Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, О совместных спектрах наборов неограниченных операторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 6, 145–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:56:22

УДК 517.986.7+517.984.3

А. Р. Миротин

О совместных спектрах наборов неограниченных операторов

Рассматриваются несколько типов совместных спектров конечного семейства коммутирующих замкнутых операторов в банаховом пространстве, устанавливаются новые соотношения между этими спектрами (ранее было известно лишь включение спектра Тейлора в коммутантный спектр), и для случая генераторов полугрупп доказываются теоремы об отображении спектров; некоторые из этих теорем являются обобщениями предшествующих результатов автора. Даются приложения полученных результатов к вопросу об устойчивости многопараметрических полугрупп.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: неограниченный оператор, совместный спектр, функция Бернштейна, функциональное исчисление Бохнера–Филлипса, теорема об отображении спектра, многопараметрическая полугруппа операторов, равномерная устойчивость, сильная устойчивость, абстрактная задача Коши.

DOI: 10.4213/im8262

§ 1. Введение и предварительные сведения

После основополагающих работ Р. Аренса, А. Кальдерона, Л. Валбрука и Г. Е. Шилова (см., например, [1, гл. 2, § 13]) различные виды совместных спектров наборов ограниченных операторов интенсивно изучались многими авторами (краткая история вопроса изложена в [2, гл. VI], см. также [3] и библиографию там).

В настоящей работе рассмотрено несколько типов совместных спектров набора неограниченных операторов в банаховом пространстве. Установлены новые соотношения между этими спектрами. Показано, что в случае самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве все рассматриваемые спектры (за исключением остаточного) совпадают. Для случая коммутирующих генераторов C_0 -полугрупп доказаны новые теоремы о спектральных включениях и об отображении этих спектров для многомерного функционального исчисления Бохнера–Филлипса, в том числе обобщающие некоторые результаты из [4] и [5]. Даны приложения полученных результатов к вопросу об устойчивости многопараметрических полугрупп и решений “каскада” абстрактных задач Коши.

Для наборов неограниченных операторов совместный остаточный и совместный аппроксимативный спектры (равно как и их объединение) были введены в [4]. Версии спектров Шилова, Тейлора и коммутантного спектра, рассматриваемые в настоящей работе, являются обобщениями соответствующих понятий из [6] и [5] соответственно, где рассматривались лишь генераторы полугрупп.

Насколько известно автору, бикоммутантный спектр набора неограниченных операторов в банаховом пространстве ранее не рассматривался. Из нетривиальных соотношений между этими спектрами (см. теорему 1 ниже) ранее в [5] автором было установлено лишь включение спектра Тейлора в коммутантный спектр для случая генераторов полугрупп.

Для однопараметрических полугрупп теорема об отображении спектра в исчислении Хилле–Филлипса опубликована в известной монографии этих авторов [7]. По-видимому, первые теоремы об отображении спектра для одномерного исчисления Бохнера–Филлипса установлены автором [8], результат следствия 7 настоящей статьи был анонсирован, а также при дополнительных ограничениях доказан в [4]. Теорема 4 усиливает теорему 3 из [5], первое равенство в утверждении 2) теоремы 5 обобщает теорему 8.2 из [6]. Какие-либо аналогии или версии остальных теорем работы для случая наборов неограниченных операторов в банаховом пространстве автору не известны.

Отметим, что следствия 1 и 6 для однопараметрических полугрупп известны давно (см. [7], [9]). Как справедливо было замечено рецензентом, из новых результатов в этом направлении следует указать слабые теоремы об отображении спектра для групп. Первые результаты здесь (доказанные даже для представлений локально компактных абелевых групп, а потому верные и для n -параметрических групп операторов) принадлежат А. Г. Баскакову [10], [11]. По поводу однопараметрических групп см. также [12], [13, гл. 2] (особенно теорему 2.4.4) ¹ и теорию Латушкина и Монтгомери–Смита [14].

Некоторые результаты об устойчивости многопараметрических полугрупп в общем контексте представлений подполугрупп локально компактных абелевых групп изложены в [15].

Таким образом, новизна статьи состоит в обобщении определений некоторых из введенных ранее совместных спектров, установлении соотношений между рассматриваемыми совместными спектрами, теорем об их отображении и приложениях к вопросам устойчивости многопараметрических полугрупп и решений задач Коши. Обобщениями доказанных ранее результатов автора являются теорема 4, часть второго утверждения теоремы 5, а также утверждение о включении спектра Тейлора в коммутантный спектр в теореме 1.

Всюду далее X есть комплексное банахово пространство, A_j , $j = 1, \dots, n$, – коммутирующие замкнутые операторы в X с областями определения $D(A_j)$, резольвентные множества $\rho(A_j)$ которых не пусты, $A = (A_1, \dots, A_n)$. Коммутирование операторов понимается как коммутирование семейств резольвент $R(\lambda_1, A_1), \dots, R(\lambda_n, A_n)$, $\lambda_j \in \rho(A_j)$. Через $T(u) = T_1(u_1) \cdots T_n(u_n)$, $u \in \mathbb{R}_+^n$, будем обозначать ограниченную n -параметрическую C_0 -полугруппу операторов в пространстве X , $T_1, \dots, T_n$ – попарно коммутирующие ограниченные однопараметрические C_0 -полугруппы в X , $\|T_j(t)\| \leq M$. Генератор полугруппы T_j (частный генератор полугруппы T) будет обозначаться A_j . В случае генераторов коммутирование операторов $A_1, \dots, A_n$ равносильно коммутированию операторов $T_j(t_j)$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, n$ (доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 16.2.1 из [7]). Через $\text{Gen}(X)$ мы будем обозначать

¹В работе [13] излагается и история вопроса, однако пионерские работы А. Г. Баскакова не упомянуты.

множество генераторов ограниченных C_0 -полугрупп в X , а через I – единичный оператор. Отметим, что в случае генераторов векторное подпространство $D(A) := \bigcap_{j=1}^n D(A_j)$ плотно в X .

Основы многомерного исчисления Бохнера–Филлипса заложены автором в [6], [4], [16] и [17] (в [4] кратко изложена история вопроса и мотивировки).

Напомним необходимые понятия и факты из [16] и [6]. Всюду ниже, где речь идет о многомерном исчислении Бохнера–Филлипса, $A = (A_1, \dots, A_n)$ будет обозначать набор частных генераторов ограниченной n -параметрической C_0 -полугруппы T операторов в пространстве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [16]. Будем говорить, что неположительная функция $\psi \in C^\infty((-\infty; 0)^n)$ есть (отрицательная) *функция Бернштейна n переменных* (или *принадлежит классу* ² $\mathcal{T}_n$), если все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (т. е. неотрицательны вместе со своими частными производными всех порядков).

Ясно, что $\mathcal{T}_n$ есть конус относительно поточечного сложения функций и умножения на скаляр. Кроме того, в силу теоремы 6.1 из [6], $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{T}_n$ есть операда.

Известно [6], [18], что каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ допускает интегральное представление

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u), \quad s \in (-\infty; 0)^n, \quad (1)$$

где $c_0 = \psi(-0) := \lim_{s \rightarrow -0} \psi(s)$ (запись $s \rightarrow -0$ означает, что $s_1 \rightarrow -0, \dots, s_n \rightarrow -0$), а c_1 из $\mathbb{R}_+^n$ и положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ определяются по ψ однозначно (здесь и ниже $c \cdot s = \sum_{j=1}^n c_1^j s_j$ при $c, s \in \mathbb{C}^n$). Кроме того, ψ продолжается по формуле (1) до функции, голоморфной в области $\{\operatorname{Re} s < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ и непрерывной в замыкании этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. Определим значение функции ψ из $\mathcal{T}_n$ вида (1) на наборе $A = (A_1, \dots, A_n)$ при $x \in D(A)$ формулой

$$\psi(A)x = c_0 x + c_1 \cdot Ax + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (T(u) - I)x d\mu(u), \quad (2)$$

где $c_1 \cdot Ax := \sum_{j=1}^n c_1^j A_j x$ (интеграл в (2) понимается в смысле Бохнера).

Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$, $t \geq 0$. Тогда функция $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$ абсолютно монотонна на $(-\infty; 0)^n$ и $g_t(s) \leq 1$. В силу многомерного варианта теоремы Бернштейна–Уиддера существует единственная ограниченная положительная мера ν_t на $\mathbb{R}_+^n$ такая, что при $s \in (-\infty; 0)^n$

$$g_t(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot u} d\nu_t(u) = \mathcal{L}\nu_t(-s) \quad (3)$$

(здесь и ниже $\mathcal{L}\nu$ обозначает n -мерное преобразование Лапласа меры ν).

²Этот класс был введен С. Бохнером.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Используя обозначения, введенные выше, положим

$$g_t(A)x = \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u)x \, d\nu_t(u), \quad x \in X, \quad (4)$$

(интеграл в (4) понимается в смысле Бохнера).

Отображение $g(A): t \mapsto g_t(A)$ – ограниченная C_0 -полугруппа операторов в X , генератор которой есть замыкание оператора $\psi(A)$, определенного выше лишь на $D(A)$. Это замыкание также обозначается $\psi(A)$. В одномерном случае $g(A)$ называется *полугруппой*, *подчиненной полугруппе* T (терминология восходит к теории случайных процессов; по поводу одномерного случая см., например, [19], по поводу многомерного – [18]).

§ 2. Совместные спектры и соотношения между ними

Далее мы будем иметь дело со следующими совместными спектрами набора $A = (A_1, \dots, A_n)$ (вообще говоря, неограниченных) замкнутых операторов в комплексном банаховом пространстве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. *Совместный аппроксимативный спектр* $\sigma_a(A)$ набора A есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых найдется такая последовательность векторов $x_m \in D(A)$, $\|x_m\| = 1$, что $\sum_{j=1}^n \|A_j x_m - \lambda_j x_m\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [4]. *Совместный остаточный спектр* $\sigma_R(A)$ набора A есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых векторное пространство $\sum_{j=1}^n \text{Im}(\lambda_j I - A_j)$ не плотно в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [4]. *Совместный спектр* $\sigma_J(A)$ набора A определим равенством

$$\sigma_J(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_R(A).$$

Для определения еще трех совместных спектров набора A операторов в пространстве X обозначим (мы предполагаем, что все резольвентные множества $\rho(A_j)$, $j = 1, \dots, n$, не пусты) через $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$ коммутант (соответственно бикоммутант) семейства операторов $\mathfrak{R} := \{R(\lambda_j, A_j): \lambda_j \in \rho(A_j), j = 1, \dots, n\}$ в алгебре $\mathfrak{L}(X)$ всех ограниченных операторов в X . Алгебра $\mathfrak{B}$ есть слабо (а потому и сильно) замкнутая коммутативная наполненная подалгебра алгебры $\mathfrak{L}(X)$ с единицей, содержащая все операторы семейства $\mathfrak{R}$. В случае, когда A_j являются генераторами попарно коммутирующих полугрупп T_j , $j = 1, \dots, n$, класса C_0 в пространстве X , $\mathfrak{B}$ содержит все операторы семейства $\{T_j(t): t \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ и совпадает с бикоммутантом этого семейства (доказательство повторяет доказательство теоремы 16.2.1 из [7]).

Следующие два типа совместных спектров, наряду с совместным аппроксимативным спектром, для случая ограниченных операторов рассматривались в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [5]. Будем говорить, что точка $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ принадлежит *коммутантному спектру* набора A (пишем $\lambda \in \sigma'(A)$), если и только если не существует таких операторов $B_j \in \mathfrak{C}$, что

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j) B_j = I. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем говорить, что точка $\lambda \in \mathbb{C}^n$ принадлежит *бикоммутантному спектру* набора A (пишем $\lambda \in \sigma''(A)$), если и только если равенство (5) не может выполняться с операторами $B_j \in \mathfrak{B}$.

Для определения еще одного из рассматриваемых в настоящей работе совместных спектров, как и в [7, теорема 16.3.1], получаем с помощью теорем 5.8.4 и 5.8.5 той же монографии [7], что при любом $j = 1, \dots, n$ спектр Гельфанда $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ алгебры $\mathfrak{B}$ разбивается на два подмножества $\mathfrak{W}_j$ и $\mathfrak{U}_j$ и существует непрерывная функция α_j на $\mathfrak{W}_j$ такая, что для любого комплексного гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{B}$ имеем

$$\varphi(R(z, A_j)) = \begin{cases} (z - \alpha_j(\varphi))^{-1}, & \varphi \in \mathfrak{W}_j, \\ 0, & \varphi \in \mathfrak{U}_j, \end{cases}$$

для всех комплексных $z \in \rho(A_j)$, причем $\sigma(A_j) = \alpha_j(\mathfrak{W}_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [6]. Используя предыдущие обозначения, определим *совместный спектр Шилова* $\sigma(A)$ набора A замкнутых коммутирующих операторов в X равенством

$$\sigma(A) = \left\{ (\alpha_1(\varphi), \dots, \alpha_n(\varphi)) : \varphi \in \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{W}_j \right\}$$

(мы считаем, что $\sigma(A) = \emptyset$, если $\bigcap_{j=1}^n \mathfrak{W}_j = \emptyset$).

ЛЕММА 1. 1) В случае одного оператора данные выше определения совместных спектров совпадают с соответствующими классическими.

2) При $n > 1$ спектры $\sigma_a(A)$ и $\sigma_R(A)$ содержатся соответственно в $\sigma_a(A_1) \times \dots \times \sigma_a(A_n)$ и $\sigma_R(A_1) \times \dots \times \sigma_R(A_n)$, а $\sigma_J(A)$, $\sigma''(A)$, $\sigma(A)$ и $\sigma'(A)$ – в $\sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n)$.

3) Если все операторы A_j ограничены, то $\sigma(A)$ есть классический спектр Шилова набора A относительно алгебры $\mathfrak{B}$ и, значит, совпадает с $\sigma''(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1 и 2 очевидны. Если же все операторы A_j ограничены, то в этом случае $A_j \in \mathfrak{B}$, а потому $\varphi(R(z, A_j)) = 1/(z - \varphi(A_j))$. Следовательно, $\alpha_j(\varphi) = \varphi(A_j)$ при $\varphi \in \mathfrak{W}_j$. Но в нашем случае $\mathfrak{U}_j = \emptyset$ (см. [7, теорема 16.3.1]), а значит, $\mathfrak{W}_j = \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$. Это доказывает последнее утверждение леммы.

ЛЕММА 2. 1) Множества $\sigma_a(A)$, $\sigma'(A)$, $\sigma''(A)$ и $\sigma(A)$ замкнуты в $\mathbb{C}^n$.

2) Если операторы A_j плотно определены, то $\sigma(A) = \sigma(A')$, где $A' := (A'_1, \dots, A'_n)$ (штрих обозначает сопряженный оператор).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n \|A_j x - \lambda_j x\| > \delta.$$

Рассмотрим следующую окрестность точки λ :

$$V = \left\{ \lambda' \in \mathbb{C}^n : |\lambda'_j - \lambda_j| < \frac{\delta}{2n}, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Для $\lambda' \in V$ и любых $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \|A_j x - \lambda'_j x\| &\geq \sum_{j=1}^n (\|A_j x - \lambda_j x\| - \|(\lambda_j - \lambda'_j)x\|) \\ &= \sum_{j=1}^n \|A_j x - \lambda_j x\| - \sum_{j=1}^n |\lambda_j - \lambda'_j| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda' \notin \sigma_a(A)$.

Докажем замкнутость коммутантного спектра. Пусть $\lambda \notin \sigma'(A)$. Если точка λ' принадлежит окрестности точки λ , задаваемой неравенством

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j - \lambda'_j| \|B_j\| < 1,$$

то оператор

$$C := \sum_{j=1}^n (\lambda'_j I - A_j) B_j$$

принадлежит $\mathfrak{C}$ и имеет обратный, принадлежащий $\mathfrak{C}$, поскольку оператор

$$I - C = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda'_j) B_j$$

принадлежит $\mathfrak{C}$ и $\|I - C\| < 1$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n (\lambda'_j I - A_j) B_j C^{-1} = I,$$

т. е. $\lambda' \notin \sigma'(A)$. Замкнутость бикоммутантного спектра доказывается аналогично.

Пусть теперь спектр $\sigma(A)$ не пуст и λ^0 принадлежит замыканию $\sigma(A)$, т. е. найдется такая последовательность $\varphi_k \in \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{M}_j$, что при всех $j = 1, \dots, n$ имеем $\alpha_j(\varphi_k) = z - 1/\varphi_k(R(z, A_j)) \rightarrow \lambda_j^0$, $z \in \rho(A_j)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\varphi_k \rightarrow \varphi_0 \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$. Тогда $z - 1/\varphi_0(R(z, A_j)) = \lambda_j^0 \neq \infty$, а потому $\varphi_0 \notin \mathfrak{U}_j$ при всех j , и $\lambda_j^0 = \alpha_j(\varphi_0)$ при всех j , т. е. $\lambda^0 \in \sigma(A)$, что и завершает доказательство первого утверждения.

2) Обозначим через $\mathfrak{B}'$ бикоммутант семейства операторов $\{R(\lambda_j, A'_j): \lambda_j \in \rho(A_j), j = 1, \dots, n\}$ в алгебре $\mathfrak{L}(X')$ всех ограниченных операторов в сопряженном пространстве X' . Соотношения $\rho(A_j) = \rho(A'_j)$, $R(\lambda_j, A_j)' = R(\lambda_j, A'_j)$, а также равенство $(BC)' = C'B'$ ($B, C \in \mathfrak{L}(X)$) показывают, что отображение $B \mapsto B'$ есть изоморфизм коммутативных банаховых алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, при котором определение $\sigma(A)$ превращается в определение $\sigma(A')$. Лемма доказана.

Напомним определение спектра Тейлора набора неограниченных операторов в пространстве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 [5]. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^n$. *Обобщенный комплекс Кошуля* $\mathcal{K}(X, \lambda I - A)$ набора $\lambda I - A$ определяется как последовательность пространств и операторов

$$0 \longleftarrow X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \longleftarrow \dots \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \longleftarrow 0,$$

где $X_m = X \otimes \bigwedge^m \mathbb{C}^n$, $m = 0, \dots, n$, а каждый оператор $d_m = d_m(\lambda I - A)$ имеет область определения $D(d_m) \subset X_{m+1}$, являющуюся линейной оболочкой векторов вида $x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$, где $(e_k)_{k=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n$, а $x \in D(A_{j_1} \dots A_{j_{m+1}})$ для любой перестановки $(j_1, \dots, j_{m+1})$ мультииндекса $(i_1, \dots, i_{m+1})$. Для каждого $m = 0, \dots, n-1$ оператор d_m однозначно определяется на $D(d_m)$ равенством

$$d_m(x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}) = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k (\lambda_{i_k} I - A_{i_k}) x \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$$

(здесь и ниже “крышка”, как обычно, означает, что стоящий под ней сомножитель опущен).

Обобщенный комплекс Кошуля формально выглядит так же, как и комплекс Кошуля для набора ограниченных операторов (см., например, [2]). Отличие состоит в том, что дифференциалы d_m лишь замкнуты (но, вообще говоря, не ограничены). При этом их области определения $D(d_m)$ выбраны таким образом, что

$$d_m: D(d_m) \rightarrow D(d_{m-1}).$$

Легко проверить, что если набор A замкнутых коммутирующих операторов в пространстве X удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} &\text{вектор } x \text{ принадлежит } D(A_i A_j) \cap D(A_i) \implies \\ &x \text{ принадлежит } D(A_j A_i) \text{ и } A_i A_j x = A_j A_i x, \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (\text{K})$$

то последовательность $\mathcal{K}(X, \lambda I - A)$ является комплексом в том смысле, что $d_{m-1} d_m x = 0$ для всех $x \in D(d_m)$ и всех m .

Отметим, что набор частных генераторов многопараметрической полугруппы класса (C_0) в пространстве X удовлетворяет условию (K) в силу [7, теорема 10.9.4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 [5]. Пусть набор A удовлетворяет условию (K). *Спектр Тейлора* $\sigma_T(A)$ этого набора состоит из тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых комплекс $\mathcal{K}(X, \lambda I - A)$ не является точным.

Для доказательства теоремы 1, описывающей соотношения между рассмотренными выше спектрами, нам потребуется следующая лемма, связывающая аппроксимативный спектр со спектром Тейлора. Напомним, что *совместный точечный спектр* $\sigma_p(A)$ набора A есть множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых найдется вектор $x \in D(A)$, $x \neq 0$, удовлетворяющий равенствам $A_j x = \lambda_j x$ при всех $j = 1, \dots, n$.

ЛЕММА 3. *Соотношение $\lambda \in \sigma_a(A)$ выполняется тогда и только тогда, когда либо оператор $d_{n-1}(\lambda I - A)$ не инъективен, либо его образ $\text{Im } d_{n-1}(\lambda I - A)$ не замкнут.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \sigma_a(A)$ и последовательность векторов $x_m \in D(A)$, $\|x_m\| = 1$, такова, что $\sum_{j=1}^n \|A_j x_m - \lambda_j x_m\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Предположим, что оператор $d_{n-1} = d_{n-1}(\lambda I - A)$ инъективен, и докажем, что тогда образ $\text{Im } d_{n-1}$ не замкнут. Допустим противное, т. е. что $\text{Im } d_{n-1}$ есть

банахово подпространство пространства X_{n-1} . Далее для сокращения записи мы отождествим пространство X_n с X , а пространство X_{n-1} — с прямой суммой $X \oplus \dots \oplus X$ посредством изоморфизмов $x \otimes e_1 \wedge \dots \wedge e_n \mapsto x$ и $\sum_{k=1}^n x_k \otimes e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_k} \wedge \dots \wedge e_n \mapsto (x_k)_{k=1}^n$ соответственно. При этом отображение $d_{n-1}: D(A) \rightarrow X_{n-1}$ принимает вид $x \mapsto ((-1)^k(\lambda_k I - A_k)x)_{k=1}^n$. Обозначим через X_A векторное пространство $D(A)$, наделенное нормой графика $\|x\|_A := \|x\| + \sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - A_j)x\|$. Поскольку оно банахово, обратный оператор

$$d_{n-1}^{-1}: \text{Im } d_{n-1} \rightarrow X_A, \quad ((-1)^k(\lambda_k I - A_k)x)_{k=1}^n \mapsto x$$

ограничен по теореме о замкнутом графике. Следовательно, найдется такое $C > 0$, что при всех $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\| + \sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - A_j)x\| \leq C \sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - A_j)x\|.$$

Полагая здесь $x = x_m$, $m \rightarrow \infty$, приходим к противоречию.

Обратно, если оператор d_{n-1} не инъективен, то $\lambda \in \sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A)$. Пусть теперь этот оператор инъективен, но его образ не замкнут. Тогда обратный оператор $d_{n-1}^{-1}: \text{Im } d_{n-1} \rightarrow X$ замкнут, но не ограничен ввиду незамкнутости своей области определения. Следовательно, для любого натурального m найдется такой вектор $x_m \in D(A)$, что

$$\|x_m\| > m \sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - A_j)x_m\|,$$

а потому $\lambda \in \sigma_a(A)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть набор A замкнутых коммутирующих операторов в пространстве X удовлетворяет условию (К). Тогда справедливы включения

$$\sigma''(A) \supseteq \sigma(A) \supseteq \sigma'(A) \supseteq \sigma_T(A) \supseteq \sigma_J(A).$$

2) Если исключить спектр Тейлора, то остальные включения в 1) останутся справедливыми для любого набора A замкнутых коммутирующих операторов с непустыми резольвентными множествами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для обоснования первого включения предположим, что $\sigma(A) \setminus \sigma''(A) \neq \emptyset$. Тогда найдутся такие $B_j \in \mathfrak{B}$, что $\sum_{j=1}^n (\alpha_j(\varphi_0)I - A_j)B_j = I$ при некотором $\varphi_0 \in \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{W}_j$. Подставляя сюда $\alpha_j(\varphi_0) = z_j - 1/\varphi_0(R(z_j, A_j))$, где $z \in \rho(A_j)$, получим

$$\sum_{j=1}^n \left(z_j B_j - A_j B_j - \frac{1}{\varphi_0(R(z_j, A_j))} B_j \right) = I. \quad (6)$$

Операторы $A_j B_j$ определены на всем X , а потому ограничены по теореме о замкнутом графике. Следовательно, они принадлежат $\mathfrak{B}$ (поскольку $\mathfrak{B}$ принадлежат операторы $R(z_j, A_j)$, а с ними и $R(z_j, A_j)B_j$). Применяя теперь комплексный гомоморфизм φ_0 алгебры $\mathfrak{B}$ к обеим частям (6), получим $0 = 1$. Первое включение доказано.

Для доказательства второго включения допустим, что можно выбрать $\lambda \in \sigma'(A) \setminus \sigma(A)$. Зафиксируем $\mu \in \rho(A_1) \times \cdots \times \rho(A_n)$ и рассмотрим операторы $C_j := I - (\mu_j - \lambda_j)R(\mu_j, A_j)$, $j = 1, \dots, n$. Ясно, что $C_j \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, и что для любого комплексного гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{B}$ имеем, как в [7, гл. 5, § 2, доказательство следствия 1],

$$\varphi(C_j) = \begin{cases} \frac{\lambda_j - \alpha_j(\varphi)}{\mu_j - \alpha_j(\varphi)} \neq 0, & \text{если } \varphi \in \mathfrak{M}_j \\ 1, & \text{если } \varphi \in \mathfrak{U}_j. \end{cases}$$

Следовательно, оператор C_j имеет ограниченный обратный, который принадлежит алгебре $\mathfrak{C}$ в силу наполненности последней. Кроме того, поскольку C_j^{-1} коммутирует с резольвентами $R(\zeta, A_k)$, этот оператор отображает векторное пространство $D(A_k)$ в себя ($j, k = 1, \dots, n$). Легко проверить также, что при всех $y \in D(A_j)$, $j = 1, \dots, n$, выполняется равенство $(\lambda_j I - A_j)y = (\mu_j I - A_j)C_j y$. Поскольку $\mu \notin \sigma'(A)$, найдутся такие $B'_j \in \mathfrak{C}$, что $\sum_{j=1}^n (\mu_j I - A_j)B'_j x = x$ при всех $x \in X$. Если мы положим теперь $B_j := C_j^{-1}B'_j$, то $B_j \in \mathfrak{C}$ и $\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)B_j = I$, что противоречит выбору λ .

Для доказательства соотношения $\sigma'(A) \supseteq \sigma_T(A)$ заметим сначала, что если ограниченный оператор $B: X \rightarrow X$ принадлежит алгебре $\mathfrak{C}$, то он отображает линейное многообразие $D(A_{i_1} \cdots A_{i_m})$ в себя для любого набора индексов $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, и

$$BA_{i_1} \cdots A_{i_m} x = A_{i_1} BA_{i_2} \cdots A_{i_m} x = \cdots = A_{i_1} \cdots A_{i_m} Bx$$

для любого $x \in D(A_{i_1} \cdots A_{i_m})$. В самом деле, так как B коммутирует со всеми операторами A_j , то указанное свойство справедливо при $m = 1$ и легко доказывается индукцией по m . Таким образом, для набора A справедливо заключение леммы 2 из [5]. Но тогда для него справедлива и лемма 3 указанной работы, так как ее доказательство опирается лишь на условие (K) и лемму 2. Осталось заметить, что доказательство соотношения $\sigma'(A) \supseteq \sigma_T(A)$, составляющее содержание теоремы 4 из статьи [5] (спектр $\sigma'(A)$ обозначен там через $\sigma_{\text{ш}}(A)$), опиралось лишь на леммы 2 и 3 этой статьи.

Перейдем к доказательству последнего утверждения части 1). Включение $\sigma_T(A) \supseteq \sigma_R(A)$ прямо следует из определений, поскольку точность комплекса Кошуля в нулевом члене равносильна равенству $\sum_j \text{Im}(\lambda_j I - A_j) = X$. Осталось доказать, что $\sigma_T(A) \supseteq \sigma_a(A)$. Но при $\lambda \in \sigma_a(A)$ из леммы 3 следует, что если комплекс $\mathcal{K}(X, \lambda I - A)$ точен в члене X_n , т. е. если оператор d_{n-1} инъективен, то он не точен в члене X_{n-1} , поскольку образ $\text{Im } d_{n-1}$ не замкнут (ядро замкнутого оператора замкнуто).

2) Поскольку доказательство первых двух включений не использовало свойство (K), осталось показать, что $\sigma_J(A) \subseteq \sigma'(A)$. Включение $\sigma_R(A) \subseteq \sigma'(A)$ следует из того, что для любого $\lambda \notin \sigma'(A)$

$$\sum_{j=1}^n \text{Im}(\lambda_j I - A_j) \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j) B_j x : x \in X \right\} = X.$$

Если теперь предположить, что существует $\lambda \in \sigma_a(A) \setminus \sigma'(A)$ и $(x_n) \subset D(A)$ — соответствующий λ совместный аппроксимативный собственный вектор, то,

устремляя n к бесконечности в равенстве $\sum_{j=1}^n B_j(\lambda_j I - A_j)x_n = x_n$ ($B_j \in \mathfrak{C}$), получаем противоречие. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все фигурирующие в теореме 1 включения, за исключением первого, могут быть строгими даже в случае ограниченных операторов. В самом деле, в [20] построен пример, в котором $\sigma'(A) \neq \sigma_T(A)$. С использованием этого примера в [3, пример после теоремы 2.14] показано, что неравенство $\sigma'(A) \neq \sigma''(A)$ также возможно. Возможность неравенства $\sigma_J(A) \neq \sigma_T(A)$ (даже для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве) установлена в следствии 3.4 работы [21], и осталось заметить, что в ограниченном случае $\sigma''(A) = \sigma(A)$.

Ниже будут даны достаточные условия равенства $\sigma''(A) = \sigma(A)$ для неограниченных операторов. Вместе с тем трудно усомниться, что первое включение в теореме 1 может быть строгим, но примером автор не располагает.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть σ_* обозначает один из семи рассматривавшихся выше совместных спектров, и пусть $\mathfrak{G}$ есть некоторый класс замкнутых операторов в пространстве X . Будем говорить, что спектр σ_* *обладает проекционным свойством в классе $\mathfrak{G}$* , если $\sigma_*(A_1, \dots, A_n)$ есть проекция $\sigma_*(A_1, \dots, A_{n+1})$ на первые n координат в $\mathbb{C}^{n+1}$ для любых перестановочных $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathfrak{G}$ и любого n . Ни один из рассмотренных в настоящей работе совместных спектров не обладает проекционным свойством в классе генераторов ограниченных однопараметрических C_0 -полугрупп, даже если ограничиться полугруппами, становящимися непрерывными в равномерной операторной топологии. В самом деле, достаточно взять $T(u_1, u_2) = T_1(u_1)$, где T_1 – нильпотентная полугруппа (относительно последней см., например, [22, гл. 1, пример 9.6]). В этом случае $\sigma_*(A_1, A_2) \subset \sigma(A_1) \times \sigma(A_2) = \emptyset$, так как $\sigma(A_1) = \emptyset$, и в то же время $\sigma(A_2) \neq \emptyset$. В [3] показано, что коммутантный и бикоммутантный спектры не обладают проекционным свойством даже в классе ограниченных операторов, а аппроксимативный спектр в этом классе проекционным свойством обладает. Вопрос о наличии проекционного свойства у совместного аппроксимативного спектра в классе генераторов однопараметрических C_0 -полугрупп, непрерывных на $(0; \infty)$ в равномерной операторной топологии, насколько известно автору, остается открытым.

§ 3. Случай самосопряженных операторов

ТЕОРЕМА 2. *Для набора A коммутирующих самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H справедливы следующие соотношения:*

$$\sigma''(A) = \sigma(A) = \sigma'(A) = \sigma_T(A) = \sigma_J(A) = \sigma_a(A) \supseteq \sigma_R(A) = \sigma_p(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы набора $iA := (iA_1, \dots, iA_n)$ являются частными генераторами унитарной группы $U(t) := \exp(it_1 A_1) \cdots \exp(it_n A_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, а потому удовлетворяют условию (K) [7, теорема 10.9.4]. Следовательно, этому условию удовлетворяют и операторы набора A (другое доказательство этого факта вытекает из представления операторов A_j операторами умножения на функции, полученного ниже). Таким образом, ввиду теоремы 1

для доказательства справедливости первых пяти равенств достаточно убедиться, что $\sigma''(A) \subseteq \sigma_a(A)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим оператор

$$S = \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)^2$$

и покажем, что он самосопряжен. В самом деле, операторы $(\lambda_j I - A_j)^2$ самосопряжены и неотрицательны. Поэтому операторы $I + (\lambda_j I - A_j)^2$ имеют ограниченные обратные C_j , которые самосопряжены и коммутируют. Следовательно, самосопряжен и оператор

$$S = \sum_{j=1}^n C_j^{-1} - nI = \left(\sum_{j=1}^n C_1 \cdots \widehat{C_j} \cdots C_n \right) (C_1 \cdots C_n)^{-1} - nI.$$

Далее, если $\lambda \in \sigma''(A)$, то $0 \in \sigma(S)$, поскольку в противном случае мы имели бы равенство

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j) ((\lambda_j I - A_j) S^{-1}) = I,$$

противоречащее выбору λ (операторы $B_j := (\lambda_j I - A_j) S^{-1}$ ограничены по теореме о замкнутом графике и, стало быть, принадлежат $\mathfrak{B}$ вслед за S^{-1}).

Так как $\sigma_a(S) = \sigma(S)$ (оператор S самосопряжен), найдется такая последовательность векторов $x_m \in D(S)$, $\|x_m\| = 1$, что $\|Sx_m\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Для завершения доказательства первых пяти равенств теперь нужно лишь заметить, что

$$\sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - A_j)x_m\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)^2 x_m, x_m \right\rangle \leq \|Sx_m\|$$

(угловые скобки обозначают скалярное произведение в H), а потому $\lambda \in \sigma_a(A)$.

Поскольку $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A)$, осталось установить лишь последнее равенство. Но включение $\lambda \in \sigma_R(A)$ равносильно тому, что найдется такой ненулевой вектор $x \in H$, что $\langle \sum_{k=1}^n (\lambda_k I - A_k) y_k, x \rangle = 0$ при всех $y_k \in D(A_k)$, что, в свою очередь, равносильно тому, что $(\lambda_k I - A_k)x = 0$ при всех $k = 1, \dots, n$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для случая ограниченных коммутирующих нормальных операторов равенство $\sigma''(A) = \sigma_a(A)$ было установлено в [23].

Для того чтобы получить еще одну характеристику совместного спектра набора коммутирующих самосопряженных операторов, нужна некоторая подготовка. Ниже в этом разделе H есть сепарабельное гильбертово пространство. Поскольку $\mathfrak{B}$ есть коммутативная алгебра фон Неймана [24], существует упорядоченное представление пространства H относительно $\mathfrak{B}$ (см., например, [25, гл. 1, § 2, теорема 3]). А именно, найдется такая убывающая последовательность борелевских множеств $e_k \subset \mathbb{R}$, $e_1 = \mathbb{R}$, и такая конечная регулярная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$, что H изоморфно гильбертовой прямой сумме $\tilde{H} = \bigoplus \{L^2(e_k, \mu) : k \in \mathbb{N}\}$, и этот изоморфизм индуцирует изоморфизм V алгебры $\mathfrak{B}$ на подалгебру $\tilde{\mathfrak{B}}$ алгебры $\mathcal{L}(\tilde{H})$, состоящую из операторов вида $M(b) : (f_k)_{k=1}^\infty \mapsto (bf_k)_{k=1}^\infty$, где $f_k \in L^2(e_k, \mu)$, а b пробегает алгебру $B(\mathbb{R})$ ограниченных борелевских функций на $\mathbb{R}$. Пусть $r_j^t \in B(\mathbb{R})$ таковы,

что оператор $M(r_j^t)$ соответствует при этом изоморфизме оператору $R(t, A_j)$, $t \in \rho(A_j)$, $j = 1, \dots, n$. Поскольку оператор $M(r_j^t)$ самосопряжен и инъективен вслед за $R(t, A_j)$, функция r_j^t вещественнозначна и отлична от нуля μ -почти всюду (п. в.). Кроме того, первое резольвентное тождество влечет равенство $r_j^t - r_j^s = (s - t)r_j^t r_j^s$, $t, s \in \rho(A_j)$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что если мы для каждого $j = 1, \dots, n$ и $t \in \rho(A_j)$ положим $a_j := t - 1/r_j^t$, то эта вещественнозначная борелевская функция не зависит от t . Введем в рассмотрение операторы $\tilde{A}_j$ в $\tilde{H}$, соответствующие операторам A_j , следующим образом:

$$D(\tilde{A}_j) := \{f = (f_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{H} : a_j f_k \in L^2(e_k, \mu) \text{ при } k \in \mathbb{N}\},$$

$$\tilde{A}_j f := (a_j f_k)_{k=1}^\infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

Эти операторы самосопряжены, и $\rho(\tilde{A}_j) = \rho(A_j)$. В самом деле, хорошо известно, что сужения $\tilde{A}_j|_{L^2(e_k, \mu)}$ являются самосопряженными операторами. Далее, при $t \in \rho(A_j)$ легко проверить, что оператор $tI - \tilde{A}_j$ обратим и $R(t, \tilde{A}_j) = M(r_j^t)$, а потому $\rho(\tilde{A}_j) \supseteq \rho(A_j)$, и при изоморфизме V оператор $R(t, A_j)$ переходит в $R(t, \tilde{A}_j)$, а значит, $\sigma(R(t, A_j)) = \sigma(R(t, \tilde{A}_j))$. Применяя теперь теорему об отображении спектров для резольвенты, получаем

$$\left\{ \frac{1}{t - \xi} : \xi \in \sigma(A_j) \right\} = \left\{ \frac{1}{t - \zeta} : \zeta \in \sigma(\tilde{A}_j) \right\},$$

откуда следует, что $\sigma(A_j) = \sigma(\tilde{A}_j)$. Если мы теперь положим $\tilde{A} := (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, то для спектров Шилова будем иметь $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$, поскольку, как показано выше, эти спектры определяются в терминах, инвариантных относительно V . (Из описанной выше конструкции также вытекает, что набор самосопряженных коммутирующих операторов удовлетворяет условию (K).)

Для получения требуемой характеристики введем, следуя [23],

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Совместной существенной областью значений набора функций $a = (a_1, \dots, a_n)$ называется множество $\mathcal{E}(a)$ таких $\beta \in \mathbb{R}^n$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{s \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n |\beta_j - a_j(s)| < \varepsilon\}$ имеет положительную μ -меру.

ТЕОРЕМА 3. Во введенных выше обозначениях справедливо равенство $\sigma(A) = \mathcal{E}(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 и равенства $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$ для доказательства включения $\sigma(A) \subseteq \mathcal{E}(a)$ достаточно показать, что $\sigma_a(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{E}(a)$. Допустим противное и выберем $\lambda \in \sigma_a(\tilde{A}) \setminus \mathcal{E}(a)$. Тогда найдется такая последовательность $f_m \in D(\tilde{A})$, что $\|f_m\|_{\tilde{H}} = 1$, но $\|(\lambda_j I - \tilde{A}_j)f_m\|_{\tilde{H}} \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$. С другой стороны, найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что множество $\{s \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)| < \varepsilon_0\}$ имеет меру нуль, т. е. $\sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)| \geq \varepsilon_0$ μ -п. в., а потому

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)|^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)| \right)^2 \geq \frac{\varepsilon_0^2}{n} \quad \mu\text{-п. в.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \|(\lambda_j I - \tilde{A}_j) f_m\|_H^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \|(\lambda_j - a_j) f_{mk}\|_{L^2(e_k, \mu)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_{e_k} |\lambda_j - a_j(s)|^2 |f_{mk}(s)|^2 d\mu(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)|^2 \right) |f_{mk}(s)|^2 d\mu(s) \geq \frac{\varepsilon_0^2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{mk}\|_{L^2(e_k, \mu)}^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{n}, \end{aligned}$$

и мы получили противоречие.

Для доказательства обратного включения, снова в силу теоремы 2, достаточно показать, что $\mathcal{E}(a) \subseteq \sigma''(\tilde{A})$. Допустим противное и выберем $\lambda \in \mathcal{E}(a) \setminus \sigma''(\tilde{A})$. Тогда найдутся такие $b_j \in B(\mathbb{R})$, что $\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - \tilde{A}_j) M(b_j) = I$, а потому $\sum_{j=1}^n (\lambda_j - a_j(s)) b_j(s) = 1$ μ -п. в. Пусть константа $C > 0$ такова, что $|b_j(s)| \leq C$ при всех $s \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Множество $E = \{s \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)| < 1/(2C)\}$ имеет положительную μ -меру, и для μ -почти всех $s \in E$ имеем

$$1 = \left| \sum_{j=1}^n (\lambda_j - a_j(s)) b_j(s) \right| \leq C \sum_{j=1}^n |\lambda_j - a_j(s)| < \frac{1}{2}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. 1) В монографии [26] показано, что совместный аппроксимативный спектр набора A совпадает также с носителем произведения спектральных мер операторов этого набора. Таким образом, с учетом теорем 2 и 3 мы имеем восемь равносильных определений совместного спектра набора коммутирующих самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

2) Для набора A ограниченных коммутирующих нормальных операторов в [23] доказано, что $\sigma''(A) = \mathcal{E}(a)$.

§ 4. Теоремы об отображении совместных спектров

Как отмечено в [4], уже для функции $\psi \in \mathcal{T}_1$ теорема об отображении спектра, понимаемая как утверждение о справедливости равенства $\psi(\sigma(A)) = \sigma(\psi(A))$, где $A \in \text{Gen}(X)$, $\sigma(A)$ – спектр оператора A , может не выполняться. Заметим, что нижеследующая теорема 4 о спектральном включении усиливает теорему 3 из [5] (где утверждается лишь, что $\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma'(A))$) и доказываться аналогично. Мы приводим доказательство для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 4. Для любой функции $\psi \in \mathcal{T}_n$ и набора A попарно коммутирующих генераторов ограниченных C_0 -полугрупп в банаховом пространстве X имеет место включение

$$\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma''(A)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что

$$\mathbb{C}^n \setminus \sigma''(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \text{Re } \lambda < 0, \psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))\}. \quad (7)$$

При $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и $x \in D(A)$ имеем в силу (1) и (2)

$$\psi(\lambda)x - \psi(A)x = c_1 \cdot (\lambda I - A)x + \int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{\lambda \cdot u} I - T(u))x \, d\mu(u). \quad (8)$$

Для любых ограниченных операторов $B_j, C_j, j = 1, \dots, n$, в X справедливо тождество

$$\prod_{j=1}^n B_j - \prod_{j=1}^n C_j = (B_1 - C_1) \prod_{j=2}^n B_j + C_1(B_2 - C_2) \prod_{j=3}^n B_j + \dots + \prod_{j=1}^{n-1} C_j (B_n - C_n).$$

С учетом коммутирования полугрупп T_j отсюда получаем, что

$$e^{\lambda \cdot u} I - T(u) = \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_j u_j} I - T_j(u_j)) U_j(u), \quad (9)$$

где

$$U_j(u) = \prod_{1 \leq l < j} T_l(u_l) \prod_{j < k \leq n} e^{\lambda_k u_k}$$

– ограниченные операторы в X , коммутирующие с $T_i, i = 1, \dots, n$, $\|U_j(u)\| \leq M^{n-1}$. Известно (см., например, [9, формулы (8.1a), (8.1b)]), что равенства

$$V_j(u_j)x = \int_0^{u_j} e^{(u_j-s)\lambda_j} T_j(s)x \, ds$$

определяют ограниченные операторы в X , $\operatorname{Im}(V_j(u_j)) \subseteq D(A_j)$, также коммутирующие со всеми T_i , причем $\|V_j(u_j)x\| \leq M\|x\|(e^{u_j \operatorname{Re} \lambda_j} - 1)/\operatorname{Re} \lambda_j$ и

$$(e^{\lambda_j u_j} I - T_j(u_j))x = (\lambda_j I - A_j)V_j(u_j)x \quad \text{при } x \in X.$$

Подставляя это в (9), а результат – в (8), имеем

$$\begin{aligned} (\psi(\lambda)I - \psi(A))x &= \sum_{j=1}^n c_1^j (\lambda_j I - A_j)x + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} (\lambda_j I - A_j)V_j(u_j)U_j(u)x \, d\mu(u) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j)W_j^\lambda x, \end{aligned} \quad (10)$$

где операторы

$$W_j^\lambda x = c_1^j x + \int_{\mathbb{R}_+^n} V_j(u_j)U_j(u)x \, d\mu(u)$$

ограничены в X , так как

$$\begin{aligned} \|W_j^\lambda x\| &\leq \left(c_1^j + M^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \|V_j(u_j)\| \, d\mu(u) \right) \|x\| \\ &\leq \left(c_1^j + \frac{M^n}{\operatorname{Re} \lambda_j} \int_{\mathbb{R}_+^n} (e^{u_j \operatorname{Re} \lambda_j} - 1) \, d\mu(u) \right) \|x\| \end{aligned}$$

(интегралы сходятся, поскольку последний интеграл выражается через $\psi((\operatorname{Re} \lambda_j)e_j)$, где (e_j) – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$). Кроме того, $\operatorname{Im}(W_j^\lambda) \subseteq D(A_j)$ и операторы W_j^λ коммутируют со всеми T_i , а потому и с $\psi(A)$.

Если $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))$, то, заменяя в (10) x на $(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1}x$, получаем

$$x = \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - A_j) W_j^\lambda (\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1} x \quad \text{при } x \in X.$$

Заметим, что резольвента $(\psi(\lambda)I - \psi(A))^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{B}$, поскольку этой алгебре принадлежит полугруппа $g(A)$, генератором которой является оператор $\psi(A)$. Таким образом, $\lambda \notin \sigma''(A)$, что доказывает (7).

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma(A_j) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j < 0\}$ при всех j . Если мы предположим, что в этом случае теорема неверна, т.е. найдется число из $\psi(\sigma''(A))$, не принадлежащее $\sigma(\psi(A))$, то $\psi(\lambda) \in \rho(\psi(A))$ при некотором $\lambda \in \sigma''(A)$, а это противоречит (7).

Перейдем к общему случаю. В силу ограниченности рассматриваемых полугрупп при всех $j = 1, \dots, n$ справедливы включения $\sigma(A_j) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0\}$. Тогда для любого $\delta > 0$ операторы $A_j - \delta I \in \operatorname{Gen}(X)$ и $\sigma(A_j - \delta I) \subseteq \{\operatorname{Re} \lambda_j < 0\}$ при всех j . Кроме того, $\psi_\delta(s) := \psi(s - \delta) \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_\delta(A) = \psi(A - \bar{\delta}I)$, где положено $\bar{\delta} := (\delta, \dots, \delta)$. По доказанному выше

$$\sigma(\psi_\delta(A)) = \sigma(\psi(A - \bar{\delta}I)) \supseteq \psi(\sigma''(A - \bar{\delta}I)) = \psi_\delta(\sigma''(A)). \quad (11)$$

Далее, в доказательстве теоремы 4.1 из [6] показано, что $\psi(A)x = \psi_\delta(A)x + F_\delta x$ при $x \in D(A)$, где F_δ – ограниченный оператор. Но тогда $\psi(A) = \psi_\delta(A) + F_\delta$, поскольку по теореме 4 из [4] $D(A)$ есть существенная область для обеих частей этого равенства. Кроме того, в доказательстве теоремы 4.1 из [6] установлено, что $\|F_\delta\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, а потому по теореме о спектре возмущенного оператора (см. [27, теорема IV.3.6]; ρ_H обозначает метрику Хаусдорфа)

$$\rho_H(\sigma(\psi_\delta(A)), \sigma(\psi(A))) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\delta > 0$

$$\sigma(\psi_\delta(A)) \subseteq B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))],$$

где для множества $N \subset \mathbb{C}$ положено $B_\varepsilon[N] := \{z \in \mathbb{C} : \inf_{t \in N} |z - t| \leq \varepsilon\}$. А тогда в силу (11)

$$\psi_\delta(\sigma''(A)) \subseteq B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))].$$

С другой стороны, при достаточно малых $\delta > 0$

$$\psi(\sigma''(A)) \subseteq B_\varepsilon[\psi_\delta(\sigma''(A))].$$

Это следует из того, что $\psi(\lambda) - \psi(\lambda - \bar{\delta}) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow +0$, равномерно по $\lambda \in \{\operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$, так как

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda - \bar{\delta})| \leq c_1 \cdot \bar{\delta} + \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 - e^{-u \cdot \bar{\delta}}) d\mu(u) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow +0,$$

по теореме Б. Леви.

Следовательно,

$$\psi(\sigma''(A)) \subseteq B_\varepsilon[B_\varepsilon[\sigma(\psi(A))]] \subseteq B_{2\varepsilon}[\sigma(\psi(A))],$$

а потому

$$\psi(\sigma''(A)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} B_{2\varepsilon}[\sigma(\psi(A))] = \sigma(\psi(A))$$

в силу замкнутости $\sigma(\psi(A))$. Теорема доказана.

При $\psi(s) = e^{u \cdot s} - 1$, $u \in \mathbb{R}_+^n$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. При $u \in \mathbb{R}_+^n$

$$\sigma(T(u)) \supseteq e^{u \cdot \sigma''(A)}$$

(здесь и ниже для $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$ положено $u \cdot \Omega = \{\sum_{j=1}^n u_j z_j : z \in \Omega\}$).

Приведенное ниже следствие полезно сравнить со следствием 18 из [4].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть оператор $\psi(A)$ ограничен хотя бы для одного набора A , удовлетворяющего условию $\sigma''(A) \supseteq (-\infty; a)^n$ с некоторым $a \leq 0$. Тогда функция ψ ограничена на $(-\infty; 0)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4 функция ψ ограничена на $(-\infty; a)^n$, т. е. при некотором $C < 0$ для всех $r \in (-\infty; a)^n$ имеем $\psi(r) \geq C$. Для любого $s \in (-\infty; 0)^n$ выберем $r \in (-\infty; a)^n$ так, что $r_j \leq s_j$ при всех j . Тогда, поскольку ψ возрастает по каждой переменной в отдельности, получим $\psi(s) \geq \psi(r) \geq C$.

Первое равенство в утверждении 2) следующей теоремы об отображении спектров обобщает теорему 8.2 из [6], где рассмотрен лишь случай генераторов голоморфных полугрупп, остальные утверждения являются новыми.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$, A – набор коммутирующих операторов из $\text{Gen}(X)$. Имеют место следующие утверждения:

- 1) $\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma(A))$;
- 2) если все полугруппы T_j и $g(A)$ непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, операторы A_j не ограничены и $\psi(-\infty) = -\infty$, то

$$\sigma(\psi(A)) = \psi(\sigma(A)) = \psi(\sigma''(A)); \quad (12)$$

- 3) если все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, операторы A_j не ограничены и $\psi(-\infty) \neq -\infty$, то

$$\sigma(\psi(A)) = \psi(\sigma(A)) \cup \{\psi(-\infty)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает из теорем 1 и 4.

Докажем утверждение 2). Так как полугруппы T_j и $g(A)$ непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, то при всех $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = \sigma(g_t(A)) \setminus \{0\} \quad (13)$$

(см., например, [12] или [9, предложение 8.5]).

Для ограниченной регулярной борелевской меры a на $\mathbb{R}_+^n$ и функции $\psi_1(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$ справедливо равенство

$$\psi_1(\sigma(A)) \cup a(\{0\}) = \sigma(\Psi(a, A)), \quad (14)$$

где $\Psi(a, A) := \int_{\mathbb{R}_+^n} T(u) da(u)$ (см. [6, раздел 8]). Отсюда при $a = \nu_t$, $\psi_1(s) = g_t(s)$, $\Psi(a, A) = g_t(A)$ имеем

$$\sigma(g_t(A)) = e^{t\psi(\sigma(A))} \cup \{0\}, \quad (15)$$

поскольку $\nu_t(\{0\}) = g_t(-\infty) = 0$ по тауберовой теореме для преобразования Лапласа. Сопоставляя равенства (13) и (15), получаем, что при $t > 0$

$$e^{t\sigma(\psi(A))} = e^{t\psi(\sigma(A))}. \quad (16)$$

Известно (см., например, [12, гл. 2, теорема 4.18]), что множество $\sigma(\psi(A))$, будучи спектром генератора C_0 -полугруппы, которая становится непрерывной в равномерной операторной топологии, имеет ограниченное пересечение с любой правой полуплоскостью $\{b \leq s_1\}$ комплексной s -плоскости ($s = s_1 + is_2$). Фиксируем вещественное число s_1^0 и обозначим через E и P сечения множеств $\sigma(\psi(A))$ и $\psi(\sigma(A))$ соответственно вертикальной прямой $\{s_1 = s_1^0\}$. Множество E ограничено. Из (16) следует, что $e^{tiE} = e^{tiP}$. Фиксируем $y \in P$. В силу последнего равенства для любого $t > 0$ найдутся элемент $x_t \in E$ и целое число n_t такие, что $t(y - x_t) = 2\pi n_t$. Поскольку левая часть этого равенства есть бесконечно малая при $t \rightarrow 0$, то $n_t = 0$ при достаточно малых t , а потому $y = x_t \in E$ при этих t . Значит, $P \subseteq E$. В частности, множество P тоже ограничено. Но тогда аналогично получаем, что $E \subseteq P$, т. е. $E = P$. В силу произвольности s_1^0 отсюда следует первое из равенств (12). Наконец, применяя последовательно это равенство, теорему 4 и теорему 1, имеем

$$\psi(\sigma(A)) = \sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma''(A)) \supseteq \psi(\sigma(A)),$$

что и завершает доказательство утверждения 2).

Докажем 3). По теореме 8.1 из [6] $\psi(s) = (\mathcal{L}a)(-s)$, где a – ограниченная мера на $\mathbb{R}_+^n$, причем $\psi(A) = \Psi(a, A)$. Тогда в силу (14) $\sigma(\psi(A)) = \psi(\sigma(A)) \cup a(\{0\})$, и осталось заметить, что по тауберовой теореме для преобразования Лапласа $a(\{0\}) = \psi(-\infty)$.

Покажем, что утверждение 3) предыдущей теоремы может быть неверным для случая ограниченных генераторов.

ПРИМЕР 1. Положим $n = 1$, $\psi(s_1) = e^{s_1} - 1$, и пусть A_1 есть ограниченный оператор в X . В этом случае множество $\sigma(\psi(A_1)) = \sigma(e^{A_1}) - 1$ не содержит числа $\psi(-\infty) = -1$, поскольку оператор e^{A_1} ограниченно обратим, и, стало быть, утверждение 3) неверно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены, то для любого $c_1 \in \mathbb{R}_+^n$ справедливы равенства

$$\sigma\left(\overline{\sum_{j=1}^n c_1^j A_j}\right) = c_1 \cdot \sigma(A) = c_1 \cdot \sigma''(A),$$

где черта обозначает замыкание оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В утверждении 2 теоремы 5 положим $\psi(s) = c_1 \cdot s$. Тогда по определению $\psi(A) = \overline{\sum_{j=1}^n c_1^j A_j}$. При этом мера ν_t в представлении (3) есть $\varepsilon_{c_1^1 t} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{c_1^n t}$ (ε_b – мера Дирака, сосредоточенная в точке $b \in \mathbb{R}$), а потому в силу (4) полугруппа $g_t(A)$ равняется $\prod_{j=1}^n T_j(c_1^j t)$ и, следовательно, непрерывна на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены, то

$$\sigma(A_j) = \operatorname{pr}_j \sigma(A) = \operatorname{pr}_j \sigma''(A), \quad j = 1, \dots, n,$$

где pr_j – ортогональная проекция пространства $\mathbb{C}^n$ на свое j -е координатное подпространство. В частности, если спектр по крайней мере одного из операторов A_j не пуст, то и спектр $\sigma(A)$ не пуст.

Для доказательства достаточно положить в предыдущем следствии $c_1 = e_j$, где $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Для формулировки условия совпадения бикоммутантного спектра со спектром Шилова отождествим $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ с помощью отображения $z \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ ($z_k = x_k + iy_k$) и рассмотрим конус $K = \mathbb{R}_+^{2n} \subset \mathbb{C}^n$. Напомним (см., например, [28, гл. 1, § 4]), что множество $E \subseteq \mathbb{C}^n$ называется K -упорядоченно выпуклым, если $(b - K) \cap (a + K) \subseteq E$, как только $a, b \in E$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, их генераторы A_j не ограничены, а $\sigma(A)$ есть K -упорядоченно выпуклое множество, то оно совпадает с $\sigma''(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 5.2 из главы 1 монографии [28] множество $\sigma(A)$ есть пересечение двух семейств полупространств $(\lambda, z) \geq h_1(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и $(\mu, z) \leq h_2(\mu)$, $\mu \in M$, где Λ и M – некоторые подмножества дуального конуса K' , h_1, h_2 – некоторые определенные на них функции, а $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$. В нашем случае $K' = \mathbb{R}_+^{2n}$. Пусть $z^0 \in \sigma''(A)$. В силу следствия 3 для любого $\nu \in \mathbb{R}_+^{2n}$ найдется такая точка $z^1 \in \sigma(A)$, что $\nu \cdot z^0 = \nu \cdot z^1$. Но тогда и $(\nu, z^0) = (\nu, z^1)$, а потому $(\lambda, z^0) \geq h_1(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и $(\mu, z^0) \leq h_2(\mu)$, $\mu \in M$, т. е. $z^0 \in \sigma(A)$. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены, то при $u \in \mathbb{R}_+^n$, $u \neq 0$ имеем

$$\sigma(T(u)) = e^{u \cdot \sigma(A)} \cup \{0\}.$$

Это вытекает из утверждения 3) теоремы 5 при $\psi(s) = e^{u \cdot s} - 1$.

Следующий результат был анонсирован, а также при дополнительных ограничениях доказан в [4] (см. там теорему 12). Здесь мы снимаем эти ограничения.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для любой функции $\psi \in \mathcal{T}_n$ и набора A попарно коммутирующих генераторов ограниченных C_0 -полугрупп в банаховом пространстве X справедливо включение

$$\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma_J(A)).$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 1 и теоремы 4.

§ 5. Приложение к исследованию асимптотического поведения многопараметрических полугрупп

В настоящее время асимптотическое поведение однопараметрических полугрупп операторов довольно хорошо изучено, и соответствующая теория нашла важные применения в теории уравнений в частных производных, теории вероятностей, теории динамических систем, а также их приложениях (см. [9], [12], [29] и литературу там). В § 5 мы применим полученные выше результаты к исследованию равномерной и сильной устойчивости многопараметрических полугрупп. Далее под *конусом* в $\mathbb{R}_+^n$ мы будем понимать объединение лучей вида $l_u := \{tu : t \in \mathbb{R}_+\}$, $u \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем говорить, что n -параметрическая полугруппа T 1) *равномерно экспоненциально устойчива на конусе K* , если

$$\lim_{K \ni v \rightarrow \infty} e^{\varepsilon \|v\|} \|T(v)\| = 0$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ (прямые скобки обозначают норму в $\mathbb{R}^n$);

2) *равномерно устойчива на конусе K* , если $\lim_{K \ni v \rightarrow \infty} \|T(v)\| = 0$;

3) *сильно экспоненциально устойчива на конусе K* , если для некоторого $\varepsilon > 0$ $\lim_{K \ni v \rightarrow \infty} e^{\varepsilon \|v\|} \|T(v)x\| = 0$ при всех $x \in X$;

4) *сильно устойчива на конусе K* , если $\lim_{K \ni v \rightarrow \infty} \|T(v)x\| = 0$ при всех $x \in X$.

В частности, T равномерно (сильно) устойчива на луче l_u , если $\|T(tu)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (соответственно $\|T(tu)x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $x \in X$).

В случае, когда $K = \mathbb{R}_+^n$, вопрос об устойчивости полугруппы T на K тривиален – устойчивость будет иметь место тогда и только тогда, когда каждая из частных полугрупп T_j устойчива на $\mathbb{R}_+$. Но, как показывает следующий пример, этот вопрос становится содержательным, если конус K расположен строго внутри $\mathbb{R}_+^n$.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = C[0, 1]$, $q_1, q_2 \in C[0, 1]$, причем $q_1(0) = q_2(1) = 0$, $q_1(s) < 0$ при $s \neq 0$, $q_2(s) < 0$ при $s \neq 1$. Рассмотрим ограниченную двухпараметрическую полугруппу $T(t_1, t_2)x := e^{t_1 q_1 + t_2 q_2} x$ класса (C_0) в X . Здесь частные полугруппы $T_j(t_j)x = e^{t_j q_j} x$, $j = 1, 2$, не являются сильно устойчивыми, поскольку, например, $|T_1(t_1)x(0)| = |x(0)|$. С другой стороны, полугруппа T равномерно экспоненциально устойчива на внутренних лучах конуса $\mathbb{R}_+^2$, так как для любого $k > 0$ имеем $\|T(t, kt)\| = \max_{s \in [0, 1]} |e^{t(q_1(s) + kq_2(s))}| = e^{t(q_1(s_0) + kq_2(s_0))}$ для некоторого $s_0 \in [0, 1]$.

Для получения критериев равномерной экспоненциальной устойчивости многопараметрических полугрупп нам потребуется следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Спектральной гранью Шилова полугруппы T назовем число*

$$s(A) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \lambda_j : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Заметим, что $s(A) \leq 0$, поскольку $\sigma(A) \subset \times_{j=1}^n \sigma(A_j)$, а все полугруппы T_j предполагаются ограниченными.

В соответствии с известным обобщением классической теоремы Ляпунова, для однопараметрической C_0 -полугруппы, становящейся непрерывной в равномерной операторной топологии, равномерная устойчивость равносильна отрицательности ее спектральной грани (см., например, [9, гл. 9, предложение 9.2]). Следующая теорема содержит обобщение этого результата на случай многопараметрических полугрупп (ниже через $r(B)$ обозначается спектральный радиус оператора B).

ТЕОРЕМА 6. Пусть все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены. Следующие утверждения равносильны:

- (1) $r(T(u)) < 1$ для любого $u \in (0; +\infty)^n$;
- (2) $r(T(u)) < 1$ для некоторого $u \in (0; +\infty)^n$;
- (3) $s(A) < 0$;
- (4) полугруппа T равномерно устойчива на луче l_u для любого $u \in (0; +\infty)^n$;
- (5) полугруппа T равномерно устойчива на луче l_u для некоторого $u \in (0; +\infty)^n$;
- (6) полугруппа T равномерно устойчива на любом замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$;
- (7) полугруппа T равномерно устойчива на некотором замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$;
- (8) полугруппа T равномерно экспоненциально устойчива на любом/некотором замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$;
- (9) полугруппа T сильно экспоненциально устойчива на любом/некотором замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$;
- (10) для любого/некоторого замкнутого конуса $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$ найдутся такие числа $M_K > 0$ и $\omega_K < 0$, что $\|T(u)\| \leq M_K e^{\omega_K |u|}$ при всех $u \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем проводить по схеме

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1), \quad (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (7) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2).$$

Утверждение $(1) \Rightarrow (2)$ очевидно. В силу следствия 6

$$\log r(T(u)) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n u_j \operatorname{Re} \lambda_j : \lambda \in \sigma(A) \right\}. \quad (17)$$

Следовательно, если выполнено (2) и $C = \max_j u_j$, то

$$s(A) \leq \frac{1}{C} \sup \left\{ \sum_{j=1}^n u_j \operatorname{Re} \lambda_j : \lambda \in \sigma(A) \right\} < 0.$$

В свою очередь, если выполнено (3), то при всех $u \in (0; +\infty)^n$ и $\lambda \in \sigma(A)$ имеем $\sum_{j=1}^n u_j \operatorname{Re} \lambda_j \leq ms(A) < 0$, где $m = \min_j u_j$, а потому $r(T(u)) < 1$ в силу (17).

Далее, условие (4) равносильно тому, что для любого $u \in (0; +\infty)^n$ однопараметрическая полугруппа $U(t) = T(tu)$ с генератором $\sum_{j=1}^n u_j A_j$ (см. доказательство следствия 3) равномерно устойчива, что, ввиду того, что она становится непрерывной в равномерной операторной топологии, равносильно отрицательности ее спектральной грани. С учетом следствия 3 заключаем, что

условие (4) равносильно выполнению при всех $u \in (0; +\infty)^n$ неравенства

$$s\left(\overline{\sum_{j=1}^n u_j A_j}\right) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n u_j \operatorname{Re} \lambda_j : \lambda \in \sigma(A)\right\} < 0.$$

Но выше при доказательстве импликаций $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ было показано, что последнее условие равносильно (3).

Покажем, что $(4) \Rightarrow (6)$. Допустим противное. Тогда существуют замкнутый конус $K \subset (0; +\infty)^n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любого натурального N найдется вектор $v_N \in K$, для которого $|v_N| > N$ и $\|T(v_N)\| \geq \varepsilon$. Заметим, что $v_N = t_N u_N$, где $u_N \in K_1$, $K_1 := \{u \in K : |u| = 1\}$ – компакт и $t_N > N$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $u_N \rightarrow u_0 \in K_1$, $N \rightarrow \infty$. В силу (4) найдется такое число $t_0 > 0$, что $\|T(t_0 u_0)\| < \varepsilon/M^n$ (константа M выбрана так, что $\|T_j(t)\| \leq M$ при всех $t \geq 0$, $j = 1, \dots, n$). По причине непрерывности полугруппы T на множестве $(0; +\infty)^n$ в равномерной операторной топологии для достаточно больших N выполняется неравенство $\|T(t_0 u_N)\| < \varepsilon/M^n$. Считая к тому же, что $N > t_0$, выводим из этого неравенства, что

$$\|T(v_N)\| = \|T(t_N u_N)\| \leq \|T(t_0 u_N)\| \|T((t_N - t_0)u_N)\| \leq \|T(t_0 u_N)\| M^n < \varepsilon,$$

а это противоречит выбору v_N .

Установим импликацию $(6) \Rightarrow (8)$. Так как верно (4), то однопараметрическая полугруппа $t \mapsto T_1(t) \cdots T_n(t)$ равномерно устойчива. А тогда, как известно (см., например, [12, гл. 5, предложение 1.3]), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $e^{\varepsilon t} \|T_1(t) \cdots T_n(t)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Следовательно, n -параметрическая полугруппа $u \mapsto e^{\varepsilon \sum_j u_j} T(u)$ равномерно устойчива на луче, а потому и на любом замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$ в силу (6).

Покажем теперь, что $(9) \Rightarrow (10)$. Действительно, если полугруппа T сильно экспоненциально устойчива на конусе K , то при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $x \in X$ множество $\{e^{\varepsilon|v|} \|T(v)x\| : v \in K\}$ ограничено, и по принципу равномерной ограниченности найдется такое число $M_K > 0$, что $e^{\varepsilon|v|} \|T(v)\| \leq M_K$ при всех $v \in K$.

Импликации $(10) \Rightarrow (7)$, $(7) \Rightarrow (5)$ и $(8) \Rightarrow (9)$ очевидны. Поскольку утверждение $(5) \Rightarrow (2)$ следует из соответствующего одномерного результата (см., например, [12, гл. 5, предложение 1.7]), теорема доказана.

Теорема 6 позволяет, в частности, применять к решению вопроса о равномерной экспоненциальной устойчивости многопараметрической полугруппы критерии равномерной устойчивости однопараметрических полугрупп. В качестве примера приведем многомерную версию теоремы Ролевича (см. [13, теорема 3.2.2]; при $n = 1$, $\varphi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ это известная теорема Датко–Паци).

ТЕОРЕМА 7. Пусть все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены. Полугруппа T будет равномерно экспоненциально устойчива на любом замкнутом конусе $K \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$, если найдется такой телесный замкнутый конус $K_0 \subset (0; +\infty)^n \cup \{0\}$ и такая неубывающая функция $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, что $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$ и

$$\int_{K_0} \varphi(\|T(v)x\|) dv < \infty \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если нужно, к меньшему конусу, можем считать, что K_0 порождается шаром $B[u_0, r] \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Пусть $K_1 = \{u \in K_0 : |u| = 1\}$ – центральная проекция конуса K_0 на единичную сферу S пространства $\mathbb{R}^n$, μ – сужение на K_1 меры Лебега на сфере S , m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}_+$. Тогда $K_0 = K_1 \times \mathbb{R}_+$ и $dv = \mu \otimes m$ – сужение на K_0 n -мерной меры Лебега. Поэтому

$$\int_{K_0} \varphi(\|T(v)x\|) dv = \int_{K_1} d\mu(u) \int_0^\infty \varphi(\|T(su)x\|) ds, \quad x \in X, \quad \|x\| = 1.$$

Следовательно, для каждого $x \in X$, $\|x\| = 1$, найдется такой вектор $u_x \in K_1$, что

$$\int_0^\infty \varphi(\|T(su_x)x\|) ds < \infty.$$

Пусть $u_x = t_x a_x$, где $t_x > 0$, $a_x \in B[u_0, r]$. Рассмотрим вектор $v_x = t_x(3u_0 - a_x)$. Он принадлежит K_0 , поскольку $|(3u_0 - a_x)/2 - u_0| < r$. Так как $u_x + v_x = 3t_x u_0$ и $\|T(sv_x)\| \leq M^n$, то, полагая $\varphi_1(t) := \varphi(t/M^n)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi_1(\|T(tu_0)x\|) dt &= 3t_x \int_0^\infty \varphi_1(\|T(s3t_x u_0)x\|) ds \\ &= 3t_x \int_0^\infty \varphi_1(\|T(su_x + sv_x)x\|) ds = 3t_x \int_0^\infty \varphi_1(\|T(sv_x)T(su_x)x\|) ds \\ &\leq 3t_x \int_0^\infty \varphi(\|T(su_x)x\|) ds < \infty \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 1, \end{aligned}$$

а потому T равномерно устойчива на луче l_{u_0} по упомянутой теореме Ролевича. Применение теоремы 6 завершает доказательство.

Что касается сильной устойчивости, то следующая простая лемма также позволяет сводить этот вопрос к одномерному случаю.

ЛЕММА 4. Пусть K – замкнутый конус в $(0; +\infty)^n \cup \{0\}$, $x_0 \in X$. Если $\|T(tu)x_0\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, для любого $u \in K \setminus \{0\}$, то $\|T(v)x_0\| \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$, $v \in K$. В частности, если полугруппа T сильно устойчива на каждом луче l_u , $u \in K \setminus \{0\}$, то она сильно устойчива на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_m \in K$, $v_m \rightarrow \infty$. Тогда $v_m = t_m u_m$, где $u_m \in K_1$, $t_m \rightarrow +\infty$, $K_1 = \{u \in K : |u| = 1\}$. Как и в доказательстве теоремы 6, можно считать, что $u_m \rightarrow u_0 \in K_1$, $m \rightarrow \infty$. По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $t_0 > 0$, что $\|T(t_0 u_0)x_0\| < \varepsilon/(2M^n)$. С учетом сильной непрерывности полугруппы T при достаточно больших m имеем $\|T(t_0 u_m)x_0 - T(t_0 u_0)x_0\| < \varepsilon/(2M^n)$. Если к тому же m настолько велико, что $t_m > t_0$, то

$$\begin{aligned} \|T(v_m)x_0\| &= \|T((t_m - t_0)u_m)T(t_0 u_m)x_0\| \leq M^n \|T(t_0 u_m)x_0\| \\ &\leq M^n (\|T(t_0 u_m)x_0 - T(t_0 u_0)x_0\| + \|T(t_0 u_0)x_0\|) < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы.

Теперь легко получить для случая многопараметрических полугрупп версию известной теоремы Арендта–Бэтти–Любича–Ву [30], [31] (см. также [29, теорема 1.2.12]), дающей достаточные условия сильной устойчивости ограниченных однопараметрических полугрупп.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K – замкнутый конус в $(0; +\infty)^n \cup \{0\}$, и пусть все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены. Если для любого $u \in K \setminus \{0\}$ множество $u \cdot \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно, а $\sigma_R(\overline{u \cdot A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, то полугруппа T сильно устойчива на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в доказательстве следствия 3, однопараметрическая полугруппа

$$U(t) = T(tu) = \prod_{j=1}^n T_j(tu_j), \quad u \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\},$$

имеет генератор $G = \overline{u \cdot A}$. В силу того же следствия $\sigma(G) = u \cdot \sigma(A)$. Кроме того, точечный спектр сопряженного оператора есть $\sigma_p(G') = \sigma_R(\overline{u \cdot A})$. Следовательно, при любом $u \in K$ полугруппа U сильно устойчива по упомянутой теореме Арендта–Бэтти–Любича–Ву, и осталось применить лемму 4.

Аналогично, применяя следствие 5.1.13 из [13] (сильная устойчивость в [13] называется равномерной) к полугруппам U , рассмотренным выше, получаем следующее достаточное условие сильной устойчивости.

ТЕОРЕМА 9. Пусть K – замкнутый конус в $(0; +\infty)^n \cup \{0\}$, и пусть все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены. Пусть для любого $u \in K \setminus \{0\}$ выполнены следующие два условия:

- 1) $\sigma_R(\overline{u \cdot A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;
- 2) существует плотное векторное подпространство $Y_u \subset X$ со свойством: для любого $y \in Y_u$ найдется такое счетное замкнутое $E \subset \mathbb{R}$, что функция $\lambda \mapsto R(\lambda, \overline{u \cdot A})y$ допускает голоморфное продолжение в окрестность множества $\{\operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \setminus iE$.

Тогда полугруппа T сильно устойчива на K .

Таким же образом с помощью [13, следствие 5.1.16] можно получить достаточные условия устойчивости индивидуальной орбиты. Полугруппа T называется *слабо почти периодической* на конусе K , если орбита $\{T(v)x : v \in K\}$ любого элемента $x \in X$ относительно слабо компактна в X .

ТЕОРЕМА 10. Пусть K – замкнутый конус в $(0; +\infty)^n \cup \{0\}$, $x_0 \in X$, и все полугруппы T_j непрерывны на $(0; +\infty)$ в равномерной операторной топологии, а их генераторы A_j не ограничены. Если полугруппа T слабо почти периодична на K , для любого $u \in K \setminus \{0\}$ справедливо равенство $\sigma_p(u \cdot A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, и найдется такое счетное замкнутое $E_u \subset \mathbb{R}$, что функция $\lambda \mapsto R(\lambda, \overline{u \cdot A})x_0$ допускает голоморфное продолжение в окрестность множества $\{\operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \setminus iE_u$, то $\|T(v)x_0\| \rightarrow 0$ при $v \in K$, $v \rightarrow \infty$.

Следующий пример показывает, как предыдущие теоремы могут быть применены в ситуации, которую можно назвать “каскадом задач Коши”. Для простоты изложения мы рассматриваем лишь случай $n = 2$.

ПРИМЕР 3. Пусть A_1, A_2 – коммутирующие неограниченные генераторы ограниченных C_0 -полугрупп T_1, T_2 соответственно в банаховом пространстве X .

Предположим, что $D(A_2) \subseteq D(A_1)$ и что T_1 и T_2 непрерывны на $(0; \infty)$ в равномерной операторной топологии (например, голоморфны), и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_1} = A_1 u(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \\ u(0, t_2) = v(t_2) \end{cases} \quad (18)$$

с неизвестной функцией $u: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow X$. Пусть функция $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, в свою очередь, является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dv(t_2)}{dt_2} = A_2 v(t_2), & t_2 \in \mathbb{R}_+, \\ v(0) = v_0, & v_0 \in D(A_2). \end{cases} \quad (19)$$

Как известно, решение задачи (19) дается формулой $v(t_2) = T_2(t_2)v_0$, причем $v(t_2) \in D(A_2) \subseteq D(A_1)$ при всех $t_2 \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, решение задачи (18) имеет вид $u(t_1, t_2) = T(t_1, t_2)v_0$, где $T(t_1, t_2) = T_1(t_1)T_2(t_2)$.

Пусть K – (замкнутый) угол с вершиной в начале координат, содержащийся в $(0; \infty)^2 \cup \{0\}$. Согласно теореме 6, если (и только если) $s(A_1, A_2) < 0$ (или $r(T(t_1^0, t_2^0)) < 1$ для некоторой точки $(t_1^0, t_2^0) \in (0; +\infty)^2$), то найдутся такие числа $M_K > 0$ и $\omega_K < 0$, что $\|u(t_1, t_2)\| \leq M_K e^{\omega_K(t_1+t_2)} \|v_0\|$ при всех $(t_1, t_2) \in K$. То же заключение справедливо при выполнении условий теоремы 7.

Если же для любого $(t_1, t_2) \in K$ множество $(t_1, t_2) \cdot \sigma(A_1, A_2) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно, а $\sigma_R(t_1 A_1 + t_2 A_2) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, то $\|u(t_1, t_2)\| \rightarrow 0$ для любого $v_0 \in D(A_2)$ при $(t_1, t_2) \rightarrow \infty$, $(t_1, t_2) \in K$ по теореме 8. То же заключение справедливо при выполнении условий теоремы 9.

Автор признателен рецензентам за замечания и предложения, учет которых привел к существенному улучшению рукописи. Автор благодарит также А. Г. Баскакова, любезно предоставившего ему оттиски своих работ [10] и [11].

Список литературы

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, М., 1960, 316 с.; англ. пер.: I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, *Commutative normed rings*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964, 306 pp.
2. А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986, 288 с.; англ. пер.: А. Ya. Helemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, xx+334 pp.
3. Z. Słodkowski, W. Zelazko, “On joint spectra of commuting families of operators”, *Studia Math.*, **50**:1 (1974), 127–148.
4. А. Р. Миротин, “О некоторых свойствах многомерного функционального исчисления Бохнера–Филлипса”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:6 (2011), 1300–1312; англ. пер.: A. R. Mirotin, “On some properties of the multidimensional Bochner–Phillips functional calculus”, *Siberian Math. J.*, **52**:6 (2011), 1032–1041.
5. А. Р. Миротин, “Об отображении совместного спектра набора генераторов полугрупп”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:3 (2012), 62–70; англ. пер.: A. R. Mirotin, “A joint spectral mapping theorem for sets of semigroup generators”, *Funct. Anal. Appl.*, **46**:3 (2012), 210–217.

6. А. Р. Миротин, “Многомерное $\mathcal{T}$ -исчисление от генераторов C_0 -полугрупп”, *Алгебра и анализ*, **11:2** (1999), 142–169; англ. пер.: A. R. Mirotin, “Multivariable $\mathcal{T}$ -calculus in generators of C_0 -semigroups”, *St. Petersburg Math. J.*, **11:2** (2000), 315–335.
7. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957, xii+808 pp.
8. А. Р. Миротин, “О $\mathcal{T}$ -исчислении генераторов C_0 -полугрупп”, *Сиб. матем. журн.*, **39:3** (1998), 571–582; англ. пер.: A. R. Mirotin, “On the $\mathcal{T}$ -calculus of generators of C_0 -semigroups”, *Siberian Math. J.*, **39:3** (1998), 493–503; “Письмо в редакцию”, *Сиб. матем. журн.*, **41:4** (2000), 960; англ. пер.: “Letter to the editor”, *Siberian Math. J.*, **41:4** (2000), 800.
9. Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер, *Однопараметрические полугруппы*, Мир, М., 1992, 352 с.; пер. с англ.: Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn, B. de Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monogr., **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, x+312 pp.
10. А. Г. Баскаков, “Неравенства типа Бернштейна в абстрактном гармоническом анализе”, *Сиб. матем. журн.*, **20:5** (1979), 942–952; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Inequalities of Bernstein type in abstract harmonic analysis”, *Siberian Math. J.*, **20:5** (1979), 665–672.
11. А. Г. Баскаков, “Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций”, *Матем. сб.*, **124(166):1(5)** (1984), 68–95; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions”, *Math. USSR-Sb.*, **52:1** (1985), 63–90.
12. К.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000, xxii+586 pp.
13. J. van Neerven, “The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators”, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **88**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, xii+237 pp.
14. Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith, “Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces”, *J. Funct. Anal.*, **127:1** (1995), 173–197.
15. C. J. K. Batty, “Asymptotic behaviour of semigroups of operators”, *Functional analysis and operator theory* (Warsaw, 1992), Banach Center Publ., **30**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1994, 35–52.
16. А. Р. Миротин, “Действие функций класса Шенберга $\mathcal{T}$ на конусе диссипативных элементов банаховой алгебры”, *Матем. заметки*, **61:4** (1997), 630–633; англ. пер.: A. R. Mirotin, “Functions from the Schoenberg class $\mathcal{T}$ on the cone of dissipative elements of a Banach algebra”, *Math. Notes*, **61:4** (1997), 524–527.
17. А. Р. Миротин, “Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II”, *Матем. заметки*, **64:3** (1998), 423–430; англ. пер.: A. R. Mirotin, “Functions from the Schoenberg class $\mathcal{T}$ act in the cone of dissipative elements of a Banach algebra. II”, *Math. Notes*, **64:3** (1998), 364–370.
18. А. Р. Миротин, “Свойства функций Бернштейна нескольких комплексных переменных”, *Матем. заметки*, **93:2** (2013), 216–226; англ. пер.: A. R. Mirotin, “Properties of Bernstein functions of several complex variables”, *Math. Notes*, **93:2** (2013), 257–265.
19. D. Applebaum, “Lévy processes – from probability to finance and quantum groups”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **51:11** (2004), 1336–1347.
20. J. L. Taylor, “A joint spectrum for several commuting operators”, *J. Funct. Anal.*, **6:2** (1970), 172–191.

21. Z. Słodkowski, “An infinite family of joint spectra”, *Studia Math.*, **61**:3 (1977), 239–255.
22. Дж. Голдстейн, *Полугруппы линейных операторов и их приложения*, Выща школа, Киев, 1989, 348 с.; пер. с англ.: J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1985, x+245 pp.
23. А. Т. Даш, “Joint spectra”, *Studia Math.*, **45**:3 (1973), 225–237.
24. J. Dixmier, *Von Neuman algebras*, Transl. from the French, North-Holland Math. Library, **27**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1981, xxxviii+437 pp.
25. J. T. Schwartz, *W*-algebras*, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London–Paris, 1967, vi+256 pp.
26. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980, 264 с.; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, xv+301 pp.
27. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
28. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973, 551 с.; англ. пер.: M. G. Kreĭn, A. A. Nudel'man, *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Čebyšev and A. A. Markov and their further development*, Transl. Math. Monogr., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977, v+417 pp.
29. Е. Ю. Емельянов, *Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups*, Oper. Theory Adv. Appl., **173**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, viii+174 pp.
30. W. Arendt, C. J. K. Batty, “Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **306**:2 (1988), 837–852.
31. Yu. I. Lyubich, Vũ Quốc Phóng, “Asymptotic stability of linear differential equations in Banach space”, *Studia Math.*, **88**:1 (1988), 37–42.

Адо́льф Руви́мович Ми́ротин
(ADOLF R. MIROTIN)
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Белоруссия
E-mail: amirotin@yandex.ru

Поступило в редакцию
09.06.2014
12.04.2015