поскольку u_{n_j} – критическая точка функционала I , имеем

$$\langle I'(u_{n_j}), u_{n_j} \rangle = \|u_{n_j}^+\|_E^2 - \|u_{n_j}^-\|_E^2 - (g(x, t, u_{n_j}) - f, u_{n_j}) = 0.$$

Отсюда и из (4.1) следует

$$\begin{aligned} I(u_{n_j}) &= \frac{1}{2}(g(x, t, u_{n_j}) - f, u_{n_j}) - \int_{\Omega} G(x, t, u_{n_j}) dx dt + (f, u_{n_j}) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(x, t, u_{n_j}) u_{n_j} dx dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_j}) + A_2 \pi T \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g(x, t, u_{n_j})| |u_{n_j}| dx dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_j}) + A_2 \pi T \\ &\leq \frac{1}{2} C_3 \|u_{n_j}\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{2} C_4 \int_{\Omega} |u_{n_j}| dx dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_j}) + A_2 \pi T. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\|_{p+1} = +\infty$. Включение $u_{n_j} \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ для граничных условий (1.3)–(1.7) является следствием лемм 1, 2. Теорема доказана.

Список литературы

1. В. М. Бабич, Н. С. Григорьева, *Ортогональные разложения и метод Фурье*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1983, 240 с.
2. В. П. Пикунин, С. И. Похожаев, *Практический курс по уравнениям математической физики*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2004, 208 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. P. Pikulin, S. I. Pohozaev, *Equations in mathematical physics. A practical course*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, viii+207 pp.
3. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.; пер. с нем.: L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Zweite, durchgesehene Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1963, xiv+500 pp.
4. E. Feireisl, “Time periodic solutions to a semilinear beam equation”, *Nonlinear Anal.*, **12**:3 (1988), 279–290.
5. K. C. Chang, L. Sanchez, “Nontrivial periodic solutions of a nonlinear beam equation”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **4**:1 (1982), 194–205.
6. И. А. Рудаков, “Нелинейные уравнения, удовлетворяющие условию нерезонансности”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 226–248; англ. пер.: I. A. Rudakov, “Nonlinear equations satisfying the nonresonance condition”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **135**:1 (2006), 2749–2763.
7. И. А. Рудаков, “Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **48**:6 (2012), 814–825; англ. пер.: I. A. Rudakov, “Periodic solutions of the quasilinear beam vibration equation with homogeneous boundary conditions”, *Differ. Equ.*, **48**:6 (2012), 820–831.
8. P. H. Rabinowitz, “Multiple critical points of perturbed symmetric functionals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **272**:2 (1982), 753–769.
9. K. Tanaka, “Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{p-1}u = f(x, t)$. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **307**:2 (1988), 615–645.

10. A. Bahri, H. Berestycki, “A perturbation method in critical point theory and applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267**:1 (1981), 1–32.
11. J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Notes on Mathematics and its Applications, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1969, vii+236 pp.
12. В. А. Садовничий, *Теория операторов*, 4-е изд., Дрофа, М., 2001, 384 с.
13. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, x+207 pp.

ИГОРЬ АЛЕКСЕЕВИЧ РУДАКОВ

(IGOR A. RUDAKOV)

Московский государственный

технический университет имени Н.Э. Баумана;

МАТИ – Российский государственный

технологический университет

имени К.Э. Циолковского, г. Москва

E-mail: rudakov_bgu@mail.ru

Поступило в редакцию

30.04.2014

27.11.2014