Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Спектральная теория одного функционально-разностного оператора конформной теории поля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 181–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:46:20

УДК 517.581+517.965+517.984

Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев

Спектральная теория одного функционально-разностного оператора конформной теории поля

Исследуется функционально-разностный оператор $H = U + U^{-1} + V$, где U и V – самосопряженные вейлевские операторы, удовлетворяющие соотношению $UV = q^2 VU$, $q = e^{\pi i \tau}$, $\tau > 0$. Оператор H имеет приложения в конформной теории поля и теории представлений квантовых групп. При использовании модулярного квантового дилогарифма – q -деформации дилогарифма Эйлера – определено решение задачи рассеяния и функции Йоста, выведена явная формула для резольвенты самосопряженного оператора H в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и доказана теорема разложения по собственным функциям, которая является q -деформацией известного в теории специальных функций преобразования Конторовича–Лебедева. Приведена формулировка теории рассеяния для оператора H .

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: модулярный квантовый дилогарифм, вейлевские операторы, функционально-разностный оператор, оператор Шрёдингера, преобразование Фурье, определитель Касорати, формула Сохоцкого–Племеля, решение задачи рассеяния, решения Йоста, резольвента оператора, разложение по собственным функциям, преобразование Конторовича–Лебедева, теория рассеяния, оператор рассеяния.

DOI: 10.4213/im8256

§ 1. Введение

Квантовая механика дала мощный импульс к развитию спектральной теории дифференциальных операторов. Особенно подробно были изучены различные спектральные задачи, связанные с оператором Шрёдингера. Так, в классических работах И. М. Гельфанда, М. Г. Крейна, Б. М. Левитана, В. А. Марченко и А. Я. Повзнера в 50-х годах прошлого века были исследованы прямая и обратная задачи теории рассеяния для оператора Шрёдингера (см. обзоры [1], [2] и цитированную в них литературу). Общеизвестна фундаментальная роль этих работ в формулировке и развитии теории классических интегрируемых систем.

Сформулированная в 1980-е годы двумерная конформная теория поля [3] стимулировала дальнейшее развитие теории представлений бесконечномерных

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Национального научного фонда (NSF, грант № DMS-1005769), а работа второго автора – при частичной поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00341, 13-01-12405-офи-м) и программы РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

групп и алгебр Ли. Одной из фундаментальных моделей конформной теории поля является квантовая модель Лиувилля, дискретная версия которой была нами рассмотрена более 30 лет тому назад (см. опубликованный в 1986 г. доклад [4]). Именно в [4] в качестве L -оператора квантовой модели Лиувилля на решетке впервые была введена квантовая группа $SL_q(2, \mathbb{R})$. Матричный след L -оператора – функционально-разностный оператор H – играет важную роль при квантовании пространства Тейхмюллера [5], [6] и в теории представлений некомпактной квантовой группы $SL_q(2, \mathbb{R})$ [7]. В обозначениях из п. 2.1 этот оператор имеет вид $H = U + U^{-1} + V$, и его действие на функциях $\psi(x)$, определенных на вещественной прямой, задается формулой

$$(H\psi)(x) = \psi(x + 2\omega') + \psi(x - 2\omega') + e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \psi(x).$$

Здесь ω и ω' чисто мнимые с положительной мнимой частью, а функция $\psi(x)$ предполагается аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 2|\omega'|$, $z = x + iy$ (точные определения см. в п. 2.1 и § 4). Оператор H тесно связан с теорией представлений квантовой группы $SL_q(2, \mathbb{R})$, $q = e^{\pi i \tau}$, где $\tau = \omega'/\omega > 0$ (см. [7], [8]).

Уравнение для собственных значений оператора H имеет вид

$$\psi(x + 2\omega', \lambda) + \psi(x - 2\omega', \lambda) + e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \psi(x, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda) \quad (1.1)$$

и представляет собой функционально-разностный аналог уравнения Шрёдингера с потенциалом, экспоненциально убывающим при $x \rightarrow -\infty$ и экспоненциально растущим при $x \rightarrow \infty$. Непрерывным пределом уравнения (1.1) является уравнение

$$-\tilde{\psi}''(x, \lambda) + e^{2x} \tilde{\psi}(x, \lambda) = \lambda \tilde{\psi}(x, \lambda) \quad (1.2)$$

для модифицированных функций Бесселя от переменной e^x .

В работе [6] для оператора H в импульсном представлении была сформулирована теорема о разложении в виде формальных соотношений полноты и ортогональности для обобщенных собственных функций. Подробный вывод этих соотношений, использующий свойства модулярного квантового дилогарифма (см. п. 2.2), был приведен в работе [8]. Однако спектральная теория оператора H как неограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ ранее изучена не была.

В настоящей работе мы восполняем этот пробел и проводим полное аналитическое исследование функционально-разностного оператора H . Именно, мы определяем решение задачи рассеяния и функции Йоста для уравнения (1.1), приводим явную формулу для резольвенты самосопряженного оператора H в $L^2(\mathbb{R})$ и доказываем теорему разложения по собственным функциям. Мы также приводим формулировку теории рассеяния для оператора H .

Остановимся более подробно на содержании работы. В § 2 собраны все необходимые для дальнейшего понятия и обозначения. Именно, в п. 2.1 мы определяем вейлевскую пару U, V неограниченных самосопряженных операторов в $L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих соотношению $UV = q^2 VU$, а в п. 2.2 приводим свойства модулярного квантового дилогарифма $\gamma(z)$, являющегося q -деформацией дилогарифма Эйлера и выражающегося посредством отношения двойных гамма-функций Алексеевского–Барнса.

В § 3 мы исследуем *свободный оператор* H_0 , формально задаваемый выражением

$$(H_0\psi)(x) = \psi(x + 2\omega') + \psi(x - 2\omega').$$

Так, в п. 3.1 мы определяем H_0 как неограниченный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с областью определения $D(H_0)$, имеющий абсолютно непрерывный спектр кратности 2, заполняющий $[2, \infty)$. В п. 3.2 при помощи преобразования Фурье мы приводим явное выражение для резольвенты $R_0(\lambda)$ оператора H_0 как интегрального оператора с ядром $R_0(x - y; \lambda)$, задаваемым формулой (3.5). Отметим, что, в отличие от случая оператора Шрёдингера, где ядро резольвенты строится при помощи метода вариации произвольных постоянных с использованием простой формулы $\theta'(x) = \delta(x)$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, в случае функционально-разностного оператора H_0 основное уравнение для резольвенты

$$R_0(x + 2\omega'; \lambda) + R_0(x - 2\omega'; \lambda) - \lambda R_0(x; \lambda) = \delta(x)$$

выполняется в силу формулы Сохоцкого–Племеля

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right) = \delta(x)$$

из теории обобщенных функций.

В § 4 мы исследуем оператор H . Именно, в п. 4.1, следуя работе [6], мы рассматриваем преобразование Фурье уравнения (1.1), функционально-разностное уравнение первого порядка (4.2) и его специальное решение $\widehat{\varphi}(p, k)$, выражающееся через модулярный квантовый дилогарифм, где удобно использовать параметризацию $\lambda = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right)$. В п. 4.2 мы определяем решение $\varphi(x, k)$ уравнения (1.1) как обратное преобразование Фурье решения $\widehat{\varphi}(p, k)$. В лемме 4.1 собраны все необходимые свойства решения $\varphi(x, k)$, которые показывают, что оно играет роль решения задачи рассеяния для уравнения (1.1). В частности, при вещественных x и k решение $\varphi(x, k)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$ и осциллирует при $x \rightarrow -\infty$. Кроме того, $\varphi(x, k)$ является целой функцией переменной x и аналитически продолжается в полосу $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, отвечающую значениям $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$. В п. 4.3 мы вводим решения Ёоста $f_{\pm}(x, k)$ уравнения (1.1) как решения, имеющие при вещественных k асимптотики

$$f_{\pm}(x, k) = e^{\pm 2\pi i k x} + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Отметим, что, в отличие от дифференциального уравнения (1.2), имеющего два линейно независимых решения, функционально-разностное уравнение (1.1) имеет бесконечномерное пространство решений, так как имеется возможность умножать решение на *квазиконстанту* – голоморфную $2\omega'$ -периодическую функцию переменной x . Поэтому построение решений Ёоста является нетривиальной задачей. Используя аналогию уравнения (1.1) с уравнением (1.2), свойства решений которого приведены в § 6, мы определяем решения Ёоста $f_{\pm}(x, k)$ при помощи интегрального представления (4.12). В лемме 4.2 приведены свойства решения Ёоста $f_{\pm}(x, k)$. В частности, они аналитически продолжаются в полосу $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, и

$$\varphi(x, k) = M(k)f_+(x, k) + M(-k)f_-(x, k),$$

где функция $M(k)$ аналитична в полосе $0 \leq \operatorname{Im} k \leq |\omega|$ и явно выражается через модулярный квантовый дилогарифм (см. лемму 4.1).

В п. 5.1, используя аналитические свойства решений $\varphi(x, k)$ и $f_{\pm}(x, k)$, мы показываем, что резольвента $R_{\lambda}(H) = (H - \lambda I)^{-1}$ оператора H определена при $\lambda \notin [2, \infty)$ и является ограниченным интегральным оператором в $L^2(\mathbb{R})$ с ядром $R(x, y; \lambda)$, задаваемым явной формулой (5.1) (см. предложение 5.1). В п. 5.2 мы доказываем теорему разложения по решениям задачи рассеяния для оператора H . Именно, вычисляя скачок резольвенты на непрерывном спектре, мы доказываем (см. теорему 5.1), что оператор

$$(\mathcal{U}\psi)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x, k) dx$$

является изометрическим изоморфизмом гильбертовых пространств $L^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}_0 = L^2([0, \infty), \rho(k)dk)$, где

$$\rho(k) = \frac{1}{M(k)M(-k)} = 4 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right)$$

– спектральная функция оператора H . При этом оператор $\mathcal{U}H\mathcal{U}^{-1}$ является оператором умножения на $\lambda = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$, так что H имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий $[2, \infty)$.

Сравнение уравнений (1.1) и (1.2) показывает (см. замечание 5.4), что разложение по собственным функциям для оператора H является q -аналогом известного в теории функций Бесселя преобразования Конторовича–Лебедева. В п. 5.3 мы приводим формулировку теории рассеяния для оператора H и показываем, что оператор рассеяния есть оператор умножения на функцию

$$S(k) = \frac{M(-k)}{M(k)}.$$

И наконец, в приложении, § 6, мы приводим известные свойства решений уравнения (1.2).

Первый автор выражает благодарность А. М. Полякову за интересные обсуждения.

§ 2. Основные понятия и обозначения

Здесь мы приведем необходимые для дальнейшего понятия и обозначения.

2.1. Вейлевские операторы. Пусть $L^2(\mathbb{R})$ – гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых на вещественной оси по мере Лебега. Вейлевские операторы в квантовой механике – это унитарные в $L^2(\mathbb{R})$ операторы $U(u)$ и $V(v)$, где $u, v \in \mathbb{R}$, определяемые формулами

$$(U(u)\psi)(x) = \psi(x - u), \quad (V(v)\psi)(x) = e^{-ivx}\psi(x), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

(см., например, [9, гл. 2], где мы положили постоянную Планка $\hbar$ равной 1).

Операторы $U(u)$ и $V(v)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям Г. Вейля

$$U(u)V(v) = e^{iuv}V(v)U(u).$$

В теории представлений квантовой группы $SL_q(2, \mathbb{R})$ необходимо использовать комплексные значения u и v , при которых вейлевские операторы $U(u)$ и $V(v)$ становятся неограниченными самосопряженными операторами в $L^2(\mathbb{R})$. Именно, используя классические обозначения Вейерштрасса, обозначим через 2ω , $2\omega'$ образующие решетки в $\mathbb{C}$ с условием $\text{Im } \tau > 0$, где $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, и положим $q = e^{\pi i \tau}$. Ключевую роль в теории представлений квантовой группы $SL_q(2, \mathbb{R})$ играют операторы U и V , формально задаваемые формулами

$$(U\psi)(x) = \psi(x + 2\omega'), \quad (V\psi)(x) = e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \psi(x) \quad (2.1)$$

и удовлетворяющие соотношению

$$UV = q^2 VU \quad (2.2)$$

на общей области определения U и V . Особый интерес представляет теория представлений вещественных форм квантовой группы $SL_q(2, \mathbb{R})$, которым отвечают случаи $q \in \mathbb{R}$ и $|q| = 1$. В первом случае $\omega' \in i\mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ и $0 < q < 1$, что отвечает прямоугольной решетке периодов, в то время как во втором случае полупериоды ω , ω' чисто мнимые и теория эллиптических функций теряет смысл.

Именно последний случай и возникает в приложениях к конформной теории поля, и в настоящей работе мы рассматриваем вейлевскую пару U , V при $|q| = 1$. Это отвечает случаю, когда полупериоды ω и ω' являются чисто мнимыми с положительной мнимой частью. Нам будет удобно использовать нормировку

$$\omega\omega' = -\frac{1}{4}, \quad (2.3)$$

которая в настоящей работе предполагается выполненной. В работах по квантовой теории Лиувилля, следуя статье А. Б. и Ал. Б. Замолотчиковых [10], принято использовать параметризацию $\omega = \frac{i}{2b}$, $\omega' = \frac{ib}{2}$, где $\tau = b^2$ и $b > 0$.

Операторы U и V , заданные формулами (2.1), являются неограниченными самосопряженными операторами в $L^2(\mathbb{R})$. Это следует из общей спектральной теоремы фон Неймана, так как они задаются вещественными функциями от самосопряженных операторов P и Q квантовой механики, $U = e^{2i\omega'P}$ и $V = e^{\frac{\pi i Q}{\omega}}$, где $P = -i\frac{d}{dx}$, а Q – оператор умножения на независимую переменную x .

Вейлевские операторы U и V можно определить и непосредственно. Именно, U – это самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с областью определения

$$D(U) = \{\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) : e^{-\frac{\pi i p}{\omega}} \widehat{\psi}(p) \in L^2(\mathbb{R})\},$$

где

$$\widehat{\psi}(p) = \mathcal{F}(\psi)(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-2\pi i p x} dx$$

– преобразование Фурье¹ в $L^2(\mathbb{R})$. Эквивалентным образом область определения $D(U)$ состоит из функций $\psi(x)$, допускающих аналитическое продолжение в полосу $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < 2|\omega'|\}$ и таких, что $\psi(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ при всех $0 \leq y < 2|\omega'|\}$ и существует предел

$$\psi(x + 2\omega' - i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x + 2\omega' - i\varepsilon)$$

в смысле сходимости в $L^2(\mathbb{R})$. При этом для $\psi \in D(U)$ мы имеем $(U\psi)(x) = \psi(x + 2\omega' - i0)$. Аналогичным образом задается область определения $D(U^{-1})$ обратного оператора U^{-1} , и $(U^{-1}\psi)(x) = \psi(x - 2\omega' + i0)$. Область определения $D(V)$ самосопряженного оператора V состоит из функций $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, для которых $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, мы имеем

$$U^{-1} = \mathcal{F}^{-1}V\mathcal{F},$$

где обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(p) e^{2\pi i p x} dp.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В теории представлений важную роль играет модулярный дубль квантовой группы $\mathrm{SL}_q(2, \mathbb{R})$, введенный в [11]. Его представления основной серии реализуются в $L^2(\mathbb{R})$ и используют, наряду с операторами U и V , дуальные вейлевские операторы $\check{U}$ и $\check{V}$. Они удовлетворяют дуальному к (2.2) соотношению

$$\check{U}\check{V} = \check{q}^2\check{V}\check{U}, \quad \check{q} = e^{\pi i/\tau},$$

и задаются формулами

$$(\check{U}\psi)(x) = \psi(x + 2\omega), \quad (\check{V}\psi)(x) = e^{\frac{\pi i x}{\omega'}} \psi(x),$$

получающимися из (2.1) перестановкой полупериодов ω и ω' .

2.2. Модулярный квантовый дилогарифм. Положим

$$\gamma(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itz}}{\sin(\omega t) \sin(\omega' t)} \frac{dt}{t} \right\}, \quad (2.4)$$

где $|\mathrm{Im} z| < |\omega| + |\omega'|$ и контур интегрирования обходит сверху сингулярность при $t = 0$. Функция $\gamma(z)$ играет фундаментальную роль в определении модулярного дубля квантовой группы $\mathrm{SL}_q(2, \mathbb{R})$, данным вторым автором в [11], позднее она была названа *модулярным квантовым дилогарифмом*. Прилагательное “модулярный” здесь отражает инвариантность функции $\gamma(z)$ при перестановке ω и ω' , т.е. при замене τ на $1/\tau$. Термин “квантовый дилогарифм” в названии функции $\gamma(z)$ связан с ее асимптотикой при $\tau = b^2 \rightarrow 0$, которую при вещественных z несложно получить из представления (2.4):

$$\gamma\left(\frac{z}{b}\right) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi\tau} \mathrm{Li}_2(-e^{-2\pi z}) + O(1) \right\} \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

¹Мы используем нормировку преобразования Фурье, принятую в аналитической теории чисел.

где

$$\operatorname{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

– дилогарифм Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Функция $\gamma(z)$ имеет интересную историю. Она встречается в теории чисел под названием *двойной синус* [12], [13], в теории интегрируемых квантовых систем типа Калоджеро–Мозера – под названием *гиперболическая гамма-функция* [14], играет роль S -матрицы в квантовой нелинейной σ -модели [15] и участвует в форм-факторах квантовой модели синус-Гордона [16]. Функция $\gamma(z)$ выражается через отношение гамма-функций второго порядка, введенных Барнсом в 1899 г. [17], а еще раньше, в 1889 г., исследованных в магистерской диссертации В. П. Алексеевского [18].

Мы будем использовать следующие замечательные свойства модулярного квантового дилогарифма (см. [6], [19]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *функция $\gamma(z)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость z с полюсами в точках $z = -(2m+1)\omega - (2n+1)\omega'$ с целыми $m, n \geq 0$, при этом*

$$\gamma(z - \omega'') = \frac{c}{z} + O(1), \quad z \rightarrow 0,$$

где $\omega'' = \omega + \omega'$ и

$$c = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4} - \beta)}}{2\pi}, \quad \beta = \frac{\pi}{12} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right);$$

2) *функция $\gamma(z)$ удовлетворяет разностным уравнениям*

$$\gamma(z + \omega) = (1 + e^{-\frac{\pi iz}{\omega'}}) \gamma(z - \omega), \quad \gamma(z + \omega') = (1 + e^{-\frac{\pi iz}{\omega}}) \gamma(z - \omega');$$

3) *имеет место формула отражения*

$$\gamma(z) \gamma(-z) = e^{i\beta + i\pi z^2},$$

так что $\gamma(z)$ имеет нули в точках $z = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega'$ с целыми $m, n \geq 0$;

4) *имеет место свойство вещественности*

$$\overline{\gamma(z)} = \frac{1}{\gamma(\bar{z})};$$

5) *при $z \rightarrow \infty$ с условием $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$ функция $\gamma(z)$ имеет следующую асимптотику:*

$$\gamma(z) = 1 + o(1),$$

равномерную по z при любом $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

§ 3. Оператор H_0

Здесь мы рассмотрим свободный оператор $H_0 = U + U^{-1}$, формально действующий на функциях $\psi(x)$, определенных на вещественной прямой по формуле

$$(H_0\psi)(x) = \psi(x + 2\omega') + \psi(x - 2\omega'), \quad (3.1)$$

где функция $\psi(x)$ предполагается аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 2|\omega'|$, $z = x + iy$. Очевидно, что при $2\omega' = ib \rightarrow 0$ оператор $b^{-2}(H_0 - 2I)$ переходит в оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$.

3.1. Область определения. Формула (3.1) задает неограниченный самосопряженный оператор H_0 в $L^2(\mathbb{R})$ с областью определения $D(H_0)$, состоящей из функций $\psi(x)$, допускающих аналитическое продолжение в полосу $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| < 2|\omega'|\}$ и таких, что $\psi(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ при всех $|y| < 2|\omega'|$ и существуют пределы

$$\psi(x + 2\omega' - i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x + 2\omega' - i\varepsilon), \quad \psi(x - 2\omega' + i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x - 2\omega' + i\varepsilon)$$

в смысле сходимости в $L^2(\mathbb{R})$. При этом для $\psi \in D(H_0)$ формула (3.1) понимается как $(H_0\psi)(x) = \psi(x + 2\omega' - i0) + \psi(x - 2\omega' + i0)$.

В импульсном представлении оператор $\hat{H}_0 = \mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}$ является оператором умножения на функцию $2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi ip}{\omega}\right)$ и является самосопряженным. Таким образом, область определения $D(H_0)$ оператора H_0 допускает эквивалентное описание:

$$D(H_0) = \left\{ \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi ip}{\omega}\right) |\hat{\psi}(p)|^2 dp < \infty \right\},$$

и является гиперболическим аналогом пространства Соболева $W^{2,2}(\mathbb{R})$.

3.2. Резольвента оператора H_0 . В импульсном представлении оператор

$$R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda I)^{-1}$$

при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$ является оператором умножения на функцию $(2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi ip}{\omega}\right) - \lambda)^{-1}$ и ограниченным оператором в $L^2(\mathbb{R})$. Поскольку функция $2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi ip}{\omega}\right)$ двукратно отображает вещественную ось $-\infty < p < +\infty$ на $[2, \infty)$, спектр оператора H_0 является абсолютно непрерывным и заполняет полубесконечный интервал $[2, \infty)$ с кратностью 2.

В координатном представлении оператор $R_0(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$ является интегральным оператором в $L^2(\mathbb{R})$ с ядром, зависящим от разности:

$$(R_0(\lambda)\psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_0(x - y; \lambda) \psi(y) dy, \quad (3.2)$$

где

$$R_0(x; \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi ipx}}{2\operatorname{ch}\left(\frac{\pi ip}{\omega}\right) - \lambda} dp. \quad (3.3)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать параметризацию

$$\lambda = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right), \quad (3.4)$$

при которой резольвентное множество $\mathbb{C} \setminus [2, \infty)$ переходит в *физический лист* – полосу $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, а непрерывный спектр $[2, \infty)$ двукратно покрывается вещественной осью $-\infty < k < +\infty$. В параметризации (3.4) интеграл (3.3) легко вычисляется при помощи теоремы о вычетах, и мы получаем

$$R_0(x; \lambda) = \frac{\omega}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right)} \left(\frac{e^{-2\pi i k x}}{1 - e^{-4\pi i \omega x}} + \frac{e^{2\pi i k x}}{1 - e^{4\pi i \omega x}} \right). \quad (3.5)$$

Отметим, что функция $R_0(x; \lambda)$ регулярна при $x = 0$. Из (3.5) немедленно получаем, что при $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$ справедлива оценка

$$|R_0(x; \lambda)| \leq C e^{-2\pi \operatorname{Im} k |x|},$$

где $C > 0$ – константа², так что формулы (3.2) и (3.5) при $\lambda \notin [2, \infty)$ действительно определяют ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R})$.

Уравнение для собственных значений

$$\psi(x + 2\omega', k) + \psi(x - 2\omega', k) = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) \psi(x, k) \quad (3.6)$$

имеет решения $f_-(x, k) = e^{-2\pi i k x}$ и $f_+(x, k) = e^{2\pi i k x}$, являющиеся аналогами решений Йоста в теории одномерного оператора Шрёдингера. В терминах решений Йоста формула (3.5) приобретает вид

$$R_0(x - y; \lambda) = \frac{2\omega}{C(f_-, f_+)(k)} \left(\frac{f_-(x, k)f_+(y, k)}{1 - e^{\frac{\pi i}{\omega'}(x-y)}} + \frac{f_-(y, k)f_+(x, k)}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega'}(x-y)}} \right), \quad (3.7)$$

где

$$C(f, g)(x, k) = f(x + 2\omega', k)g(x, k) - f(x, k)g(x + 2\omega', k)$$

– это так называемый *определитель Касорати* (разностный аналог вронскиана) решений функционально-разностного уравнения (3.6). Он является $2\omega'$ -периодической функцией переменной x , и в случае решений Йоста $C(f_-, f_+)(x, k) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Используя формулу (3.7), можно непосредственно проверить, что интегральный оператор (3.2) является обратным к оператору $H - \lambda I$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$. Действительно, для гладкой функции $g(x)$ с компактным носителем легко показать, что

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_0(x - y; \lambda) g(y) dy \in D(H_0)$$

и $(H_0 - \lambda I)h = g$. Последнее утверждение сводится к проверке следующего уравнения:

$$R_0(x + 2\omega' - y - i0; \lambda) + R_0(x - 2\omega' - y + i0; \lambda) - \lambda R_0(x - y; \lambda) = \delta(x - y), \quad (3.8)$$

²Здесь и далее через C мы обозначаем различные константы.

понимаемого в смысле теории обобщенных функций. Поскольку функции $f_{\pm}(x, k)$ удовлетворяют уравнению (3.6), обобщенная функция в левой части уравнения (3.8) имеет носитель только при $x = y$, а ее сингулярная часть совпадает с сингулярной частью функции

$$-\frac{2\omega\omega'}{\pi i C(f_-, f_+)(k)} \left(\frac{f_-(x + 2\omega', k)f_+(y, k) - f_-(y, k)f_+(x + 2\omega', k)}{x - y - i0} + \frac{f_-(x - 2\omega', k)f_+(y, k) - f_-(y, k)f_+(x - 2\omega', k)}{x - y + i0} \right)$$

в окрестности $x = y$. Последняя сингулярная часть имеет вид

$$-\frac{2\omega\omega'}{\pi i} \left(\frac{1}{x - y - i0} - \frac{1}{x - y + i0} \right) = \delta(x - y),$$

где мы использовали определение определителя Касорати, нормировку (2.3) и формулу Сохоцкого–Племеля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Поучительно сравнить формулу (3.7) для резольвенты оператора H_0 с таковой для одномерного оператора Шрёдингера. Последняя формула имеет вид (см., например, [2, гл. 1, § 1] и [9, гл. 3])

$$G(x, y; \lambda) = \frac{1}{W(k)} (f_-(x, k)f_+(y, k)\theta(y - x) + f_-(y, k)f_+(x, k)\theta(x - y)), \quad (3.9)$$

где $\lambda = k^2$, $f_-(x, k)$ и $f_+(x, k)$ – решения Ёоста, нормированные на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно, а $W(k)$ – их вронскиан. Основную роль в проверке аналога формулы (3.8) играет соотношение $\theta'(x) = \delta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Формула (3.7) имеет замечательное сходство с (3.9), где вместо $\theta(x)$ теперь участвует сглаженный аналог функции Хевисайда

$$\theta_{\omega'}(x) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi i x}{\omega'}}}.$$

При этом аналогом формулы $\theta'(x) = \delta(x)$ является формула

$$\theta_{\omega'}(x + 2\omega' - i0) - \theta_{\omega'}(x + 2\omega' + i0) = 2\omega'\delta(x),$$

эквивалентная формуле Сохоцкого–Племеля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Как заметил А. М. Поляков, функция $\theta_{\omega'}(x)$ после отождествления x с энергией ϵ , а $\frac{\pi i}{\omega'} = \frac{2\pi}{b}$ – с обратной температурой $\frac{1}{kT}$ совпадает с одночастичной статистической суммой $\mathcal{Z} = (1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^{-1}$ в статистике Бозе–Эйнштейна.

§ 4. Оператор H

Оператор $H = H_0 + V$ задается формальным функционально-разностным выражением

$$(H\psi)(x) = \psi(x + 2\omega') + \psi(x - 2\omega') + e^{\frac{\pi i x}{\omega'}} \psi(x),$$

определенным на $D(H_0) \cap D(V)$. В частности, H определен и симметричен на плотной в $L^2(\mathbb{R})$ области $\mathcal{D} \subset D(H_0) \cap D(V)$, состоящей из линейных комбинаций функций вида $p(x)e^{-x^2+cx}$, где $p(x)$ – полином, а $c \in \mathbb{C}$. Область $\mathcal{D}$ инвариантна относительно оператора H . Ниже мы покажем, что оператор H существенно самосопряжен на области $\mathcal{D}$ и его единственное самосопряженное расширение, которое мы по-прежнему обозначаем через H , имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий $[2, \infty)$. Как и в случае свободного оператора H_0 , для оператора H мы используем параметризацию (3.4) и рассматриваем задачу для обобщенных собственных функций

$$\psi(x + 2\omega', k) + \psi(x - 2\omega', k) + e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \psi(x, k) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right) \psi(x, k). \quad (4.1)$$

4.1. Импульсное представление и волновая функция Кашаева.

В импульсном представлении задача для собственных функций оператора H имеет вид функционально-разностного уравнения первого порядка

$$\widehat{\psi}(p + 2\omega', k) = 2 \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i p}{\omega}\right) \right) \widehat{\psi}(p, k), \quad p \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

где $\widehat{\psi} = \mathcal{F}(\psi)$. Замечательным образом общее решение уравнения (4.2) (с точностью до умножения на квазиконстанту) выражается явно через модулярный квантовый дилогарифм

$$\widehat{\psi}(p, k) = c(k) e^{-\pi i (p - \omega'')^2} \gamma(p + k - \omega'') \gamma(p - k - \omega''), \quad 0 \leq \operatorname{Im} k \leq |\omega|, \quad (4.3)$$

где константа $c(k)$ будет выбрана позднее. При вещественных k произведение γ -функций имеет сингулярности при $p = \pm k$ и понимается как обобщенная функция $\gamma(p + k - \omega'' + i0) \gamma(p - k - \omega'' + i0)$.

Фундаментальная роль обобщенного решения (4.3) уравнения (4.2) была выявлена в работе [6], поэтому мы называем это решение *волновой функцией Кашаева*. Обобщенная функция $\widehat{\psi}(p, k)$ имеет следующие асимптотики:

$$\widehat{\psi}(p, k) = \begin{cases} c(k) e^{-\pi i (p - \omega'')^2} (1 + o(1)) & \text{при } p \rightarrow +\infty, \\ c(k) e^{\pi i (p - \omega'')^2 + 2i\beta + 2\pi i k^2} (1 + o(1)) & \text{при } p \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (4.4)$$

и экспоненциально убывает при больших p ,

$$|\widehat{\psi}(p, k)| = |c(k)| \exp\{-2\pi|p| |\omega''|\} (1 + o(1)) \quad \text{при } |p| \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Полагая в (4.3)

$$c(k) = e^{-i\beta - \pi i k^2} \quad (4.6)$$

и обозначая соответствующее решение через $\widehat{\varphi}(x, k)$, получаем важное свойство

$$\overline{\widehat{\varphi}(p, k)} = \widehat{\varphi}(-p, -\bar{k}). \quad (4.7)$$

Кроме того, при вещественных k из определения обобщенной функции $\widehat{\varphi}(p, k)$ имеем $\widehat{\varphi}(p, -k) = \widehat{\varphi}(p, k)$.

4.2. Решение задачи рассеяния. При вещественных x и k положим

$$\varphi(x, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(p, k) e^{2\pi i p x} dp, \quad (4.8)$$

где $\widehat{\varphi}(p, k)$ задается формулами (4.3) и (4.6) и контур интегрирования обходит сверху сингулярности при $p = \pm k$. Сравнивая (4.8) с формулой (6.3) из приложения, мы видим, что функция $\varphi(x, k)$ играет роль q -деформированной модифицированной функции Бесселя $K_{2\pi i k}(e^x)$. Из асимптотик (4.4) следует, что волновая функция Кашаева экспоненциально убывает при $|\operatorname{Re} p| \rightarrow \infty$ вдоль прямых $\operatorname{Im} p = \sigma < |\omega''|$, поэтому

$$\varphi(x, k) = \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \widehat{\varphi}(p, k) e^{2\pi i p x} dp. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) определяет функцию $\varphi(x, k)$ при вещественных x и k из физической полосы $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, где $|\omega| < \sigma < |\omega''|$.

Аналитические свойства функции $\varphi(x, k)$ описываются следующей леммой.

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *при вещественных x и k функция $\varphi(x, k)$ имеет асимптотику*

$$\varphi(x, k) = M(k) e^{2\pi i k x} + M(-k) e^{-2\pi i k x} + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

где

$$M(k) = e^{i(\beta + \frac{\pi}{4}) - 2\pi i k(k - \omega'')} \gamma(2k - \omega''),$$

при этом $\overline{M(k)} = M(-k)$ и

$$\frac{1}{|M(k)|^2} = 4 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega'} \right);$$

(ii) *при вещественных x функция $\varphi(x, k)$ допускает аналитическое продолжение в физическую полосу $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$ и удовлетворяет условию вещественности*

$$\overline{\varphi(x, k)} = \varphi(x, -\bar{k}),$$

при вещественных x и k функция $\varphi(x, k)$ является вещественнозначной четной функцией от k ;

(iii) *при фиксированном k из физической полосы функция $\varphi(x, k)$ продолжается до целой функции комплексной переменной x и удовлетворяет уравнению*

$$\varphi(x + 2\omega', k) + \varphi(x - 2\omega', k) + e^{\frac{\pi i x}{\omega}} \varphi(x, k) = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) \varphi(x, k);$$

(iv) *имеют место оценки*

$$|\varphi(x, k)| \leq C e^{-2\pi \kappa x}$$

равномерно по $-\infty < x \leq a$, где $0 \leq \kappa = \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, и

$$|\varphi(x, k)| \leq C e^{-2\pi(|\omega| + |\omega'|)x}, \quad |\varphi(x \pm 2\omega', k)| \leq C e^{2\pi(|\omega'| - |\omega|)x}$$

равномерно по $a \leq x < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сдвигая при отрицательных x контур интегрирования в формуле (4.8) в нижнюю полуплоскость и проходя вычеты подынтегрального выражения как при $p = -k$, так и при $p = k$, мы получаем первую формулу из утверждения (i). Формулы для коэффициента $M(k)$ получаются из утверждений 1)–4) предложения 2.1. Утверждение (ii) непосредственно следует из предложения 2.1 и свойства (4.7). В частности, $\overline{M(k)} = M(-\bar{k})$.

Для доказательства утверждения (iii) деформируем контур интегрирования в интегральном представлении (4.9) в контур L , заменяя полубесконечные интервалы $-\infty < \operatorname{Re} p \leq -|\operatorname{Re} k| - 1$ и $|\operatorname{Re} k| + 1 \leq \operatorname{Re} p < \infty$ на прямой $\operatorname{Im} p = \sigma$ на лучи $p = -|\operatorname{Re} k| - 1 + i\sigma + e^{\frac{\pi i}{4}} t$, $-\infty < t \leq 0$, и $p = |\operatorname{Re} k| + 1 + i\sigma + e^{-\frac{\pi i}{4}} t$, $0 \leq t < \infty$ (на рис. 1 изображен контур для вещественных k).

Рис. 1

Таким образом,

$$\varphi(x, k) = \int_L \widehat{\varphi}(p, k) e^{2\pi i p x} dp, \quad (4.10)$$

и из предложения 2.1 следует, что вдоль контура L подынтегральное выражение в (4.10) убывает как $e^{-\pi t^2}$ при $t \rightarrow \pm\infty$, и поэтому формула (4.10) определяет $\varphi(x, k)$ как целую функцию переменной x . Разностное уравнение для $\varphi(x, k)$ получается из (4.2) при помощи преобразования Фурье.

Наконец, оценки (iv) выводятся стандартным образом из интегрального представления (4.10) с использованием асимптотик функции $\gamma(z)$ из предложения 2.1 и метода перевала.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Функция $\varphi(x, k)$ инвариантна при перестановке ω и ω' и удовлетворяет дуальному уравнению $\check{H}\varphi = \check{\lambda}\varphi$, где $\check{H} = \check{U} + \check{U}^{-1} + \check{V}$ (см. замечание 2.1) и $\check{\lambda} = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right)$.

4.3. Решения Йоста. При $x \rightarrow -\infty$ уравнение (4.1) приобретает свободный вид (3.6), так что естественно предположить, что (4.1) имеет решения Йоста – решения $f_{\pm}(x, k)$ со следующими асимптотиками:

$$f_{\pm}(x, k) = e^{\pm 2\pi i k x} + o(1) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (4.11)$$

Здесь мы докажем существование таких решений. Сначала сравним уравнение (4.1) с уравнением (1.2). Именно, сопоставление формул (6.3) и (6.4) из приложения с формулой (4.10) приводит к рассмотрению решения уравнения (4.2), получающегося из $\widehat{\varphi}(p, k)$ умножением на квазиконстанту $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i p}{\omega'}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right)$. Таким образом, при вещественных x и k мы полагаем

$$f(x, k) = \frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right) M(k)} \int_L \widehat{\varphi}(p, k) \left(\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i p}{\omega'}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right) \right) e^{2\pi i p x} dp. \quad (4.12)$$

Следующее утверждение показывает, что функции $f_+(x, k) = f(x, k)$ и $f_-(x, k) = f(x, -k)$ действительно играют роль решений Йоста для уравнения (4.1).

ЛЕММА 4.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *при вещественных x и k функции $f_{\pm}(x, k)$ имеют следующие асимптотики при $x \rightarrow -\infty$:*

$$f_{\pm}(x, k) = e^{\pm 2\pi i k x} + o(1);$$

(ii) *при вещественных x функции $f_{\pm}(x, k)$ допускают аналитическое продолжение в физическую полосу $0 < \operatorname{Im} k \leq |\omega|$ и удовлетворяют условию*

$$\overline{f_{\pm}(x, k)} = f_{\pm}(x, -\bar{k});$$

(iii) *при фиксированном k из физической полосы функции $f_{\pm}(x, k)$ являются целыми функциями переменной x и удовлетворяют уравнению (4.1), при этом асимптотики из п. (i) остаются справедливыми и в полосе $0 \leq \operatorname{Im} x \leq 2|\omega'|$;*

(iv) *имеет место соотношение*

$$\varphi(x, k) = M(k)f_+(x, k) + M(-k)f_-(x, k);$$

(v) *имеют место оценки*

$$|f_{\pm}(x, k)| \leq C e^{\mp 2\pi \kappa x}$$

равномерно по $-\infty < x \leq a$, где $0 \leq \kappa = \operatorname{Im} k \leq |\omega|$, и

$$|f_{\pm}(x, k)| \leq C e^{2\pi(|\omega| - |\omega'|)x}, \quad |f_{\pm}(x + 2\omega', k)| \leq C e^{2\pi(|\omega| + |\omega'|)x}$$

равномерно по $a \leq x < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения (i) достаточно сдвинуть контур интегрирования в (4.12) при отрицательных x в нижнюю полуплоскость и воспользоваться регулярностью подынтегрального выражения при $p = -k$ (благодаря умножению на квазиконстанту $\operatorname{sh}(\frac{\pi i p}{\omega'}) + \operatorname{sh}(\frac{\pi i k}{\omega'})$). Утверждения (ii)–(iv) немедленно следуют из представления (4.12), записанного в виде

$$f(x, k) = \frac{1}{4 \operatorname{sh}(\frac{\pi i k}{\omega'}) M(k)} \left(\varphi(x - 2\omega, k) - \varphi(x + 2\omega, k) + 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega'}\right) \varphi(x, k) \right), \quad (4.13)$$

и аналогичных свойств функции $\varphi(x, k)$, приведенных в лемме 4.1. Поскольку потенциал $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$ в уравнении (4.1) имеет период 2ω , функции $\varphi(x \pm 2\omega, k)$ также удовлетворяют (4.1). Доказательство оценок (v) проводится стандартным образом при использовании интегрального представления (4.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Формула (4.13) является разностным аналогом (6.7). Функция $f(x, k)$ не инвариантна при перестановке ω и ω' и поэтому не удовлетворяет дуальному уравнению для собственных значений (ср. с замечанием 4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В случае $\text{Im } \tau > 0$ решения Йоста $f_{\pm}(x, k)$ можно определить при помощи степенных рядов по переменной $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$, абсолютно сходящихся при всех $x \in \mathbb{R}$. В рассматриваемом случае $\tau = b^2 > 0$ возникает проблема малых знаменателей и соответствующие ряды теперь абсолютно не сходятся при всех x . Поэтому в данном случае мы используем интегральное представление (4.12).

4.4. Определитель Касорати. Как и в п. 3.2, непосредственно проверяется, что определитель Касорати

$$C(f, g)(x, k) = f(x + 2\omega', k)g(x, k) - f(x, k)g(x + 2\omega', k)$$

двух решений уравнения (4.1) является $2\omega'$ -периодической функцией переменной x . В отличие от его непрерывного аналога, вронскиана, определитель Касорати, вообще говоря, не является константой. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. *Справедлива формула*

$$C(f_-, f_+)(x, k) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(x) = C(f_-, f_+)(x, k)$. При $x \rightarrow -\infty$ из утверждений (i) и (iii) леммы 4.2 следует, что в полосе $0 \leq \text{Im } x \leq 2|\omega'|$ справедлива асимптотика

$$F(x) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) + o(1).$$

При $x \rightarrow \infty$, используя

$$F(x) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega'} \right) C(f_-, \varphi)(x, k)$$

и оценки из леммы 4.1, (iv) и леммы 4.2, (v), получаем, что на прямых $\text{Im } x = 0$ и $\text{Im } x = 2|\omega'|$ функция $F(x)$ является ограниченной. Далее, из интегрального представления (4.12) следует, что $F(x)$ имеет не более чем экспоненциальный рост при $x \rightarrow \infty$, поэтому на основании теоремы Фрагмена–Линделёфа заключаем, что $2\omega'$ -периодическая функция $F(x)$ является ограниченной в полосе $0 \leq \text{Im } x \leq 2|\omega'|$. Таким образом, $F(x) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right)$.

§ 5. Теорема разложения

5.1. Резольвента оператора H . Рассмотрим интегральный оператор $R(\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R})$ с ядром

$$R(x, y; \lambda) = \frac{\omega}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) M(k)} \left(\frac{f_-(x, k) \varphi(y, k)}{1 - e^{\frac{\pi i}{\omega'}(x-y)}} + \frac{f_-(y, k) \varphi(x, k)}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega'}(x-y)}} \right), \quad (5.1)$$

так что

$$R(y, x; \lambda) = R(x, y; \lambda), \quad \overline{R(x, y; \lambda)} = R(x, y; \bar{\lambda}).$$

Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Оператор $R(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$ является резольвентой оператора H . Другими словами, $R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае оператора H_0 (см. замечание 3.1), легко показать, что для гладкой функции $g(x)$ с компактным носителем имеем

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x, y; \lambda) g(y) dy \in D(H)$$

и $(H - \lambda I)h = g$. Последнее утверждение сводится к проверке уравнения

$$R(x + 2\omega' - i0, y; \lambda) + R(x - 2\omega' + i0, y; \lambda) + (e^{\frac{\pi i x}{\omega}} - \lambda)R(x, y; \lambda) = \delta(x - y), \quad (5.2)$$

понимаемого в смысле теории обобщенных функций. Как и в замечании 3.1, функции $\varphi(x, k)$ и $f_{-}(x, k)$ удовлетворяют уравнению (4.1), поэтому обобщенная функция в левой части (5.2) имеет носитель только при $x = y$, а ее сингулярная часть совпадает с сингулярной частью функции

$$-\frac{2\omega\omega'}{2\pi \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)M(k)} \left(\frac{f_{-}(x + 2\omega', k)\varphi(y, k) - f_{-}(y, k)\varphi(x + 2\omega', k)}{x - y - i0} + \frac{f_{-}(x - 2\omega', k)\varphi(y, k) - f_{-}(y, k)\varphi(x - 2\omega', k)}{x - y + i0} \right)$$

в окрестности $x = y$. Как и при выводе в замечании 3.1, уравнение (5.2) вытекает из формулы

$$C(f_{-}, \varphi)(x, k) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)M(k),$$

следующей из леммы 4.3, и формулы Сохоцкого–Племеля.

Таким образом, нам осталось показать, что ядро (5.1) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$ задает ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R})$. Это немедленно вытекает из оценки

$$|R(x, y; \lambda)| \leq C e^{-2\pi\kappa|x-y|}, \quad \kappa = \operatorname{Im} k,$$

которая следует из приведенных в леммах 4.1, 4.2 оценок. Именно, поскольку $R(x, y; \lambda) = R(y, x; \lambda)$, достаточно предположить, что $y \leq x$. Перепишем формулу (5.1) в виде

$$R(x, y; \lambda) = \frac{\omega(f_{-}(x, k)\varphi(y, k)e^{2\pi i\omega(x-y)} - f_{-}(y, k)\varphi(x, k)e^{-2\pi i\omega(x-y)})}{2 \operatorname{sh}(2\pi i\omega(x-y)) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)M(k)}$$

и рассмотрим сначала случай $0 \leq y \leq x$. Используя оценки из леммы 4.1, (iv) и леммы 4.2, (v), получаем оценку

$$|R(x, y; \lambda)| \leq C e^{-2\pi|\omega|(x-y)} (e^{2\pi(|\omega|-|\omega'|)x} e^{-2\pi(|\omega|+|\omega'|)y} e^{-2\pi|\omega|(x-y)} + e^{-2\pi(|\omega|+|\omega'|)x} e^{-2\pi\kappa y} e^{2\pi|\omega|(x-y)}) \leq 2C e^{-2\pi|\omega|(x-y)}.$$

Для случая $y < 0 \leq x$ имеем

$$\begin{aligned} |R(x, y; \lambda)| &\leq C e^{-2\pi|\omega|(x-y)} (e^{2\pi(|\omega|-|\omega'|)x} e^{-2\pi\kappa y} e^{-2\pi|\omega|(x-y)} \\ &\quad + e^{-2\pi(|\omega|+|\omega'|)x} e^{2\pi\kappa y} e^{2\pi|\omega|(x-y)}) \\ &\leq C (e^{2\pi(|\omega|-\kappa)y} e^{-2\pi|\omega|(x-y)} + e^{-2\pi|\omega|x} e^{2\pi\kappa y}) \leq 2C e^{-2\pi\kappa(x-y)}. \end{aligned}$$

И наконец, в оставшемся случае $y \leq x < 0$ получаем оценку

$$|R(x, y; \lambda)| \leq C e^{-2\pi|\omega|(x-y)} (e^{2\pi\kappa x} e^{-2\pi\kappa y} e^{-2\pi|\omega|(x-y)} + e^{-2\pi\kappa x} e^{2\pi\kappa y} e^{2\pi|\omega|(x-y)}) \leq 2C e^{-2\pi\kappa(x-y)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Формулу (5.1) можно использовать и как определение оператора H .

5.2. Разложение по собственным функциям. Явная формула (5.1) для резольвенты $R(\lambda)$ сразу приводит к теореме разложения по собственным функциям оператора H . Именно, обозначим через $E(\Delta)$, где Δ пробегает борелевские подмножества в $\mathbb{R}$, разложение единицы самосопряженного оператора H (см. [21], [22]). При отсутствии точечного спектра справедлива формула

$$E(\Delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda$$

(см. [22, гл. XII]), иногда называемая *формулой Стоуна*. В частности, полагая $\Delta = [2, \infty)$, для оператора H получаем

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_2^{+\infty} (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)) d\lambda. \quad (5.3)$$

Именно эта формула и служит основой для вывода теоремы разложения.

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *оператор $\mathcal{U}$, задаваемый формулой*

$$(\mathcal{U}\psi)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x, k) dx, \quad \psi(x) \in L^2(\mathbb{R}),$$

изометрически отображает пространство $L^2(\mathbb{R})$ на гильбертово пространство $\mathcal{H}_0 = L^2([0, \infty), \rho(k)dk)$ со спектральной функцией

$$\rho(k) = \frac{1}{|M(k)|^2} = 4 \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi i k}{\omega'} \right),$$

другими словами, $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_0$, и при этом $\mathcal{U}^ \mathcal{U} = I$, $\mathcal{U} \mathcal{U}^* = I_0$, где I_0 – единичный оператор в $\mathcal{H}_0$;*

(ii) *$\mathcal{U} H \mathcal{U}^{-1}$ – оператор умножения на функцию $2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi i k}{\omega} \right)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$, так что оператор H имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий $[2, \infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любой функции $\psi(x) \in \mathcal{D}$ справедливо равенство

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \varphi(y, k) dy \right) \varphi(x, k) \rho(k) dk. \quad (5.4)$$

Используя уравнение (4.1) для $\varphi(x, k)$, получаем, что $(\mathcal{U}\psi)(k)$ при $k \rightarrow \infty$ убывает быстрее любой степени $e^{-\frac{\pi i k}{\omega}}$, так что все интегралы, очевидно, абсолютно

сходятся. Формулу (5.4) можно доказать как при помощи метода комплексного интегрирования (см. [1, § 2], а также [9, гл. 3]), так и при помощи формулы (5.3), которую мы и будем использовать. Именно, применим (5.3) к функции $\psi(x) \in \mathcal{D}$. Явно вычисляя скачок ядра резольвенты $R(x, y; \lambda)$ через абсолютно непрерывный спектр и используя соотношение (iv) леммы 4.2, получаем

$$\begin{aligned} R(x, y; \lambda + i0) - R(x, y; \lambda - i0) &= \frac{\omega}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)} \frac{\varphi(x, k) \varphi(y, k)}{|M(k)|^2} \\ &= \frac{\omega}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)} \varphi(x, k) \varphi(y, k) \rho(k), \end{aligned}$$

где мы учли, что случай $\lambda + i0$ отвечает переменной $k > 0$, а случай $\lambda - i0$ – переменной $-k$. Используя $d\lambda = \frac{2\pi i}{\omega} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right) dk$, мы приходим к (5.4). Умножая это равенство на $\overline{\psi(x)}$ и интегрируя, получаем

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\mathcal{U}\psi\|_{\mathcal{H}_0}^2$$

(перестановка интегралов законна в силу теоремы Фубини). Таким образом, оператор $\mathcal{U}$, определенный на плотном множестве $\mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R})$, переводит его в гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$ и является изометрическим. Значит, $\mathcal{U}$ допускает изометрическое продолжение на все $L^2(\mathbb{R})$, что и доказывает соотношение полноты

$$\mathcal{U}^* \mathcal{U} = I.$$

Соотношение ортогональности

$$\mathcal{U} \mathcal{U}^* = I_0$$

эквивалентно утверждению, что образ оператора $\mathcal{U}$ в $\mathcal{H}_0$ (замкнутое подпространство $\operatorname{Im} \mathcal{U}$) совпадает с $\mathcal{H}_0$. Это доказывается стандартным образом (см., например, [9, гл. 3]). Именно, на области $\mathcal{D}$ имеем $\mathcal{U}(H - \lambda I) = (\hat{H} - \lambda I)\mathcal{U}$, где $\hat{H}$ – оператор умножения на $2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i k}{\omega}\right)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$. Отсюда получаем

$$\mathcal{U} R(\lambda) = \hat{R}(\lambda) \mathcal{U},$$

где $\hat{R}(\lambda)$ – резольвента оператора $\hat{H}$. Таким образом, $\operatorname{Im} \mathcal{U}$ – инвариантное подпространство для оператора $\hat{R}(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2, \infty)$. Отсюда следует, что $\hat{R}(\lambda)$ коммутирует с ортогональным проектором P на подпространство $\operatorname{Im} \mathcal{U}$. Таким образом, P является функцией оператора $\hat{H}$, который, в свою очередь, является функцией оператора умножения на переменную k в $\mathcal{H}_0$. В результате получаем, что P – оператор умножения на характеристическую функцию χ_Δ борелевского подмножества Δ в $[0, \infty)$. С другой стороны, если для некоторого $k > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi(x, k) dx = 0$$

при всех $\psi(x) \in C_0(\mathbb{R})$, то $\varphi(x, k) = 0$ при всех x , так что с необходимостью $\Delta = [0, \infty)$. На этом доказательство (i) заканчивается. Утверждение (ii) следует из приведенных выше рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Для дуального оператора $\check{H}$ ядро резольвенты $\check{R}(\check{\lambda})$ (см. замечание 4.1) получается из формулы (5.1) перестановкой ω и ω' , и, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.1, мы приходим к тому же оператору $\mathcal{U}$. Таким образом, $\mathcal{U}$ диагонализует и дуальный оператор $\check{H}$, так что $\mathcal{U} \check{H} \mathcal{U}^{-1}$ есть оператор умножения на функцию $\check{\lambda} = 2 \operatorname{ch}(\frac{\pi i k}{\omega'})$ в $\mathcal{H}_0$. В результате получаем, что H и $\check{H}$ коммутируют как самосопряженные операторы в $L^2(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. В физической литературе соотношения полноты и ортогональности, понимаемые в смысле теории обобщенных функций, записываются следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, k) \varphi(y, k) \rho(k) dk = \delta(x - y),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, k) \varphi(x, l) dx = \frac{1}{\rho(k)} \delta(k - l), \quad k, l > 0.$$

Как и в случае одномерного оператора Шрёдингера (см., например, [9, гл. 3]), последнее соотношение может быть доказано непосредственно, при использо-

Рис. 2

вании определителя Касорати. Именно, положим $\Phi(x) = C(\varphi(x, k), \varphi(x, l))$ и проинтегрируем эту функцию по контуру D , изображенному на рис. 2.

По теореме Коши имеем

$$\int_D \Phi(x) dx = 0.$$

С другой стороны, используя уравнение

$$\Phi(x) - \Phi(x - 2\omega') = (\lambda - \mu) \varphi(x, k) \varphi(x, l),$$

где $\lambda = 2 \operatorname{ch}(\frac{\pi i k}{\omega})$ и $\mu = 2 \operatorname{ch}(\frac{\pi i l}{\omega})$, получаем равенство

$$\int_{-N}^N \varphi(x, k) \varphi(x, l) dx = \frac{1}{\lambda - \mu} \left(\int_{N-2\omega'}^N \Phi(x) dx - \int_{-N-2\omega'}^{-N} \Phi(x) dx \right).$$

Из оценок (iv) леммы 4.1 следует, что первый интеграл экспоненциально убывает при $N \rightarrow \infty$. Используя утверждения (i) и (iv) леммы 4.2, известную формулу из теории обобщенных функций

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi(k-l)N)}{k-l} = \pi \delta(k-l)$$

и лемму Римана–Лебега, получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{-N-2\omega'}^{-N} \Phi(x) dx = \frac{1}{\rho(k)} \delta(k - l).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Поскольку $W(I_\nu, K_\nu) = -1$ (см. формулу (6.6) из приложения), ядро резольвенты $\tilde{R}(\lambda)$ оператора $\tilde{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{2x}$ имеет вид

$$\tilde{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{2ik\tilde{M}(k)} (\tilde{f}_-(x, k)\tilde{\varphi}(y, k)\theta(y - x) + \tilde{f}_-(y, k)\tilde{\varphi}(x, k)\theta(x - y)),$$

где $\text{Im } k > 0$ (см. замечание 3.2). Как и в теореме 5.1, используя (6.8), получаем, что оператор $\tilde{\mathcal{U}}$, задаваемый формулой

$$(\tilde{\mathcal{U}}\psi)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\tilde{\varphi}(x, k) dx,$$

изометрически отображает $L^2(\mathbb{R})$ на $\tilde{\mathcal{H}}_0 = L^2([0, \infty), \tilde{\rho}(k)dk)$, где согласно соотношению (6.9) выполнено

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2\pi|\tilde{M}(k)|^2} = \frac{2k \text{sh}(\pi k)}{\pi^2}.$$

При этом оператор $\tilde{\mathcal{U}}\tilde{H}\tilde{\mathcal{U}}^{-1}$ является оператором умножения на k^2 в $\tilde{\mathcal{H}}_0$. Формулы

$$\tilde{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)K_{ik}(e^x) dx, \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tilde{\psi}(k)K_{ik}(e^x)k \text{sh}(\pi k) dk$$

после замены $x = \ln y$ известны в теории специальных функций как преобразование Конторовича–Лебедева и его обращение (см. [23, гл. XII]), а равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} |\tilde{\psi}(k)|^2 k \text{sh}(\pi k) dk$$

– как теорема Парсеваля. Теорема разложения для оператора $\tilde{H}$ дает спектральную интерпретацию преобразования Конторовича–Лебедева, поэтому теореме 5.1 можно рассматривать как q -аналог этого преобразования.

5.3. Теория рассеяния. Здесь мы вкратце опишем теорию рассеяния для оператора H . Положим

$$\varphi^{(+)}(x, k) = \frac{1}{M(k)} \varphi(x, k).$$

При $x \rightarrow -\infty$ мы имеем

$$\varphi^{(+)}(x, k) = e^{2\pi i k x} + S(k)e^{-2\pi i k x} + o(1),$$

где

$$S(k) = \frac{M(-k)}{M(k)} = e^{-4\pi i \omega'' k} \frac{\gamma(-2k - \omega'')}{\gamma(2k - \omega'')}.$$

Согласно стационарной теории рассеяния (см. [1], [2]) оператор умножения на функцию $S(k)$ имеет смысл оператора рассеяния как в пространстве $\mathcal{H}_0$, так и в $L^2([0, \infty))$. Отметим, что оператор $\mathcal{U}^{(+)}$, определяемый формулой

$$(\mathcal{U}^{(+)}\psi)(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi^{(+)}(x, k) dx,$$

изометрически отображает $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2([0, \infty))$. Следуя [8], [24], последнее пространство удобно интерпретировать как подпространство в $L^2(\mathbb{R})$, состоящее из функций $\chi(k)$, удовлетворяющих условию

$$\chi(k) = S(k)\chi(-k).$$

Оператор $\mathcal{U}^{(-)}$ определяется аналогичным образом по решению $\varphi^{(-)}(x, k) = \overline{\varphi^{(+)}(x, k)}$. Операторы $\mathcal{U}^{(\pm)}$ используются для нестационарного подхода к теории рассеяния (см. [1], [2]), однако на этом мы останавливаться не будем.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Аналогичным образом строится теория рассеяния для оператора $\tilde{H}$. При этом для оператора рассеяния $\tilde{S}$ согласно (6.9) имеем

$$\tilde{S}(k) = \frac{\widetilde{M}(-k)}{\widetilde{M}(k)} = -2^{2ik} \frac{\Gamma(1+ik)}{\Gamma(1-ik)}$$

(ср. с формулой (5.19) в [10]).

§ 6. Приложение

Приведем известные свойства решений уравнения (1.2). В импульсном представлении оно имеет вид

$$\widehat{\psi}\left(p + \frac{i}{\pi}, k\right) = 4\pi^2(k^2 - p^2)\widehat{\psi}(p, k), \quad (6.1)$$

где мы положили $\lambda = (2\pi k)^2$. Его решение дается произведением гамма-функций Эйлера

$$\widehat{\psi}(p, k) = 2^{-2\pi ip - 2} \Gamma(\pi i(p+k)) \Gamma(\pi i(p-k)), \quad (6.2)$$

а общее решение получается умножением на квазиконстанту – периодическую функцию p с периодом i/π . Совершая обратное преобразование Фурье и полагая $s = -2\pi ip$, получаем представление Меллина–Барнса для модифицированной функции Бесселя второго рода

$$K_\nu(e^x) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{e^x}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) ds, \quad (6.3)$$

где $\nu = 2\pi ik$ и $\sigma = \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \nu|$ (см. [20, гл. 7, формула (27)] для преобразования Меллина функции $K_\nu(z)$). В случае $\operatorname{Re} \nu = 0$ интегрирование ведется по мнимой оси $\sigma = 0$ с обходом полюсов при $s = \pm \nu$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Функция $K_\nu(e^x)$ является целой функцией от x .

Рис. 3

Решениями уравнения (1.2) также являются модифицированные функции Бесселя первого рода $I_\nu(e^x)$ и $I_{-\nu}(e^x)$, где $\lambda = -\nu^2$. При этом

$$W(I_{-\nu}, I_\nu)(x) = I_{-\nu}(x)I'_\nu(x) - I'_{-\nu}(x)I_\nu(x) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi}.$$

Функция $I_\nu(e^x)$ получается умножением решения (6.2) уравнения (6.1) на квазиконстанту $\frac{e^{-\pi i\nu} - e^{-\pi i s}}{\pi i}$, где $s = -2\pi i p$, и заменой контура интегрирования в (6.3) на контур C , изображенный на рис. 3. В результате получаем следующее интегральное представление:

$$I_\nu(e^x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_C \left(\frac{e^x}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) (e^{-\pi i\nu} - e^{-\pi i s}) ds. \quad (6.4)$$

Сдвигая контур интегрирования C налево на $-\infty$, мы получаем стандартное представление $I_\nu(e^x)$ в виде степенного ряда от переменной e^x . Множитель $e^{-\pi i\nu} - e^{-\pi i s}$ обеспечивает отсутствие полюсов при $s = \nu + 2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Функция $I_\nu(e^x)$ является целой функцией x , и $I_\nu(e^{x+\pi i}) = e^{\pi i\nu} I_\nu(e^x)$. Из соотношений (6.3) и (6.4) получаем

$$K_\nu(e^x) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)} (I_{-\nu}(e^x) - I_\nu(e^x)), \quad (6.5)$$

так что

$$W(I_\nu, K_\nu) = -1. \quad (6.6)$$

Также имеем

$$K_\nu(e^{x+\pi i}) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)} (e^{-\pi i\nu} I_{-\nu}(e^x) - e^{\pi i\nu} I_\nu(e^x)),$$

откуда получаем

$$I_\nu(e^x) = \frac{1}{\pi i} (e^{-\pi i\nu} K_\nu(e^x) - K_\nu(e^{x+\pi i})). \quad (6.7)$$

Функция $I_\nu(e^x)$ имеет следующую асимптотику при $x \rightarrow -\infty$:

$$I_{ik}(e^x) = \frac{2^{-ik}}{\Gamma(1+ik)} (e^{ikx} + o(1)),$$

и растет как двойная экспонента при $x \rightarrow \infty$, в то время как $K_\nu(e^x) = O(e^{-e^x})$ при $x \rightarrow \infty$.

Роль решения задачи рассеяния для уравнения (1.2) играет функция $\tilde{\varphi}(x, k) = K_{ik}(e^x)$. Соответствующие решения Йоста – это функции $\tilde{f}_+(x, k) = 2^{ik}\Gamma(1 + ik)I_{ik}(e^x)$ и $\tilde{f}_-(x, k) = \tilde{f}(x, -k)$, имеющие асимптотики $\tilde{f}_\pm(x, k) = e^{\pm ikx} + o(1)$ при $x \rightarrow -\infty$. При этом

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \widetilde{M}(k)\tilde{f}_+(x, k) + \widetilde{M}(-k)\tilde{f}_-(x, -k), \quad (6.8)$$

где

$$\widetilde{M}(k) = -\frac{2^{-1-ik}\pi}{\sin(\pi ik)\Gamma(1 + ik)} = 2^{-1-ik}\Gamma(-ik), \quad |\widetilde{M}(k)|^2 = \frac{\pi}{4k \operatorname{sh}(\pi k)}. \quad (6.9)$$

На этом мы завершаем описание свойств решений уравнения (1.2).

Список литературы

1. Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, *УМН*, **14**:4(88) (1959), 57–119; англ. пер.: L. D. Faddeyev, B. Seckler, “The inverse problem in the quantum theory of scattering”, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 72–104.
2. Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180; англ. пер.: L. D. Faddeev, “Inverse problem of quantum scattering theory. II”, *J. Soviet Math.*, **5**:3 (1976), 334–396.
3. А. А. Белавин, А. М. Полиakov, А. В. Замолодчиков, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory”, *Nuclear Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
4. L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice”, *Field theory, quantum gravity and strings* (Meudon/Paris, 1984/1985), *Lecture Notes in Phys.*, **246**, Springer, Berlin, 1986, 166–179.
5. В. В. Фок, Л. О. Чехов, “Квантовые пространства Тейхмюллера”, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 511–528; англ. пер.: V. V. Fock, L. O. Chekhov, “A quantum Teichmüller space”, *Theoret. and Math. Phys.*, **120**:3 (1999), 1245–1259.
6. R. Kashaev, “The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory”, *Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory* (Kiev, 2000), *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, **35**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 211–221.
7. B. Ponsot, J. Teschner, “Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ ”, *Comm. Math. Phys.*, **224**:3 (2001), 613–655.
8. S. E. Derkachov, L. D. Faddeev, *3j-symbol for the modular double of $\mathrm{SL}_q(2, \mathbb{R})$ revisited*, arXiv:1302.5400.
9. Л. А. Тахтаджян, *Квантовая механика для математиков*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск, 2011, 496 с.; англ. пер.: L. A. Takhtajan, *Quantum mechanics for mathematicians*, *Grad. Stud. Math.*, **95**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, xvi+387 pp.
10. A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, “Conformal bootstrap in Liouville field theory”, *Nuclear Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605.
11. L. D. Faddeev, “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato 1999, v. I* (Dijon), *Math. Phys. Stud.*, **21**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 149–156.
12. T. Shintani, “On a Kronecker limit formula for real quadratic field”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24**:1 (1977), 167–199.

13. N. Kurokawa, “Multiple sine functions and Selberg zeta functions”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **67**:3 (1991), 61–64.
14. S. N. M. Ruijsenaars, “First order analytic difference equations and integrable quantum systems”, *J. Math. Phys.*, **38**:2 (1997), 1069–1146.
15. A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, “Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models”, *Ann. Physics*, **120**:2 (1979), 253–291.
16. F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, Adv. Ser. Math. Phys., **14**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1992, xiv+208 pp.
17. E. W. Barnes, “The genesis of the double gamma function”, *Proc. London Math. Soc.*, **S1-31**:1 (1899), 358–381.
18. В. П. Алексеевский, “О функциях подобных функции гамма”, *Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Императорском Харьковском университете*, т. 1, Харьков, 1889, 169–238.
19. A. Yu. Volkov, “Noncommutative hypergeometry”, *Comm. Math. Phys.*, **258**:2 (2005), 257–273.
20. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, 2-е изд., Наука, М., 1974, 295 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xvii+396 pp.
21. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 543 с.; нем. пер.: N. I. Achieser, I. M. Glasman, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Math. Lehrbücher und Monogr., **IV**, Akademie-Verlag, Berlin, 1968, xvi+488 pp.
22. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. 2, Мир, М., 1966, 1063 с.; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, v. II: *Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York–London, 1963, ix+859–1923+7 pp.
23. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (при участии В. Магнуса, Ф. Оберхеттингера, Ф. Трикоми), *Таблицы интегральных преобразований*, т. 2, Наука, М., 1970, 328 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, v. II, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1954, xvi+451 pp.
24. L. D. Faddeev, *Zero modes for the quantum Liouville model*, arXiv: 1404.1713.

ЛЕОН АРМЕНОВИЧ ТАХТАДЖЯН
(LEON A. TAKHTAJAN)
Department of Mathematics,
Stony Brook University, NY, USA;
Международный математический институт
им. Л. Эйлера, г. Санкт-Петербург
E-mail: leontak@math.sunysb.edu

Поступило в редакцию
03.06.2014

Людвиг Дмитриевич Фаддеев
(LYUDVIG D. FADDEEV)
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН;
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru