Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков, Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 3, 131–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:20:19

УДК 512.554.5

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль

Классифицированы простые конечномерные правоальтернативные супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ над полем характеристики нуль, в которых четная часть A_0 ассоциативна и коммутативна, а A_1 – ассоциативный A_0 -бимодуль. Доказано, что всякая такая супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ получается удвоением полупростой четной части A_0 , а умножение в A определяется с помощью подходящего автоморфизма и линейного оператора, действующих на четной части A_0 .

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: простая супералгебра, правоальтернативная супералгебра.

DOI: 10.4213/im8251

Введение

Изучение простых супералгебр является важным направлением в теории колец.

Напомним, что супералгеброй $A = A_0 \oplus A_1$ называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие алгебр, $G = G_0 \oplus G_1$ – ассоциативная алгебра Грассмана с единицей 1 и стандартными порождающими e_i , $i = 1, 2, \dots$. Супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ называется $\mathfrak{M}$ -супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A) = A_0 \otimes G_0 \oplus A_1 \otimes G_1$ является $\mathfrak{M}$ -алгеброй [1].

С. Е. Уолл в 1964 г. доказал [2], что всякая простая конечномерная ассоциативная супералгебра A над алгебраически замкнутым полем изоморфна одной из следующих:

1) $A = M_{m|n}$, $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$, $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$, где m, n – размерности блоков;

2) $A = M_n[\sqrt{1}]$, $A_0 = M_n$, $A_1 = M_n u$, $u := \sqrt{1}$ централен, $u^2 = 1$.

В. Кац в 1977 г. классифицировал конечномерные простые лиевы и йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль [3]. Первичные альтернативные супералгебры характеристики, отличной от 2 и 3, описаны Е. И. Зельмановым и И. П. Шестаковым [1]. Простые альтернативные супералгебры произвольной характеристики описаны И. П. Шестаковым в [4]. Он же получил описание простых $(-1, 1)$ -супералгебр [5]. М. Расин и Е. Зельманов [6] классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00014).

характеристики $\neq 2$ с полупростой четной частью. К. Мартинес и Е. Зельманов [7] дали описание конечномерных простых унитарных йордановых супералгебр, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал.

Супералгебру $A = A_0 \oplus A_1$ назовем *супералгеброй абелева типа*, если четная часть A_0 ассоциативна и коммутативна, а нечетная A_1 является ассоциативным A_0 -бимодулем.

В. Н. Желябин и И. П. Шестаков [8] получили описание йордановых супералгебр абелева типа без каких-либо ограничений для размерности.

А. П. Пожидаев и И. П. Шестаков [9], [10] описали простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры над полем характеристики нуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – коммутативно-ассоциативная унитарная алгебра над полем Φ , τ – автоморфизм алгебры A , χ – ненулевой линейный оператор пространства A над Φ , $\bar{A}$ – линейная копия A . Обозначим через $B(A, \tau, \chi)$ супералгебру $B = B_0 \oplus B_1$, где $B_0 = A$, $B_1 = \bar{A}$, умножение однородных элементов которой задано правилами

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \bar{b} = a\bar{b}, \quad \bar{a} \cdot b = \overline{ab^\tau}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = ab^\chi;$$

здесь ab – произведение элементов a, b в алгебре A , b^τ – образ b при действии τ .

Простейшие примеры таких супералгебр – это ассоциативные супералгебры $B(\Phi, \text{Id}, \text{Id}) = \Phi[\sqrt{1}]$ и $B(\Phi^2, *, *) = M_{1|1}(\Phi)$, где Id – тождественное отображение, $*$ – стандартная инволюция на Φ^2 .

В настоящей работе дается описание простых конечномерных правоальтернативных супералгебр абелева типа над полем характеристики нуль. Доказано, что каждая такая супералгебра является супералгеброй вида $B(A, \tau, \chi)$.

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И. П. Шестаковым в Днестровской тетради [11]. Строеение некоторых правоальтернативных супералгебр малых размерностей недавно получено Д. П. Силва, Л. С. И. Мураками и И. П. Шестаковым [12].

В теории йордановых и $(-1, 1)$ -алгебр важную роль играют супералгебры векторного типа $J(\Gamma, \delta)$ и $B(\Gamma, D, \gamma)$, введенные К. Маккриммоном [13] и И. П. Шестаковым [4]. В недавней работе [14] указана связь супералгебр векторного типа с алгебрами Грассмана и первичными монстрами.

Работа состоит из шести параграфов. В § 1 приводятся критерии правой альтернативности, ассоциативности, простоты и центральности супералгебр вида $B(A, \tau, \chi)$. Кроме того, в этом параграфе вводятся основные центральные простые правоальтернативные супералгебры абелева типа:

- 1) ω -дубль $B(A, \tau, R_\omega)$;
- 2) композиционные дубли $B_{2,2}(\nu)$ и $B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$;
- 3) циклические дубли $B_{n,n}$ и $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$.

Всюду ниже $B = A + M$ – простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра абелева типа над полем Φ характеристики нуль с четной частью A и нечетной частью $M \neq 0$.

В § 2 приводятся основные свойства пирсовых разложений супералгебры $B = A + M$ относительно полной ортогональной системы E идемпотентов алгебры A .

В частности, доказано, что бимодуль M является “циклическим” относительно полной ортогональной системы идемпотентов E .

В §3–5 доказаны классификационные теоремы. Сначала доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Если супералгебра $B = A + M$ проста, то алгебра A полупроста.

Попутно с теоремой 1 доказана

ТЕОРЕМА 2. Супералгебра $B = A + M$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики нуль изоморфна одной из супералгебр $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2,2}(\nu)$, $B_{n,n}$, $n \geq 1$.

В теореме 2 ассоциативны только супералгебры $B_{1,1} = \Phi[\sqrt{1}]$ и $M_{1|1}(\Phi)$.

В §4 доказано, что если четная часть супералгебры B является полем, то B является либо ω -дублем, либо композиционным дублем.

В §5 завершается доказательство следующей основной теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Конечномерная центральная простая правоальтернативная супералгебра $B = A + M$ абелева типа над полем Φ характеристики нуль изоморфна одной из следующих супералгебр:

$$\Phi[\sqrt{1}], \quad M_{1|1}(\Phi), \quad B(\Gamma, *, \omega), \quad B_{2,2}(\nu), \quad B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu), \\ B\left(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i\right), \quad n \geq 2,$$

где Γ – подходящее поле конечной степени над Φ .

В §6 указаны матричные представления супералгебр $B_{2,2}(\nu)$ и $B_{2,2}$. Доказано также, что все супералгебры из теоремы 1 неизоморфны. Показано, что группы автоморфизмов простых супералгебр абелевы (с этим обстоятельством и связано название “супералгебры абелева типа”). Кроме того, эти супералгебры не имеют ненулевых дифференцирований.

Прежде чем приступить к изложению основного содержания работы, напомним некоторые факты о правоальтернативных алгебрах. Алгебра A над полем характеристики $\neq 2$ называется *правоальтернативной* [15], если она удовлетворяет тождеству

$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ – ассоциатор элементов x, y, z .

В правоальтернативной алгебре выполняется *тождество Клейнфелда* [16]

$$(ab, x, y) + (a, b, [x, y]) = a(b, x, y) + (a, x, y)b.$$

Далее, супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ является *правоальтернативной* тогда и только тогда, когда для однородных элементов выполнено тождество

$$(x, y, z) + (-1)^{yz}(x, z, y) = 0, \tag{1}$$

где $(-1)^{xy} = (-1)^{|x||y|}$, $|x|$ – четность однородного элемента $x \in A_0 \cup A_1$, т. е. $|x| = 0$, если $x \in A_0$, и $|x| = 1$, если $x \in A_1$.

Следуя работам И. П. Шестакова, всюду ниже предполагаем, что $a, b, c \in A$, $x, y, z \in M$ и $p, q \in A \cup M$. Тогда супертождество (1) равносильно следующим двум условным тождествам:

$$(pa)q + (pq)a = p(a \circ q), \quad (2)$$

$$(px)y - (py)x = p[x, y], \quad (3)$$

где $p \circ q = pq + qp$ и $[p, q] = pq - qp$.

Из тождества Клейнфелда вытекает, что отображение $R_{x,y}: a \mapsto (a, x, y)$ является дифференцированием алгебры A . Следовательно, справедливы свойства:

(А) если e – идемпотент в A , то $eR_{x,y} = 0$;

(В) радикал $\text{Nil}(A)$ инвариантен относительно $R_{x,y}$, поскольку $\text{char}(\Phi) = 0$.

Пусть $Z_0(B) := \{a \in A \mid [a, b] = (a, B, B) = (B, a, B) = 0\}$ – центр супералгебры B . Хорошо известно, что центр простой супералгебры – поле. Супералгебра B называется *центральной*, если $Z_0(B) = \Phi \cdot 1$.

Приведем в заключение несколько замечательных результатов о правоальтернативных алгебрах, которые носят окончательный характер:

(i) простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна [17];

(ii) существует простая правоальтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса [18];

(iii) невырожденная правоальтернативная алгебра альтернативна; в частности, простая унитарная правоальтернативная алгебра альтернативна [19].

§ 1. Супералгебры $B(A, \tau, \chi)$

1.1. Критерии правой альтернативности, простоты и центральноности. Сначала докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $B(A, \tau, \chi)$ является супералгеброй абелева типа;

б) $B(A, \tau, \chi)$ правоальтернативна, только если для любых $a, b \in A$

$$(a(b + b^\tau))^\chi = a^\chi(b + b^\tau), \quad (4)$$

$$a^\chi b - ab^\chi + (a^\chi b - ab^\chi)^\tau = 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим ассоциаторы:

$$(a, b, \bar{c}) = ab\bar{c} - a\bar{b}c = \bar{a}bc - \bar{a}bc = 0,$$

$$(a, \bar{b}, c) = \bar{a}bc - a\bar{b}c^\tau = \bar{a}bc^\tau - \bar{a}bc^\tau = 0,$$

$$(\bar{a}, b, c) = \bar{a}b^\tau \cdot c - \bar{a}(bc) = \bar{a}b^\tau c^\tau - \bar{a}(bc)^\tau = 0,$$

$$(a, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} \cdot \bar{c} - a \cdot bc^\chi = abc^\chi - abc^\chi = 0,$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, c) = ab^\chi c - \bar{a} \cdot \bar{b}c^\tau = ab^\chi c - a(bc^\tau)^\chi = a(b^\chi c - (bc^\tau)^\chi),$$

$$(\bar{a}, c, \bar{b}) = \bar{a}c^\tau \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{c}b = ac^\tau b^\chi - a(bc)^\chi = a(c^\tau b^\chi - (bc)^\chi),$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{ab^\chi c} - \overline{a(bc^\chi)^\tau}.$$

Теперь легко видеть, что справедливы утверждения а) и б).

Супералгебра с единицей называется *унитальной*; унитарная супералгебра называется *простой*, если она не имеет собственных градуированных идеалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ является простой, только если A является τ -простой, т. е. не имеет собственных τ -инвариантных идеалов, и $1 \in A \cdot A^\chi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = B(A, \tau, \chi)$ – простая супералгебра и $1 \notin A \cdot A^\chi$. Тогда $A \cdot A^\chi + \bar{A} \cdot \bar{A}^\chi$ – собственный идеал в B . Далее, если $0 \neq I \triangleleft A$ и $I^\tau \subseteq I$, то $I + \bar{I}$ – ненулевой идеал в B , значит, $I = A$.

Обратно, пусть A не имеет собственных τ -инвариантных идеалов и $1 \in A \cdot A^\chi$. Рассмотрим $0 \neq I + \bar{J} \triangleleft B$. Тогда $I \triangleleft A$ и $I + I^\tau \subseteq J$, поскольку $I \cdot \bar{I} = \bar{I}$ и $\bar{I} \cdot I = \bar{I}^\tau$. Далее, $J \cdot A^\chi = \bar{J} \cdot \bar{A} \subseteq I$, значит, $J = J \cdot 1 \subseteq J \cdot A A^\chi \subseteq J A^\chi A \subseteq I A \subseteq I$. Тогда $I^\tau \subseteq I$, т. е. I является ненулевым τ -инвариантным идеалом в A . Следовательно, $I = A$ и $I + \bar{J} = A + \bar{A} = B$, т. е. B – простая супералгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Супералгебра $B = B(A, \tau, \chi)$ является простой, но не правоальтернативной. Положим $\Phi = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q}(\gamma)$, $\gamma^2 + \gamma + 1 = 0$, $\tau = \text{Id}$, $1^\chi = \gamma^\chi = 1$. В силу предложения 2 супералгебра B проста. Проверим, что тождество $(x, x, x) = 0$ не выполнено в грассмановой оболочке $G(B)$. Допустим противное. Тогда, используя суперизацию тождества $(x, x, x) = 0$ и значения ассоциаторов, вычисленные в предложении 1, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{a}, \bar{b}, c) + (\bar{a}, c, \bar{b}) - (\bar{b}, c, \bar{a}) - (\bar{b}, \bar{a}, c) \\ &= a(b^\chi c - (bc^\tau)^\chi) + a(c^\tau b^\chi - (bc)^\chi) - b(c^\tau a^\chi - (ac)^\chi) - b(a^\chi c - (ac^\tau)^\chi). \end{aligned}$$

Поскольку $\tau = \text{Id}$, то

$$(ab^\chi - ba^\chi)c - a(bc)^\chi + b(ac)^\chi = 0.$$

Полагая $a = 1$, $b = c = \gamma$, получаем $(\gamma^\chi - \gamma)\gamma - (\gamma^2)^\chi + \gamma \cdot \gamma^\chi = 0$. Заметим, что $(\gamma^2)^\chi = -(\gamma + 1)^\chi = -2$. Значит, $0 = (1 - \gamma)\gamma + 2 + \gamma = 2\gamma + 2 - \gamma^2 = 3\gamma + 3$. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Простая супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда существует $g \in A$ такой, что $g = g^\tau$, $\tau^2 = \text{Id}$, $\chi = \tau R_g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ ассоциативна, только если для любых a, b, c имеют место равенства $(\bar{a}, \bar{b}, c) = 0$, $(\bar{a}, c, \bar{b}) = 0$ и $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$, т. е. выполнены равенства

$$b^\chi c = (bc^\tau)^\chi, \quad b^\chi c^\tau = (bc)^\chi, \quad b^\chi c = (bc^\chi)^\tau. \quad (6)$$

Допустим, что равенства (6) выполнены. Тогда, полагая $g = 1^\chi$, имеем

$$(c^\tau)^\chi = gc, \quad c^\chi = c^\tau g, \quad (c^\chi)^\tau = gc,$$

значит, $(c^\tau)^\chi = (c^\chi)^\tau$, т. е. τ и χ перестановочны и $c^\chi = c^\tau g$, $(c^\chi)^\tau = gc$. Из двух последних равенств следует $(c^\tau g)^\tau = gc$, значит, $c^{\tau^2} g^\tau = gc$. Поскольку

$g^\tau = (1^\chi)^\tau = (1^\tau)^\chi = 1^\chi = g$, то $(c^{\tau^2} - c)g = 0$. Подставляя $c = 1$ в последнее из равенств (6), имеем $b^\chi = (b \cdot 1^\chi)^\tau = (bg)^\tau = b^\tau g^\tau = b^\tau g$. Поскольку $1 \in A \cdot A^\chi$ по предложению 2, то $1 \in gA$ и, стало быть, $c^{\tau^2} - c = 0$, т. е. $\tau^2 = \text{Id}$. Кроме того, $c^\chi = c^\tau g$, значит, $\chi = \tau R_g$.

Обратно, если существует $g \in A$ такой, что $g^\tau = g$, $\chi = \tau R_g$, $\tau^2 = \text{Id}$, то

$$\begin{aligned} b^\chi c &= b^\tau g c, & b^\chi c^\tau &= b^\tau g c^\tau, \\ (bc^\tau)^\chi &= (bc^\tau)^\tau g = b^\tau c g, & (bc)^\chi &= (bc)^\tau g = b^\tau c^\tau g, \\ (bc^\chi)^\tau &= (bc^\tau g)^\tau = b^\tau c g. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость равенств (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Верно $Z_0(B(A, \tau, \chi)) = \{a \in A \mid a^\tau = a, (\forall b)(ab)^\chi = a \cdot b^\chi\}$. В самом деле, если $c \in Z_0(B(A, \tau, \chi))$, то выполнены равенства

$$0 = [\bar{b}, c] = \overline{b \cdot c^\tau} - \overline{bc} = \overline{b(c^\tau - c)},$$

т. е. $c^\tau = c$, и равенства

$$0 = (\bar{a}, \bar{b}, c) = a(b^\chi c - (bc^\tau)^\chi),$$

т. е. $b^\chi c = (bc)^\chi$.

1.2. Супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$. Супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$ получается из $B(A, \tau, \chi)$, если в качестве линейного оператора χ взять оператор R_ω правого умножения на элемент $\omega \in A$, и называется ω -дублем алгебры A .

Супералгебру $B(A, \tau) := B(A, \tau, \text{Id})$ назовем стандартным дублем A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть алгебра A является τ -простой и ω обратим в A . Тогда:

- а) ω -дубль $B(A, \tau, R_\omega)$ является простой правоальтернативной супералгеброй;
- б) если $\tau \neq \text{Id}$, то супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$ неассоциативна;
- с) центр ω -дубля $B(A, \tau, R_\omega)$ совпадает с алгеброй τ -неподвижных элементов $\{a \in A \mid a^\tau = a\}$ алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) вытекает из предложений 1, 2.

Докажем утверждение б). Заметим, что если $B(A, \tau, R_\omega)$ ассоциативна, то в силу (6) имеем $b^\chi c^\tau = (bc)^\chi$ и, полагая $b = 1$, получаем $1^\chi c^\tau = c^\chi$. Поскольку $\chi = R_\omega$, то $\omega c^\tau = c\omega$, $c^\tau = c$, откуда получаем $\tau = \text{Id}$. Противоречие.

Утверждение с) немедленно вытекает из замечания 2.

1.3. Циклический дубль $B_{n,n}$. Важный пример стандартного дубля – циклический дубль $B_{n,n}$. Пусть Φ^n – прямая сумма n экземпляров поля Φ . Если $a = (a_1, \dots, a_n)$, то положим $a^\tau = (a_2, \dots, a_n, a_1)$. Ясно, что τ – автоморфизм алгебры Φ^n порядка n . Положим

$$B_{n,n} = B(\Phi^n, \tau).$$

В силу предложения 4 циклический дубль $B_{n,n}$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй; $B_{n,n}$ ассоциативна только при $n = 1$.

1.4. Расщепляемый композиционный дубль $B_{2,2}(\nu)$. Пусть $\Phi^2 = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ – расщепляемая композиционная алгебра над Φ с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ и стандартной инволюцией $*$: $(a, b)^* = (b, a)$. Обозначим через $B_{2,2}(\nu)$ супералгебру $B(\Phi^2, *, \chi)$, где $\nu \in \Phi$ и $\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора χ в базисе $\{e_1, e_2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Расщепляемый композиционный дубль $B_{2,2}(\nu)$ является центральной простой неассоциативной правоальтернативной супералгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4) вытекает немедленно из линейности оператора χ , поскольку $b + b^* \in \Phi \cdot 1$. Для проверки равенства (5) сначала вычислим $a^\chi b$:

$$a^\chi b = (a_1, a_2)^\chi (b_1, b_2) = (a_1 + a_2, a_1 + a_2\nu)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + a_2b_1, a_1b_2 + a_1b_2\nu).$$

Значит, $a^\chi b - ab^\chi = (-c, c)$, где $c = a_1b_2 - a_2b_1$. Отсюда, очевидно, вытекает равенство (5).

Если $a = (0, 1)$, то $a^\chi = (1, \nu)$, $1^\chi = (2, 1 + \nu)$ и $a^* \cdot 1^\chi = (1, 0)(2, 1 + \nu) = (2, 0)$, т.е. $a^\chi \neq a^* \cdot 1^\chi$, значит, на основании (6) супералгебра $B_{2,2}(\nu)$ неассоциативна.

Алгебра Φ^2 не имеет собственных $*$ -идеалов, и $(1, 0)^\chi = (1, 1)$, значит, в силу предложения 2 супералгебра проста. Ее центральность вытекает из замечания 2.

1.5. Нерасщепляемый композиционный дубль $B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$. Пусть Γ – конечное расширение поля Φ и $*$ – автоморфизм расширения Γ/Φ . Допустим, что существуют $\lambda, \mu \in \Gamma$ такие, что оператор χ удовлетворяет условию

$$(\forall a \in \Gamma) a^\chi = \lambda a^* + \mu a. \quad (7)$$

Найдем условия, при которых $B = B(\Gamma, *, \chi)$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй, но не является ω -дублем. Заметим, что $*$ $\neq$ Id, иначе $a^\chi = (\lambda + \mu)a$ и B является $(\lambda + \mu)$ -дублем. Если $\lambda = 0$, то $a^\chi = \mu a$ и, значит, B снова изоморфна μ -дублю. Итак, можно считать, что

$$* \neq \text{Id}, \quad \lambda \neq 0, \quad (8)$$

В силу предложения 1 супералгебра B правоальтернативна, только когда выполнены равенства (4) и (5). Поскольку

$$\begin{aligned} (a(b + b^*))^\chi - a^\chi(b + b^*) &= \lambda(a^*b^* + a^*b^{**}) + \mu(ab + ab^*) - (\lambda a^* + \mu a)(b + b^*) \\ &= \lambda(a^*b^* + a^*b^{**}) + \mu(ab + ab^*) - (\lambda a^*b + \mu ab) - (\lambda a^*b^* + \mu ab^*) \\ &= \lambda a^*b^* + \lambda a^*b^{**} + \mu ab + \mu ab^* - \lambda a^*b - \mu ab - \lambda a^*b^* - \mu ab^* \\ &= \lambda a^*b^{**} - \lambda a^*b = \lambda b^*(b^{**} - b), \end{aligned}$$

ввиду (8) равенство (4) равносильно условию: $*$ – автоморфизм порядка 2.

Напомним, что в супералгебре B справедливы равенства

$$a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot b = \overline{ab^*}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = a(\lambda b^* + \mu b).$$

Пусть $\Delta = \{a \in \Gamma \mid a^* = a\}$ – поле инвариантов автоморфизма $*$. Покажем, что $\Delta \subseteq Z_0(B)$. В самом деле, если $a \in \Delta$, то

$$\begin{aligned} [\bar{b}, a] &= \bar{b} \cdot a - \overline{ab} = \overline{b(a^* - a)} = 0, \\ (\bar{b}, \bar{c}, a) &= (\bar{b} \cdot \bar{c})a - \bar{b} \cdot \overline{ca} = b(\lambda c^* + \mu c)a - b(\lambda(ca)^* + \mu ca) = 0. \end{aligned}$$

Значит, супералгебра B центральна, только если $\dim_{\Phi} \Gamma = 2$.

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned} a^\chi b - ab^\chi + (a^\chi b - ab^\chi)^* &= \lambda a^* b + \mu ab - \lambda ab^* - \mu ab + (\lambda a^* b + \mu ab - \lambda ab^* - \mu ab)^* \\ &= \lambda a^* b - \lambda ab^* + (\lambda a^* b - \lambda ab^*)^* = \lambda a^* b - \lambda ab^* + \lambda^* ab^* - \lambda^* a^* b \\ &= (\lambda - \lambda^*) a^* b + (\lambda^* - \lambda) ab^* = (\lambda - \lambda^*) (a^* b - ab^*). \end{aligned}$$

Значит, равенство (5) равносильно $(\lambda - \lambda^*) (a^* b - ab^*) = 0$. Поскольку $*$ $\neq \text{Id}$, то при $b = 1$ имеем $a^* b - ab^* = a^* - a \neq 0$, значит, $\lambda^* = \lambda$, $\lambda \in \Phi$.

Супералгебру $B(\Gamma, *, \chi)$, для которой Γ – поле, $\dim_{\Phi} \Gamma = 2$, $*$ $\neq \text{Id}$ и

$$(\exists \lambda \in \Phi, \mu \in \Gamma)(\forall a \in \Gamma) a^\chi = \lambda a^* + \mu a,$$

назовем *нерасщепляемым композиционным дублем* и обозначим $B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$.

1.6. Циклический ω -дубль $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$. Пусть $\Gamma^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$ – прямая сумма изоморфных полей и задан набор τ_i , $i = \overline{1, n}$, изоморфизмов $\tau_1: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_n$, $\tau_{i+1}: \Gamma_{i+1} \rightarrow \Gamma_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Положим

$$\tau = \sum_i \tau_i = \tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n, \quad \omega = \omega_1 \oplus \dots \oplus \omega_n, \quad \omega_1 \in \Gamma_1 = \Gamma, \dots, \omega_n \in \Gamma_n.$$

Если элемент ω обратим, то супералгебру $B(A, \tau, R_\omega)$ назовем *циклическим ω -дублем* и обозначим через $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$. В силу предложения 4 эта супералгебра правоальтернативна, но не ассоциативна и является простой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Циклический ω -дубль $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$ централен тогда и только тогда, когда автоморфизм $\tau = \tau_1 \tau_n \tau_{n-1} \dots \tau_2$ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \bar{b}_1 + \dots + \bar{b}_{n-1} + \bar{b}_n$ и $a = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$, где $a_i, b_i \in \Gamma_i$. Допустим, что $xa = ax$ для любого x . Тогда ввиду равенств

$$\bar{b}_1 a_2 = \overline{b_1 a_2^{\tau_2}}, \quad \dots, \quad \bar{b}_{n-1} a_n = \overline{b_{n-1} a_n^{\tau_n}}, \quad \bar{b}_n a_1 = \overline{b_n a_1^{\tau_1}}$$

имеем

$$0 = ax - xa = \overline{a_1 b_1 - b_1 a_2^{\tau_1}} + \dots + \overline{a_{n-1} b_{n-1} - b_{n-1} a_n^{\tau_n}} + \overline{a_n b_n - b_n a_1^{\tau_1}},$$

откуда, полагая $b_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, получаем

$$a_1 = a_2 \tau_2, \quad \dots, \quad a_{n-1} = a_n \tau_n, \quad a_n = a_1 \tau_1. \quad (9)$$

Аналогично, если $(x, y, a) = 0$ для любого $y = \bar{c}_1 + \dots + \bar{c}_{n-1} + \bar{c}_n$, то также справедливы равенства (8). Из этих равенств следует $a_1(\tau_1 \tau_n \tau_{n-1} \dots \tau_2) = a_1$,

т.е. $a_1\tau = a_1$. Таким образом, $a_1 \in \Phi e_1$, где e_1 – единица в A_1 только при условии, что τ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$. Если $a_1 = \alpha e_1$ для некоторого $\alpha \in \Phi$, то

$$a_n = a_1\tau_1 = \alpha e_n, \quad a_{n-1} = a_n\tau_n = \alpha e_{n-1}, \quad \dots, \quad a_2 = a_3\tau_3 = \alpha e_2,$$

т.е. $a = \alpha \cdot 1$. Предложение доказано.

§ 2. Пирсовы разложения супералгебр

Пусть A – конечномерная коммутативно-ассоциативная Φ -алгебра. Тогда по теореме Веддербёрна $A = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_n \oplus R$ – прямая сумма простых алгебр, каждая из которых является алгеброй с делением (полем) над Φ , и радикала $R = \text{Nil}(A)$. Обозначим единицу алгебры Γ_i через e_i . Элементы $e_1, \dots, e_n$ образуют полную систему E ортогональных идемпотентов, т.е. $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$, $i \neq j$, e_i не является суммой ортогональных идемпотентов, $e_1 + \dots + e_n = 1$ – единица алгебры A .

Число n , как обычно, называется *емкостью* алгебры A (супералгебры B).

Ясно, что $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, где $R_i = R \cdot e_i = \{r_i \in R \mid r_i e_i = r_i\}$. Аналогично, поскольку A -бимодуль M ассоциативен, то $M = \Sigma^{\oplus} M_{ij}$, где $M_{ij} = e_i M e_j = \{x_{ij} \in M \mid e_i x_{ij} = x_{ij} e_j = x_{ij}\}$.

Всюду далее, если не оговорено противное, $r_i \in R_i$, $x_{ij} \in M_{ij}$.

Заметим, что если $k \neq i, j$, то $r_i e_k = e_k x_{ij} = x_{ij} e_k = 0$. Кроме того, если $a \in A$ и $a e_1 = a$, то $a = \alpha_1 e_1 + r_1$. В самом деле, пусть $a = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_i r_i$; тогда $a e_1 = \alpha_1 e_1 + r_1$. Очевидно также, что если $x \in M$ и $e_i x e_j = x$, то $x \in M_{ij}$.

2.1. Соотношения между компонентами M_{ij} . Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) $M_{11} M_{ij} = M_{ij} M_{11} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$;
- б) $M_{12} M_{ij} = M_{ij} M_{12} = 0$, если $i, j \geq 2$;
- с) если среди чисел i, j, k, l имеются три различных, то $M_{ij} M_{kl} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Во-первых, $(x_{11}, e_2, x_{12}) = (x_{11} e_2) x_{12} - x_{11} (e_2 x_{12}) = 0$, значит, в силу тождества (2) верно $(x_{11}, x_{12}, e_2) = 0$, откуда $(x_{11} x_{12}) e_2 = x_{11} (x_{12} e_2) = x_{11} x_{12}$. Во-вторых, в силу включения $M^2 \subseteq A$, свойства (A) и коммутативности алгебры A получаем $(x_{11} x_{12}) e_2 = e_2 (x_{11} x_{12}) = (e_2 x_{11}) x_{12} = 0$, значит, $x_{11} x_{12} = 0$, т.е. $M_{11} M_{1k} = 0$, $k \neq 1$.

Аналогично, ввиду (2) имеем

$$(x_{12} x_{11}) e_1 = -(x_{12} e_1) x_{11} + x_{12} (x_{11} \circ e_1) = 2 x_{12} x_{11}.$$

Поскольку $(x_{12} x_{11}) e_1 = e_1 (x_{12} x_{11}) = x_{12} x_{11}$, то $x_{12} x_{11} = 0$ и $M_{1k} M_{11} = 0$, $k \neq 1$.

Точно так же имеем

$$\begin{aligned} (x_{21} x_{11}) e_2 &= -(x_{21} e_2) x_{11} + x_{21} (e_2 \circ x_{11}) = 0, \\ (x_{21} x_{11}) e_2 &= e_2 (x_{21} x_{11}) = x_{21} x_{11}, \end{aligned}$$

т. е. $x_{21}x_{11} = 0$ и $M_{k1}M_{11} = 0$, $k \neq 1$. Наконец,

$$\begin{aligned} x_{11}x_{21} &= e_1(x_{11}x_{21}) = (x_{11}x_{21})e_1 = -(x_{11}e_1)x_{21} + x_{11}(e_1 \circ x_{21}) \\ &= -x_{11}x_{21} + x_{11}x_{21} = 0. \end{aligned}$$

б) Пусть $i, j \geq 2$. Тогда в силу (2) и коммутативности алгебры A имеем

$$x_{12}x_{ij} = e_1(x_{12}x_{ij}) = (x_{12}x_{ij})e_1 = 0, \quad 0 = e_1(x_{ij}x_{12}) = (x_{ij}x_{12})e_1 = x_{ij}x_{12}.$$

с) Достаточно проверить, что нулевыми являются следующие произведения:

$$x_{12}x_{34}, \quad x_{11}x_{23}, \quad x_{12}x_{13}, \quad x_{12}x_{31}, \quad x_{12}x_{23}, \quad x_{12}x_{32}, \quad x_{12}x_{33}.$$

Равенства $x_{12}x_{34} = x_{12}x_{23} = x_{12}x_{32} = x_{12}x_{33} = 0$ следуют из утверждения б); $x_{11}x_{23} = 0$ ввиду утверждения а). Осталось проверить $x_{12}x_{13} = x_{12}x_{31} = 0$. Пусть $x \in \{x_{13}, x_{31}\}$; тогда ввиду (2) и коммутативности алгебры A имеем

$$0 = e_2(x_{12}x) = (x_{12}x)e_2 = -(x_{12}e_2)x + x_{12}(x \circ e_2) = -x_{12}x,$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что на основании свойства (А) справедлива следующая

ЛЕММА 2. Пусть $M_1 = M_{11} + M_{12} + \dots + M_{1n}$. Тогда

$$M_1M \subseteq \Phi e_1 + R_1, \quad (\Phi e_1 + R_1)M \subseteq M_1.$$

ЛЕММА 3. Если $j, l \neq p$, то $(x_{ij}x_{kl})x_{mp} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1) верно $(x_{ij}, x_{kl}, x_{mp}) = (x_{ij}, x_{mp}, x_{kl})$. Умножим обе части этого равенства справа на e_p . Поскольку $j \neq p$, то $x_{ija}e_p = x_{ij}e_p a = 0$. Следовательно, $(x_{ij}x_{kl})x_{mp}e_p = (x_{ij}x_{mp})x_{kle_p}$. Учитывая, что $l \neq p$, получаем $(x_{ij}x_{kl})x_{mp}e_p = 0$, и, стало быть, верно требуемое равенство $(x_{ij}x_{kl})x_{mp} = 0$.

2.2. Совместимость компонент M_{ij} . Всюду далее в этом пункте Φ – алгебраически замкнутое поле, значит, $\Gamma_i = \Phi e_i$.

ЛЕММА 4. Хотя бы одна из компонент M_{12}, M_{13} должна быть равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что $M_{12}, M_{13} \neq 0$, и рассмотрим подпространство $M_1 = M_{11} + M_{12} + \dots + M_{1n}$. Докажем, что $M_1M \subseteq R_1$. Отметим, что если $i \neq j$, то $M_{1i}M_{1j} = 0$ по лемме 1, с).

Пусть $x_{13} \neq 0$, $x, y \in M_{11} \cup M_{12}$. Тогда $(xy)x_{13} = 0$ по лемме 3. Далее, ввиду свойства (А) имеем $xy = \alpha_1 e_1 + r_1$ для подходящих $\alpha_1 \in \Phi$ и $r_1 \in R_1$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то $x_{13} = r x_{13}$, где $r \in R_1$. Тогда $x_{13} = r x_{13} = r^2 x_{13} = \dots = r^N x_{13}$. Отсюда ввиду нильпотентности элемента r следует, что $x_{13} = 0$. Противоречие. Значит, $\alpha_1 = 0$, и можно утверждать, что $M_{1i}M_{1j} + M_{1i}M_{j1} \subseteq R_1$ для любых i, j , т. е. $M_1M \subseteq R_1$.

В силу свойства (А) имеем $M_iM \subseteq \Phi e_i + R_i$, $i \geq 2$. Следовательно, $M^2 \subseteq I$, где $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + R$. Поскольку I – идеал алгебры A , то $I + M$ – собственный идеал супералгебры B . Противоречие.

ЛЕММА 5. Если $M_{12} \neq 0$ и $M_{21} \neq 0$, то $M_{ij} = 0$, $i \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$I = \Phi e_3 + \dots + \Phi e_n + R_3 + \dots + R_n, \quad M' = M_3 + \dots + M_n.$$

Докажем, что $I + M'$ – собственный идеал супералгебры B :

- 1) I – идеал A , поскольку $R_i A \subseteq R_i$;
- 2) $AM' + M'A \subseteq M'$, поскольку $e_i M_j + R_i M_j \subseteq \delta_{ij} M_j$ и $M_i A \subseteq M_i$;
- 3) $M' M \subseteq I$, так как $M_i M \subseteq I$, $i \geq 3$;
- 4) $MM' \subseteq I$, поскольку $MM_3 \subseteq I$, что следует из того, что $(M_{11} + M_{12})M_{3i} = 0$ и $(M_{21} + M_{22})M_{3i} = 0$ по лемме 1, а значит, $(M_1 + M_2)M_3 = 0$, так как $M_1 = M_{11} + M_{12}$, $M_2 = M_{21} + M_{22}$ в силу леммы 4;
- 5) $IM \subseteq M'$, $MI \subseteq M'$; первое включение верно в силу (4), а второе справедливо из того, что при $k \geq 3$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M_1 e_k &= (M_{11} + M_{12})e_k = 0, \\ M_1 R_k &= (M_{11} + M_{12})R_k = (M_{11} + M_{12})e_k R_k = 0, \end{aligned}$$

аналогично, $M_2 e_k = M_2 R_k = 0$.

ЛЕММА 6. Если $M_{12} \neq 0$ и $M_{21} \neq 0$, то $n = 2$ и $M = M_{12} + M_{21}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 4, 5 для n возможно единственное значение $n = 2$, и достаточно понять, что $M_{11} = 0$. Пусть существует элемент $x_{11} \neq 0$. Выберем также $x_{12} \neq 0$. Ввиду леммы 3 имеем $(x_{11}y_{11})x_{12} = 0$, $(x_{12}y_{12})x_{11} = 0$.

Покажем, что $(x_{12}y_{21})x_{11} = 0$. Согласно лемме 1, а) и тождеству (3) имеем

$$\begin{aligned} (x_{12}y_{21})x_{11} &= (x_{12}, y_{21}, x_{11}) + x_{12}(y_{21}x_{11}) = (x_{12}, y_{21}, x_{11}) \\ &= (x_{12}, x_{11}, y_{21}) = (x_{12}x_{11})y_{21} - x_{12}(x_{11}y_{21}) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $(x_{11}y_{11})x_{12} = 0$, $(x_{12}y_{12})x_{11} = 0$, $(x_{12}y_{21})x_{11} = 0$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 4, отсюда легко вывести, что

$$x_{11}y_{11}, x_{12}y_{12}, x_{12}y_{21} \in R_1. \quad (10)$$

Например, проверим, что $x_{12}y_{21} \in R_1$. Пусть $x_{12}y_{21} = \alpha e_1 + r_1$ и $\alpha \neq 0$; тогда $x_{11} = rx_{11}$, где $r \in R_1$ и $x_{11} = rx_{11} = r^2x_{11} = \dots = r^N x_{11} = 0$ ввиду нильпотентности элемента r . Противоречие.

Положим $I = \Phi e_2 + R$ и покажем, что $I + M$ – собственный идеал супералгебры B . Поскольку I – идеал алгебры A , достаточно понять, что $M^2 \subseteq I$. Ясно, что $M^2 M \subseteq I$. Проверим, что $M_1 M \subseteq I$. Поскольку ввиду леммы 1 имеем $M_{11}M_{ij} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$, и $M_{12}M_{ii} = 0$, если $i = 1, 2$, то осталось проверить соотношения $M_{11}M_{11}, M_{12}M_{12}, M_{12}M_{21} \subseteq R_1$. Однако эти соотношения следуют из (10). Итак, доказано, что $I + M$ – собственный идеал супералгебры B . Противоречие.

ЛЕММА 7. Хотя бы одна из компонент M_{21}, M_{11}, M_{13} равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что M_{21}, M_{11}, M_{13} отличны от нуля. Тогда по лемме 4

$$M_1 = M_{11} + M_{13}.$$

Покажем, что $M_{1k}M_{l1} + M_{1k}M_{l1} \subseteq R_1$ для любых k, l .

Заметим, что $(x_{11}y_{11})x_{13} = 0$ по лемме 3, следовательно, $M_{11}^2 \subseteq R_1$. Поскольку $M_{11}M_{1k} = M_{11}M_{k1} = M_{1k}M_{11} = M_{k1}M_{11} = 0$, $k \geq 2$, в силу леммы 1, то можно считать, что $k, l \geq 2$, и рассмотреть элемент $x_{1k}x'$, где $x' \in M_{l1} + M_{l1}$. В силу (3) имеем $(x_{1k}x')x_{11} = 0$. Отсюда получаем, что $x_{1k}x' \in R_1$, т. е. $M_{1k}M_{l1} + M_{1k}M_{l1} \subseteq R_1$.

Пусть $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + R$ – идеал алгебры A . Докажем, что $M^2 \subseteq I$:

1) $M_2M \subseteq I$, так как $e_2(M_2M) = M_2M$;

2) по доказанному ранее $M_1^2 \subseteq I$;

3) $M_1M_j = 0$, $j \geq 2$.

Докажем 3). Прежде всего, ясно, что $M_{11}M_{jk} = 0$, $j \geq 2$.

Пусть $i, j \geq 2$ и $x_{1i}x_{jk} \neq 0$; тогда $x_{1i}x_{jk} = e_1(x_{1i}x_{jk}) = (x_{1i}x_{jk})e_1 = x_{1i}(x_{jk}e_1)$ в силу (2), откуда $k = 1$, т. е. $x_{1i}x_{j1} \neq 0$. По лемме 6 компоненты M_{1i} , M_{i1} , $i \geq 2$, не могут быть отличны от нуля, значит, $x_{1i}x_{j1} \neq 0$ при $i \neq j$ и $i, j \geq 2$, но это противоречит лемме 1, с).

Тем самым доказано, что $M^2 \subseteq I$. Значит, $I + M$ – собственный идеал супералгебры B . Противоречие.

ЛЕММА 8. Хотя бы одна из компонент M_{11}, M_{12} равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $M_{11}, M_{12} \neq 0$. Тогда $M_1 = M_{11} + M_{12}$ по лемме 4, $M_2 = M_{22} + M_{23} + \dots + M_{2n}$ по лемме 6 и $M_k = M_{k1} + M_{k2} + M_{k3} + \dots + M_{kn}$, $k \geq 2$.

Положим $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + R$. Заметим, что $M_kM \subseteq I$, $k \geq 2$. Также легко видеть, что $M_1M_k = 0$, $k \geq 2$. Далее, $M_1^2 = M_{11}^2 + M_{12}^2$. На основании леммы 3 имеем $(x_{11}y_{11})x_{12} = 0$ и $(x_{12}y_{12})x_{11} = 0$, значит, $M_1^2 = M_{11}^2 + M_{12}^2 \subseteq R_1$. Таким образом, $M^2 \subseteq I$. Значит, $I + M$ – собственный идеал супералгебры B . Противоречие.

ЛЕММА 9. Хотя бы одна из компонент M_{11}, M_{21} равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что M_{11}, M_{21} отличны от нуля. Тогда $M_{12} = M_{13} = \dots = M_{1n} = 0$ в силу лемм 6, 7. Следовательно,

$$M_1 = M_{11}, \quad M_k = M_{k1} + M_{k2} + M_{k3} + \dots + M_{kn}, \quad k \geq 2.$$

Положим

$$I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + R_2 + \dots + R_n, \quad M' = M_2 + \dots + M_n.$$

Проверим, что $M_1M' = M'M_1 = 0$. В самом деле, при $k \geq 2$ имеем $M_1M_k = 0$, поскольку $M_{11}M_{k1} = M_{11}M_{k2} = \dots = M_{11}M_{kn} = 0$, и $M_kM_1 = 0$, поскольку $M_{k1}M_{11} = M_{k2}M_{11} = \dots = M_{kn}M_{11} = 0$.

Докажем, что $I + M'$ – собственный идеал супералгебры B :

1) I – идеал в A , $IM + MI \subseteq M'$;

2) $AM' + M'A \subseteq M'$, поскольку $AM_k + M_kA \subseteq M_k$;

3) $MM' + M'M = (M')^2 \subseteq I$, поскольку $M_1M' = M'M_1 = 0$.

Итак, $I + M'$ – собственный идеал в B . Противоречие.

ЛЕММА 10. Для единственного числа $i \neq 1$ верно $M_{1i} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу леммы 4 двух различных компонент $M_{1i} \neq 0$ и $M_{1j} \neq 0$ не может быть. Допустим, что $M_{12} = \dots = M_{1n} = 0$. Тогда

$$M = M_{11} + M', \quad M' = \sum_{i \geq 2} M_i.$$

В силу леммы 1 имеем $M_{11}M_{ij} = M_{ij}M_{11} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$. Кроме того, если $i \geq 2$, то верно соотношение $M_iM + MM_i \subseteq I$, где $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + R_2 + \dots + R_n$.

Докажем, что $I + M'$ – идеал супералгебры B :

- 1) I – идеал в A ;
- 2) $IM \subseteq M'$ и $MI \subseteq (M_{11} + M')I \subseteq M_{11}I + M' \subseteq M'$, так как $M_{11}I = 0$;
- 3) $MM' + M'M \subseteq I$ в силу уже доказанного.

Итак, $I + M'$ – собственный идеал B . Противоречие.

2.3. E -цикличность нечетной части M . Супералгебру $B = A + M$ назовем E -циклической относительно полной системы E ортогональных идемпотентов, если $M = M_{12} + M_{23} + \dots + M_{n-1,n} + M_{n1}$.

ЛЕММА 11. Если M содержит ненулевые компоненты вида $M_{12}, M_{23}, \dots, \dots, M_{k-1,k}, M_{k1}$, $k \geq 3$, то $k = n$ и супералгебра $B = A + M$ является E -циклической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что $k < n$. Положим

$$I = \Phi e_{k+1} + \dots + \Phi e_n + R_{k+1} + \dots + R_n, \quad M' = M_{k+1} + \dots + M_n.$$

Докажем, что $I + M'$ – собственный идеал супералгебры B :

- 1) $M'M \subseteq I$;
- 2) включение $MM' \subseteq I$ является следствием равенства

$$(M_1 + M_2 + \dots + M_k)M' = 0; \tag{11}$$

- 3) I – идеал в A ;
- 4) $IM \subseteq M'$;
- 5) $MI \subseteq M'$, поскольку $(M_1 + M_2 + \dots + M_k)I = 0$.

Проверим выполнение равенства (11). Во-первых, ввиду леммы 4

$$M_1 = M_{12}, \quad M_2 = M_{23}, \quad \dots, \quad M_{k-1} = M_{k-1,k}, \quad M_k = M_{k1}.$$

Во-вторых, если $i < k$, $p \geq k + 1$, то ввиду леммы 1, с) справедливы равенства

$$M_iM_p = \sum_q M_{i,i+1}M_{pq} = 0, \quad M_kM_p = \sum_q M_{k1}M_{pq} = 0,$$

из которых и вытекает требуемое соотношение (11).

Мы пришли к противоречию с простотой супералгебры B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Супералгебра $B = A + M$ является E -циклической, причем число ее ненулевых компонент M_{ij} совпадает с емкостью супералгебры B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 10 имеем $M_{1i} \neq 0$ при некотором $i \neq 1$, значит, изменяя обозначения идемпотентов $e_2, \dots, e_n$, можем считать, что $M_{12} \neq 0$. Аналогично, $M_{2i} \neq 0$ при некотором $i \neq 2$. Если $i = 1$, то по лемме 6 имеем $n = 2$, и B является E -циклической. В противном случае можно считать, что $M_{23} \neq 0$. Итак, $M_{12} \neq 0$ и $M_{23} \neq 0$, в частности, $n \geq 3$. Если $n = 3$, то $M_{31} \neq 0$ и доказательство очевидно. Если $n \geq 4$, то $M_{3i} \neq 0$ при некотором $i \neq 3$, причем $i \neq 1, 2$ ввиду леммы 11. Значит, $i \geq 4$, и можно считать, что $M_{34} \neq 0$. Рассуждая теперь аналогично, получаем требуемое.

§ 3. Структура простых супералгебр емкости не менее 2 над алгебраически замкнутым полем

Всюду в этом параграфе поле Φ предполагается алгебраически замкнутым.

3.1. Супералгебры емкости не менее 2. Пусть B – супералгебра емкости $n \geq 2$. В силу предложения 7 имеем

$$M = M_{12} + M_{23} + \dots + M_{n-1,n} + M_{n1}.$$

Компоненту M_{ij} назовем *неизотропной*, если существует элемент $x_{ij} \in M_{ij}$ такой, что $x_{ij}^2 \notin R_i$.

ЛЕММА 12. *Если M_{12} – неизотропная компонента, то $M_{12} = \Phi x + R_1 x$ для любого $x \in M_{12}$ такого, что $x^2 \notin R_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = x_{12}$, $x^2 \notin R_1$ и $y \in M_{12}$. Положим

$$x^2 = \alpha e + r, \quad xy = \beta e + s, \quad yx = \gamma e + t, \quad (12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, $r, s, t \in R_1$, $e = e_1$. По условию $\alpha \neq 0$. Вычислим ассоциаторы:

$$\begin{aligned} (x, x, y) &= x^2 y - x(xy) = (\alpha e + r)y - x(\beta e + s) = \alpha y + ry, \\ (x, y, x) &= (xy)x - x(yx) = (\beta e + s)x - x(\gamma e + t) = \beta x + sx. \end{aligned}$$

Поскольку $(x, x, y) = (x, y, x)$ в силу тождества (3), то $\alpha y + ry = \beta x + sx$, значит, $y \in \Phi x + R_1 M_{12}$ и $M_{12} = \Phi x + R_1 M_{12}$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M_{12} &= \Phi x + R_1 M_{12} = \Phi x + R_1(\Phi x + R_1 M_{12}) = \Phi x + R_1 x + R_1^2 M_{12} = \dots \\ \dots &= \Phi x + R_1 x + R_1^2(\Phi x + R_1 M_{12}) \subseteq \Phi x + R_1 x + R_1^3 M_{12} \subseteq \dots \\ \dots &\subseteq \Phi x + R_1 x + R_1^N M_{12} \subseteq \Phi x + R_1 x \end{aligned}$$

ввиду нильпотентности R , откуда и вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 13. *Если компонента M_{12} изотропна, то для любых $x, y \in M_{12}$ имеем $xy \in R_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in M_{12}$. Тогда $(x + y)^2, x^2, y^2 \in R_1$ и $xy + yx \in R_1$. Отсюда и из (12) следует, что $\gamma = -\beta$. Поскольку $M_{12}(\Phi e_1 + R_1) = 0$, то $y(xy) = 0, y(yx) = 0$ и ввиду тождества (3) имеем по модулю $R_1 M_{12}$

$$0 = (y, y, x) - (y, x, y) \equiv -(yx)y \equiv -(\gamma e + t)y \equiv \beta y.$$

Если $\beta \neq 0$, то $y \in R_1 M_{12}$. Тогда

$$(\forall r \in R_1, z \in M_{12}) x(rz) = x(r \circ z) = (xz)r \in R_1,$$

в частности, $xy \in R_1$. Если $\beta = 0$, то $xy \in R_1$.

ЛЕММА 14. Если компонента M_{12} неизотропна, то $M_{12}R \subseteq RM_{12}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неизотропности M_{12} и леммы 12 имеем $M_{12} = \Phi x + Rx$. Поскольку $M_{12}R \subseteq M_{12}$, то для любого $r \in R$ существуют $\alpha \in \Phi, s \in R$ такие, что $xr = \alpha x + sx$. Покажем, что $\alpha = 0$. Допустим от противного, что $\alpha \neq 0$. Тогда $x = r_1 x + xr_2$, т. е. $x = \sum_i xT(r_i)$, где $T(r)$ – оператор правого или левого умножения на r . Итерируя данное равенство, получаем

$$x = \sum_i xT(r_i) = \sum_{i,j} xT(r_i)T(r_j) = \cdots = \sum_{i_1, \dots, i_m} xT(r_{i_1}) \cdots T(r_{i_m}) = 0,$$

поскольку идеал R нильпотентен. Значит, $M_{12}R \subseteq RM_{12}$.

3.2. Супералгебры емкости $n \geq 3$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 15. Если супералгебра $B = A + M$ имеет емкость $n \geq 3$, то A полупроста и B изоморфна супералгебре B_{nn} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что все компоненты M неизотропны.

Если X, Y – подмножества в B , то обозначим через $X * Y$ линейное подпространство над Φ , порожденное элементами xy и yx , где $x \in X, y \in Y$.

Если компонента M_{12} изотропна, то для любых $x, y \in M_{12}$ имеем $xy \in R_1$ по лемме 13. Пусть

$$I = \Phi e_2 + \cdots + \Phi e_n + R.$$

Тогда $M_{12} * M \subseteq I$ ввиду леммы 1, и легко понять, что $I + M$ – собственный идеал в B . Противоречие. Итак, каждая компонента $M_{12}, \dots, M_{n-1, n}, M_{n1}$ неизотропна и ввиду леммы 12 имеет вид $M_{ij} = \Phi x_{ij} + R_i x_{ij}$. Кроме того, в силу леммы 14 получаем $M_{ij}R \subseteq RM_{ij}$.

Пусть $M' = R * M = RM$. Докажем, что $R + M'$ – идеал в B . Для этого достаточно проверить соотношения $RA \subseteq R, A * M' \subseteq M', R * M \subseteq M', M * M' \subseteq R$. Нетривиальным является только последнее включение, доказательство которого представим в виде двух пунктов.

I. Докажем $M'M \subseteq R$. Поскольку произведение двух различных компонент M_{ij} в супералгебре емкости не менее 3 равно нулю, достаточно понять, что $(r_i x_{ij})x_{ij} \in R$ и $(r_i x_{ij})(r'_i x_{ij}) \in R$, где $r_i, r'_i \in R$.

Пусть $x = x_{ij}$ и $x^2 = \alpha e_i + s_i$, где $\alpha \in \Phi, s_i \in R_i$. Тогда

$$(r_i x_{ij})x_{ij} = (r_i x)x = r_i x^2 + (r_i, x, x) \in R$$

ввиду свойства (В). Аналогично, ввиду тождества (3) и свойства (В) имеем

$$\begin{aligned}(r_i x_{ij})(r'_i x_{ij}) &= (r_i x)(r'_i x) = (r_i \cdot r'_i x)x + r_i(x \cdot r'_i x - r'_i x \cdot x) \\ &\in (R^2 x)x + RA \subseteq R + (R^2, x, x) \subseteq R.\end{aligned}$$

II. Докажем $MM' \subseteq R$. Аналогично п. I достаточно понять, что

$$x_{ij}(r_i x_{ij}) \in R, \quad (r_i x_{ij})(r'_i x_{ij}) \in R, \quad r_i, r'_i \in R.$$

Сохраняя обозначения из п. I, проверим, что $x(r_i x) \in R$. Заметим, что $xr_i = x_{ij}r_i = 0$. Используя равенство $xr_i = 0$, имеем

$$x(r_i x) = -(x, r_i, x) = -(x, x, r_i) = -x^2 r_i \in R.$$

Теперь из пп. I и II вытекает $R = 0$, значит,

$$A = \Phi e_1 + \dots + \Phi e_n, \quad M = M_{12} + M_{23} + \dots + M_{n-1,n} + M_{n1}.$$

Кроме того, $M_{ij} = \Phi x_{ij}$, причем $x_{ij}^2 \neq 0$ по лемме 12. Пусть $x_{ij}^2 = \alpha_{ij} \neq 0$. Положим $x'_{ij} = \sqrt{\alpha_{ij}^{-1}} x_{ij}$, где $\sqrt{\alpha_{ij}}$ – фиксированный корень уравнения $t^2 = \alpha_{ij}$ в поле Φ . Легко понять, что супералгебра с базисом $e_1, \dots, e_n, x'_{12}, \dots, x'_{n-1,n}, x'_{n1}$ совпадает с супералгеброй B_{nn} .

3.3. Супералгебры емкости $n = 2$. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 16. *Если B – супералгебра емкости $n = 2$, то A – полупростая алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на ряд этапов, заметив, что $M = M_{12} + M_{21}$.

I. Докажем, что $(M, M, R) \subseteq R$. В самом деле, во-первых,

$$\begin{aligned}(M_{12}, M_{21}, R_1) &= (M_{12}, R_1, M_{21}) \subseteq (M_{12}R_1)M_{21} - M_{12}(R_1M_{21}) = 0, \\ (M_{12}, M_{21}, R_2) &\subseteq (M_{12}M_{21})R_2 - M_{12}(M_{21}R_2) \subseteq (M_{12}M_{21})R_2 = 0\end{aligned}$$

и, аналогично, $(M_{21}, M_{12}, R_1) = (M_{21}, M_{12}, R_2) = 0$. Во-вторых,

$$(M_{12}, M_{12}, R_1) = (M_{12}M_{12})R_1 \subseteq R_1.$$

В-третьих, если M_{12} – изотропная компонента, то $M_{12}M_{12} \subseteq R_1$ по лемме 13 и

$$(M_{12}, M_{12}, R_2) \subseteq (M_{12}M_{12})R_2 - M_{12}(M_{12}R_2) \subseteq M_{12}M_{12} \subseteq R_1;$$

если M_{12} – неизотропная компонента, то $M_{12}R_2 \subseteq R_1M_{12}$ по лемме 14 и

$$\begin{aligned}(M_{12}, M_{12}, R_2) &\subseteq (M_{12}M_{12})R_2 - M_{12}(M_{12}R_2) \subseteq M_{12}(M_{12}R_2) \subseteq M_{12}(R_1M_{12}) \\ &= M_{12}(R_1 \circ M_{12}) \subseteq (M_{12}R_1)M_{12} + (M_{12}M_{12})R_1 = (M_{12}M_{12})R_1 \subseteq R_1.\end{aligned}$$

II. Покажем, что $x_{12}(r_2 x_{21}) \in R_1$. Пусть $x_{12}(r_2 x_{21}) = \alpha e_1 + r_1$. Тогда, учитывая $r_2 x_{21} \cdot x_{12} \in R_2$ и $x_{21}(r_2 x_{21} \cdot x_{12}) \in x_{21}R_2 = 0$, имеем на основании тождества (3)

$$\begin{aligned}\alpha x_{21} + x_{21}r_1 &= x_{21} \cdot x_{12}(r_2 x_{21}) = x_{21}[x_{12}, r_2 x_{21}] \\ &= (x_{21}x_{12}) \cdot r_2 x_{21} - x_{21}(r_2 x_{21}) \cdot x_{12} \in R_2 x_{21}.\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq 0$, то $x_{21} \in x_{21}R_1 + R_2 x_{21}$, значит, $x_{21} = 0$. Противоречие.

III. Соотношение $x_{21}(r_1x_{12}) \in R_2$ вытекает из п. II после переименования идемпотентов.

IV. Докажем, что $R + R * M \triangleleft B$. Достаточно понять, что $(R * M) * M \subseteq R$, т. е. что четные элементы вида pqs , где $p, q, s \in R \cup M_{12} \cup M_{21}$, лежат в радикале R (расстановка скобок в силу п. I не имеет значения). Если произведение $\pi = pqs$ начинается или заканчивается элементом из R , то в силу п. I ясно, что $\pi \in R$. Итак, пусть $q \in R$, и можно считать без ограничения общности, что $q = r_1 \in R_1$. Тогда $\pi = x_{21}r_1x_{12} \in R_2$ ввиду п. III.

V. Из п. IV следует, что $R = 0$, т. е. A – полупростая алгебра.

ЛЕММА 17. *Супералгебра B емкости $n = 2$ изоморфна $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2,2}$ или $B_{2,2}(\nu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 16 следует, что $A = \Phi e_1 + \Phi e_2$. Кроме того, $M = \Phi x_{12} + \Phi x_{21}$.

Пусть $x_{12}x_{21} = \beta_1 e_1$, $x_{21}x_{12} = \beta_2 e_2$. Поскольку ввиду леммы 2

$$(x_{12}, x_{12}, x_{21}) = (x_{12}x_{12})x_{21} - x_{12}(x_{12}x_{21}) \in \Phi e_1 \cdot x_{21} + \Phi x_{12} \cdot e_1 = 0,$$

на основании (3) имеем $0 = (x_{12}, x_{12}, x_{21}) = (x_{12}, x_{21}, x_{12}) = \beta_1 x_{12} - \beta_2 x_{12}$, откуда $\beta_1 = \beta_2$.

Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то $x_{12}^2 \neq 0$, $x_{21}^2 \neq 0$. В самом деле, если $x_{12}^2 = 0$, то $\Phi x_{12} \triangleleft B$, что невозможно. Тогда $x_{12}^2 = e_1$, $x_{21}^2 = e_2$ и $B = B_{2,2}$. Если же $\beta = \beta_1 = \beta_2 \neq 0$, то, заменяя x_{21} на $\beta^{-1}x_{21}$, можно считать, что $x_{12}x_{21} = e_1$, $x_{21}x_{12} = e_2$.

Пусть $x_{12}^2 = \alpha_1 e_1$, $x_{21}^2 = \alpha_2 e_2$. Для скаляров α_1, α_2 возможны три случая:

- а) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$;
- б) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$;
- с) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

В случае а) сделаем замену $y_{12} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}x_{12}$, $y_{21} = \sqrt{\alpha_1}x_{21}$. Тогда $y_{12}^2 = e_1$, $y_{21}^2 = \nu e_2$, $y_{12}y_{21} = e_1$, $y_{21}y_{12} = e_2$. Значит, $B = B_{2,2}(\nu)$.

В случае б) без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$. Тогда такая замена, как в случае а), приводит к супералгебре $B = B_{2,2}(0)$.

Наконец, в случае с) получается, что B совпадает с ассоциативной супералгеброй $B = B_{2,2}(\Phi^2, *, *)$, где $*$ – стандартная инволюция на Φ^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если B – супералгебра емкости $n = 2$, то M неизотропна, т. е. содержит такой элемент x , что $x^2 \neq 0$. В случае б) таким элементом является $x_{12} + x_{21}$, $(x_{12} + x_{21})^2 = 1$. Однако в случае с) компоненты M_{12} и M_{21} изотропны.

§ 4. Супералгебры емкости 1

4.1. Полупростота четной части. Всюду в этом параграфе $A = \Phi \cdot 1 + R$, где $R = \text{Nil}(A)$ и $R^n = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Радикал R равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т. е. $R \neq 0$. Всюду в этом предложении

$$r, r_i, r'_i, r''_i, s_i, s_{ij}, s'_{ij}, r'_{ij}, s''_{ij} \in R.$$

Поскольку $(R, M, M) \subseteq R$ в силу свойства (B), то $(RM)M \subseteq R + (R, M, M) \subseteq R$. Отсюда в силу тождества (2) справедливо соотношение $RM(R \circ M) \subseteq R$. Значит, для нечетных элементов $x \in M \setminus (R * M)$, $y_i \in RM$, $z_i \in R \circ M$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha + r, & xy_i &= \beta_i + r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= \delta_i + r''_i, & z_i y_j &= \eta_{ij} + r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

Дальнейшее рассмотрение проведем в виде последовательности шагов.

I. Докажем, что $\beta_i = 0$, $\delta_i = 2\gamma_i$, $\eta_{ij} = 0$. Все следующие сравнения имеются в виду по mod $R * M$:

$$\begin{aligned} (x, y_i, x) &= (xy_i)x - x(y_i x) = (\beta_i + r_i)x - xs_i \equiv \beta_i x, \\ (x, x, y_i) &= (xx)y_i - x(xy_i) = (\alpha + r)y_i - x(\beta_i + r_i) \equiv -\beta_i x, \end{aligned}$$

значит, $\beta_i = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} (x, z_i, x) &= (xz_i)x - x(z_i x) = (\gamma_i + r'_i)x - x(\delta_i + r''_i) \equiv \gamma_i x - \delta_i x, \\ (x, x, z_i) &= (xx)z_i - x(xz_i) = (\alpha + r)z_i - x(\gamma_i + r'_i) \equiv -\gamma_i x, \end{aligned}$$

значит, $\delta_i = 2\gamma_i$. Аналогично,

$$(x, z_i, y_j) = (xz_i)y_j - x(z_i y_j) \equiv \eta_{ij} x, \quad (x, y_j, z_i) = (xy_j)z_i - x(y_j z_i) \equiv 0,$$

значит, $\eta_{ij} = 0$.

II. В силу п. I таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha + r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= 2\gamma_i + r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

III. Докажем, что можно считать $\alpha \neq 0$. Пусть $x^2 \in R$ для любого $x \in M \setminus (R * M)$. Тогда по модулю R имеем

$$(x + \lambda z_i)^2 = x^2 + \lambda(x \circ z_i) + \lambda^2 z_i^2 \equiv 3\lambda\gamma_i + \lambda^2 \xi_{ii}.$$

Следовательно, $3\gamma_i + \xi_{ii} = 0$, $6\gamma_i + 4\xi_{ii} = 0$, откуда следует, что $\gamma_i = \xi_{ii} = 0$ и $0 \equiv (z_i + z_j)^2 = 2\xi_{ij}$, таким образом, $\xi_{ij} = 0$. Стало быть, таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 &= r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= s''_{ij}. \end{aligned}$$

Наконец, отсюда вытекает, что $M^2 \subseteq R$ и $R + M$ – собственный идеал в B . Противоречие.

IV. Ввиду п. III можно считать, что таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= 2\gamma_i + r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

V. Докажем теперь, что $M/(R * M)$ одномерно. Допустим, что существуют два линейно независимых элемента x, y по модулю $R * M$ такие, что

$$x^2 = 1 + r, \quad y^2 = \beta + s, \quad xy = \gamma + p, \quad yx = \delta + q, \quad r, s, p, q \in R.$$

Тогда по модулю $R * M$ имеем

$$\begin{aligned} (x, y, x) &= (xy)x - x(yx) = (\gamma + p)x - x(\delta + q) \equiv \gamma x - \delta x, \\ (x, x, y) &= (xx)y - x(xy) = (\alpha + r)y - x(\gamma + p) \equiv y - \gamma x, \end{aligned}$$

т. е. $y - \gamma x \equiv \gamma x - \delta x$, $y + (\delta - 2\gamma)x \in R * M$. Противоречие.

VI. Обозначим через R^* подалгебру в алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}}(M)$ линейных операторов пространства M , порожденную операторами T_r умножения на элементы $r \in R$. Поскольку алгебра R^* нильпотентна, то, обозначая через N ее индекс нильпотентности, имеем

$$\begin{aligned} M &= \Phi x + MR^* = \Phi x + (\Phi x + MR^*)R^* = \Phi x + xR^* + M(R^*)^2 \\ &= \Phi x + xR^* + (\Phi x + MR^*)(R^*)^2 = \Phi x + xR^* + x(R^*)^2 + M(R^*)^3 = \dots \\ &\dots = \Phi x + xR^* + x(R^*)^2 + \dots + x(R^*)^{N-1} + M(R^*)^N \\ &= \Phi x + xR^* + x(R^*)^2 + \dots + x(R^*)^{N-1}. \end{aligned}$$

VII. Верно равенство $M = \Phi x + xR^* + x(R^*)^2 + \dots + x(R^*)^{2n-2}$, так как $R^n = 0$.

VIII. Покажем, что $\gamma_i = 0$. Пусть $Y = RM$. Тогда в силу п. IV имеем $Y * M \subseteq R$. Если $z_i = x \circ p_i$, где $p_i \in R$, то из п. IV получаем

$$x(x \circ p_i) = \gamma_i + r'_i, \quad (x \circ p_i)x = 2\gamma_i + r''_i.$$

Применяя правую альтернативность, преобразуем последние соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_i + r'_i &= x(x \circ p_i) = x^2 p_i + (xp_i)x = (1 + r)p_i + (xp_i)x = s_i + (xp_i)x, \\ 2\gamma_i + r''_i &= (x \circ p_i)x = (xp_i)x + (p_i x)x = (xp_i)x + yx = (xp_i)x + t_i, \end{aligned}$$

где $y \in Y$, $s_i, t_i \in R$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем $\gamma_i = 0$.

IX. Докажем, что $\xi_{ij} = 0$. Пусть Z – линейная оболочка векторов $z_1, z_2, \dots$. Если $r, s \in R$ и $z_i = x \circ r$, $z_j = x \circ s$, то в силу пп. IV, VIII имеем

$$\xi_{ij} \equiv z_i z_j = (x \circ r)(x \circ s) = (x \circ r)x \cdot s + (x \circ r)s \cdot x \in Yx + Zx \equiv 0 \pmod{R}.$$

X. Пусть $I = R + M'$, где $M' = R * M = Y + Z$. Проверим, что I – собственный идеал в B . В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} RR &\subseteq R, & R * M &\subseteq M', \\ R * M' &\subseteq R * M \subseteq M', & M * M' &= (\Phi x + Y + Z) * (Y + Z) \subseteq R. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Из предложения 8 и лемм 15, 16 вытекает теорема 1.

4.2. Доказательство теоремы 2. Пусть поле Φ алгебраически замкнуто и супералгебра B имеет емкость 1. Тогда $A = \Phi$ по теореме 1. Поскольку $x^2 \in \Phi$, то $(x, x, x) = x^2x - xx^2 = 0$, значит, $(x, x, y) + (x, y, x) + (y, x, x) = 0$, $2(x, x, y) + (y, x, x) = 0$.

Если $x^2 \neq 0$, то можно считать, что $x^2 = 1$. В этом случае $0 = y - 2x(xy) + (yx)x$, т.е. $y = 2(xy)x - (yx)x$, $M = \Phi x$ и $B = \Phi[\sqrt{1}] = B_{1,1}$.

Если $x^2 = 0$ для любого $x \in M$, то для любых $x, y \in M$ имеем $xy + yx = 0$. Поскольку $M^2 \neq 0$ (иначе $M \triangleleft B$), то существуют $x, y \in M$ такие, что $xy = 1$, и в силу (3) имеем $2(xy)z = 2z(xy) = z[x, y] = (zx)y - (zy)x$, откуда следует, что $M = \Phi x + \Phi y$. Наконец, $(x, x, y) = -x$, $(x, y, x) = (xy)x - x(yx) = 2x$, что противоречит правой альтернативности супералгебры B .

Если B имеет емкость ≥ 2 , то теорема 2 вытекает из лемм 15, 17.

4.3. Структура B при условии, что A – поле. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $B = \Gamma + M$ – центральная простая супералгебра и Γ – поле. Тогда B является либо ω -дублем $B(\Gamma, \tau, R_\omega)$ и τ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$, либо нерасщепляемым композиционным дублем $B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{char}(\Phi) = 0$ и $\Gamma := A$ – поле конечной степени $n \geq 2$ над Φ , всякое дифференцирование D поля Γ тривиально [20, с. 303], т.е. $D(\Gamma) = 0$. В частности, $(A, M, M) = 0$. Если a – примитивный элемент в Γ , то элементы a^i , $i = \overline{0, n-1}$, образуют базис пространства Γ над Φ .

Пусть Ω – алгебраическое замыкание поля Φ . Тогда супералгебра $B_\Omega = \Omega \otimes_\Phi B$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй абелева типа над полем Ω , четная часть которой – коммутативная и ассоциативная Ω -алгебра размерности n , следовательно, в силу теоремы 2 ее нечетная часть M_Ω также имеет размерность n , но в таком случае $\dim_\Phi(M) = n$. Далее, если $0 \neq x \in M$, то элементы $a^i x$, $i = \overline{0, n-1}$, линейно независимы над Φ и, значит, образуют Φ -базис M . Тогда $M = \Gamma x$. Определим отображение $*$: $\Gamma \rightarrow \Gamma$, положив $xb = b^*x$. Легко понять, что это отображение линейно над Φ и $(bc)^* = b^*c^*$. Наконец, если $b^* = 0$, то $xb = 0$, и если $b \neq 0$, то $0 = (xb)b^{-1} = x$. Противоречие. Таким образом, доказано, что $*$ – автоморфизм поля Γ .

Если $*$ = Id, то $[M, \Gamma] = 0$ и $a(xy) = (xy)a = -(xa)y + 2x(ya)$ ввиду (2). Кроме того, $xa = ax$ и $(a, x, y) = 0$, значит, $a(xy) = x(ya)$, $(x, y, a) = 0$, т.е. B – супералгебра над полем Γ . Тем самым, $B = B(\Phi, \text{Id}, R_\omega)$, где $x^2 = \omega \neq 0$, т.е. получаем супералгебру вида $B(\Gamma, \tau, R_\omega)$.

Итак, можно считать, что $*$ $\neq$ Id. Поскольку x – произвольный ненулевой элемент из M , то в силу леммы 15, замечания 3 и п. 4.2 можно считать, что $x^2 = \omega \neq 0$. Положим $\zeta = (x, x, a)$. Тогда на основании правого тождества Муфанг имеем

$$(x, a, a^i x) = (x, a, x)a^i = a^i(x, a, x) = -a^i \zeta.$$

Отсюда $xa \cdot a^i x - x \cdot a^{i+1} x = -a^i \zeta$ или $x \cdot a^{i+1} x = xa \cdot a^i x + a^i \zeta = a^*(x \cdot a^i x) + a^i \zeta$.

Итак, полагая $x_0 = x$, $x_{i+1} = ax_i$, $i < n$, имеем

$$x \cdot x_1 = x(ax) = xa \cdot x - (x, a, x) = a^* \omega + \zeta$$

и по индукции легко проверяем, что

$$x \cdot x_k = (a^*)^k \omega + \frac{(a^*)^k - a^k}{a^* - a} \zeta,$$

следовательно, $\bar{1} \cdot \bar{g} = g^* \omega + \frac{g^* - g}{a^* - a} \zeta$, где $\bar{g} = gx$, и для любых $f, g \in \Phi(a)$ верно

$$\bar{f} \cdot \bar{g} = f \cdot g^x, \quad \bar{f} = fx, \quad g^x = g^* \omega + \frac{g^* - g}{a^* - a} \zeta.$$

Положим $\mu = -(a^* - a)^{-1} \zeta$, $\lambda = \omega - \mu$. Тогда $g^x := \lambda g^* + \mu g$, значит, χ – линейный оператор пространства Γ над Φ .

Итак, $B = B(\Gamma, *, \chi)$. Тогда ввиду п. 1.5 получаем, что супералгебра B является либо ω -дублем поля Γ , либо нерасщепляемым композиционным дублем $B_{2,2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим супералгебру $B_\Omega = \Omega \otimes_\Phi B$, где Ω – алгебраическое замыкание поля Φ . Если $r \in R = \text{Nil}(A)$, то $r \otimes 1$ нильпотентен, значит, $r \otimes 1 \in R_\Omega = \text{Nil}(A_\Omega)$. Поскольку B_Ω – центральная простая супералгебра, то, значит, $R_\Omega = 0$ на основании результатов из § 3, 4.

Таким образом, $A = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$ – прямая сумма полей, и в силу изложенного в § 4 можно считать, что $n \geq 2$. Пусть $d_i = \dim_\Phi \Gamma_i$, $d = d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Далее,

$$A_\Omega = (\Gamma_1)_\Omega \oplus \dots \oplus (\Gamma_n)_\Omega, \quad (\Gamma_i)_\Omega = \Omega e_{i,1} \oplus \dots \oplus \Omega e_{i,d_i}.$$

Пусть e_i – единица поля Γ_i и $E_i = \{e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i}\}$ – полная ортогональная система идемпотентов алгебры $(\Gamma_i)_\Omega$, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ – полная ортогональная система идемпотентов алгебры A_Ω . Тогда по теореме 1 имеем $\dim_\Omega(M_\Omega) = d$ и пространство M_Ω является E -циклическим, т.е. $M_\Omega = g_1 M_\Omega g_2 \oplus g_2 M_\Omega g_3 \oplus \dots \oplus g_{d-1} M_\Omega g_d \oplus g_d M_\Omega g_1$ – прямая сумма одномерных Ω -пространств, а $(g_1, g_2, \dots, g_d)$ – некоторая перестановка идемпотентов системы E . Среди пространств $g_k M_\Omega g_l$ ровно d_i из них начинаются с идемпотентов $g_k \in E_i$, следовательно, сумма всех таких слагаемых совпадает с пространством $(e_i M)_\Omega$. Таким образом, $\dim_\Phi(e_i M) = d_i$, и поскольку Γ_i – поле степени d_i над Φ , то $e_i M = \Gamma_i x$ для подходящего элемента x . Запишем этот элемент в виде $x = x e_1 + \dots + x e_n$. В силу предыдущего ясно, что $x e_i = 0$, поскольку $(e_i M)_\Omega$ состоит из слагаемых $g_k M_\Omega g_l$, где $k \neq l$. Если $x = \dots + x e_p + \dots + x e_q + \dots$ записано в виде суммы ненулевых слагаемых и таких слагаемых по крайней мере два, т.е. $p \neq q$, то $e_i M \supseteq \Gamma_i x e_p \oplus \Gamma_i x e_q$, значит, $d_i = \dim_\Phi(e_i M) \geq 2d_i$, что невозможно.

Тем самым доказано, что M как пространство над полем Φ разлагается в прямую сумму ненулевых компонент: $M = M_{12} \oplus M_{23} \oplus \dots \oplus M_{n-1,n} \oplus M_{n1}$, и $\dim_\Phi M_{ij} = d_i$.

Поскольку M_{ij} является левым линейным пространством над полем Γ_i и правым пространством над Γ_j , то $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d_1$. Отсюда следует, что

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n,$$

$$\dim_\Phi M_{12} = \dim_\Phi M_{23} = \dots = \dim_\Phi M_{n-1,n} = \dim_\Phi M_{n1} = d_1.$$

Докажем, что все алгебры $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ изоморфны. Заметим, что $M_{12} = \Gamma_1 x = x \Gamma_2$ для любого ненулевого $x \in M_{12}$. Рассмотрим отображение $\tau_2: \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$, определенное правилом $a = b^{\tau_2}$, если $ax = xb$. Легко проверить, что τ_2 – изоморфизм алгебр.

Если компонента M_{12} неизотропна, то существует $x \in M_{12}$ такой, что $x^2 = \omega_1 e_1 \neq 0$. Заметим, что $M_{12} \cdot A e_1 = M_{12} \cdot e_1 A = M_{12} e_1 \cdot A = 0$. Пусть $a, b \in \Gamma_1$. Тогда ввиду (2)

$$(ax)(bx) = (ax)b \cdot x - (ax, b, x) = -(ax, b, x) = (ax, x, b) = (ax \cdot x)b = a\omega_1 b = ab\omega_1.$$

При $n \geq 3$ все компоненты M_{ij} неизотропны и различные компоненты перемножаются нулевым образом в силу леммы 1, значит, умножение в супералгебре B определяется обратимым элементом $\omega = \omega_1 e_1 + \dots + \omega_n e_n \in \Gamma_1 e_1 + \dots + \Gamma_n e_n$ и набором автоморфизмов $(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Тем самым супералгебра B изоморфна циклическому ω -дублю $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$, причем выполнено заключение предложения 6, т. е. группа $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$ порождается элементом $\tau = \tau_1 \circ \tau_n \circ \tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_2$.

Если $n = 1$, то воспользуемся предложением 9.

Итак, можно считать, что $n = 2$. Тогда $A = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \simeq \Gamma$, $M_{12} = \Gamma e_1 x_{12}$, $M_{21} = \Gamma e_2 x_{21}$. Следуя доказательству леммы 17, положим

$$x_{12}^2 = \omega_1 e_1, \quad x_{21}^2 = \omega_2 e_2, \quad x_{12} x_{21} = \beta e_1, \quad x_{21} x_{12} = \beta e_2, \quad \beta \in \Gamma.$$

Если $\beta = 0$, то B изоморфна ω -дублю $B(\Gamma^2, \tau_1 + \tau_2, \omega_1 + \omega_2)$ при условии, что $\tau_1 \circ \tau_2$ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$.

Если $\beta \neq 0$, то можно считать, что $\beta = 1$, т. е. $x_{12} x_{21} = e_1$, $x_{21} x_{12} = e_2$. В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 x_{12}, x_{21}, b_1 e_1) + (a_1 x_{12}, b_1 e_1, x_{21}) = (a_1 x_{12}, x_{21}, b_1 e_1) \\ &= (a_1 x_{12} \cdot x_{21}) b_1 e_1 - (a_1 x_{12})(x_{21} b_1 e_1) = a_1 b_1 e_1 - (a_1 x_{12})(b_1^{\tau_1} \cdot x_{21}), \end{aligned}$$

значит, $(a_1 x_{12})(b_1^{\tau_1} \cdot x_{21}) = a_1 b_1 e_1$, $(a_1 x_{12})(b_2 x_{21}) = a_1 b_2^{\tau_1^{-1}} e_1$. Аналогично, $(b_2 x_{21})(a_1 x_{12}) = b_2 a_1^{\tau_2^{-1}} e_2$.

Пусть $\overline{a_1} = a_1 x_{12}$, $\overline{a_2} = a_2 x_{21}$, где $a_1 \in \Gamma e_1$, $a_2 \in \Gamma e_2$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \overline{b_1} &= \overline{a_1 b_1}, & \overline{b_1} \cdot a_2 &= \overline{b_1 a_2^{\tau_2}}, & a_2 \cdot \overline{b_1} &= \overline{b_1} \cdot a_1 = \overline{0}, \\ \overline{b_2} \cdot a_1 &= \overline{b_2 a_1^{\tau_1}}, & a_2 \cdot \overline{b_2} &= \overline{a_2 b_2}, & a_1 \cdot \overline{b_2} &= \overline{b_2} \cdot a_2 = \overline{0}, \\ \overline{a_1} \cdot \overline{b_1} &= a_1 b_1 \omega_1, & \overline{a_1} \cdot \overline{b_2} &= a_1 b_2^{\tau_1^{-1}}, & \overline{b_2} \cdot \overline{a_1} &= b_2 a_1^{\tau_2^{-1}}, & \overline{a_2} \cdot \overline{b_2} &= a_2 b_2 \omega_2. \end{aligned}$$

Поскольку выполнены равенства

$$\begin{aligned} (\overline{a_1}, \overline{b_1}, \overline{b_2}) &= (\overline{a_1} \cdot \overline{b_1}) \cdot \overline{b_2} - \overline{a_1} \cdot (\overline{b_1} \cdot \overline{b_2}) = a_1 b_1 \omega_1 \cdot \overline{b_2} - \overline{a_1} \cdot b_1 b_2^{\tau_1^{-1}} = 0, \\ (\overline{a_1}, \overline{b_2}, \overline{b_1}) &= (\overline{a_1} \cdot \overline{b_2}) \cdot \overline{b_1} - \overline{a_1} \cdot (\overline{b_2} \cdot \overline{b_1}) = a_1 b_2^{\tau_1^{-1}} \cdot \overline{b_1} - \overline{a_1} \cdot b_2 b_1^{\tau_2^{-1}} \\ &= \overline{a_1 b_2^{\tau_1^{-1}} b_1} - \overline{a_1 (b_2 b_1^{\tau_2^{-1}})^{\tau_2}}, \end{aligned}$$

в силу (3) имеем $a_1 b_2^{\tau_1^{-1}} b_1 = a_1 (b_2 b_1^{\tau_2^{-1}})^{\tau_2}$, т. е. $b_2^{\tau_1^{-1}} = b_2^{\tau_2}$, $\tau_1^{-1} = \tau_2$, $\tau_1 \circ \tau_2 = \text{Id}$.

Докажем, что $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in Z_0(B)$, если $a_1^{\tau_1} = a_2$. Пусть $x = \overline{b_1} + \overline{b_2}$, $y = \overline{c_1} + \overline{c_2}$.

Вычислим $[x, a]$ и (x, y, a) . Имеем

$$[x, a] = -a_1 \overline{b_1} + \overline{b_1} a_2 + \overline{b_2} a_1 - a_2 \overline{b_2} = -\overline{a_1 b_1} - \overline{a_2 b_2} + \overline{b_1 a_2^{\tau_2}} + \overline{b_2 a_1^{\tau_1}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} xy &= (\overline{b_1} + \overline{b_2})(\overline{c_1} + \overline{c_2}) = b_1 c_1 \omega_1 + b_1 c_2^{\tau_2} + b_2 c_1^{\tau_1} + b_2 c_2 \omega_2, \\ (xy)a &= a_1 b_1 c_1 \omega_1 + a_1 b_1 c_2^{\tau_2} + a_2 b_2 c_1^{\tau_1} + a_2 b_2 c_2 \omega_2, \\ ya &= (\overline{c_1} + \overline{c_2})(a_1 + a_2) = \overline{c_1} \cdot a_2 + \overline{c_2} \cdot a_1 = \overline{c_1 a_2^{\tau_2}} + \overline{c_2 a_1^{\tau_1}}, \\ x(ya) &= b_1 c_1 a_2^{\tau_2} \omega_1 + b_1 (c_2 a_1^{\tau_1})^{\tau_2} + b_2 (c_1 a_2^{\tau_2})^{\tau_1} + b_2 c_2 a_1^{\tau_1} \omega_2 \\ &= b_1 c_1 a_2^{\tau_2} \omega_1 + a_1 b_1 c_2^{\tau_2} + a_2 b_2 c_1^{\tau_1} + a_1^{\tau_1} b_2 c_2 \omega_2, \end{aligned}$$

значит,

$$0 = (x, y, a) = (xy)a = (a_1 - a_2^{\tau_2})b_1 c_1 \omega_1 + (a_2 - a_1^{\tau_1})b_2 c_2 \omega_2.$$

Отсюда имеем $[x, a] = (x, y, a) = 0$ для любых x, y , только если $a_1^{\tau_1} = a_2$. Итак, элемент $a_1 e_1 + a_1^{\tau_1} e_2$ централен для любого $a_1 \in \Gamma$. Отсюда в силу центральности супералгебры B вытекает, что $\Gamma = \Phi$. Значит, $B = M_{1|1}(\Phi)$ или $B = B_{2,2}(\nu)$.

§ 6. Матричные представления, автоморфизмы и дифференцирования

6.1. Матричные представления супералгебр $B_{2,2}(\nu)$ и $B_{n,n}$. Положим $e_{11} = e_1$, $e_{22} = e_2$. Поскольку умножение в $B_{2,2}(\nu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} e_{ii} e_{jj} &= \delta_{ij} e_{ii}, & e_{ii} x_{jk} &= \delta_{ij} x_{jk}, & x_{ij} e_{kk} &= \delta_{jk} x_{ij}, \\ x_{12}^2 &= x_{12} x_{21} = e_{11}, & x_{21} x_{12} &= e_{22}, & x_{21}^2 &= \nu e_{22}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11} e_{11} + \beta_{12} x_{12} + \gamma_{21} x_{21} + \delta_{22} e_{22})(\lambda_{11} e_{11} + \mu_{12} x_{12} + \xi_{21} x_{21} + \eta_{22} e_{22}) \\ &= \alpha_{11} \lambda_{11} e_{11} + \lambda_{11} \gamma_{21} x_{21} + \alpha_{11} \mu_{12} x_{12} + \beta_{12} \mu_{12} e_{11} + \gamma_{21} \mu_{12} e_{22} \\ &\quad + \beta_{12} \xi_{21} e_{11} + \gamma_{21} \xi_{21} \nu e_{22} + \delta_{22} \xi_{21} x_{21} + \beta_{12} \eta_{22} x_{12} + \delta_{22} \eta_{22} e_{22} \\ &= (\alpha_{11} \lambda_{11} + \beta_{12} \mu_{12} + \beta_{12} \xi_{21}) e_{11} + (\alpha_{11} \mu_{12} + \beta_{12} \eta_{22}) x_{12} \\ &\quad + (\lambda_{11} \gamma_{21} + \delta_{22} \xi_{21}) x_{21} + (\delta_{22} \eta_{22} + \gamma_{21} \mu_{12} + \gamma_{21} \xi_{21} \nu) e_{22}. \end{aligned}$$

Записывая $\alpha_{11} e_{11} + \beta_{12} x_{12} + \gamma_{21} x_{21} + \delta_{22} e_{22}$ в виде матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \mu_{12} \\ \xi_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} \lambda_{11} + \beta_{12} \xi_{21} + \beta_{12} \mu_{12} & \alpha_{11} \mu_{12} + \beta_{12} \eta_{22} \\ \lambda_{11} \gamma_{21} + \delta_{22} \xi_{21} & \delta_{22} \eta_{22} + \gamma_{21} \mu_{12} + \gamma_{21} \xi_{21} \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \mu_{12} \\ \xi_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{12} \mu_{12} & 0 \\ 0 & \nu \gamma_{21} \xi_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что умножение в супералгебре $B_{2,2}(\nu)$ напоминает умножение в векторно-матричной алгебре Цорна.

Теперь, записывая элемент $\alpha e_1 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta e_2$ супералгебры $B_{2,2}$ в виде матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\beta' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Обозначая через a_1, a_2 строки матрицы a , а через a^1, a^2 ее столбцы, получаем

$$a * b = \begin{pmatrix} (a_1, b_1) & a_1 \cdot b^2 \\ a_2 \cdot b^1 & (a_2, b_2) \end{pmatrix},$$

где (u, v) – скалярное произведение.

6.2. Об изоморфизме супералгебр $B_{2,2}(\nu)$ и $B_{2,2}(\nu')$. Дадим описание $B_{2,2}(\nu)$ в терминах определяющих соотношений: e_1, e_2 – полная ортогональная система идемпотентов,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \Phi x_{12}, & M_{21} &= \Phi x_{21}, \\ x_{12}^2 &= x_{12}x_{21} = e_1, & x_{21}x_{12} &= e_2, & x_{21}^2 &= \nu e_2. \end{aligned}$$

Если $\nu \neq 0$, то существует автоморфизм (сопряжение), продолжающий стандартную инволюцию $*$. В самом деле, сопоставление

$$g_1 := e_2, \quad g_2 := e_1, \quad y_{12} := \frac{1}{\sqrt{\nu}}x_{21}, \quad y_{21} := \sqrt{\nu}x_{21}$$

является автоморфизмом:

$$\begin{aligned} y_{12}^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}x_{21} \right)^2 = \frac{1}{\nu}x_{21}^2 = e_2 = g_1, & y_{12}y_{21} &= x_{21}x_{12} = e_2 = g_1, \\ y_{21}y_{12} &= x_{12}x_{21} = e_1 = g_2, & y_{21}^2 &= (\sqrt{\nu}x_{12})^2 = \nu e_1 = \nu g_2. \end{aligned}$$

Если $\nu = 0$, то легко видеть, что автоморфизм ξ супералгебры $B_{2,2}(0)$ является тождественным отображением на ее четной части, поскольку сохраняет компоненту M_{21} , состоящую из всех изотропных векторов, значит, $x_{12}^\xi = \pm x_{12}$, $x_{21}^\xi = \mp x_{21}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Имеем изоморфизм $B_{2,2}(\nu) \simeq B_{2,2}(\nu')$ тогда и только тогда, когда $\nu = \nu'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi: B_{2,2}(\nu) \rightarrow B_{2,2}(\nu')$ – изоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $\nu \neq 0$ и ψ действует тождественно на четной части, иначе следует рассмотреть произведение ψ на сопряжение.

Положим $y_{12} = x_{12}\psi$, $y_{21} = x_{21}\psi$. Поскольку $x_{12}^2 = e_1$, $x_{12}x_{21} = e_1$, $x_{21}x_{12} = e_2$, $x_{21}^2 = \nu e_2$, то $y_{12}^2 = e_1$, $y_{12}y_{21} = e_1$, $y_{21}y_{12} = e_2$, $y_{21}^2 = \nu e_2$. Далее, найдутся такие скаляры $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, что $y_{12} = \varphi_1 x'_{12}$, $y_{21} = \varphi_2 x'_{21}$, где x'_{12}, x'_{21} – канонический базис $B_{2,2}(\nu')$. Следовательно, $\varphi_1^2 = 1$, $\varphi_1\varphi_2 = 1$, откуда $\varphi_1 = \pm 1$, $\varphi_2 = \mp 1$. Стало быть, $(x'_{21})^2 = \nu' e_2$ и $y_{21}^2 = (\varphi_2 x'_{21})^2 = \nu' e_2$. Учитывая, что $y_{21}^2 = \nu e_2$, получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\nu \neq 0$, то $\text{Aut}(B_{2,2}(\nu)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Кроме того, имеем изоморфизм $\text{Aut}(B_{2,2}(0)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Отметим, что $\text{Aut}(B_{n,n}) \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_n$.

6.3. Дифференцирования супералгебр $B_{2,2}(\nu)$ и $B_{n,n}$. Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *четным дифференцированием*, если $D(B_0) \subseteq B_0$, $D(B_1) \subseteq B_1$ и для любых $x, y \in B_0 \cup B_1$

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Всякое четное дифференцирование D тривиально на четной части, поскольку $D(e) = 0$ для любого идемпотента e . Пусть $D \in \text{Der}(B_{2,2}(\nu))_0$ – четное дифференцирование. Тогда

$$D(x_{12}) = \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}, \quad D(x_{21}) = \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = D(e_1) &= D(x_{12}^2) = (\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}) \circ x_{12} = (2\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + \alpha_2 e_2, \\ 0 = D(\nu e_2) &= D(x_{21}^2) = (\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}) \circ x_{21} = \beta_1 e_1 + (\beta_1 + 2\nu\beta_2^2)e_2, \end{aligned}$$

значит, $D = 0$, если $\nu \neq 0$. Если же $\nu = 0$, то $D(x_{12}) = 0$, $D(x_{21}) = \beta x_{21}$ и

$$0 = D(e_1) = D(x_{12}x_{21}) = x_{12}D(x_{21}) = x_{12} \cdot \beta x_{21} = \beta e_1,$$

откуда $\beta = 0$ и $D = 0$.

Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *нечетным дифференцированием*, если $D(B_0) \subseteq B_1$, $D(B_1) \subseteq B_0$ и для любых $x, y \in B_0 \cup B_1$

$$D(xy) = D(x)y + (-1)^x xD(y).$$

Если $D \in \text{Der}(B_{2,2}(\nu))_1$ – нечетное дифференцирование, то положим

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}, & D(e_2) &= \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}, \\ D(x_{12}) &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, & D(x_{21}) &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 &= D(x_{12}) = D(e_1 x_{12}) = D(e_1) \cdot x_{12} + e_1 \cdot D(x_{12}) \\ &= (\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21})x_{12} + \lambda_1 e_1 = (\alpha_1 + \lambda_1)e_1 + \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

значит, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \lambda_2$ и $D(e_1) = \lambda_2 x_{21}$. Аналогично,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = D(x_{12}e_2) = \lambda_2 e_2 - x_{12}(\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}) = -(\beta_1 + \beta_2)e_1 + \lambda_2 e_2,$$

откуда получаем $\beta_1 + \beta_2 = -\lambda_1$. Далее,

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = D(e_2 x_{21}) = (\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21})x_{21} + \mu_2 e_2 = \beta_1 e_1 + (\beta_2 \nu + \mu_2)e_2,$$

значит, $\beta_1 = \mu_1$, $\beta_2\nu = 0$. Точно так же имеем

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = D(x_{21} e_1) = \mu_1 e_1 - x_{21} \lambda_2 x_{21} = \mu_1 e_1 - \lambda_2 \nu e_2,$$

следовательно, $\mu_2 = -\lambda_2 \nu$. Кроме того,

$$\lambda_2 x_{21} = D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12}) x_{12} - x_{12} D(x_{12}) = \lambda_1 x_{12} - \lambda_2 x_{21},$$

откуда получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Также имеем

$$\mu_1 x_{12} + \beta_2 x_{21} = D(e_2) = D(x_{21} x_{12}) = D(x_{21}) x_{12} = (\mu_1 e_1 - \lambda_2 \nu e_2) x_{12} = \mu_1 x_{12},$$

тогда $\beta_2 = 0$. Итак, $D(e_1) = 0$, $D(e_2) = \mu_1 x_{12}$, $D(x_{12}) = 0$, $D(x_{21}) = \mu_1 e_1$. Наконец,

$$\nu \mu_1 x_{12} = D(\nu e_2) = D(x_{21}^2) = D(x_{21}) x_{21} - x_{21} D(x_{21}) = -\mu_1 x_{21},$$

значит, $\mu_1 = 0$ и $D = 0$.

Теперь рассмотрим дифференцирования супералгебры $B_{n,n}$. Пусть D – четное дифференцирование. Тогда $D(x_{12}) = D(e_1 x_{12} e_2) = e_1 D(x_{12}) e_2$, поскольку $D(e_i) = 0$, значит, $D(x_{12}) = \alpha_1 x_{12}$. Далее, $0 = D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12}) \circ x_{12} = 2\alpha_1 e_1$, т. е. $D(x_{12}) = 0$, следовательно, $D = 0$.

Пусть теперь D – нечетное дифференцирование супералгебры $B_{n,n}$. Покажем сначала, что $D(e_i) = 0$. В самом деле, поскольку для любых $x, y \in M$ имеем $[x, y] = 0$, то

$$D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12}) \cdot x_{12} - x_{12} \cdot D(x_{12}) = [D(x_{12}), x_{12}] = 0.$$

Если $D(x_{12}) = \dots + \alpha_i e_i + \dots$ и $\alpha_i \neq 0$ при $i \geq 2$, то имеем

$$0 = D(x_{12} \cdot x_{i,i+1}) = D(x_{12}) \cdot x_{i,i+1} - x_{12} \cdot D(x_{i,i+1}) = \alpha_i x_{i,i+1} - \beta x_{12},$$

что невозможно. Следовательно, $D(x_{i,i+1}) = \alpha_i e_i$ для любого $i \leq n-1$ и, аналогично, $D(x_{n1}) = \alpha_n e_n$. Значит, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. При $n = 2$ точно так же проверяется, что $D = 0$.

Итак, $\text{Der}(B_{n,n}) = 0$ при $n \geq 2$. Это равенство верно и при $n = 1$.

Поскольку при расширении основного поля автоморфизм супералгебры B можно продолжить до автоморфизма супералгебры B_Ω , группа автоморфизмов простой конечномерной правоальтернативной супералгебры B абелева типа является абелевой. Точно так же всякое дифференцирование супералгебры B равно нулю.

Список литературы

1. Е. И. Зельманов, И. П. Шестаков, “Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 676–693; англ. пер.: E. I. Zel'manov, I. P. Shestakov, “Prime alternative superalgebras and nilpotence of the radical of a free alternative algebra”, *Math. USSR-Izv.*, **37**:1 (1991), 19–36.
2. С. Т. С. Уолл, “Graded Brauer groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **213** (1964), 187–199.

3. V. G. Кас, “Classification of simple Z -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras”, *Comm. Algebra*, **5**:13 (1977), 1375–1400.
4. И. П. Шестаков, “Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики”, *Алгебра и логика*, **36**:6 (1997), 675–716; англ. пер.: I. P. Shestakov, “Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic”, *Algebra and Logic*, **36**:6 (1997), 389–412.
5. И. П. Шестаков, “Простые $(-1, 1)$ -супералгебры”, *Алгебра и логика*, **37**:6 (1998), 721–739; англ. пер.: I. P. Shestakov, “Simple $(-1, 1)$ -superalgebras”, *Algebra and Logic*, **37**:6 (1998), 411–422.
6. M. L. Racine, E. I. Zelmanov, “Simple Jordan superalgebras”, *Non-associative algebra and its applications* (Oviedo, 1993), Math. Appl., **303**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, 344–349.
7. C. Martinez, E. Zelmanov, “Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic”, *J. Algebra*, **236**:2 (2001), 575–629.
8. В. Н. Желябин, И. П. Шестаков, “Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:5 (2004), 1046–1072; англ. пер.: V. N. Zhelyabin, I. P. Shestakov, “Simple special Jordan superalgebras with associative even part”, *Siberian Math. J.*, **45**:5 (2004), 860–882.
9. А. П. Пожидаев, И. П. Шестаков, “Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ ”, *Алгебра и логика*, **49**:1 (2010), 26–59; англ. пер.: A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov, “Noncommutative Jordan superalgebras of degree $n > 2$ ”, *Algebra and Logic*, **49**:1 (2010), 18–42.
10. А. П. Пожидаев, И. П. Шестаков, “Простые конечномерные некоммутирующие йордановы супералгебры характеристики 0”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:2 (2013), 389–406; англ. пер.: A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov, “Simple finite-dimensional noncommutative Jordan superalgebras of characteristic 0”, *Siberian Math. J.*, **54**:2 (2013), 301–316.
11. *Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей*, Сост. В. Т. Филиппов, В. К. Харченко, И. П. Шестаков, 4-е изд., ИМ СО РАН, Новосибирск, 1993, 74 с.; англ. пер.: V. T. Filippov, I. P. Shestakov, V. K. Kharchenko, “Dniester notebook: unsolved problems in the theory of rings and modules”, *Non-associative algebra and its applications*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **246**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006, 461–516.
12. J. P. Silva, L. S. I. Murakami, I. P. Shestakov, “On right alternative superalgebras”, *Comm. Algebra* (to appear).
13. K. McCrimmon, “Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras”, *J. Algebra*, **149**:2 (1992), 326–351.
14. S. V. Pchelintsev, I. P. Shestakov, “Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type”, *J. Algebra*, **423** (2015), 54–86; preprint MPIM 13-55, Preprint Series, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2013, 34 pp., <http://www.mpim-bonn.mpg.de/node/263>.
15. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978, 431 с.; англ. пер.: K. A. Zhevlakov, A. M. Slin’ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Pure Appl. Math., **104**, Academic Press, Inc., New York–London, 1982, xi+371 pp.
16. E. Kleinfeld, “Right alternative rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:6 (1953), 939–944.
17. A. A. Albert, “The structure of right alternative algebras”, *Ann. of Math.* (2), **59**:3 (1954), 408–417.

18. И. М. Михеев, “О простых правоальтернативных кольцах”, *Алгебра и логика*, **16**:6 (1977), 682–710; англ. пер.: I. M. Miheev, “Simple right alternative rings”, *Algebra and Logic*, **16**:6 (1977), 456–476.
19. В. Г. Скосырский, “Правоальтернативные алгебры”, *Алгебра и логика*, **23**:2 (1984), 185–192; англ. пер.: V. G. Skosyrskii, “Right-alternative algebras”, *Algebra and Logic*, **23**:2 (1984), 131–136.
20. С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968, 564 с.; пер. с англ.: S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965, xvii+508 pp.

СЕРГЕЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ ПЧЕЛИНЦЕВ
(SERGEI V. PCHELINTSEV)

Финансовый университет при Правительстве РФ,
г. Москва

E-mail: pchelinzev@mail.ru

Поступило в редакцию
13.05.2014

ОЛЕГ ВЛАДИМИРОВИЧ ШАШКОВ
(OLEG V. SHASHKOV)

Московский государственный областной
гуманитарный институт,
г. Орехово-Зуево, Московская обл.

E-mail: o.v.shashkov@yandex.ru