Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Андросенко, Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,
Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:32:26

УДК 511.36

В. А. Андросенко

Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

С помощью новой интегральной конструкции, объединяющей идею симметрии, предложенную В. Х. Салиховым в 2007 г., и интеграл, введенный Р. Марковеккио в 2009 г., получена новая оценка меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: мера иррациональности, линейная форма, комплексный интеграл.

DOI: 10.4213/im8259

Введение

Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел λ , для которых начиная с некоторого положительного $q \geq q_0(\lambda)$ выполняется неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| > q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Известно, что мера иррациональности любого иррационального числа μ не меньше 2. К настоящему времени установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функций.

Одной из классических задач теории диофантовых приближений является получение оценки меры иррациональности числа π .

В связи с этим было рассмотрено несколько констант, непосредственно связанных с числом π , но являющихся более “чувствительными” к применению методов и подходов, позволяющих улучшить оценку меры иррациональности этих чисел.

Именно такой константой является число $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Л. В. Данилов в 1978 г. получил [1] первую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$:

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 9.35 \dots$$

Позднее этот результат неоднократно улучшался.

К. Алади и М. Л. Робинсон [2] снизили эту оценку до $8.3099 \dots$, Г. В. Чудновский [3] – до $5.7926 \dots$, А. К. Дубицкас [4] – до $5.516 \dots$, М. Хата [5] – до $5.0871 \dots$, Дж. Рин [6] – до $4.97 \dots$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00171).

М. Хата в 1993 г. с помощью комплексного интеграла вида

$$\int_{\Gamma} (F(a, b, c; z))^n \frac{dz}{z},$$

где

$$F(a, b, c; z) = \frac{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}{z^3},$$

$$a = 1, \quad b = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad c = \frac{3 + \sqrt{3}i}{4}, \quad n \rightarrow \infty,$$

Γ – кривая, соединяющая точки a и b , получил [7] новую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, а именно $\mu(\frac{\pi}{\sqrt{3}}) \leq 4.6015 \dots$.

В. Х. Салихов в 2007 г. рассмотрел [8] симметризованный интеграл, с помощью которого он улучшил оценку меры иррациональности числа $\log 3$: $\mu(\log 3) \leq 5.125 \dots$, а позднее, в работе [9], им была получена лучшая на данный момент оценка меры иррациональности числа π : $\mu(\pi) \leq 7.606308 \dots$.

Р. Марковеккио в 2009 г. применил [10] новую интегральную конструкцию, с помощью которой улучшил оценку меры иррациональности числа $\log 2$.

В 2010 г. на международной конференции в г. Туле В. Х. Салиховым, В. А. Андросенко и М. Г. Башмаковой был сделан доклад, в котором с помощью интеграла Р. Марковеккио была незначительно улучшена оценка М. Хата меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$:

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4.601057 \dots$$

Более подробное доказательство этого результата было приведено в работе [11], опубликованной В. А. Андросенко и В. Х. Салиховым в 2011 г. Объединив идею симметрии, предложенную В. Х. Салиховым, и интеграл, введенный Р. Марковеккио, они получили новую интегральную конструкцию, позволяющую улучшить оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Для этого был рассмотрен интеграл вида

$$I = I(h, j, k, m, l, q; x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{+i\infty}^{-i\infty} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)^{k+m-h+1}}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 1$, $x > 0$, $h, j, k, l, m, q \in \mathbb{Z}^+$.

Отметим, что интеграл (1) отличается от интеграла Р. Марковеккио (см. [10, формула (5)]) лишь множителем $\sqrt{\frac{s}{s-1}}$ в знаменателе подынтегральной функции. Заметим также, что в работе [10] проведено подробное исследование сходимости интеграла (1). Эти же рассуждения применимы и в нашей ситуации. В частности, в интеграле (1) можно поменять порядок интегрирования.

Запишем условия для параметров интеграла (1), отвечающие за его сходимость, а также позволяющие, не влияя на конечный результат, значительно

сократить перебор параметров:

$$h + j + q = k + m + l, \quad l + k - j \geq 0, \quad h + j - k \geq 0, \quad k + m - h \geq 0, \quad (2)$$

$$j \geq k, \quad m \geq q, \quad l \geq j. \quad (3)$$

В случае, когда $0 < x < 1$, интеграл (1) представим в виде $Q \cdot \alpha + R$, где $\alpha = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $Q, R \in \mathbb{Q}$.

Для того чтобы получить линейную комбинацию вида $Q \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + R$, в интеграле (1) достаточно взять $x = \frac{3}{4}$. Далее рассматривается только эта конкретная ситуация.

Аналогично работе [10], полагая

$$I \equiv I_n = I\left(h, j, k, l, m, q; \frac{3}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (h, j, k, l, m, q) = n \cdot (h', j', k', l', m', q'), \quad (4)$$

можно исследовать соответствующие линейные формы

$$Q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + R_n \quad (5)$$

при $n \rightarrow \infty$, что позволяет получить новую оценку меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 4.230464 \dots$$

Доказательство теоремы 1, как и многих других подобных результатов в последние 20 лет, основывается на следующей лемме М. Хата [7, лемма 2.1].

ЛЕММА 1. *Пусть α – действительное иррациональное число и последовательность пар целых чисел q_n, p_n удовлетворяет условиям*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n \alpha + p_n| \leq -\tau, \quad \tau > 0.$$

Тогда показатель иррациональности числа α удовлетворяет неравенству

$$\mu(\alpha) \leq 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

Коэффициенты Q_n и R_n линейной формы (5) рациональные. Оценим их общий знаменатель.

§ 1. Оценка знаменателей коэффициентов линейной формы

Стандартным путем (см., например, [10], [12]) была получена групповая структура интеграла (1), порожденная двумя элементами и связанная с преобразованиями интеграла (1). В частности,

$$I(h, j, k, m, l, q; x) = \frac{(2k)! (l + k - j)! m! l!}{(2l + 2k - 2j)! k! (h + j - k)! (k + m - h)!} \times 2^{2l-2j} I(l + k - j, h + j - k, h, q, j, k + m - h; x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2h)!(l+k-j)!j!q!}{(2l+2k-2j)!h!(h+j-k)!(k+m-h)!} \\
&\quad \times 2^{2q-2m} I(k, l, l+k-j, k+m-h, h+j-k, m; x) \\
&= \frac{(2k)!(l+k-j)!q!}{(2l+2k-2j)!k!(k+m-h)!} 2^{2l-2j} I(h, l, l+k-j, m, j, k+m-h; x) \\
&= \frac{j!m!}{(h+j-k)!(k+m-h)!} I(k, h+j-k, h, k+m-h, l, q; x) \\
&= \frac{(2h)!(l+k-j)!l!}{(2l+2k-2j)!h!(h+j-k)!} 2^{2q-2m} I(l+k-j, j, k, q, h+j-k, m; x). \quad (6)
\end{aligned}$$

Для уточнения оценки знаменателя коэффициентов линейных форм воспользуемся методом, который впервые наиболее полно был предложен в статье [12].

Сформулируем результаты К. Виолы, Дж. Рина [12] и М. Хата [7], необходимые при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 2. Пусть

$$c_1 = \beta_1 n, \dots, c_m = \beta_m n, \quad d_1 = \alpha_1 n, \dots, d_l = \alpha_l n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, все $\beta_i, \alpha_j \in \mathbb{N}$, $c_1 + \dots + c_m = d_1 + \dots + d_l$, $\frac{c_1! \dots c_m!}{d_1! \dots d_l!} = \frac{b_n}{a_n}$, $(a_n, b_n) = 1$. Пусть, далее,

$$\begin{aligned}
E &= \{ \omega \in [0, 1) \mid \varphi(\omega) = [\beta_1 \omega] + \dots + [\beta_m \omega] - [\alpha_1 \omega] - \dots - [\alpha_l \omega] \geq 1 \} \\
&= \bigcup_{r=1}^s [u_r, v_r), \quad u_l < v_l < u_{l+1}, \quad v_l, u_l \in \mathbb{Q}, \quad u_1 > 0.
\end{aligned}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln b_n \geq \sum_{r=1}^s (\psi(v_r) - \psi(u_r)),$$

где $\psi(\xi) = \frac{\Gamma'(\xi)}{\Gamma(\xi)}$. Если $\varphi(\omega) \leq 1$, $\omega \in [0, 1)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln b_n = \sum_{r=1}^s (\psi(v_r) - \psi(u_r)).$$

Обозначим для $N \in \mathbb{N}$ через d_N наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$.

Стандартным образом, например, как у Р. Марковеккио [10, с. 173, 174], получим фрагмент общего знаменателя d_{Mn} коэффициентов линейной формы (5) и аналогичных линейных форм, представленных интегралами (6), где

$$Mn = \max\{2(l+k-j), 2h, 2k, h+j-k, k+m-h, l, m, j, q\}.$$

Точный вид знаменателя будет указан в следующей лемме.

Для простых чисел $p > \sqrt{Mn}$, априори входящих в знаменатель коэффициентов линейной формы (5), из (6) для $\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}$ получены следующие неравенства, аналогичные неравенствам, полученным в работе [10, неравенства (31)]:

$$\begin{aligned}
 & [2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [m'\omega] + [l'\omega] \\
 & \quad - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
 & [2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [q'\omega] - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
 & [2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [j'\omega] + [q'\omega] \\
 & \quad - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
 & \quad [j'\omega] + [m'\omega] - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\
 & [2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [l'\omega] - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(h' + j' - k')\omega] > 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Если для простого числа $p > \sqrt{Mn}$ выполняется хотя бы одно из неравенств (7), то это число можно исключить из знаменателя, что позволяет значительно уменьшить его оценку.

Пусть Δ – произведение всех простых чисел $p > \sqrt{Mn}$ таких, что ω удовлетворяет хотя бы одному из неравенств (7).

Целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

ЛЕММА 3. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление*

$$\frac{d_{Mn}}{\Delta} \cdot 3^{m-h+1} 2^{-2q+1} I_n = q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n, \tag{8}$$

где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x = \frac{3}{4}$ по теореме Коши о вычетах интеграл (1) представим в виде

$$I_n = \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+, l_1 \leq j}} 2(-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} 3^{j-l_1} 2^{2m+2} I_n(l_1), \tag{9}$$

где

$$I_n(l_1) = \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^{l+l_2}(1+z)^{l+l_2} dz}{(3+z^2)^{h+j-k+l_2+1}}, \quad l_2 = k+m-h-l_1 \quad z = \sqrt{\frac{s}{s-1}}. \tag{10}$$

Обозначим через $R(z)$ подынтегральную функцию в (10). Из четности $R(z)$ следует, что разложение рациональной функции $R(z)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$R(z) = P(z) + \sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{(z + \sqrt{3}i)^\nu} + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(z - \sqrt{3}i)^\nu} \right), \tag{11}$$

где все $a_\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$, $P(z) = \sum_{\theta=0}^{l+k-j-1} \beta_\theta z^{2\theta}$ и все $\beta_\theta \in \mathbb{Z}$.

Из (10) и (11) следует, что интеграл $I_n(l_1)$ представим в виде

$$I_n(l_1) = I_n^{(1)}(l_1) + I_n^{(2)}(l_1) + I_n^{(3)}(l_1), \quad (12)$$

где

$$I_n^{(1)}(l_1) \equiv \int_0^1 P(z) dz = r_1, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad d_{2(l+k-j)} r_1 \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

$$I_n^{(2)}(l_1) \equiv \int_0^1 a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}i + z} + \frac{1}{\sqrt{3}i - z} \right) dz = a_1 \ln \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{\sqrt{3}i - 1} \right) = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}i) a_1 \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad (14)$$

для $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$, выбрана ветвь $\ln z = \ln |z| + i\varphi$,

$$\begin{aligned} I_n^{(3)}(l_1) &\equiv \int_0^1 \left(\sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{(z + \sqrt{3}i)^\nu} + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(z - \sqrt{3}i)^\nu} \right) \right) dz \\ &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \left(\frac{a_\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{(1 + \sqrt{3}i)^{\nu-1}} + \frac{(-1)^\nu}{(1 - \sqrt{3}i)^{\nu-1}} \right) \right) = r_3, \quad (15) \\ r_3 &\in \mathbb{Q}(\sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Обозначим

$$D_\lambda(f(z)) = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} (f(z))|_{z=\sqrt{3}i}, \quad \lambda \geq 0. \quad (16)$$

По формуле дифференцирования Лейбница для любых функций $u_1, u_2, \dots, \dots, u_r$, аналитических в точке $z = \sqrt{3}i$, имеем

$$D_\lambda(u_1 \cdots u_r) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = \lambda \\ m_j \geq 0}} D_{m_1}(u_1) \cdots D_{m_r}(u_r). \quad (17)$$

Обозначим

$$M_\nu = \{ \overline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^4 \mid m_1 \leq 2h, \ m_2, m_3 \leq l + l_2, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = h + j - k + l_2 - \nu + 1 \}.$$

Тогда из (10), (11) и (17) получаем

$$\begin{aligned} a_\nu (-1)^\nu &= D_{h+j-k+l_2+1-\nu} (R(z)(z - \sqrt{3}i)^{h+j-k+l_2+1}) \\ &= \sum_{\overline{m} \in M_\nu} D_{m_1}(z)^{2h} D_{m_2}(1-z)^{l+l_2} D_{m_3}(1+z)^{l+l_2} D_{m_4}(z + \sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2+1)} \\ &= \sum_{\overline{m} \in M_\nu} \gamma(\overline{m}) (\sqrt{3}i)^{2h-m_1} (1 - \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_2} (1 + \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_3} \\ &\quad \times (2\sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2+1)-m_4}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\gamma(\overline{m}) = \binom{2h}{m_1} \binom{l+l_2}{m_2} \binom{l+l_2}{m_3} \binom{h+j-k+l_2+m_4}{m_4} (-1)^{m_2+m_4} \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно показать, что

$$a_1 = 3^{N_1} 2^{N_2} (\sqrt{3}i) A_1, \quad a_\nu = 3^{N_1} 2^{N_2} A_\nu, \quad \nu \geq 2, \quad (19)$$

где $A_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$, $N_1 = k - j - l_2 - 1$, $N_2 = 2(q - m - 2) + \nu$.

Действительно, ввиду того, что $m_1 + m_4 \leq h + j - k + l_2 - \nu + 1$, из (18) имеем

$$(\sqrt{3}i)^{2h-m_1}(\sqrt{3}i)^{-(h+j-k+l_2-1)-m_4} = (\sqrt{3}i)^{K_1},$$

где $K_1 \geq 2h - 2(h + j - k + l_2 + 1) + \nu = 2(k - j - l_2 - 1) + \nu$.

Наконец, $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $m_2 + m_3 + m_4 \leq h + j - k + l_2 - \nu + 1$, поэтому

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_2} (1 + \sqrt{3}i)^{l+l_2-m_3} 2^{-(h+j-k+l_2+1)-m_4} \\ = e^{i\frac{\pi}{3}(m_2-m_3)} 2^{2l+2l_2-(h+j-k+l_2+1)-m_2-m_3-m_4} = 2^{K_2} b_\nu, \end{aligned}$$

где $b_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$, $K_2 \geq 2l + 2l_2 - 2(h + j - k + l_2 + 1) + \nu - 2 = N_2$, и мы воспользовались тем, что $2e^{i\frac{\pi}{3}(m_2-m_3)} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$. Тогда из (18) следует справедливость представления (19).

Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} I_n^{(3)}(l_1) &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{\nu-1}} + \frac{(-1)^\nu}{(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{\nu-1}} \right) \\ &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{1-\nu} \frac{1}{2^{\nu-1}} (e^{-i\frac{\pi}{3}(\nu-1)} + (-1)^\nu e^{i\frac{\pi}{3}(\nu-1)}) \\ &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} \frac{a_\nu}{(1-\nu)2^\nu} \cdot A_\nu, \end{aligned} \quad (20)$$

где $A_\nu \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

Из (9) и (12) получим

$$I_n = \sum_{l_1=0}^{\min(j, k+m-h)} (\Lambda_{1,n}(l_1) + \Lambda_{2,n}(l_1) + \Lambda_{3,n}(l_1)),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\nu,n}(l_1) &= 2(-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot 3^{j-l_1} 2^{2m+2} I_n^{(\nu)}(l_1), \\ \nu &= 1, 2, 3, \quad l_1 = 0, 1, \dots, \min(j, k+m-h). \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что для всех l_1

$$3^{m-h+1} 2^{-2q+1} d_{Mn} \Lambda_{1,n}(l_1) \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Действительно, из определения числа Mn и (13) следует, что $d_{Mn} I_n^{(1)}(l_1) \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\begin{aligned} 3^{m-h+1} 2^{-2q+1} d_{Mn} \Lambda_{1,n}(l_1) \\ = 2(-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \cdot 3^{j-l_1+m-h+1} 2^{2m+3-2q} d_{Mn} I_n^{(1)}(l_1) \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

так как $q \leq m$, $j-l_1+m-h \geq j+m-h-(k+m-h) = j-k \geq 0$ (см. условия (3)).

Докажем теперь, что для всех l_1

$$3^{m-h+1}2^{-2q+1}\Lambda_{2,n}(l_1) = A_n(l_1)\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad A_n(l_1) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (23)$$

Из (14) и (19) имеем

$$3^{j-l_1}2^{2m+2}I_n^{(2)}(l_1) = 3^{j-l_1}2^{2m+2}3^{k-j-l_2-1}2^{2q-2m-3}A_1 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

где $A_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$. Поэтому из (21) следует

$$3^{m-h+1}2^{-2q+1}\Lambda_{2,n}(l_1) = 2(-1)^{j-k+l_2+1} \binom{j}{l_1} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} A_1 \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

и представление (23) доказано.

Наконец, покажем, что для всех l_1

$$B_n(l_1) \equiv 3^{m-h+1}2^{-2q+1}d_{Mn}\Lambda_{3,n}(l_1) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (24)$$

Из (19), (20) и (21) имеем

$$\begin{aligned} B_n(l_1) &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} 3^{m-h+1}2^{-2q+1}2(-1)^{j-k+l_2} \binom{j}{l_1} \cdot 3^{j-l_1}2^{2m+2} \\ &\quad \times 3^{k-j-l_2-1}2^{2q-2m-4}A_\nu d_{Mn} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \frac{1}{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_2+1} (-1)^{j-k+l_2} \binom{j}{l_1} A_\nu G(\nu, l_1), \end{aligned}$$

где

$$G(\nu, l_1) = d_{Mn} \binom{h+j-k+l_2}{l_2} \frac{1}{\nu-1}, \quad \nu-1 \in [1, h+j-k+l_2].$$

Для доказательства (24) достаточно показать, что все

$$G(\nu, l_1) \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Если $\nu-1 \leq Mn$, то (25) выполняется. Пусть $\nu-1 > Mn$.

Обозначим $\{a, b\} = \{l_2, h+j-k\}$, где $a \leq b \leq Mn$, $b < \nu-1 \leq a+b$. Тогда

$$\binom{h+j-k+l_2}{l_2} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = \frac{(b+1) \cdots (b+a)}{a!}.$$

Пусть $\nu-1 = b+c$, $c \in \{1, \dots, a\}$. Для доказательства (25) достаточно показать, что

$$q_a \cdot \frac{(b+1) \cdots (b+a)}{a!} \frac{1}{b+c} \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

Обозначим

$$P_c(x) = q_a \cdot \frac{1}{a!} \prod_{\substack{\omega=1 \\ \omega \neq c}}^a (x+\omega), \quad P(x) = \frac{(x+1) \cdots (x+a)}{a!}.$$

Имеем $\deg P_c(x) = a-1$, $P_c(-r) = 0$, $r = 1, \dots, a$, $r \neq c$, $P_c(-c) = P'(-c)q_a$.

Согласно [13, лемма 7] имеем $P'(-c)q_a \in \mathbb{Z}$, т. е. $P_c(-c) \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $P_c(x) \in \mathbb{Z}$, где $x = -1, \dots, -a$, и многочлен $P_c(x)$ целозначный, в частности $P_c(b) \in \mathbb{Z}$. Тогда выполнено (26), а вместе с ним и (25).

Из (21)–(24) окончательно имеем

$$3^{m-h+1}2^{-2q+1}d_{Mn}I_n = q_n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n, \quad q_n, p_n \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}i]. \quad (27)$$

Нетрудно доказать, что $q_n, p_n \in \mathbb{Q}$, а значит, с учетом (27) можно сделать вывод, что $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

Как указано выше, d_{Mn} в (27) можно заменить на $\frac{d_{Mn}}{\Delta}$. Тем самым получаем представление (8). Лемма доказана.

§ 2. Асимптотика интеграла

Предложенная в этом параграфе конструкция служит для того, чтобы избежать применения двойного метода перевала, так как он технически сложен и не является наглядным. Пусть $x \in \mathbb{Q}$, $x \in (0, 1)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}} \frac{s^k t^{h-k} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)(t-x)}, \quad (28)$$

где контур $\tilde{l}$ по переменной t является окружностью, проходящей в положительном направлении через точки $M_1(1)$, $M_2(xs)$, $M_3 = i\sqrt{-xs}$, $s < 0$. Очевидно, $xs < x < 1$; тогда для всех t , лежащих внутри контура $\tilde{l}$, будет выполняться $\operatorname{Re}(t-s) \geq xs - s = s(x-1) > 0$, т. е. точка $t = x$ – единственная особая точка подынтегральной функции, лежащая внутри контура $\tilde{l}$.

В данном параграфе полагаем

$$D_\lambda(g(x)) = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}(g(x)).$$

Условие $l \geq j$ (см. (3)) обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость интеграла (28) по переменной s , а следовательно, возможность дифференцирования по параметру x под знаком интеграла. Поэтому

$$D_{h+j-k}(g(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}} \frac{s^k t^{h-k} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)(t-x)^{h+j-k+1}}. \quad (29)$$

Пусть $t = \frac{xs_1}{t_1}$, $s = s_1$, $dt ds = -\frac{xs_1}{t_1^2} dt_1 ds_1$, $s - t = \frac{s_1}{t_1}(t_1 - x)$, $t - x = \frac{x}{t_1}(s_1 - t_1)$ в (29). Контур $\tilde{l}$ при этой замене переходит в аналогичный контур $\tilde{l}_1$ по переменной t_1 , где $s \rightarrow s_1$ и меняется направление обхода.

Тогда

$$\begin{aligned}
 D_{h+j-k}(g(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds_1 \oint_{\tilde{l}_1} \frac{s_1^k \left(\frac{xs_1}{t_1}\right)^{h-k} \frac{xs_1}{t_1^2} t_1^{h+j-k+1} dt_1}{\sqrt{\frac{s_1}{s_1-1}} (1-s_1)^{l+k-j+1} \frac{s_1}{t_1} (t_1-x) x^{h+j-k+1} (s_1-t_1)^{h+j-k+1}} \\
 &= \frac{x^{-j}}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \oint_{\tilde{l}_1} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)}.
 \end{aligned}$$

Домножая обе части последнего равенства на x^j и применяя оператор D_{k+m-h} , получим

$$D_{k+m-h}(x^j(D_{h+j-k}(g(x)))) = I, \quad (30)$$

где мы заменили интегрирование по $\tilde{l}_1$ на интегрирование по прямой $(i\infty, -i\infty)$. Это можно сделать, так как оба интеграла равны $2\pi i \cdot \text{Res}_{t=x}(G(s, t))$, где $G(s, t)$ – подынтегральная функция интеграла (1).

Вычислим $g(x)$. По теореме Коши о вычетах имеем

$$g(x) = x^{h-k} \int_0^{-\infty} \frac{s^k ds}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-x)}. \quad (31)$$

Сделаем в интеграле (31) следующую замену: $s = \frac{u_1}{u_1-1}$, $\sqrt{\frac{s}{s-1}} = \sqrt{u_1}$, $u_1 \in [0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^{h-k} \int_0^1 \frac{(-1)^k \frac{u_1^k}{(1-u_1)^k} (1-u_1)^{l+k-j+2} \frac{du_1}{(1-u_1)^2}}{\sqrt{u_1}(u_1-x(u_1-1))} \\
 &= x^{h-k} (-1)^k \int_0^1 \frac{u_1^k (1-u_1)^{l-j} du_1}{\sqrt{u_1}(x+(1-x)u_1)}.
 \end{aligned}$$

Обозначим $y = \frac{x}{1-x} \in \mathbb{Q}$, $y > 0$. Полагая $u_1 = z^2$, $z \in [0, 1)$, получаем

$$g(x) = \frac{2x^{h-k}(-1)^k}{1-x} \int_0^1 \frac{z^{2k}(1-z^2)^{l-j} dz}{z^2+y}.$$

Пусть $w(v_1) = v_1^k(1-v_1)^{l-j}$; тогда

$$\int_0^1 \frac{z^{2k}(1-z^2)^{l-j} dz}{z^2+y} = \int_0^1 \frac{w(z^{2k}) - w(-y)}{z^2 - (-y)} dz + (-1)^k y^k (1+y)^{l-j} \int_0^1 \frac{dz}{z^2+y}.$$

Очевидно, $\frac{w(z^{2k}) - w(-y)}{z^2 - (-y)} \in \mathbb{Q}[z^2]$, т. е.

$$\int_0^1 \frac{w(z^{2k}) - w(-y)}{z^2 - (-y)} dz = r \in \mathbb{Q}(x), \quad \int_0^1 \frac{dz}{z^2+y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctg \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Следовательно,

$$g(x) = \frac{2x^{h-k}(-1)^k}{1-x} \left(r + (-1)^k y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} \arctg \frac{1}{\sqrt{y}} \right). \quad (32)$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе Р. Марковеккио [10, с. 158–160] для $\alpha = \ln x$, если $I = Q\alpha + R$, где $Q, R \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctg \frac{1}{\sqrt{y}}$, то из (30) и (32) получаем

$$Q = 2D_{k+m-h} \left(x^j \left(D_{h+j-k} \left(\frac{x^{h-k}}{1-x} y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} \right) \right) \right) \sqrt{y},$$

так как

$$\sqrt{y} \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = \frac{-1}{2(1+y)} \frac{1}{(1-x)^2} \in \mathbb{Q}(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} 1+y &= \frac{1}{1-x}, & \frac{x^{h-k}}{1-x} y^{k-\frac{1}{2}} (1+y)^{l-j} &= \frac{x^{h-\frac{1}{2}}}{(1-x)^{k+l-j+\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(k+l-j+\frac{1}{2}) \cdots (k+l-j+s-\frac{1}{2})}{s!} \cdot x^{s+h-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Q \equiv Q_n &= \frac{2}{\sqrt{1-x}} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(k+l-j+\frac{1}{2}) \cdots (k+l-j+s-\frac{1}{2})}{s!} \\ &\times \frac{(k-j+s+\frac{1}{2}) \cdots (h+s-\frac{1}{2})}{(h+j-k)!} \frac{(h-m+s+\frac{1}{2}) \cdots (k+s-\frac{1}{2})}{(k+m-h)!} \cdot x^{s+h-m}. \end{aligned} \quad (33)$$

Ряд (33) содержит как положительные слагаемые, так и отрицательные, но, начиная с $s \geq s_0 = \max\{j-k, m-h\}$, мы получаем положительный ряд. Подобные положительные ряды были рассмотрены в работах Ю. В. Нестеренко [14, с. 556–558] и Р. Марковеккио [10, с. 174–177].

С помощью компьютерного перебора был получен оптимальный набор параметров, удовлетворяющий условиям (2), (3), который позволил получить оценку меры иррациональности $\mu(\frac{\pi}{\sqrt{3}})$, анонсированную в теореме 1.

Таким набором, параметрами являются (см. (4))

$$h = 6n, \quad k = 3n, \quad m = 8n, \quad l = 4n, \quad j = 3n, \quad q = 6n. \quad (34)$$

Подставив параметры (34) в интеграл (1), получаем

$$I \equiv I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-i\infty} ds \int_{+i\infty}^{-i\infty} \frac{s^{6n} t^{3n} dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{4n+1} (s-t)^{6n+1} (t-\frac{3}{4})^{5n+1}}. \quad (35)$$

В этом случае ряд (33) примет вид

$$\begin{aligned} Q \equiv Q_n &= 4 \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(4n+\frac{1}{2}) \cdots (4n+s-\frac{1}{2})}{s!} \\ &\times \frac{(6n+s-\frac{1}{2}) \cdots (s+\frac{1}{2})}{(6n)!} \frac{(3n+s-\frac{1}{2}) \cdots (-2n+s+\frac{1}{2})}{(5n)!} \left(\frac{3}{4}\right)^{s-2n}. \end{aligned} \quad (36)$$

Докажем для ряда (36) следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n = 36.079 \dots \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем асимптотику максимального слагаемого A_s ряда (36) при $s \in [2n, +\infty)$. Согласно работе [14, с. 557] решим уравнение

$$\frac{4+s'}{s'} \frac{s'+6}{s'} \frac{s'+3}{s'-2} \frac{3}{4} = 1. \quad (38)$$

Уравнение (38) имеет единственный действительный корень, а именно $\lambda_0 = 50.3057 \dots$. Тогда $s = \lambda_0 n(1 + o(1))$ и имеет место равенство (см. [14, с. 558])

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln A_s = \ln |\tilde{Q}| = 36.079 \dots, \quad (39)$$

где

$$\tilde{Q} = \frac{(4 + \lambda_0)^{(4+\lambda_0)} (6 + \lambda_0)^{(6+\lambda_0)} x^{-2+\lambda_0}}{4^4 6^6 (-2 + \lambda_0)^{(-2+\lambda_0)} 5^5}.$$

При $s \in [0, 2n - 1]$ ряд (36) содержит отрицательные слагаемые. Покажем, что асимптотика модуля этой части слагаемых ряда (36) меньше асимптотики суммы положительных слагаемых.

Для $s \in [0, 2n - 1]$ величина $\max |A_s|$ достигается при $s = 2n - 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |A_{2n-1}| = 12 \ln 2$, а тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \sum_{s=0}^{2n-1} A_s \right| \leq 12 \ln 2 < 36.079 \dots \quad (40)$$

В результате из (39) и (40) аналогично работе [14, с. 558] получаем равенство (37). Лемма доказана.

Получим оценку интеграла (1) при $n \rightarrow +\infty$. Для этого рассмотрим функцию

$$f(s, t) = \frac{s^6 t^3}{(1-s)^4 (s-t)^6 (t-x)^5}. \quad (41)$$

Подынтегральная функция интеграла (35) имеет вид

$$F(s, t) = (f(s, t))^n \frac{1}{(1-s)(s-t)(t-x)}. \quad (42)$$

Точками перевала являются решения системы

$$\frac{f'_s(s, t)}{f(s, t)} = 0, \quad \frac{f'_t(s, t)}{f(s, t)} = 0, \quad (43)$$

из которой с помощью формул

$$\begin{aligned} q'l's^3 - [l'(m' - h') + q'(j' - k') + x(m' - q')(j' - l')]s^2 \\ - [(k' - j')(m' - h') + xh'(l' - j') + xk'(q' - m')]s - xh'k' = 0, \\ t = \frac{s(l's + k' - j')}{h' + (q' - m')s} \end{aligned}$$

для набора параметров (34) и $x = \frac{3}{4}$ получим следующие уравнения:

$$24s^3 - 6.5s^2 - 13.5 = 0, \quad t = \frac{4s^2}{6 - 2s}. \quad (44)$$

Решением системы уравнений (44) являются следующие пары чисел: $s_1 = 0.926 \dots$, $t_1 = 0.828 \dots$; $s_2 = -0.328 \dots - i 0.707 \dots$, $t_2 = -0.169 \dots + i 0.314 \dots$; $s_3 = -0.328 \dots + i 0.707 \dots$, $t_3 = -0.169 \dots - i 0.314 \dots$.

Одним из решений системы уравнений (44) является пара действительных чисел $(s_1; t_1)$. Нетрудно показать, что значение $\ln |f(s_1; t_1)|$ совпадает со значением $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n$, найденным в лемме 4. Таким образом, асимптотику коэффициента Q_n можно получить, избежав метода перевала.

Пусть $s^* = s_2 = -0.328 \dots - i 0.707 \dots$, $t^* = t_2 = -0.169 \dots + i 0.314 \dots$.

ЛЕММА 5. *Справедлива следующая оценка:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |I_n| \leq \ln |f(s^*, t^*)| = -6.273079 \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем два луча L_1 и L_2 , проходящие соответственно через точки 0 и s^* , 0 и t^* , а именно

$$L_1 = \{s = -x - axi, x \in [0, +\infty)\}, \quad L_2 = \{t = -u + bui, u \in [0, +\infty)\}, \quad (45)$$

где

$$a = 2.157 \dots, \quad b = 1.860 \dots \quad (46)$$

Подставив $s = -x - axi$ и $t = -u + bui$ в функцию $F(s, t)$, получаем

$$\begin{aligned} F(s, t) \equiv F_1(x, u) &= \frac{(-x - axi)^{6n}}{(1 + x + axi)^{4n}((-x + u) + (-ax - bu)i)^{6n}} \\ &\times \frac{(-u + bui)^{3n}}{\left((-u - \frac{3}{4}) + bui\right)^{5n}} \varphi(x, u) \equiv (\tilde{F}_1(x, u))^n \varphi(x, u), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\varphi(x, u) = \frac{1}{(1 + x + axi)((-x + u) + (-ax - bu)i)((-u - \frac{3}{4}) + bui)}. \quad (48)$$

Из (47) и (48) имеем

$$\begin{aligned} |F_1(x, u)| &= \frac{(x^2 + (ax)^2)^{3n}}{((1 + x)^2 + (ax)^2)^{2n}((-x + u)^2 + (ax + bu)^2)^{3n}} \\ &\times \frac{(u^2 + (bu)^2)^{1.5n}}{\left((u + \frac{3}{4})^2 + (bu)^2\right)^{2.5n}} |\varphi(x, u)|, \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$|\varphi(x, u)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + x)^2 + (ax)^2} \sqrt{(-x + u)^2 + (ax + bu)^2} \sqrt{(u + \frac{3}{4})^2 + (bu)^2}}.$$

Покажем, что

$$|I_n| \leq C_1 \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} |F_1(x, u)| du; \quad (50)$$

здесь и далее $C_1, C_2, \dots$ – положительные постоянные.

Рассмотрим интеграл (см. (1) и (42))

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{-\infty} ds \int_{+i\infty}^{-i\infty} F(s, t) dt \\ &= - \int_0^{-\infty} ds \int_0^{+i\infty} F(s, t) dt + \int_0^{-\infty} ds \int_0^{-i\infty} F(s, t) dt \equiv -J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (51)$$

Поскольку область интегрирования между контурами не содержит особых точек, по теореме Коши о вычетах интегрирование в первом интеграле по переменной $s \in [0, -\infty)$ можно заменить на интегрирование по лучу L_1 .

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в интеграле J_1 интегрирование по переменной $t \in [0, +i\infty)$ можно заменить на интегрирование по лучу L_2 . Таким образом, имеем

$$J_1 = \int_{L_1} ds \int_{L_2} F(s, t) dt.$$

Пусть

$$J_1 = \int_0^{-\infty} ds \int_0^{+i\infty} F(s, t) dt \equiv A + Bi. \quad (52)$$

Тогда

$$J_2 = \int_0^{-\infty} ds \int_0^{-i\infty} F(s, t) dt \equiv A - Bi. \quad (53)$$

Из (51)–(53) получаем, что $J = -2Bi$. Следовательно,

$$|J| \leq 2|J_1| = 2 \left| \int_{L_1} ds \int_{L_2} F(s, t) dt \right|. \quad (54)$$

Из соотношений (35), (49) и (54) следует (50).

Выберем x_1, x_2, u_1, u_2 так, что $0 < x_1 < x_2 < +\infty$, $0 < u_1 < u_2 < +\infty$, причем $x^* = -\operatorname{Re} s^* = 0.328 \dots \in [x_1, x_2]$, $u^* = -\operatorname{Re} t^* = 0.169 \dots \in [u_1, u_2]$. В качестве точек разбиения выберем следующие:

$$x_1 = u_1 = 0.02, \quad x_2 = u_2 = 3. \quad (55)$$

Из (50) с учетом (55) имеем

$$|I_n| \leq C_1 \sum_{i=1}^9 I^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \int_0^{0.02} dx \int_0^{0.02} |F_1(x, u)| du, \quad \dots \\ \dots, \quad I^{(5)} &= \int_{0.02}^3 dx \int_{0.02}^3 |F_1(x, u)| du, \quad \dots \\ \dots, \quad I^{(9)} &= \int_3^{+\infty} dx \int_3^{+\infty} |F_1(x, u)| du. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения проведем аналогично работе Ю.В. Нестеренко [14, с. 560]. Покажем, что для всех интегралов $I^{(i)}$, $i = \overline{1, 9}$, кроме центрального $I^{(5)}$, выполняется неравенство

$$I^{(i)} < e^{-6.273079\dots n}, \quad n \geq n_0. \quad (56)$$

Докажем неравенство (56) при $i = 1$. Для остальных интегралов рассуждения проводятся аналогично. Имеем из (49)

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \int_0^{0.02} dx \int_0^{0.02} \frac{[5.65x^2]^{3n} [4.46u^2]^{1.5n}}{[(1+x)^2 + (ax)^2]^{2n} [(-x+u)^2 + (ax+bu)^2]^{3n}} \\ &\quad \times \frac{|\varphi(x, u)| du}{[(u + \frac{3}{4})^2 + (bu)^2]^{2.5n}}. \quad (57) \end{aligned}$$

Сделаем в (57) следующую замену переменных: $x = \rho \cos \theta$, $u = \rho \sin \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Из соотношения (49) следует, что $|\varphi(x, u)| < \frac{C_2}{\rho}$. Тогда получаем

$$I^{(1)} < C_2 e^{8.88n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \frac{(\rho \cos \theta)^{6n} (\rho \sin \theta)^{3n} d\rho}{(a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta)^{6n}}.$$

Для $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ имеем $a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta \geq b\rho$. Тогда согласно (46) получаем

$$\begin{aligned} I^{(1)} &\leq C_2 e^{5.15n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \frac{(\rho \cos \theta)^{6n} (\rho \sin \theta)^{3n} d\rho}{\rho^{6n}} \\ &= C_2 e^{5.15n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{6n} (\sin \theta)^{3n} d\theta \int_0^{0.02\sqrt{2}} \rho^{3n} d\rho \\ &= C_2 e^{5.15n} \frac{(0.02\sqrt{2})^{3n+1}}{3n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{6n} (\sin \theta)^{3n} d\theta. \end{aligned}$$

Из [15, формула (19), с. 25] следует, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{6n} (\sin \theta)^{3n} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3n + \frac{1}{2}) \Gamma(1.5n + \frac{1}{2})}{\Gamma(4.5n + 1)}.$$

Из формулы Стирлинга имеем

$$C_3 \sqrt{n} e^{-cn} (cn)^{cn} < \Gamma(cn + a) < C_4 \sqrt{n} e^{-cn} (cn)^{cn}, \quad a \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad n \geq n_0,$$

откуда

$$\frac{\Gamma(3n + \frac{1}{2})\Gamma(1.5n + \frac{1}{2})}{\Gamma(4.5n + 1)} < C_5 \sqrt{n} (3n)^{3n} (1.5n)^{1.5n} (4.5n)^{-4.5n}.$$

Следовательно,

$$I^{(1)} < C_6 e^{-8.34n} < e^{-6.273079\dots n}.$$

Таким образом, для интеграла $I^{(1)}$ неравенство (56) доказано.

Исследовав функцию $|\tilde{F}_1(x, u)|$ (см. (47)) на экстремум в замкнутой области $0.02 \leq x \leq 3$, $0.02 \leq u \leq 3$, получим, что в точке (x^*, u^*) достигается максимум этой функции: $e^{-6.273079\dots} = e^{|f(s^*, t^*)|}$. Тогда

$$I^{(5)} < C_7 e^{-6.273079\dots n}.$$

Из (50) и (56) следует утверждение леммы.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для линейной формы $q_n \frac{\pi}{\sqrt{3}} + p_n$, определенной равенством (8), применим лемму 1. Вычислим σ :

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_{12n}}{\Delta} \cdot 3^{2n+1} 2^{-12n+1} Q_n \right).$$

По лемме 4 имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Q_n = 36.079\dots$$

Рассмотрим неравенства (7) при значениях параметров (34). Тогда для $\omega = \left\{ \frac{n}{p} \right\}$ имеем

$$\begin{aligned} [4\omega] + [4\omega] - [3\omega] - [5\omega] &> 0, \\ [6\omega] + [4\omega] + [6\omega] - [3\omega] - [8\omega] - [5\omega] &> 0, \\ [12\omega] + [4\omega] + [3\omega] - [6\omega] - [8\omega] - [5\omega] &> 0, \\ [3\omega] + [8\omega] - [6\omega] - [5\omega] &> 0, \\ [12\omega] + [4\omega] + [4\omega] - [6\omega] - [8\omega] - [6\omega] &> 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Применим лемму 2. Имеем $\varphi(\omega) \leq 1$ для всех неравенств (58). Соответствующее множество E имеет вид

$$E = \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{5} \right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5} \right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right).$$

По лемме 2 для всех простых чисел $p > \sqrt{12n}$, удовлетворяющих хотя бы одному из неравенств (58), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \Delta &= \psi\left(\frac{1}{5}\right) - \psi\left(\frac{1}{12}\right) + \psi\left(\frac{2}{5}\right) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \psi\left(\frac{5}{8}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{7}{8}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) = 9.618\dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma = 12 - 9.618 \dots + 2 \ln 3 - 12 \ln 2 + 36.079 \dots = 32.34 \dots$$

Аналогично, применив лемму 5 вместо леммы 4, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n \alpha + p_n| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d_{12n}}{\Delta} \cdot 3^{2n+1} 2^{-12n+1} I_n \right| \\ &= 12 - 9.618 \dots + 2 \ln 3 - 12 \ln 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |I_n| \\ &\leq 12 - 9.618 \dots + 2 \ln 3 - 12 \ln 2 + \ln |f(s^*, t^*)| = -10.012 \dots, \end{aligned}$$

т. е. $\tau = 10.012 \dots$. По лемме 1 находим

$$\mu \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \leq 1 + \frac{32.34 \dots}{10.012 \dots} = 4.230464 \dots$$

Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. Х. Салихову за интересную тему, постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Л. В. Данилов, “Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках”, *Матем. заметки*, **24**:4 (1978), 449–458; англ. пер.: L. V. Danilov, “Rational approximations of some functions at rational points”, *Math. Notes*, **24**:4 (1978), 741–746.
2. K. Alladi, M. L. Robinson, “Legendre polynomials and irrationality”, *J. Reine Angew. Math.*, **318** (1980), 137–155.
3. D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, “Recurrences, Padé approximations and their applications”, *Classical quantum models and arithmetic problems*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **92**, Dekker, New York, 1984, 215–238.
4. А. К. Дубицкас, “Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробями”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1987, № 6, 73–76; англ. пер.: A. K. Dubickas, “Approximation of $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ by rational fractions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **42**:6 (1987), 76–79.
5. M. Hata, “Legendre type polynomials and irrationality measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 99–125.
6. G. Rhin, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité”, *Séminaire de théorie des nombres* (Paris, 1985–86), Progr. Math., **71**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, 155–164.
7. M. Hata, “Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349.
8. В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\ln 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 753–755; англ. пер.: V. Kh. Salikhov, “On the irrationality measure of $\ln 3$ ”, *Dokl. Math.*, **76**:3 (2007), 955–957.
9. В. Х. Салихов, “О мере иррациональности числа π ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 583–593; англ. пер.: V. Kh. Salikhov, “On the measure of irrationality of the number π ”, *Math. Notes*, **88**:4 (2010), 563–573.

10. R. Marcovecchio, “The Rhin–Viola method for $\log 2$ ”, *Acta Arith.*, **139**:2 (2009), 147–184.
11. В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, “Интеграл Марковеккио и мера иррациональности $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ”, *Вестн. Брянск. гос. тех. ун-та*, **4** (2011), 129–132.
12. G. Rhin, C. Viola, “On a permutation group related to $\zeta(2)$ ”, *Acta Arith.*, **77**:1 (1996), 23–56.
13. В. В. Зудилин, “Сокращение факториалов”, *Матем. сб.*, **192**:8 (2001), 95–122; англ. пер.: W. V. Zudilin, “Cancellation of factorials”, *Sb. Math.*, **192**:8 (2001), 1181–1207.
14. Ю. В. Нестеренко, “О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 549–564; англ. пер.: Yu. V. Nesterenko, “On the irrationality exponent of the number $\ln 2$ ”, *Math. Notes*, **88**:4 (2010), 530–543.
15. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, 2-е изд., Наука, М., 1973, 294 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. I, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xxvi+302 pp.

ВАЛЕНТИНА АЛЕКСАНДРОВНА АНДРОСЕНКО
(VALENTINA A. ANDROSENKO)
Брянский государственный технический
университет
E-mail: a_v_a010@rambler.ru

Поступило в редакцию
05.06.2014