Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Уси-
ление теоремы Бургейна–Конторовича. III, *Изв. РАН.
Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 77–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 04:43:29

УДК 511.321+511.31

И. Д. Кан

Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. III

Доказано, что в натуральном ряду чисел имеется положительная пропорция знаменателей тех конечных цепных дробей, все неполные частные которых принадлежат алфавиту $\{1, 2, 3, 4, 10\}$. Ранее аналогичная теорема была известна лишь для алфавита $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, либо для алфавитов большей мощности.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: цепная дробь, континуант, тригонометрическая сумма, гипотеза Зарембы.

DOI: 10.4213/im8253

Посвящается светлой памяти Н. М. Коробова

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Через $[d_1, d_2, \dots, d_k]$ обозначена конечная цепная дробь

$$[d_1, d_2, \dots, d_k] = \frac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d_k}}}} \quad (1.1)$$

с натуральными неполными частными $d_1, d_2, \dots, d_k$ (где k – натуральное число), а через $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ – множество рациональных чисел $\frac{b}{d}$, представимых конечными цепными дробями с неполными частными из некоторого конечного алфавита $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ (всюду далее $|\mathcal{A}| \geq 2$):

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} = \left\{ \frac{b}{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k] \mid d_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ обозначено множество знаменателей d чисел $\frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \mid \exists b: (b, d) = 1, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\}.$$

Наконец, через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)$ для каждого $N \in \mathbb{N}$ обозначено множество чисел из $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$, не превосходящих N :

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) = \{d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \mid d \leq N\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00681-а).

ГИПОТЕЗА 1.1 (гипотеза Зарембы [1], 1971). Существует константа A (скорее всего, $A = 5$) такая, что при любом $N \in \mathbb{N}$ для алфавита

$$\mathcal{A} = 1, 2, \dots, A \quad (1.2)$$

имеет место равенство $|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)| = N$.

Подробный обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, можно найти в работах [2], [3]. Отметим лишь, что пропагандистом и энтузиастом этой темы задолго до 1971 г. был профессор Н. М. Коробов. Он, в частности, доказал [4], что для простого d существует натуральное число $b < d$ такое, что $\frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ для алфавита $\mathcal{A}$ вида (1.2) при $A \leq \log d$.

Для фиксированного алфавита $\mathcal{A}$ число d называется *допустимым* [2], если при любом $q > 1$ множество $D_{\mathcal{A}}$ содержит число, сравнимое с d по модулю q . Множество допустимых чисел обозначается через $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}$.

Пусть $\delta_{\mathcal{A}}$ – хаусдорфова размерность множества бесконечных цепных дробей с неполными частными из произвольного конечного алфавита $\mathcal{A}$. Дж. Бургейн и А. Конторович в 2011 г. доказали, в частности, следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1 [2, теорема 1.25]. Для каждого алфавита $\mathcal{A}$ такого, что

$$\delta_{\mathcal{A}} > \frac{307}{312} = 0.9839\dots, \quad (1.3)$$

справедливо неравенство (“положительная пропорция”):

$$|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)| \gg N. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1.2 [2, теорема 1.27]. Для каждого алфавита $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию (1.3), существует подмножество $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$, содержащее почти все допустимые числа, т. е. найдется константа $c = c(\mathcal{A}) > 0$ такая, что

$$\frac{|\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}} \cap [\frac{N}{2}, N]|}{|\mathfrak{A}_{\mathcal{A}} \cap [\frac{N}{2}, N]|} = 1 + O(\exp\{-c(\log N)^{\frac{1}{2}}\}). \quad (1.5)$$

Следовательно, равенство (1.5) имеет место при замене $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}$ на $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$. Кроме того, каждое число $d \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}$ появляется с кратностью

$$\gg N^{2\delta_{\mathcal{A}} - \frac{1001}{1000}}. \quad (1.6)$$

Результаты, полученные Д. Хенсли в [5], дают веские основания предполагать, что неравенству (1.3) удовлетворяет алфавит (1.2) при $A = 50$ (но не при $A = 34$ – ввиду результатов Дженкинсона [6]).

Автор настоящей статьи совместно с Д. А. Фроленковым (см. [7]–[10]) усилили первую из упомянутых теорем Бургейна–Конторовича. Усиление состояло в понижении достаточной оценки снизу величины $\delta_{\mathcal{A}}$ вида (1.3) при сохранении итогового неравенства (1.4). Так, в работе [10] неравенство (1.4) было доказано лишь при условии

$$\delta_{\mathcal{A}} > \frac{5}{6} = 0.8333\dots, \quad (1.7)$$

соответствующем алфавиту (1.2) при $A = 5$, но аналогичное обобщение теоремы 1.2 выведено не было.

Недавно (2013 г.), объединяя методы работ [2] и [10], С. Хуанг [11] доказал, что свойства (1.5) и (1.6) при выполнении неравенства (1.7) также справедливы. Работа [11] содержит два примечательных достижения. Одно из них состоит в упрощении метода Бургейна–Конторовича при выводе формул (1.5) и (1.6). Другое, не менее важное, может быть сформулировано в виде тезиса: *какова бы ни была нижняя грань хаусдорфовой размерности δ_A , позволяющая вывести неравенство (1.4) в рамках рассматриваемого метода, та же самая оценка для δ_A позволяет получать утверждения (1.5) и (1.6) аналогичным образом при использовании аргументов работы [11]*.

1.2. Основные результаты работы. Основным результатом настоящей статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1.3. *Для произвольного алфавита A такого, что*

$$\delta_A > \frac{4}{5} = 0.8, \quad (1.8)$$

имеет место неравенство $|\mathfrak{D}_A(N)| \gg N$.

Применение методов Хуанга позволяет теперь вывести следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. *Для произвольного алфавита A , удовлетворяющего неравенству (1.8), имеют место формулы (1.5) и (1.6).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Согласно результатам, полученным Дженкинсоном в [6], неравенству (1.8) удовлетворяют все алфавиты вида

$$A = \{1, 2, 3, 4, n\},$$

где число n может принимать любое из значений $6, \dots, 10$.

1.3. Обозначения. Введем следующие обозначения.

Всюду далее $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ – произвольно малая положительная константа, участвующая в построении ансамбля Ω_N . Знак Виноградова в выражении $f(N) \ll g(N)$ для двух произвольных функций $f(N)$ и $g(N)$ обозначает существование константы C , зависящей только от A , ε_0 и такой, что $|f(N)| \leq Cg(N)$. Если при этом $C = C(\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$, то используется обозначение $f(N) \ll_\varepsilon g(N, \varepsilon)$. Также используется традиционное обозначение $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Наибольший общий делитель двух целых чисел a и b обозначается через (a, b) . Если P – утверждение, то $\mathbf{1}_{\{P\}} = 1$, когда P истинно, и $\mathbf{1}_{\{P\}} = 0$, когда P ложно. Мощность конечного множества S обозначается через $|S|$. Для действительного числа α через $[\alpha]$, $\{\alpha\}$ и $\|\alpha\|$ обозначаются соответственно целая часть от α , дробная доля α и расстояние от α до ближайшего целого:

$$[\alpha] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha\}, \quad \{\alpha\} = \alpha - [\alpha], \quad \|\alpha\| = \min\{|z - \alpha| \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Кроме того, если g – матрица, то $\|g\|$ – ее норма (определенная далее, в § 2).

1.4. Благодарности. Автор благодарит профессора Н. Г. Мошевитина за постановку задачи и неоднократное обсуждение темы статьи. Также автор благодарен И. Д. Шкредову и И. С. Резвяковой за вопросы и комментарии во время докладов автора. Кроме того, автор весьма благодарен Д. А. Фроленкову за многие полезные советы, в частности использовать методы работы [11].

§ 2. Континуанты и матрицы

Континуантом натуральных чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ называется число $\langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$, равное знаменателю цепной дроби (1.1), несократимому с ее числителем (в том числе, континуант пустой последовательности считается равным 1). Если последовательность $d_1, d_2, \dots, d_k$ обозначена через D , то через $\overleftarrow{D}$ обозначают последовательность $d_k, d_{k-1}, \dots, d_1$, а через D^- и D_- — последовательности $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ и $d_2, d_3, \dots, d_k$ соответственно. Хорошо известно (см., например, [12]), что для произвольных конечных последовательностей D, X выполнены неравенства

$$\langle D \rangle \langle X \rangle \leq \langle D, X \rangle \leq 2 \langle D \rangle \langle X \rangle, \quad (2.1)$$

следующие из равенства

$$\langle D, X \rangle = (1 + [\overleftarrow{D}][X]) \langle D \rangle \langle X \rangle, \quad (2.2)$$

и что для матрицы

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

выполнены соотношения $(b, d) = (c, d) = 1$, $a < c < d$, $a < b < d$,

$$\frac{b}{d} = \frac{\langle D_- \rangle}{\langle D \rangle} = [d_1, d_2, \dots, d_k] = [D], \quad \frac{c}{d} = \frac{\langle D^- \rangle}{\langle D \rangle} = [d_k, d_{k-1}, \dots, d_1] = [\overleftarrow{D}]. \quad (2.4)$$

Следовательно, для нормы такой матрицы g имеют место равенства

$$\|g\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} = d = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle. \quad (2.5)$$

Всюду далее будем использовать обозначение $A = \max \mathcal{A}$.

ЛЕММА 2.1 (см. [13]). Пусть D, T, W — конечные последовательности чисел из алфавита (1.2), в том числе T и W непустые и имеют различие в своих первых элементах и равную длину. Тогда справедливо неравенство

$$|[D, T] - [D, W]| \geq \frac{1}{(2A)^4 \langle D \rangle^2}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, для любой непустой конечной последовательности V в алфавите (1.2) имеет место оценка

$$\frac{1}{2A} \leq [A, 1] \leq [V] \leq 1. \quad (2.7)$$

Пусть для начала последовательность D не пуста. Тогда если X – любая из последовательностей T или W , то, используя равенства (2.2) и (2.4), получаем

$$[D, X] = \frac{\langle (D, X)_- \rangle}{\langle D, X \rangle} = \frac{(1 + [(\overleftarrow{D})^-][X])\langle D_- \rangle \langle X \rangle}{(1 + [\overleftarrow{D}][X])\langle D \rangle \langle X \rangle} = [D] \frac{1 + [X][(\overleftarrow{D})^-]}{1 + [X][\overleftarrow{D}]}$$

Следовательно, обозначая левую часть неравенства (2.6) через σ , имеем

$$\sigma = [D] \frac{|[(\overleftarrow{D})^-] - [(\overleftarrow{D})^-]|([W] - [T])|}{(1 + [T][\overleftarrow{D}])(1 + [W][\overleftarrow{D}])} \geq \frac{|[(\overleftarrow{D})^-] - [(\overleftarrow{D})^-]|([W] - [T])|}{8A} \quad (2.8)$$

ввиду неравенства (2.7), примененного к каждому из случаев $V = D, \overleftarrow{D}, T, W$. Поскольку, кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} |[(\overleftarrow{D})^-] - [(\overleftarrow{D})^-]| &= \frac{1}{\langle D \rangle \langle D_- \rangle} \geq \frac{1}{\langle D \rangle^2}, \\ |[W] - [T]| &\geq [A - 1, 1] - [A, A, 1] \geq \frac{1}{2A^3}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

то, подставляя их в (2.8), получаем (2.6).

Наконец, если последовательность D пуста, то нужное неравенство (2.6) следует непосредственно из (2.9). Лемма доказана.

§ 3. Основные свойства ансамбля Ω_N

Через $\Gamma_{\mathcal{A}}$ обозначена мультипликативная полугруппа $\Gamma_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ с единицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, порожденная попарными матричными произведениями

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & ab + 1 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathcal{A}$. Обозначим через $V_{\mathcal{A}}$ множество слов четной длины (состоящих из четного количества букв) в алфавите $\mathcal{A}$. Далее всюду будем использовать взаимную однозначность отображения $\mathcal{B}: V_{\mathcal{A}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{A}}$, определенного формулой

$$\mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_{2k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{2k} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Напомним, что подмножество Θ матриц $g \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ называется *предансамблем* [9, § 8], если для любых двух матриц $g_1, g_2 \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ и любого положительного числа ε выполнены соотношения $\|g_1\| \ll \|g_2\| \ll \|g_1\|$ и $|\Theta| \gg_{\varepsilon} \|g_1\|^{2\delta_{\mathcal{A}} - \varepsilon}$. По произвольному достаточно большому числу N и малому параметру $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ в [9] была построена конечная последовательность

$$\{N_{-J-1}, N_{-J}, \dots, N_{-1}, N_0, N_1, \dots, N_{J+1}\}, \quad (3.2)$$

где $N_{J+1} = N$, $J \ll \log \log N$,

$$N_j = \begin{cases} N^{\frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{1-j}}, & \text{если } -1 - J \leq j \leq 1, \\ N^{1 - \frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^j}, & \text{если } 0 \leq j \leq J, \end{cases} \quad (3.3)$$

имеющая следующее свойство [9, лемма 9.1]: при $-J-1 \leq m \leq J-1$ выполнены неравенства

$$N_{j-J-1} \geq N_{j-J}^{1-\varepsilon_0}, \quad \frac{N}{N_{j-J}} \geq \left(\frac{N}{N_{j-J-1}} \right)^{1-\varepsilon_0}. \quad (3.4)$$

Также в [9] по последовательности $\{N_j\}$ было построено специальное множество матриц – ансамбль $\Omega_N \subseteq \{g \in \Gamma_{\mathcal{A}} \mid \|g\| \leq 1.02N\}$ (см. терминологию в работе [2]):

$$\Omega_N = \Xi_1 \Xi_2 \cdots \Xi_{2J} \Xi_{2J+1}, \quad (3.5)$$

где J – из (3.2), а все множества Ξ_j – предансамбли.

Отметим, что для доказательства неравенств (1.5) и (1.6) С. Хуанг в работе [11] использовал несколько иной вариант ансамбля Ω_N , который отличается в основном тем, что среди множеств-множителей в правой части (3.5) присутствует некоторое специальное множество матриц χ (впервые построенное в [2] и перенесенное Хуангом из начала последовательности множеств, сходной с (3.5), в “середину” той же последовательности). Строго говоря, аналогичное видоизменение ансамбля требуется и в настоящей работе для тех же целей. Поскольку такой подход приводит к существенному усложнению выкладок, будем для краткости всегда полагать, что ансамбль задан равенством (3.5).

Напомним основные свойства ансамбля.

ЛЕММА 3.1 [9, лемма 2.11]. *Для любого набора матриц $\xi_1 \in \Xi_1, \xi_2 \in \Xi_2, \dots, \xi_{2J+1} \in \Xi_{2J+1}$ и любого j из отрезка $[1, 2J+1]$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{70A^2} N_{j-J} \leq \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| \leq 1.01 N_{j-J}, \quad (3.6)$$

и для каждого j из отрезка $[0, 2J]$ также имеет место аналогичное неравенство

$$\frac{1}{150A^2} \frac{N}{N_{j-J}} \leq \|\xi_{j+1} \xi_{j+2} \cdots \xi_{2J+1}\| \leq 73A^2 \frac{N}{N_{j-J}}. \quad (3.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если числа j и U связаны соотношением*

$$N_{j-J-1} \leq U < N_{j-J}, \quad (3.8)$$

то в обозначениях леммы 3.1 выполнены неравенства

$$\frac{1}{70A^2} U \leq \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| \leq 1.01 U^{1+2\varepsilon_0}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{150A^2} \max \left\{ \frac{N}{U^{1+2\varepsilon_0}}, \left(\frac{N}{U} \right)^{1-\varepsilon_0} \right\} \leq \|\xi_{j+1} \xi_{j+2} \cdots \xi_{2J+1}\| \leq 73A^2 \frac{N}{U}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (3.4) и (3.8) следует двусторонняя оценка числа N_{j-J} :

$$U \leq N_{j-J} \leq \min \{ U^{1+2\varepsilon_0}, U^{1-\varepsilon_0} N^{\varepsilon_0} \}.$$

Подставляя ее в (3.6) и (3.7), получаем (3.9) и (3.10). Следствие доказано.

Пусть $M^{(1)} > 1$ – некоторое действительное число. Определим числа

$$H = H_1(M^{(1)}) = 1.01(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}, \quad (3.11)$$

$$Q_1 = \exp(A^4 \varepsilon_0^{-5}) \quad (3.12)$$

и интервал $I_N = [Q_1, N]$.

Рассмотрим разложение ансамбля на некоторые подансамбли:

$$\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\Omega^{(3)}\Omega^{(4)}, \quad (3.13)$$

для которых выполнены неравенства

$$|\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}| \gg (M^{(1)}M^{(2)})^{2\delta_A - \varepsilon_0}, \quad |\Omega^{(4)}| \gg (M^{(4)})^{2\delta_A - 3\varepsilon_0}, \quad (3.14)$$

а для любых четырех матриц $g_1 \in \Omega^{(1)}$, $g_2 \in \Omega^{(2)}$, $g_3 \in \Omega^{(3)}$, $g_4 \in \Omega^{(4)}$ выполняются соотношения

$$\frac{M^{(1)}}{70A^2} \leq \|g_1\| \leq H, \quad (3.15)$$

$$\frac{N}{150A^2H} \leq \|g_2g_3g_4\| \leq 73A^2 \frac{N}{M^{(1)}}, \quad (3.16)$$

$$\frac{M^{(2)}}{150A^2(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}} \leq \|g_2\| \leq 73A^2 M^{(2)}(M^{(1)}M^{(2)})^{2\varepsilon_0}, \quad (3.17)$$

$$\frac{(M^{(4)})^{1-\varepsilon_0}}{150A^2} \leq \|g_4\| \leq 73A^2 M^{(4)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{70A^2} \leq \|g_1g_2\| \leq 1.01(M^{(1)}M^{(2)})^{1+2\varepsilon_0}. \quad (3.19)$$

ТЕОРЕМА 3.1 [10, теорема 4.2]. Пусть числа $M^{(1)} \in I_N$, $M^{(2)}, M^{(4)} \in I_N \cup \{1\}$ удовлетворяют неравенству

$$M^{(1)}M^{(2)}M^{(4)} \leq N. \quad (3.20)$$

Тогда найдутся целые числа – индексы j_1, j_2, j_3 – такие, что

$$1 = j_0 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq j_4 = 2J + 2, \quad (3.21)$$

и для $k = 1, 2, 3, 4$ в обозначениях

$$\Omega^{(k)} = \Xi_{j_{k-1}} \Xi_{j_{k-1}+1} \Xi_{j_{k-1}+2} \cdots \Xi_{j_k-1} \quad (3.22)$$

имеют место соотношения (3.13), (3.14); в частности, если $M^{(2)} = 1$ или $M^{(4)} = 1$, то $\Omega^{(2)} = \{E\}$ или $\Omega^{(4)} = \{E\}$ соответственно.

Произведение в (3.22) по пустому множеству индексов (при $j_{k-1} = j_k$) считается равным $\{E\}$, E – единичная (2×2) -матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Положим

$$U^{(1)} = M^{(1)}, \quad U^{(2)} = M^{(1)}M^{(2)}, \quad U^{(3)} = \frac{N}{M^{(4)}}, \quad U^{(4)} = N.$$

Тогда ввиду (3.20) имеет место цепочка неравенств

$$U^{(1)} \leq U^{(2)} \leq U^{(3)} \leq U^{(4)}. \quad (3.23)$$

Поэтому если для $k = 1, 2, 3$ числа j_k определить неравенствами

$$N_{j_k - J - 1} \leq U^{(k)} < N_{j_k - J},$$

то ввиду (3.23) и монотонности последовательности $\{N_j\}$ имеют место неравенства (3.21). Следовательно, из (3.5) и (3.22) можно вывести равенство (3.13). Далее, условия следствия 3.1 выполнены при $k = 1, 2, 3$ для $U = U^{(k)}$ и $j = j_k$, для которых поэтому имеют место оценки (3.9) и (3.10). Первая из них при подстановках $U = U^{(1)} = M^{(1)}$ и $U = U^{(2)} = M^{(1)}M^{(2)}$ дает неравенства (3.15) и (3.19) соответственно. Аналогично, вторая из оценок следствия 3.1 дает неравенства (3.16) и (3.18) при подстановках $U = U^{(1)} = M^{(1)}$ и $U = U^{(3)} = \frac{N}{M^{(4)}}$ соответственно. Комбинация доказанных оценок (3.15) и (3.19) дает неравенство (3.17), так как ввиду оценки (2.1) и равенства (2.5) выполняется оценка

$$\frac{\|g_1 g_2\|}{2\|g_1\|} \leq \|g_2\| \leq \frac{\|g_1 g_2\|}{\|g_1\|}.$$

Наконец, неравенства (3.14) выводятся с помощью [9, теорема 12.4], исходя из оценок снизу в доказанных неравенствах (3.18) и (3.19). Теорема доказана.

В условиях теоремы 3.1 положим

$$\Omega = \Omega^{(2)}\Omega^{(3)}\Omega^{(4)} = \Xi_{j_1}\Xi_{j_1+1}\cdots\Xi_{2J+1}. \quad (3.24)$$

Будем использовать следующие обозначения: если g – (2×2) -матрица, то $\tilde{g}$ – вектор-столбец, получающийся из матрицы g домножением на $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\tilde{g} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, если X – некоторое множество (2×2) -матриц g , то $\tilde{X}$ – множество соответствующих им вектор-столбцов $\tilde{g}$. Далее, выберем произвольный элемент $g_3 \in \Omega^{(3)}$ и положим

$$\Omega(g_3) = \Omega^{(2)}\{g_3\}\Omega^{(4)} = \{g = g_2 g_3 g_4 \mid g_2 \in \Omega^{(2)}, g_4 \in \Omega^{(4)}\}. \quad (3.25)$$

Тогда если $\tilde{g} \in \tilde{\Omega}(g_3)$, то $\tilde{g}$ – вектор-столбец. Для двух произвольных векторов из $\tilde{\Omega}(g_3)$ введем следующие обозначения:

$$\tilde{g}^{(1)} = g_2^{(1)} g_3 g_4^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{(2)} = g_2^{(2)} g_3 g_4^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда, во-первых, имеет место неравенство

$$\max_{g \in \Omega} \|g\| \leq 11000A^4 \min_{g \in \Omega} \|g\|, \quad (3.27)$$

во-вторых, для векторов (3.26) при каждом $i \in \{1, 2\}$ выполняются неравенства

$$\max\{x_i, y_i\} \leq 22000A^5 x_i, \quad (3.28)$$

$$\frac{N}{2H} \leq 150A^3 x_i. \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.1 в обозначениях (3.24) при $j = j_1$ имеет место неравенство (3.7), в котором оценка сверху отличается от оценки снизу не более чем в $11000A^4$ раз. Этим обстоятельством доказаны как неравенство (3.27), так и оценка (3.28) при $i = 2$ ввиду (2.5). Далее, из неравенств (2.1) следует, что $x_1 \leq x_2 \leq 2Ax_1$. Поэтому ввиду доказанного неравенства (3.27) имеет место цепочка оценок

$$\max\{x_1, y_1\} \leq \max\{x_2, y_2\} \leq 11000A^4 \min\{x_2, y_2\} \leq 11000A^4 x_2 \leq 22000A^5 x_1,$$

так что неравенство (3.28) доказано и при $i = 1$. Наконец, если в оценке снизу из (3.16) положить $g_2 = g_2^{(1)}$, $g_4 = g_4^{(1)}$ и учесть обозначения (3.26), то получим

$$\frac{N}{2H} \leq 75A^2 x_2 \leq 150A^3 x_1 \leq 150A^3 x_i$$

для каждого $i \in \{1, 2\}$, и неравенство (3.29) также доказано. Следствие доказано.

§ 4. Достаточные условия выполнения формул (1.4)–(1.6)

Согласно методу Бургейна–Конторовича [2] оценка (1.4) следует из неравенства

$$\int_0^1 |S_N(\Theta)|^2 d\Theta \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}, \quad (4.1)$$

где

$$S_N(\Theta) = \sum_{g \in \Omega_N} e(\Theta \|g\|) = \sum_{g \in \Omega_N} e\left((0, 1)g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta\right) = \sum_{g \in \Omega_N} e((0, 1)\tilde{g}\Theta) \quad (4.2)$$

– тригонометрическая сумма.

Применяя теорему Дирихле [14, лемма 2.1], для каждого $\Theta \in [0, 1)$ найдем целые числа a, q и действительное число K такие, что

$$\Theta = \left\{ \frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right\}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a < q \leq \frac{N^{\frac{1}{2}}}{Q_1}, \quad |K| \leq \frac{Q_1 N^{\frac{1}{2}}}{q} \quad (4.3)$$

(где фигурные скобки обозначают дробную долю, а величина Q_1 была определена формулой (3.12)), причем равенство $a = 0$ возможно только при $q = 1$. Далее, представим число K в виде

$$K = \frac{1}{2}l + \lambda, \quad \lambda \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], \quad (4.4)$$

где l – какое-либо целое число; тогда $|l| \leq 2|K| + 1$, поэтому ввиду (4.3) имеет место оценка

$$|l| \leq \frac{3}{q}Q_1N^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

Для произвольного неотрицательного параметра $Q = Q(N)$ определим величину

$$\Sigma_N(Q) = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \sum_{0 \leq a < q \leq \frac{1}{Q_1}N^{\frac{1}{2}}}^* \sum_{|l| \leq \frac{3}{q}Q_1N^{\frac{1}{2}}} \mathbf{1}_{\{\max\{q, |l|\} \geq Q\}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{l}{2N} + \frac{\lambda}{N} \right) \right|^2 d\lambda, \quad (4.6)$$

где сумма $\sum^*$ берется по парам взаимно простых чисел a и q .

ЛЕММА 4.1. *Неравенство (1.4) имеет место, если найдется хотя бы одно действительное число $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ такое, что выполнено неравенство*

$$\Sigma_N(0) \ll |\Omega_N|^2. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = 0$ и оценим сверху интеграл из (4.1) интегралом из (4.6), деленным на N . Для этого достаточно представить Θ в виде (4.3), где число K определено в (4.4), разбить отрезок интегрирования в (4.1) на ряд отрезков, соответствующих значениям параметров a, q, l , и в получившихся интегралах сделать линейную замену $\lambda = N(\Theta - \frac{a}{q} - \frac{l}{2N})$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Согласно результатам работы Хуанга (см. [11, неравенство (9.5)]) для доказательства формул (1.5) и (1.6) нужно, в частности, проверить, что найдется хотя бы одно действительное число $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ такое, что для некоторой константы $C = C(\mathcal{A}) > 0$ при любой сколь угодно медленно стремящейся к бесконечности величине $Q = Q(N)$ выполнено неравенство

$$\Sigma_N(Q) \ll |\Omega_N|^2 Q^{-C}. \quad (4.8)$$

Напомним, что Q_1 было определено в (3.12), положим $Q_0 = 0$ и определим последовательность $\{Q_j\}$ для $j = 0, 1, \dots, \infty$:

$$\{Q_j\}_{j=0}^{\infty} = \{0, Q_1, Q_1^2, Q_1^3, \dots, Q_1^j, \dots\}. \quad (4.9)$$

При фиксированном $\lambda \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ для целых $\alpha, \beta \geq 0$ положим

$$P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)} = \left\{ \Theta = \frac{a}{q} + \frac{l}{2N} + \frac{\lambda}{N} \mid (a, q) = 1, 0 \leq a < q, \text{ выполнены (4.11) и (4.12)} \right\}, \quad (4.10)$$

где

$$Q_\alpha \leq q \leq \min \left\{ \frac{1}{Q_1} N^{\frac{1}{2}}, Q_{\alpha+1} \right\}, \quad (4.11)$$

$$Q_\beta \leq |l| \leq \min \left\{ \frac{3}{q} Q_1 N^{\frac{1}{2}}, Q_{\beta+1} \right\}. \quad (4.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Для чисел $Q_{\alpha+1}$, $Q_{\beta+1}$ при $\alpha, \beta \geq 0$ и всех непустых множеств $P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}$ выполняется неравенство

$$Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1} \leq 3 Q_3 N^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

Действительно, пусть какое-либо Θ из $P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}$ имеет параметры a , q и l . Тогда из соотношений (4.11) и (4.12) следует, что

$$Q_{\alpha+1} \leq Q_1 q, \quad Q_{\beta+1} \leq Q_1 \max\{|l|, 1\}$$

по определению последовательности (4.9). Отсюда и из неравенства (4.5) (имеющего место ввиду (4.12)) следует неравенство (4.13).

Определим действительное число γ равенством

$$\gamma = 1 - \delta_{\mathcal{A}} \quad (4.14)$$

и для всякого действительного x положим

$$\bar{x} = \max\{1, |x|\}. \quad (4.15)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть найдутся константа $c_1 = c_1(\mathcal{A}, \varepsilon_0) > 0$ и абсолютная постоянная величина $c_2 > 0$ такие, что для любого $\lambda \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ и любых целых $\alpha, \beta \geq 0$ при любом $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ выполнено неравенство

$$\sum_{\Theta \in P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}} |S_N(\Theta)|^2 \leq c_1 \frac{|\Omega_N|^2 Q_{\alpha+1}^2 Q_{\beta+1}}{\bar{Q}_\alpha^3 \bar{Q}_\beta^2} (Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1})^{c_2 \gamma + 100 \varepsilon_0}. \quad (4.16)$$

Пусть, кроме того, выполнена оценка

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{1}{c_2}. \quad (4.17)$$

Тогда имеют место неравенства (1.4) и (4.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неравенства (4.16) и (4.17) выполнены, и докажем оценки (4.7) и (4.8) для некоторых величин $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ и $C = C(\mathcal{A}) > 0$. Оценим сумму $\Sigma_N(Q)$, определенную в (4.6), с помощью введенного в (4.10) множества $P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}$:

$$\Sigma_N(Q) \leq \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \mathbf{1}_{\{Q_{\alpha+1} \geq Q \text{ или } Q_{\beta+1} \geq Q\}} \sum_{\Theta \in P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}} |S_N(\Theta)|^2 d\lambda, \quad (4.18)$$

где сумма по α, β распространена на целые неотрицательные числа. Подставляя в соотношение (4.18) равномерную по λ оценку (4.16), получаем

$$\Sigma_N(Q) \leq c_1 Q_3 |\Omega_N|^2 \sum_{\alpha, \beta \geq 0} \mathbf{1}_{\{Q_{\alpha+1} \geq Q \text{ или } Q_{\beta+1} \geq Q\}} (Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1})^{-1+c_2\gamma+100\varepsilon_0}. \quad (4.19)$$

Определим теперь числа ε_0 и $C = C(\mathcal{A})$ равенствами

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{1}{200} (1 - c_2\gamma), \frac{1}{2600} \right\}, \quad C = C(\mathcal{A}) = 1 - c_2\gamma - 100\varepsilon_0. \quad (4.20)$$

Тогда ввиду соотношения (4.17) выполняются неравенства $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$. Определим еще две величины: целое число $\xi = \xi(Q) \geq 0$ и для произвольных $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$ сумму $\Sigma_N(\alpha_0, \beta_0)$ соответственно из условий

$$Q_\xi \leq Q < Q_{\xi+1}, \quad (4.21)$$

$$\Sigma_N(\alpha_0, \beta_0) = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} \sum_{\beta \geq \beta_0} (Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1})^{-C}.$$

Тогда ввиду соотношений (4.19) и (4.20) выполняется оценка

$$\Sigma_N(Q) \ll |\Omega_N|^2 (\Sigma_N(0, \xi) + \Sigma_N(\xi, 0)). \quad (4.22)$$

Заметим, что из неравенств (4.21) следует оценка $Q_{\xi+1} \geq \bar{Q}$. В частности, если $\Sigma_N(\alpha_0, \beta_0)$ – любое из двух слагаемых, выписанное в скобках правой части неравенства (4.22), то $Q_{\alpha_0+1} \geq \bar{Q}$ или $Q_{\beta_0+1} \geq \bar{Q}$. Поэтому из оценки произведения сумм сходящихся геометрических прогрессий

$$\Sigma_N(\alpha_0, \beta_0) = \left(\sum_{\alpha \geq \alpha_0} (Q_{\alpha+1})^{-C} \right) \left(\sum_{\beta \geq \beta_0} (Q_{\beta+1})^{-C} \right) \ll (Q_{\alpha_0+1} Q_{\beta_0+1})^{-C}$$

следуют неравенства

$$\Sigma_N(0, \xi) \ll (\bar{Q})^{-C}, \quad \Sigma_N(\xi, 0) \ll (\bar{Q})^{-C}.$$

Подставляя эти оценки в (4.22), получаем соотношения (4.7) и (4.8). Теперь утверждение леммы следует из леммы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Согласно результатам из [11, теорема 9.1)] для доказательства неравенств (1.5) и (1.6) достаточно доказать оценку (4.16).

Фиксируем константу

$$T_1 = 7Q_7, \quad (4.23)$$

где Q_7 – элемент последовательности (4.9), и для любого целого $\kappa \in [0, T_1 - 1]$ положим

$$P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}(\kappa) = \{\Theta \in P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)} \mid l \equiv \kappa \pmod{T_1}\}. \quad (4.24)$$

Заметим, что при $\alpha = \beta = 0$ выполнение неравенства (4.16) очевидно: оно получается при тривиальной оценке тригонометрической суммы.

Всюду далее считаем, что целые числа $\alpha, \beta \geq 0$ не обращаются в нуль одновременно, $\kappa \in [0, T_1 - 1]$ – произвольное целое число, $\lambda \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ – произвольное действительное число. Через Z всюду далее обозначаем произвольное непустое подмножество конечного множества $P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}(\kappa)$. Положим

$$\sigma_{N, Z} = \sum_{\Theta \in Z} |S_N(\Theta)|. \quad (4.25)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть найдутся константа $c_1 = c_1(\mathcal{A}, \varepsilon_0) > 0$ и абсолютная постоянная величина $c_2 > 0$ такие, что при любом $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ выполнено неравенство

$$\sigma_{N, Z} \leq (c_1)^{\frac{1}{2}} \frac{|\Omega_N| |Z|}{(\overline{Q}_\alpha \overline{Q}_\beta |Z|)^{\frac{1}{2}}} (Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1})^{\frac{1}{2}(c_2 \gamma + 90 \varepsilon_0)}. \quad (4.26)$$

Пусть, кроме того, выполнена оценка (4.17). Тогда имеют место формулы (1.4)–(1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно из неравенства (4.26) вывести оценку вида (4.16) с тем же самым значением c_2 ; тогда утверждение теоремы будет следовать из леммы 4.2 и замечания 4.3. Вывод неравенства (4.16) легко получается из обобщенной леммы Конягина [9, лемма 13.5]: для всякой функции $f: W \rightarrow \mathbb{R}_+$, где W – конечное множество, имеет место неравенство

$$\sum_{\Theta \in W} f^2(\Theta) \ll_\varepsilon |W|^\varepsilon \max_{Z \subseteq W} \left(\frac{1}{|Z|} \left(\sum_{\Theta \in Z} f(\Theta) \right)^2 \right); \quad (4.27)$$

здесь максимум берется по всем непустым подмножествам. Для завершения доказательства остается в (4.27) положить

$$f(\Theta) = |S_N(\Theta)|, \quad W = P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}(\kappa)$$

и воспользоваться оценкой (4.26) и неравенством

$$\sum_{\Theta \in P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}} |S_N(\Theta)|^2 \leq T_1 \max_{0 \leq \kappa \leq T_1 - 1} \sum_{\Theta \in P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}(\kappa)} |S_N(\Theta)|^2.$$

Теорема доказана.

Целью всех последующих рассуждений будет доказательство неравенства (4.26) при $c_2 = 5$.

§ 5. Общие оценки тригонометрической суммы по ансамблю

Всюду в данном параграфе считаем, что числа $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(4)}$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1, уже каким-либо образом выбраны, так что имеет место разложение ансамбля (3.13) (со свойствами (3.14)–(3.19)). Именно вид такого разложения отличает данный параграф от аналогичного ему

[9, § 13] с тем же названием. Ввиду почти дословного соответствия формулировок доказательства первых двух лемм настоящего параграфа не приводятся.

Далее используются обозначения (3.11), (3.25) и (3.26), (4.10) и (4.25), а также обозначения из [9]:

$$S(x) = 3 \left(\frac{2 \sin(\frac{1}{2} \Pi x)}{\Pi x} \right)^2, \quad \$(z) = S(z_1)S(z_2),$$

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ при $z \neq (0, 0)$ и $\$(0, 0) = 3$ в силу непрерывности.

ЛЕММА 5.1 [9, лемма 13.1]. *При некоторых комплексных коэффициентах $\xi(\Theta)$, где $\Theta \in Z$, по модулю равных единице, имеет место оценка*

$$\sigma_{N,Z} \ll |\Omega^{(1)}|^{\frac{1}{2}} \sum_{g_3 \in \Omega^{(3)}} \left(\sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \$(\frac{g_1}{H}) \right) \left| \sum_{\Theta \in Z} \xi(\Theta) \sum_{\tilde{g} \in \tilde{\Omega}(g_3)} e(g_1 \tilde{g} \Theta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда легко получается следующая

ЛЕММА 5.2 [9, лемма 13.2]. *Имеет место оценка*

$$\sigma_{N,Z} \ll H |\Omega^{(1)}|^{\frac{1}{2}} \sum_{g_3 \in \Omega^{(3)}} \left(\sum_{\substack{\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)} \in \tilde{\Omega}(g_3) \\ \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)} \in Z}} \mathbf{1}_{\{\|\tilde{g}^{(1)} \Theta^{(1)} - \tilde{g}^{(2)} \Theta^{(2)}\|_{1,2} \leq \frac{1}{2H}\}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.1)$$

где $\|z\|_{1,2} = \max\{\|z_1\|, \|z_2\|\}$ для $z = (z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

Напомним, что всегда $Z \subseteq P_{\alpha,\beta}^{(\lambda)}(\kappa)$ для соответствующих значений параметров. Числа $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)} \in P_{\alpha,\beta}^{(\lambda)}(\kappa)$ будем далее записывать следующим образом:

$$\Theta^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} + \frac{l^{(1)}}{2N} + \frac{\lambda}{N}, \quad \Theta^{(2)} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} + \frac{l^{(2)}}{2N} + \frac{\lambda}{N}. \quad (5.2)$$

Положим

$$\mathfrak{N}(g_3) = \{(g^{(1)}, g^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in (\tilde{\Omega}(g_3))^2 \times Z^2 \mid \quad (5.3) \text{ и } (5.4) \text{ выполнены для } i = 1, 2\},$$

где (в обозначениях из (3.26))

$$\left\| \frac{x_i a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_i a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| \leq \min \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{N} 150 A^3 x_i + \left\| \frac{1}{2N} (x_i l^{(1)} - y_i l^{(2)}) \right\| + \left\| \frac{\lambda}{N} (x_i - y_i) \right\|, \\ & \frac{1}{N} (9A)^5 x_i Q_{\beta+1}, \\ & \frac{1}{M^{(1)}} 74 A^2 Q_{\beta+1}, \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

$$|x_i l^{(1)} - y_i l^{(2)}| \leq (9A)^5 x_i + 2N \left\| x_i \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - y_i \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|. \quad (5.4)$$

ЛЕММА 5.3 [9, лемма 13.3]. Если выполнено неравенство

$$M^{(1)} \geq 150A^2Q_{\beta+1}, \quad (5.5)$$

то имеет место оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll H|\Omega^{(1)}|^{\frac{1}{2}} \sum_{g_3 \in \Omega^{(3)}} |\mathfrak{N}(g_3)|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем выводить оценки (5.3) и (5.4) из неравенства, записанного в фигурных скобках в (5.1). Тогда утверждение настоящей леммы будет следовать из леммы 5.2.

Применяя оценку сверху из (4.12) или неравенство $|\lambda| \leq \frac{1}{4}$, соответственно получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right| &\leq \frac{Q_{\beta+1}}{N} \max\{x_i, y_i\}, \\ \left| \frac{x_i \lambda}{N} - \frac{y_i \lambda}{N} \right| &\leq \frac{2|\lambda|}{N} \max\{x_i, y_i\} \leq \frac{1}{2N} \max\{x_i, y_i\}. \end{aligned}$$

Ввиду обозначений, введенных равенствами (3.24) и (3.25), имеет место включение $\Omega(g_3) \subseteq \Omega$. Следовательно, к максимуму из двух последних неравенств можно применить любую из двух оценок сверху: или из (3.16), или из (3.28). Их применение влечет неравенства

$$\left| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right| \leq \min \left\{ \frac{73A^2Q_{\beta+1}}{M^{(1)}}, \frac{1}{N} 22000A^5Q_{\beta+1}x_i \right\}, \quad (5.7)$$

$$\left\| \frac{x_i \lambda}{N} - \frac{y_i \lambda}{N} \right\| \leq \min \left\{ \frac{73A^2}{2M^{(1)}}, \frac{1}{N} 11000A^5x_i \right\}. \quad (5.8)$$

Из неравенства (5.5) следует, что первый элемент минимума в (5.7) меньше, чем $\frac{1}{2}$, поэтому

$$\left\| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right\| = \left| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right|. \quad (5.9)$$

Применяя дважды неравенство треугольника, получаем

$$\left\| \frac{x_i a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_i a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| \leq \left\| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right\| + \left\| \frac{x_i \lambda}{N} - \frac{y_i \lambda}{N} \right\| + \|x_i \Theta^{(1)} - y_i \Theta^{(2)}\|, \quad (5.10)$$

$$\left\| \frac{x_i l^{(1)}}{2N} - \frac{y_i l^{(2)}}{2N} \right\| \leq \left\| \frac{x_i a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_i a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| + \left\| \frac{x_i \lambda}{N} - \frac{y_i \lambda}{N} \right\| + \|x_i \Theta^{(1)} - y_i \Theta^{(2)}\|. \quad (5.11)$$

Заметим, что из (5.10) сразу получается верхняя строка из минимума в формуле (5.3), если третье слагаемое в правой части (5.10) оценить, как в фигурных скобках в неравенстве (5.1):

$$\|x_i \Theta^{(1)} - y_i \Theta^{(2)}\| \leq \frac{1}{2H} \leq \frac{1}{N} 150A^3x_i, \quad (5.12)$$

ввиду оценки (3.29). Если теперь остальные слагаемые из правой части неравенства (5.10) оценить вторыми элементами минимумов из (5.7) и (5.8), то получим вторую строку минимума из (5.3). Далее, третья строка минимума в формуле (5.3) получается применением в неравенстве (5.10) первых элементов минимумов из неравенств (5.7) и (5.8). Теперь неравенство (5.3) полностью доказано.

Аналогично, оценка правой части (5.11) производится на основании второго элемента минимума из (5.8), а также неравенства (5.12). К результату применяется равенство (5.9), приводящее к оценке (5.4). Лемма доказана.

Обозначим

$$\mathfrak{M}(g_3) = \{(\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in (\tilde{\Omega}(g_3))^2 \times Z^2 \mid \quad (5.13) \text{ и } (5.14) \text{ выполнены для } i = 1, 2\},$$

где (в обозначениях (3.26) и (5.2))

$$\left\| \frac{x_i a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_i a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| = 0, \quad (5.13)$$

$$|x_i l^{(1)} - y_i l^{(2)}| \leq (9A)^5 x_i. \quad (5.14)$$

Далее через $\mathbf{q}$ обозначаем наименьшее общее кратное чисел $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В работе [2, пп. 6.2.1] (см. также [9, доказательство леммы 14.1]) было показано, что условие (5.13) равносильно следующему:

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q}, \quad x_i a^{(1)} \equiv y_i a^{(2)} \pmod{\mathbf{q}}, \quad i = 1, 2. \quad (5.15)$$

Отсюда следует, что для элементов множества $\mathfrak{M}(g_3)$ из равенств $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ следуют соотношения $a^{(1)} = a^{(2)}$ ввиду сравнения в (5.15) и равенство $l^{(1)} = l^{(2)}$ ввиду неравенства (5.14) при $i = 1$ и сравнения из (4.24).

ЛЕММА 5.4 [9, лемма 13.4]. Пусть число $M^{(1)}$ определено равенством

$$M^{(1)} = 150A^2 Q_{\alpha+1}^2 Q_{\beta+1}. \quad (5.16)$$

Тогда при любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ имеет место включение

$$\mathfrak{N}(g_3) \subseteq \mathfrak{M}(g_3). \quad (5.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что соотношения (5.13) и (5.14) в условиях леммы следуют из неравенств (5.3) и (5.4). Действительно, ввиду (5.16) третья строка минимума в правой части (5.3) меньше, чем $\frac{1}{q_1 q_2}$, следовательно, оцениваемая величина равна нулю. Отсюда следует равенство (5.13), подстановка которого в (5.4) дает неравенство (5.14). Лемма доказана.

Введем следующие обозначения (для переменных из (3.26)):

$$\mathcal{Y} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (5.18)$$

$$Y = Y(M^{(1)}) = \frac{75A^2 N}{M^{(1)}}. \quad (5.19)$$

ЛЕММА 5.5 [2, доказательство предложения 6.11]. Пусть число $M^{(1)}$ определено равенством

$$M^{(1)} = 120A^2(NQ_{\alpha+1}Q_{\beta+1})^{\frac{1}{2}}. \quad (5.20)$$

Тогда при любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ для элементов множества $\mathfrak{N}(g_3)$ имеют место соотношения

$$0 < x_i < Y, \quad 0 < y_i < Y, \quad i = 1, 2, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{Y} < Y^2, \quad (5.22)$$

$$\frac{2Y^2Q_{\beta+1}}{N} < \frac{1}{Q_{\alpha+1}}, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{Y} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}. \quad (5.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (5.21) следуют из оценки сверху в формуле (3.16), откуда следует неравенство (5.22). Далее, соотношение (5.23) проверяется непосредственным применением равенств (5.19) и (5.20). Наконец, поскольку

$$\left\| \mathcal{Y} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \right\| \leq y_2 \left\| \frac{x_1 a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_1 a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| + y_1 \left\| \frac{x_2 a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{y_2 a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|, \quad (5.25)$$

то, применяя здесь нижнюю строку минимума из (5.3) и оценки (5.21), получаем

$$\left\| \mathcal{Y} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \right\| < 2Y \frac{74A^2Q_{\beta+1}}{M^{(1)}} < \frac{2Y^2Q_{\beta+1}}{N} < \frac{1}{Q_{\alpha+1}} < \frac{1}{q^{(1)}} \quad (5.26)$$

ввиду доказанной оценки (5.23). Следовательно, $\|\mathcal{Y} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}}\| = 0$, т. е. $\mathcal{Y}$ делится на $q^{(1)}$. Аналогично, $\mathcal{Y}$ делится на $q^{(2)}$, откуда следует сравнение (5.24). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.6. Если число $M^{(1)}$ определено равенством (5.20), то при любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ имеет место включение (5.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 5.4, достаточно лишь вывести равенство (5.13) из соотношений (5.3), (5.4) и условий настоящей леммы.

Пусть для начала $\mathcal{Y}$ не равно нулю (см. [2, пп. 6.2.1]). Тогда ввиду соотношений (5.22) и (5.24) имеет место цепочка неравенств

$$\mathfrak{q} \leq \min \{Q_{\alpha+1}^2, |\mathcal{Y}|\} \leq \min \{Q_{\alpha+1}^2, Y^2\} \leq Q_{\alpha+1}Y. \quad (5.27)$$

Отсюда и из (5.23) следует, что

$$\frac{YQ_{\beta+1}}{N} \leq \frac{Y^2Q_{\alpha+1}Q_{\beta+1}}{\mathfrak{q}N} < \frac{1}{\mathfrak{q}}. \quad (5.28)$$

Поэтому третья строка минимума из (5.3) меньше, чем $\frac{1}{\mathfrak{q}}$. Следовательно, левая часть неравенства (5.3) равна нулю, так что имеет место (5.13).

Пусть теперь $\mathcal{U}$ равно нулю (см. [9, доказательство леммы 14.6]). Ввиду взаимной простоты чисел x_1 и x_2 , а также y_1 и y_2 это означает, что

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2. \quad (5.29)$$

Поэтому любая из первых двух строк минимума из (5.3) может быть представлена в виде $F(x_i)$ для $i = 1, 2$, где F – некоторая однородная линейная функция. Следовательно, если положить $\xi = \left| \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right|$, то оценка (5.3) запишется в виде

$$\|x_i \xi\| \leq F(x_i).$$

Другими словами, если n_1 и n_2 – ближайшие целые числа к величинам $x_1 \xi$ и $x_2 \xi$ соответственно, то найдутся действительные числа Θ_1, Θ_2 такие, что $|\Theta_1|, |\Theta_2| < \frac{1}{2}$ и

$$n_1 = x_1 \xi + \Theta_1 F(x_1), \quad n_2 = x_2 \xi + \Theta_2 F(x_2). \quad (5.30)$$

В частности, если $F(x_i)$ – вторая строка минимума из формулы (5.3), то из соотношений (5.21) и (5.30) следует, что

$$|x_1 n_2 - x_2 n_1| = x_1 x_2 |\Theta_1 - \Theta_2| \frac{(9A)^5 Q_{\beta+1}}{N} \leq \frac{Y^2 (9A)^5 Q_{\beta+1}}{N} \leq \frac{(9A)^5}{Q_{\alpha+1}} < 1$$

ввиду (5.23) (и поскольку $(9A)^5 < Q_1 \leq Q_{\alpha+1}$). Следовательно, $x_1 n_2 = x_2 n_1$. Однако числа x_1 и x_2 взаимно просты, поэтому найдется целое число k такое, что $n_2 = k x_2$.

Напомним, что F может принимать одно любое значение из двух первых строк (5.3). Теперь, возвращаясь к случаю произвольного $F(x_2)$ и сокращая второе равенство в (5.30) на x_2 , получаем

$$\|\xi\| \leq |\xi - k| \leq \frac{F(x_2)}{x_2}. \quad (5.31)$$

В частности, при $Q_{\alpha+1} < \frac{1}{Q_4} N^{\frac{1}{2}}$, если $F(x_i)$ – вторая строка минимума в (5.3), из неравенств (5.31) и (4.13) получаем

$$\|\xi\| \leq \frac{(9A)^5 Q_{\beta+1}}{N} \leq \frac{3(9A)^5 Q_3}{Q_{\alpha+1} N^{\frac{1}{2}}} < \frac{Q_4}{Q_{\alpha+1} N^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{Q_{\alpha+1}^2} \leq \frac{1}{\mathbf{q}}, \quad (5.32)$$

откуда $\xi = 0$.

Наоборот, пусть теперь $Q_{\alpha+1} \geq \frac{1}{Q_4} N^{\frac{1}{2}}$. Тогда ввиду (4.12) и (4.13) при $l = l^{(1)}, l^{(2)}$ выполнена цепочка неравенств

$$|l| \leq Q_{\beta+1} \leq \frac{3Q_3 N^{\frac{1}{2}}}{Q_{\alpha+1}} \leq 3Q_7. \quad (5.33)$$

Поэтому в обозначениях (4.23) имеет место оценка

$$|l^{(1)} - l^{(2)}| \leq 6Q_7 < 7Q_7 = T_1. \quad (5.34)$$

Однако сравнение в (4.24) показывает, что $l^{(1)} \equiv l^{(2)} \pmod{T_1}$. Вместе с неравенством (5.34) это означает, что $l^{(1)} = l^{(2)}$. Возвращаясь теперь к неравенству (5.31), заменим в нем $F(x_2)$ на первую строку минимума из (5.3), равную ввиду (5.29) числу $\frac{1}{N}150A^3x_2$. Тогда получим

$$\|\xi\| \leq \frac{150A^3}{N} < \frac{1}{q^{(1)}q^{(2)}} \leq \frac{1}{\mathbf{q}}$$

ввиду третьего из четырех соотношений в (4.3), откуда снова получаем равенство $\xi = 0$. Таким образом, $\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}}$. Отсюда и из (5.29) следует равенство (5.13). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть число $M^{(1)}$ определено или равенством (5.16), или равенством (5.20). Тогда в условиях теоремы 3.1 имеет место оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll (M^{(1)})^{1+\varepsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{\frac{1}{2}} \sum_{g_3 \in \Omega^{(3)}} |\mathfrak{M}(g_3)|^{\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения числа $M^{(1)}$ следует, что неравенство (5.5) выполнено по крайней мере для всех достаточно больших значений N . Следовательно, условия леммы 5.3 выполнены. Значит, имеет место неравенство (5.6). Отсюда и из включения (5.17), доказанного в леммах 5.4, 5.6, следует неравенство (5.35) (если учесть определение числа H в (3.11)). Теорема доказана.

Тем самым задача об оценке тригонометрической суммы сведена к определению мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$.

§ 6. Исследование и применение множества $\mathfrak{M}(g_3)$

В этом параграфе будет получено значение мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$, что позволит вывести полезные следствия из соотношения (5.35). Всюду далее число $M^{(1)}$ определено одним из двух вариантов, как в теореме 5.1.

Напомним обозначения (3.12) и (4.9) и при $\beta \geq 0$ положим

$$M_\beta^{(2)} = \frac{1}{Q_3} (M^{(1)})^{-2\varepsilon_0} (Q_\beta)^{\frac{1}{2}-2\varepsilon_0}, \quad (6.1)$$

$$M^{(2)} = \begin{cases} M_\beta^{(2)}, & \text{если } M_\beta^{(2)} \geq Q_1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.2)$$

В следующих леммах свойства (3.13)–(3.19) продолжаем считать выполненными.

ЛЕММА 6.1. Пусть число $M^{(2)}$ определено соотношением (6.2). Тогда при любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ для каждого элемента множества $\mathfrak{M}(g_3)$ выполняется равенство

$$g_2^{(1)} = g_2^{(2)}. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M^{(2)} = 1$, то $\Omega^{(2)} = \{E\}$, так что утверждение леммы было бы очевидно. В частности, если $Q_\beta = 0$, то так же $M^{(2)} = 1$, и лемма была бы доказана.

Пусть теперь утверждение леммы не имеет места. Тогда

$$M^{(2)} = M_\beta^{(2)} \geq Q_1 > 1, \quad |l^{(1)}|, |l^{(2)}| \geq Q_\beta > 0 \quad (6.4)$$

и найдется четверка

$$(\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in \mathfrak{M}(g_3), \quad (6.5)$$

для которой $g_2^{(1)} \neq g_2^{(2)}$. Последнее неравенство ввиду взаимной однозначности отображения (3.1) имеет особую интерпретацию в обозначениях (3.26). Именно, не только выполнено соотношение $\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_1}{y_2}$, но и более того, если последовательность D (возможно, пустая) – максимальная общая часть последовательностей неполных частных для цепных дробей

$$\frac{x_1}{x_2} = [D, T], \quad \frac{y_1}{y_2} = [D, W], \quad (6.6)$$

то последовательность D не длиннее, чем те последовательности, которым соответствуют матрицы $g_2^{(1)}$ и $g_2^{(2)}$ в смысле отображения (3.1). Следовательно, из (3.17) имеем оценку

$$\langle D \rangle \leq \max_{g_2 \in \Omega^{(2)}} \|g_2\| \leq 73A^2 M^{(2)} (M^{(1)} M^{(2)})^{2\varepsilon_0}. \quad (6.7)$$

Кроме того, длины цепных дробей (6.6) совпадают по построению ансамбля. Следовательно, выполнены условия леммы 2.1, применяя которую, получаем

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2} \right| \geq \frac{1}{(2A)^4 \langle D \rangle^2} \geq \frac{1}{(2A)^4 (73A^2 M^{(2)} (M^{(1)} M^{(2)})^{2\varepsilon_0})^2} \geq \frac{(5A)^{-8} (M^{(1)})^{-4\varepsilon_0}}{(M^{(2)})^{2+4\varepsilon_0}} \quad (6.8)$$

ввиду (6.7). Подставляя в (6.8) выражение для $M^{(2)} = M_\beta^{(2)}$ из (6.1) и применяя оценку $Q_3 \geq (7A)^7$, получаем

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2} \right| \geq \frac{(7A)^{7(2+4\varepsilon_0)}}{(5A)^8 Q_\beta} > \frac{2(9A)^5}{Q_\beta}. \quad (6.9)$$

С другой стороны, применяя при $i = 1, 2$ неравенство (5.14), получаем

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2} \right| \leq \frac{y_1 |x_2 l^{(1)} - y_2 l^{(2)}| + y_2 |x_1 l^{(1)} - y_1 l^{(2)}|}{x_2 y_2 l^{(1)}} \leq \frac{(9A)^5}{l^{(1)}} \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{x_1}{x_2} \right) \leq \frac{2(9A)^5}{Q_\beta}$$

(напомним, что $|l^{(1)}| > 0$ ввиду (6.4)), что противоречит неравенству (6.9). К этому противоречию привело предположение о том, что $g_2^{(1)} \neq g_2^{(2)}$. Следовательно, $g_2^{(1)} = g_2^{(2)}$. Лемма доказана.

Для $\alpha \geq 0$ положим

$$M_\alpha^{(4)} = \frac{1}{Q_3} (Q_\alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.10)$$

$$M^{(4)} = \begin{cases} M_\alpha^{(4)}, & \text{если } M_\alpha^{(4)} \geq Q_1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.11)$$

Всюду далее числа $M^{(2)}$ и $M^{(4)}$ определены соотношениями (6.2) и (6.11) соответственно.

ЛЕММА 6.2. *При любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ для каждого элемента множества $\mathfrak{M}(g_3)$ выполняются равенства (6.3) и*

$$\tilde{g}_4^{(1)} = \tilde{g}_4^{(2)}. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M^{(4)} = 1$, то $\Omega^{(4)} = \{E\}$, так что равенство (6.12) было бы очевидно. В частности, если $Q_\alpha = 1$, то так же $M^{(4)} = 1$, и лемма была бы доказана.

Пусть теперь утверждение леммы не имеет места. Тогда $M^{(4)} = M_\alpha^{(4)} \geq Q_1 > 1$, $\mathbf{q} \geq Q_\alpha > 1$ и, следовательно, $a^{(1)} > 0$.

Равенство (6.3), согласно которому $g_2^{(1)} = g_2^{(2)} = g_2$, уже доказано в лемме 6.1. Следовательно, сравнения в (5.15) могут быть записаны в виде

$$(g_2 g_3 a^{(1)} \tilde{g}_4^{(1)} \equiv g_2 g_3 a^{(2)} \tilde{g}_4^{(2)})_{1,2} \pmod{\mathbf{q}},$$

где индексы 1, 2 снизу означают, как всегда, выполнение сравнения по обеим координатам. Отсюда ввиду равенства $\det g_2 g_3 = 1$ получаем

$$(a^{(1)} \tilde{g}_4^{(1)} \equiv a^{(2)} \tilde{g}_4^{(2)})_{1,2} \pmod{\mathbf{q}}. \quad (6.13)$$

Положим $\tilde{g}_4^{(1)} = (u_1, u_2)^t$, $\tilde{g}_4^{(2)} = (v_1, v_2)^t$. Тогда сравнения (6.13) перепишутся в виде

$$a^{(1)} u_1 \equiv a^{(2)} v_1 \pmod{\mathbf{q}}, \quad a^{(1)} u_2 \equiv a^{(2)} v_2 \pmod{\mathbf{q}}.$$

Отсюда следует цепочка сравнений

$$(a^{(1)} u_2) v_1 \equiv a^{(2)} v_2 v_1 = (a^{(2)} v_1) v_2 \equiv (a^{(1)} u_1) v_2 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (6.14)$$

Однако числа $a^{(1)}$ и $\mathbf{q}$ взаимно просты как числитель и знаменатель цепной дроби (и при этом $a^{(1)} > 0$, как уже было отмечено выше). Следовательно, сокращая начало и конец цепочки (6.14) на $a^{(1)}$, получаем

$$u_2 v_1 - u_1 v_2 \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (6.15)$$

С другой стороны,

$$|u_2 v_1 - u_1 v_2| \leq u_2 v_2 \leq \left(\max_{g \in \Omega^{(4)}} \|g\| \right)^2. \quad (6.16)$$

Применяя к окончанию соотношения (6.16) оценку сверху из (3.18), получаем

$$|u_2 v_1 - u_1 v_2| \leq (73A^2 M^{(4)})^2 \leq (9A)^4 (M^{(4)})^2.$$

Подставляя в последнее неравенство значение $M^{(4)} = M_\alpha^{(4)}$ из (6.10), получаем

$$|u_2 v_1 - u_1 v_2| < Q_\alpha \leq \mathbf{q} \quad (6.17)$$

ввиду оценки снизу из неравенства (4.11). Соотношения (6.15) и (6.17) показывают, что

$$u_2 v_1 = u_1 v_2.$$

Отсюда вследствие несократимости дробей $\frac{u_1}{u_2}$, $\frac{v_1}{v_2}$ получаем $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ или $\tilde{g}_4^{(1)} = \tilde{g}_4^{(2)}$, так что равенство (6.12) доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. *При любом $g_3 \in \Omega^{(3)}$ имеет место равенство*

$$|\mathfrak{M}(g_3)| = |\Omega^{(2)}| |\Omega^{(4)}| |Z|. \quad (6.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересчитаем четверки элементов (6.5), пользуясь леммой 6.2. Для этого выберем и фиксируем матрицы $g_2^{(1)} = g_2^{(2)}$ и $g_4^{(1)} = g_4^{(2)}$, определяющие элементы $\tilde{g}^{(1)} = \tilde{g}^{(2)}$, одним из $|\Omega^{(2)}| |\Omega^{(4)}|$ способов. Выберем также число $\Theta^{(2)} \in Z$, как в (5.2), $|Z|$ способами. Заметим теперь, что из равенства $\tilde{g}^{(1)} = \tilde{g}^{(2)}$ (вытекающего из леммы 6.2) следует, что $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Поэтому согласно замечанию 5.1 выполняются равенства $a^{(1)} = a^{(2)}$ и $l^{(1)} = l^{(2)}$. Подстановка последних в (5.2) приводит к соотношению $\Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}$, завершающему вывод формулы (6.18). Лемма доказана.

Далее выполнение условий теоремы 3.1 заранее не предполагается. Напомним обозначения (4.14) и (4.15).

ТЕОРЕМА 6.1. *Для всякого числа $M^{(1)}$, определенного любым из равенств (5.16) или (5.20), из неравенства*

$$M^{(1)} M_\beta^{(2)} M_\alpha^{(4)} \leq N \quad (6.19)$$

следует оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll \frac{|\Omega_N| |Z|}{(\overline{Q}_\alpha \overline{Q}_\beta |Z|)^{\frac{1}{2}}} (M^{(1)} Q_{\alpha+1}^{\frac{1}{2}} Q_{\beta+1}^{\frac{1}{2}})^{\gamma+8\varepsilon_0}. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду неравенства (6.19) выполнено условие (3.20) теоремы 3.1, согласно которой найдется разложение ансамбля (3.13) со свойствами (3.14)–(3.19). Следовательно, для оценки величины $\sigma_{N,Z}$ имеем право применять как теорему 5.1, так и лемму 6.3, утверждения которых приводят к неравенству

$$\sigma_{N,Z} \ll (M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{\frac{1}{2}} \sum_{g_3 \in \Omega^{(3)}} |\Omega^{(2)}|^{\frac{1}{2}} |\Omega^{(4)}|^{\frac{1}{2}} |Z|^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, применяя соотношения (3.13), (3.14), получаем

$$\sigma_{N,Z} \ll \frac{(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0} |\Omega_N| |Z|^{\frac{1}{2}}}{|\Omega^{(1)} \Omega^{(2)}|^{\frac{1}{2}} |\Omega^{(4)}|^{\frac{1}{2}}} \ll \frac{(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0} |\Omega_N| |Z|^{\frac{1}{2}}}{(M^{(1)} M^{(2)} M^{(4)})^{\delta_A - \varepsilon_0}}. \quad (6.21)$$

Подставляя в неравенство (6.21) определения величин $M^{(2)}$ и $M^{(4)}$, получаем оценку (6.20). Теорема доказана.

§ 7. Доказательство теорем 1.3, 1.4

Согласно теореме 4.1 для доказательства теорем 1.3, 1.4 достаточно доказать неравенство (4.26) при $c_2 = 5$. Будем выводить оценку (4.26) из неравенства (6.20).

Для начала определим число $M^{(1)}$ равенством (5.20); тогда проверка неравенства (6.19) легко получается применением замечания 4.2. Следовательно, выполнено условие теоремы 6.1, применение которой приводит к оценке

$$\sigma_{N,Z} \ll \frac{|\Omega_N| |Z|}{(\overline{Q_\alpha} \overline{Q_\beta} |Z|)^{\frac{1}{2}}} (N^{\frac{1}{2}} Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1})^\gamma N^{12\varepsilon_0}. \quad (7.1)$$

Пусть выполнено неравенство

$$N < (Q_{\alpha+1})^{\frac{5}{2}} (Q_{\beta+1})^{\frac{3}{2}}. \quad (7.2)$$

Тогда ввиду (7.2) имеет место оценка

$$N^{\frac{1}{2}} Q_{\alpha+1} Q_{\beta+1} < (Q_{\alpha+1})^{\frac{9}{4}} (Q_{\beta+1})^{\frac{7}{4}} < (Q_{\alpha+1})^{\frac{5}{2}} (Q_{\beta+1})^{\frac{5}{2}},$$

подстановка которой в (7.1) приводит к нужной оценке (4.26) при $c_2 = 5$.

Если неравенство (7.2) не выполнено, то, следовательно, имеет место противоположное неравенство

$$(Q_{\alpha+1})^{\frac{5}{2}} (Q_{\beta+1})^{\frac{3}{2}} \leq N.$$

В этом случае для числа $M^{(1)}$, определенного равенством (5.16), выполнено неравенство (6.19). Следовательно, имеем право применить теорему 6.1, которая при подстановке такого значения $M^{(1)}$ приводит к оценке (4.26) при $c_2 = 5$. Доказательство теорем завершено.

Список литературы

1. S. K. Zaremba, “La méthode des “bons treillis” pour le calcul des intégrales multiples”, *Applications of number theory to numerical analysis*, Proc. Sympos. (Univ. Montreal, Montreal, Que., 1971), Academic Press, New York, 1972, 39–119.
2. J. Bourgain, A. Kontorovich, “On Zaremba’s conjecture”, *Ann. of Math.* (2), **180**:1 (2014), 137–196.
3. N. G. Moshchevitin, *On some open problems in Diophantine approximation*, arXiv: 1202.4539v4.
4. Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963, 224 с.
5. D. Hensley, “The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets”, *J. Number Theory*, **33**:2 (1989), 182–198.
6. O. Jenkinson, “On the density of Hausdorff dimensions of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture”, *Stoch. Dyn.*, **4**:1 (2004), 63–76.
7. D. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem by elementary methods*, arXiv: 1207.4546.
8. D. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem*, arXiv: 1207.5168.

9. И. Д. Кан, Д. А. Фроленков, “Усиление теоремы Бургейна–Конторовича”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:2 (2014), 87–144; англ. пер.: I. D. Kan, D. A. Frolenkov, “A strengthening of a theorem of Bourgain and Kontorovich”, *Izv. Math.*, **78**:2 (2014), 293–353.
10. D. A. Frolenkov, I. D. Kan, “A strengthening of a theorem of Bourgain–Kontorovich. II”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **4**:1 (2014), 78–117.
11. Shinniyi Huang, *An improvement on Zaremba’s conjecture*, arXiv: 1303.3772v1.
12. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, 1994, xiv+657 pp.
13. A. A. Dushistova, I. D. Kan, N. G. Moshchevitin, “Differentiability of the Minkowski question mark function”, *J. Math. Anal. Appl.*, **401**:2 (2013), 774–794.
14. Р. Вон, *Метод Харди–Литтлвуда*, Мир, М., 1985, 184 с.; пер. с англ.: R. C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge Tracts in Math., **80**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1981, xi+172 pp.

ИГОРЬ ДАВИДОВИЧ КАН
(IGOR D. KAN)

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)
E-mail: igor.kan@list.ru

Поступило в редакцию
16.05.2014