Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Комаров, Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:32:29

УДК 517.538

М. А. Комаров

Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса

Рассматривается задача о наилучшем равномерном приближении непрерывных вещественных функций f наипростейшими дробями порядка не выше n на отрезке S действительной оси. Получены аналоги классических полиномиальных теорем Чебышева и Валле-Пуссена. Доказано, что вещественнозначная наипростейшая дробь R_n порядка n , полюсы которой лежат вне круга, имеющего диаметром отрезок S , является наипростейшей дробью наилучшего приближения f в том и только в том случае, когда для разности $f - R_n$ на S имеется чебышевский альтернанс из $n + 1$ точек. При этом R_n – единственная дробь наилучшего приближения. Показана точность ограничения на полюсы. Ранее частные случаи полученных теорем формулировались разными авторами только в виде гипотез.

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: наипростейшая дробь, аппроксимация, альтернанс, единственность, условие Хаара.

DOI: 10.4213/im8266

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Мы исследуем наилучшее равномерное приближение непрерывных вещественнозначных функций на отрезках действительной оси посредством вещественнозначных наипростейших дробей (н. д.). Напомним, что вещественнозначной *наипростейшей дробью* R_n *порядка* n , $n = 0, 1, 2, \dots$, называют логарифмическую производную алгебраического полинома степени n с вещественными коэффициентами:

$$R_n = \frac{Q'}{Q}, \quad Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n, \quad Q \not\equiv 0, \quad x, a_j \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $R_0(x) \equiv 0$ и

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{x - z_j}, \quad m_1 + \dots + m_k = n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где полюсы $z_j \in \mathbb{C}$ – это все попарно различные нули полинома Q , а числа $m_j \in \mathbb{N}$ – кратности этих нулей. Ясно, что нули расположены симметрично относительно вещественной оси, причем кратности взаимно сопряженных нулей одинаковы.

Наипростейшую дробь порядка не выше n наилучшего равномерного приближения функции f на отрезке $S = [x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$, мы будем обозначать через

$$R^*(x) = R^*(n, f, S; x), \quad x \in S \subset \mathbb{R};$$

иногда будем называть эту дробь *оптимальной*.

Наипростейшие дроби применялись А. Макинтайром и У. Фуксом (1940 г.), А. А. Гончаром (1950-е годы), Е. П. Долженко (1960-е годы) в работах, посвященных рассмотрению экстремальных задач в классах рациональных функций. Как самостоятельный аппарат приближения, наипростейшие дроби впервые были использованы В. И. Данченко и Д. Я. Данченко (1999 г.). Дальнейшее развитие теория приближения наипростейшими дробями и некоторыми их модификациями получила в работах В. И. Данченко, П. А. Бородина, О. Н. Косухина, В. Ю. Протасова, И. Р. Каюмова, Я. В. Новака и других авторов; некоторые из этих работ указаны в списке литературы. Например, для н. д. были получены аналоги классических полиномиальных теорем С. Н. Мергеляна, Д. Жексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша (см. [1], [2]). Вместе с тем был выявлен и ряд принципиальных аппроксимативных свойств, не присущих полиномам. Одним из таких свойств наипростейших дробей является возможность приближения на неограниченных множествах (см. [3]–[6]).

Другая принципиальная особенность состоит в том, что, вообще говоря, дробь $R^*(n, f, S; x)$ неединственна и не может быть охарактеризована числом точек альтернанса¹ разности $f - R^*$. Так, неединственность дроби R^* даже при наличии альтернанса из $n + 1$ точек так же, как и необязательность указанного альтернанса для наилучшего приближения, впервые была показана в [7] на примере для $n = 2$. Этот пример был полностью обобщен для $n = 3$ в работе [8] и для произвольного $n \geq 2$ – в [9]. Таким образом, для н. д. не существует точного аналога классической теоремы П. Л. Чебышева (см. [10, с. 69]) об альтернансе. Основной результат данной работы – теорема 1 – является аналогом теоремы Чебышева при дополнительном ограничении, налагаемом на полюсы наипростейшей дроби, доставляющей альтернанс. Поиском такого аналога занимались разные авторы, и в работах [11]–[14] некоторые общие утверждения были сформулированы в виде гипотез. Часть из этих гипотез впервые получит здесь обоснование.

Остается открытой гипотеза В. И. Данченко [12] о том, что для любой непрерывной функции f дробь $R^*(n, f, S; x)$ единственна и характеризуется альтернансом из $n + 1$ точек, если порядок $n \geq n_0(f, S)$ достаточно велик. Эта гипотеза доказана только для *постоянных функций* $f(x) = \text{const}$ (см. работы [7], [15], [16]). Отметим, что задача о наилучшем приближении констант в теории аппроксимаций наипростейшими дробями – это один из возможных аналогов задачи П. Л. Чебышева об унитарном полиноме заданной степени, наименее уклоняющемся от нуля.

¹Напомним, что точки $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ отрезка S образуют *чебышевский альтернанс* (далее просто *альтернанс*) на S для разности непрерывных функций f и R , если $f(t_j) - R(t_j) = \pm(-1)^j \rho$, $j = 1, 2, \dots, s$, где $\rho = \max_{x \in S} |f(x) - R(x)|$.

Перейдем к изложению результатов. В формулировках теорем через f обозначена вещественная функция, непрерывная на отрезке $S = [x_0 - r, x_0 + r]$, а через $B(S)$ – замкнутый круг, диаметром которого является этот отрезок:

$$B(S) = \{w \in \mathbb{C} : |w - x_0| \leq r\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если полюсы вещественнозначной н. д. R_n порядка n вида (1) расположены вне круга $B(S)$, то $R_n(x) \equiv R^*(n, f, S; x)$ в том и только в том случае, когда для разности $f - R_n$ на S имеется альтернанс из $n + 1$ точек. При этом R_n – единственная дробь наилучшего приближения в классе всех н. д. порядка не выше n . Условие для расположения полюсов ослабить нельзя.*

Невозможность ослабления условия, налагаемого на полюсы, означает, что если хотя бы одна пара комплексных сопряженных полюсов дроби наилучшего приближения попадает в круг $B(S)$, то, вообще говоря, наилучшее приближение неединственно и не характеризуется альтернансом из $n + 1$ точек отрезка S . Примеры приведены в § 2.

В формулировке теоремы 1 порядок н. д. наилучшего приближения фиксирован (равен в точности n). В следующей теореме мы снимаем это ограничение применительно к достаточности альтернанса; по-видимому, условие избыточно также в отношении необходимости альтернанса и единственности наилучшего приближения.

ТЕОРЕМА 2. *Если наипростейшая дробь r_k порядка $k \leq n$ не имеет полюсов в круге $B(S)$, а разность $f - r_k$ на S имеет альтернанс из $n + 1$ точек, то $r_k(x) \equiv R^*(n, f, S; x)$.*

Теорема 2 будет доказана в § 4, а теорема 1 – в § 3 (достаточность альтернанса) и § 5 (необходимость альтернанса и единственность наилучшего приближения).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для случая n различных полюсов дроби R_n теорема 1 была сформулирована и доказана автором: в [14] – достаточность альтернанса, в [17] – необходимость альтернанса и единственность наилучшего приближения. Теперь требование различия полюсов снято; в такой форме критерий был анонсирован автором в [16]. Ранее Я. В. Новак [11] доказал аналог теоремы 1 для случая n вещественных различных полюсов за исключением утверждения о единственности. Доказательства в [11], [14], [17] существенно опирались на выписанное ниже детерминантное тождество (8), приведенное (в других терминах) в [11] как гипотеза и проверенное лишь для малых n . Автору стало известно, что тождество (8) для всех n доказано Борхартом (см. [18, с. 18]). Тем самым, предыдущие результаты из разряда гипотез переходят в разряд полноценных теорем. В настоящей работе мы также опираемся на тождество Борхарта.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n \geq 3$ открыт вопрос о том, можно ли в условии теоремы 1 заменить круг какой-либо меньшей фигурой, содержащей отрезок S . При $n = 2$ такая замена невозможна, что видно из примера неединственности [7], в котором полюсы каждой из н. д. порядка 2 наилучшего приближения

функции $f(x) = x + 1$, $x \in [-1, 1]$, расположены в точности на единичной окружности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Требование непрерывности функции f в условиях теоремы 1 избыточно в следующем смысле. Пусть f и R – ограниченные функции и $\rho = \sup_S |f - R|$. Скажем, что точки $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ отрезка S образуют *обобщенный альтернанс* на S для разности $f - R$, если каждую из точек t_j можно поместить в сколь угодно малый подотрезок $U_j = U_j(t_j) \subset S$ так, что имеет место хотя бы одно из двух чередований:

$$\begin{aligned} \sup_{U_1}(f - R) = \rho, & \quad \inf_{U_2}(f - R) = -\rho, & \quad \sup_{U_3}(f - R) = \rho, & \quad \dots, \\ \inf_{U_1}(f - R) = -\rho, & \quad \sup_{U_2}(f - R) = \rho, & \quad \inf_{U_3}(f - R) = -\rho, & \quad \dots \end{aligned}$$

При таком определении альтернанса теорема 1 верна для произвольных ограниченных функций f и изменения в доказательстве минимальны.

В качестве одного приложения теоремы 1 рассмотрим задачу о наилучшем приближении *малых по модулю* непрерывных функций f на отрезке $x \in [-1, 1]$. Напомним, что О. Н. Косухин в [2] при весьма общих предположениях установил связь между величинами наименьших уклонений полиномов и наипростейших дробей. Сформулируем его результат для случая приближения на отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$F(x) = f(x) \exp\left(\int_c^x f(t) dt\right), \quad c \in [-1, 1]$$

(c фиксировано). Обозначим через $\delta_n(f)$ и $E_{n-1}(F)$ наименьшие уклонения на отрезке $[-1, 1]$ наипростейших дробей порядка не выше n от функции f и алгебраических полиномов степени не выше $n-1$ от функции F соответственно. Пусть $\|\cdot\|$ – равномерная норма на отрезке $[-1, 1]$ и $M = \|f\|$. Тогда (см. [2]) справедлива оценка

$$[2(1 + M)e^M]^{-1} \delta_n(f) \leq E_{n-1}(F) \leq (1 + 2Me^M)e^M \delta_n(f), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

По определению имеем $\delta_n(f) = \|R^* - f\|$, где $R^*(x) \equiv R^*(n, f, [-1, 1]; x)$. Следовательно,

$$\|R^*\| \leq \|f\| + \delta_n(f) \leq M + E_{n-1}(F) \cdot 2(1 + M)e^M.$$

Далее, в [19] доказано, что все полюсы н. д. R_n порядка n , подчиненной условию $\|R_n\| \leq b^{-n-1}$ с некоторым $b > 2$, лежат во внешности эллипса

$$z = \left(\frac{b}{4} + \frac{1}{b}\right) \cos t + i \left(\frac{b}{4} - \frac{1}{b}\right) \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Видим, что этот эллипс содержит внутри себя единичный круг, если $b > 2(1 + \sqrt{2})$, поэтому из теоремы 1 и предыдущих оценок имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при некоторых постоянных $c \in [-1, 1]$ (см. определение функции F), $b > 2(1 + \sqrt{2})$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$M + E_{n-1}(F) \cdot 2(1 + M)e^M \leq b^{-n-1}, \quad M = \|f\|,$$

а н. д. $R^*(n, f, [-1, 1]; x)$ имеет порядок n , то наилучшее приближение единственно и для разности $f - R^*$ существует альтернанс из $n + 1$ точек отрезка $[-1, 1]$.

В § 2 мы применим этот результат к конкретной функции f (см. пример из п. 2.4). Заметим, что если данное неравенство выполнено, то и сама функция мала по модулю, так как необходимо $M \leq b^{-n-1}$.

Для оценки снизу величины наименьшего уклонения можно применять следующую аналогию полиномиальной теоремы Валле-Пуссена (см. [10, с. 63–64]).

ТЕОРЕМА 3. Если полюсы н. д. r_k порядка $k \leq n$ лежат вне круга $B(S)$ и найдутся $n+1$ точек $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ отрезка S таких, что $f(t_j) - r_k(t_j) = \pm(-1)^j A_j$, $A_j > 0$, $j = \overline{1, n+1}$, то

$$\max_{x \in S} |f(x) - R^*(n, f, S; x)| \geq \min\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}.$$

Теорема 3 будет доказана в § 4. Отметим, что при условии $k = n$ и некоторых дополнительных условиях (см. замечание 1) теорема 3 была получена в [11] (см. также [14]). Здесь мы снимаем эти ограничения.

Наиболее важным вспомогательным инструментом при доказательстве теорем 1–3 явилась следующая ниже теорема 4, для вывода которой нам и было нужно тождество Борхарта. Теорема 4 представляет и самостоятельный интерес; она утверждает, в частности, что определенные ниже функции (3) удовлетворяют условию Хаара на отрезке S . Напомним в связи с этим некоторые термины (см. [10, с. 79–88]).

Непрерывные комплексные функции $f_1, \dots, f_n$ удовлетворяют условию Хаара на компакте $K \subset \mathbb{C}$, содержащем более n точек, если всякий обобщенный полином вида $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ с константами $\alpha_j \in \mathbb{C}$, не все из которых равны нулю, имеет на K не более $n - 1$ различных нулей. Это условие, очевидно, эквивалентно неравенству $\det(f_j(c_l))_{l,j=1}^n \neq 0$ для любых различных n точек $c_l \in K$ и, как доказал А. Хаар, равносильно единственности полинома $\alpha_1^* f_1 + \dots + \alpha_n^* f_n$ наименьшего уклонения для каждой непрерывной на K функции f . В частности, если функции f_j вещественны и удовлетворяют условию Хаара на компакте $K \subset \mathbb{R}$, то систему $\{f_1, \dots, f_n\}$ называют системой Чебышева на K . На системы функций Чебышева дословно переносится теорема П. Л. Чебышева об альтернансе и некоторые другие результаты теории приближений алгебраическими полиномами.

Рассмотрим систему из n функций вида

$$f_{j,s}(x) = (x - z_j)^{-s}, \quad j = \overline{1, k}, \quad s = \overline{2, m_j + 1} \quad \left(m_j \geq 1, \sum_{j=1}^k m_j = n \right), \quad (3)$$

где $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ – попарно различные точки, расположенные симметрично относительно вещественной оси, и каждой точке z_j поставлено в соответствие

число $m_j \in \mathbb{N}$, причем $\sum m_j = n$ и взаимно сопряженным z_j соответствуют одинаковые числа m_j .

ТЕОРЕМА 4. *Если в определении системы из n функций (3) все z_j лежат вне круга $B(S)$, то на отрезке S сумма кратностей нулей обобщенного полинома $F(\alpha; x) = \sum_{j,s} \alpha_{j,s} f_{j,s}(x)$ по этой системе с произвольными числовыми коэффициентами $\alpha_{j,s}$, не все из которых равны нулю, не превосходит $n - 1$.*

Теорема 4 будет доказана в § 6. Особо отметим случай вещественнозначности всех функций (3), для которого из теоремы 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если в определении системы (3) все z_j вещественны и лежат за пределами отрезка S , то функции (3) образуют систему Чебышева на S .*

Это утверждение для случая $k = n$, т. е. для системы функций $\{(x - z_j)^{-2}\}_{j=1}^n$ с n попарно различными вещественными полюсами z_j , при условии справедливости тождества (8) впервые было доказано в [11] (см. также [14], [17]).

В отличие от условия Хаара, свойство системы (3), утверждаемое теоремой 4, ограничивает сумму кратностей нулей полинома F ; далее мы будем называть это свойство *усиленным условием Хаара*. Системы Чебышева, обладающие таким свойством (см. [20, с. 58]), называют *ЕТ-системами*, тогда как произвольные системы Чебышева иначе называют просто *Т-системами*.

При помощи теоремы 4 мы докажем в § 3 и следующую теорему о единственности решения задачи *кратной интерполяции*. Напомним, что интерполяционная н. д., в отличие от интерполяционного многочлена, может не быть единственной. Впервые это было отмечено в работах [21] и [11] применительно к простой интерполяции; там же были получены некоторые условия единственности, сформулированные в терминах узлов таблицы интерполяции. Позднее вопрос об однозначной разрешимости задачи интерполяции затрагивался в работах [13], [14], [22] и ряде других.

ТЕОРЕМА 5. *Если вещественнозначная н. д. R_n порядка n вида (1) с полюсами, лежащими вне круга $B(S)$, интерполирует таблицу с q попарно различными узлами $c_l \in S$ суммарной кратности n , т. е.*

$$\begin{aligned} (R_n)^{(s)}(c_l) &= y_{l,s+1}, & y_{l,s+1} &\in \mathbb{R}, \\ l &= \overline{1, q}, & s &= \overline{0, p_l - 1}, & p_l &\geq 1, & p_1 + \dots + p_q &= n, \end{aligned} \quad (4)$$

то R_n — единственная интерполяционная дробь в классе всех н. д. порядка $\leq n$, какими бы ни были узлы c_l , значения $y_{l,s+1}$ и кратности p_l .

§ 2. Примеры к основной теореме

В пп. 2.1–2.3 обосновывается точность условия расположения полюсов, указанного в теореме 1. В п. 2.4 рассматривается пример к следствию 1 теоремы, а пример из п. 2.5 относится к случаю, когда наилучшее приближение доставляет н. д. с одним полюсом.

2.1. Покажем на примере, что если хотя бы одна пара комплексных сопряженных полюсов н. д., доставляющей $(n + 1)$ -точечный альтернанс, попадает в круг $B(S)$, то дробь не обязательно оптимальна.

Рассмотрим н. д. $R(x)$ порядка $n = 4$ с полюсами $0.2 \pm 0.2i$ и $-1 \pm 0.3i$, а в качестве S возьмем отрезок $[-1, 1]$. Очевидно, вторая пара полюсов лежит вне замыкания единичного круга, тогда как первая – внутри единичного круга.

Функция $R(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ ровно пять точек локального экстремума:

$$w_1 = -1, \quad w_2 \in (-0.8, -0.7), \quad w_3 \in (0, 0.1), \quad w_4 \in (0.3, 0.5), \quad w_5 = 1$$

(поочередно минимума и максимума), и принимает в них значения $u_j = R(w_j)$:

$$u_1 = -1.6216216 \dots, \quad u_2 = 1.2642412 \dots,$$

$$u_3 = -3.1738633 \dots, \quad u_4 = 6.3689408 \dots, \quad u_5 = 3.3309362 \dots$$

Положим $d = (u_2 - u_1)/2 = 1.4429314 \dots$ и определим непрерывную функцию $f(x)$ как ломаную, принимающую постоянные значения на следующих четырех отрезках:

$$f(x) = \begin{cases} u_1 + d, & x \in [-1, -0.4], \\ u_3 + d, & x \in [-0.2, 0.1], \\ u_4 - d, & x \in [0.3, 0.6], \\ u_5 + d, & x \in [0.7, 1], \end{cases}$$

и прямолинейно соединяющую соседние концевые точки этих отрезков на оставшейся части отрезка $[-1, 1]$.

По построению $n + 1 = 5$ точек $w_1, \dots, w_5$ образуют альтернанс для разности $f - R$ на отрезке $[-1, 1]$, и $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - R(x)| = d$. Тем не менее, R не является дробью наилучшего приближения f . Нетрудно проверить, что, к примеру, н. д. $\tilde{R}(x)$ с полюсами $0.20007 \pm 0.20002i$ и $-1.00001 \pm 0.30003i$ приближает f лучше: $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \tilde{R}(x)| = 1.4427864 \dots < d$.

2.2. В известных примерах неединственности наилучшего приближения (см. [7]–[9]) условие теоремы 1 расположения полюсов не выполнено. Напомним, что при каждом $n \geq 2$ (в [7], [8] для малых n , а в [9] для произвольных) построены отрезок S_n , непрерывная функция $f_n(x)$ и p -параметрическое семейство наипростейших дробей $R_n(p; x)$ порядка n такие, что каждая дробь $R_n(p; x)$ доставляет наилучшее приближение f_n в классе всех н. д. порядка не выше n на S_n . При этом показано существование такого значения $p^* = p^*(n)$ параметра, что разность $f_n(x) - R_n(p^*; x)$ имеет на отрезке S_n ровно $n + 1$ точек альтернанса, тогда как для всех других значений параметра альтернанс содержит меньшее число точек.

Тем самым, при невыполнении условия для расположения полюсов:

(а) для оптимальной дроби не гарантируется ни $(n + 1)$ -точечный альтернанс, ни единственность;

(б) $(n + 1)$ -точечным альтернансом не гарантируется единственность.

Заключения (а), (б) имеют место уже в том случае, когда хотя бы одна пара комплексных сопряженных полюсов дроби попадает в круг $B(S_n)$ (например, это очевидно при $n = 3$).

2.3. Следуя [13], [8], при каждом $n = 2, 3, \dots$ построим пример, показывающий, что если все полюсы дроби лежат в круге $B(S)$, то даже наличие альтернанса из $2n - 1$ точек не обеспечит оптимальности приближения.

В [13] доказано, что для любых x_0 и $r > 0$ существуют вещественные многочлены Q и P степени n , положительные на $S = [x_0 - r, x_0 + r]$ и такие, что многочлен $H = P'Q - Q'P$ на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ имеет ровно $2n - 2$ простых нулей.

Действительно, например, в случае четного $n = 2m$ выберем на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ точки $x_1 < x_2 < \dots < x_m < y_1 < y_2 < \dots < y_m$ и положим

$$q(x) = [(x - x_1) \cdots (x - x_m)]^2, \quad p(x) = [(x - y_1) \cdots (x - y_m)]^2, \quad H_0 = p'q - q'p.$$

На отрезке $[x_1, x_m]$ полином H_0 имеет по крайней мере $n - 1$ различных нулей: это m нулей x_k и еще хотя бы по одному нулю на каждом из $m - 1$ интервалов (x_k, x_{k+1}) (ввиду совпадения знаков производных $H'_0(x_k) = -q''(x_k)p(x_k) \neq 0$). Аналогично, и на отрезке $[y_1, y_m]$ полином H_0 имеет по крайней мере $n - 1$ различных нулей. Однако, поскольку степень полинома H_0 равна $2n - 2$, нулей, помимо найденных, он не имеет, а все найденные просты. Положив $Q(x) = q(x) + \varepsilon$, $P(x) = p(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, мы добьемся положительности полиномов Q и P , причем по непрерывности полином $H = P'Q - Q'P$ будет иметь на S столько нулей, сколько и H_0 , т.е. $2n - 2$. (Для нечетных n рассуждения сходны, но более громоздки.)

Заметим, что по непрерывности ввиду малости ε все нули многочленов Q и P расположены внутри круга $B(S)$.

Далее воспроизводим рассуждение из [8]. Занумеруем нули многочлена H в порядке возрастания как c_l , $l = \overline{1, 2n - 2}$, и положим, кроме того, $c_0 = x_0 - r$, $c_{2n-1} = x_0 + r$, так что $c_0 < c_1 < \dots < c_{2n-2} < c_{2n-1}$.

По построению все полюсы наипростейших дробей $R_n = Q'/Q$ и $L = P'/P$ расположены внутри круга $B(S)$ (но вне отрезка S), а разность $L - R_n \equiv H/(PQ)$ имеет ровно $2n - 2$ простых нулей на S и сохраняет знак на каждом из $2n - 1$ интервалов $I_l = (c_l, c_{l+1})$, $l = \overline{0, 2n - 2}$, чередуя его от одного интервала к другому.

Не нарушая общности, считаем $\text{sign}(L(x) - R_n(x)) = (-1)^{l+1}$ при $x \in I_l$, $l = \overline{0, 2n - 2}$. Фиксируем произвольно число $A > \max_{x \in S} |L(x) - R_n(x)|$ и определим непрерывную вещественнозначную функцию f легко выполнимыми условиями:

- 1) $f(c_l) = R_n(c_l) = L(c_l)$, $l = \overline{1, 2n - 2}$;
- 2) $(L(x) - f(x)) \cdot (-1)^l > 0$ при $x \in I_l$, $l = \overline{0, 2n - 2}$;
- 3) $\max_{x \in I_l} |f(x) - R_n(x)| = A$, $l = \overline{0, 2n - 2}$.

Очевидно, уклонение н. д. R_n от f на отрезке S равно A , и для разности $f - R_n$ на S существует альтернанс из $2n - 1$ точек $t_k \in I_k$. Однако R_n не оптимальна, так как по построению уклонение н. д. L от f строго меньше A .

2.4. Рассмотрим семейство функций вида

$$f(x) = f(a, p; x) = \frac{ae^{ax}}{1 + e^{ax} - e^{ap}}, \quad ap \leq 0, \quad x, a \in \mathbb{R}, \quad p \in [-1, 1] \quad (5)$$

(где a, p – параметры). Условием $ap \leq 0$ обеспечивается их непрерывность при всех x ($1 + e^{ax} - e^{ap} > 0$) и монотонное возрастание ($f'(x) = a^2 e^{ax}(1 - e^{ap}) \times$

$[1 + e^{ax} - e^{ap}]^{-2} \geq 0$). Семейство (5) содержит, например, все константы: $f(x) \equiv a$ при $p = 0$. Если $a \neq 0$, то f имеет тот же знак, что и a , поэтому в силу монотонности

$$M = \|f\| \equiv \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = \frac{|a|e^{|a|}}{1 + e^{|a|} - e^{ap}} \leq |a|.$$

Фиксируем параметр $p \in [-1, 1]$ и положим $c = p$ в определении функции $F(x)$ (см. § 1). Нетрудно видеть, что тогда $F(x) = ae^{ax}$. Воспользуемся оценкой известной величины $E_{n-1}(F)$ (см. [23, с. 229–230]): *если $F^{(n)}(x) \geq 0$ (≤ 0) всюду на отрезке $[-1, 1]$, то*

$$\frac{1}{2^{n-1}n!} \min_{x \in [-1, 1]} |F^{(n)}(x)| \leq E_{n-1}(F) \leq \frac{1}{2^{n-1}n!} \max_{x \in [-1, 1]} |F^{(n)}(x)|.$$

В нашем случае ввиду $F^{(n)}(x) = a^{n+1}e^{ax}$ получаем

$$\frac{|a|^{n+1}e^{-|a|}}{2^{n-1}n!} \leq E_{n-1}(F) \leq \frac{|a|^{n+1}e^{|a|}}{2^{n-1}n!}.$$

Отсюда и из оценки (2) находим оценку наименьших уклонений для $f(a, p; \cdot)$

$$\frac{e^{-M-|a|}}{1 + 2Me^M} \frac{|a|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \leq \delta_n(f) \leq 2(1 + M)e^{M+|a|} \frac{|a|^{n+1}}{2^{n-1}n!}, \quad M = \|f\|. \quad (6)$$

Видим, что эта оценка точна по порядку n . В частности, получена точная по порядку оценка наименьших уклонений в задаче о наилучшем приближении констант.

Итак, имеет место следующее утверждение, последняя часть которого вытекает из следствия 1, неравенства $M \leq |a|$ и оценки свёрху в (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При любых $p \in [-1, 1]$ и $a \in \mathbb{R}$, $ap \leq 0$, величина наименьшего уклонения н. д. порядка не выше n от функции f вида (5) удовлетворяет оценке (6), точной по порядку. Если при $|a| \leq 5^{-n-2}$ н. д. R^* наилучшего приближения функции f имеет порядок n , то наилучшее приближение единственно и для разности $f - R^*$ существует альтернанс из $n + 1$ точек отрезка $[-1, 1]$.*

2.5. Пусть $f = P_{n-1}$ – алгебраический полином степени не выше $n - 1$, а полюсы вещественнозначной н. д. R_n вида (1) лежат вне круга $B(S)$. Согласно теореме 1 и теореме П. Л. Чебышева об альтернансе тождество $R_n(x) \equiv R^*(n, P_{n-1}, S; x)$ имеет место, если и только если P_{n-1} наименее уклоняется от R_n на S среди всех полиномов степени не выше $n - 1$. При этом $\max_S |P_{n-1} - R_n|$ – это одновременно и наименьшее уклонение $\delta_n(P_{n-1}, S)$ н. д. порядка не выше n от P_{n-1} , и наименьшее уклонение $E_{n-1}(R_n, S)$ полиномов степени не выше $n - 1$ от R_n (ср. [13]).

Теорема 2 позволяет усилить это утверждение. А именно, пусть полюсы н. д. r_k порядка $k \leq n$ лежат вне круга $B(S)$. Тогда если полином P_{n-1} наименее уклоняется от r_k на S , то r_k наименее из всех н. д. порядка $\leq n$ уклоняется от P_{n-1} на S и величина уклонения есть $\delta_n(P_{n-1}, S) = E_{n-1}(r_k, S)$.

Вычислим величину уклонения применительно к случаю отрезка $[-1, 1]$ и однополосной н. д. $R_k(x) = k/(x - z_0)$, $z_0 > 1$. Для вещественных A и $a > 1$ имеем $E_{n-1}(A/(x - a), [-1, 1]) = |A|(a - \sqrt{a^2 - 1})^{n-1}/(a^2 - 1)$; это следует из [10, с. 70–72], где такая величина найдена для случая $A = 1$. Отсюда и из изложенного выше получаем, что для многочлена P_{n-1} , наименее уклоняющегося от дроби R_k порядка $k \leq n$, выполнено

$$\delta_n(P_{n-1}, [-1, 1]) = k \left(z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1} \right)^{n-1} (z_0^2 - 1)^{-1}, \quad z_0 > 1.$$

§ 3. Достаточность альтернанса

В этом параграфе мы с помощью теоремы 4 докажем теорему 1 в части достаточности альтернанса, а также докажем теорему 5.

Применение теоремы 4 к наипростейшим дробям осуществляется через посредство следующей леммы, которая в случае n различных точек z_j была получена автором в [13]. Мы формулируем лемму для наипростейших дробей, не обязательно вещественнозначных, хотя применять будем только к последним.

ЛЕММА 1. Пусть $R_n(x) = (\ln Q(x))'$, где Q – полином степени n вида

$$Q(x) = (x - z_1)^{m_1} \cdots (x - z_k)^{m_k}, \quad m_1 + \cdots + m_k = n,$$

$z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ – попарно различные точки, а m_j – натуральные числа. Тогда для любой н. д. $L(x) = (\ln P(x))'$ порядка не выше n существуют n однозначно определенных чисел $\alpha_{j,s}$ таких, что

$$L(x) - R_n(x) \equiv \frac{Q(x)}{P(x)} \sum_{j=1}^k \sum_{s=2}^{m_j+1} \frac{\alpha_{j,s}}{(x - z_j)^s}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $L - R_n = H/(QP)$, где $H = P'Q - Q'P$. Рассмотрим соотношение $P'Q - Q'P = H$ как дифференциальное уравнение относительно неизвестного многочлена P степени $\leq n$ при известных многочленах Q (степени n) и H (степени $\leq 2n - 2$). Интегрируя это уравнение, получим

$$P(x) = Q(x)C + Q(x) \int \frac{H(x)}{Q^2(x)} dx, \quad C = \text{const.}$$

Всякий нуль кратности m_0 полинома Q является, очевидно, и нулем кратности не ниже $m_0 - 1$ полинома $H = P'Q - Q'P$. Следовательно, $H(x) = (x - z_1)^{m_1-1} \cdots (x - z_k)^{m_k-1} h(x)$, где h – некоторый полином, а (единственное) разложение правильной дроби H/Q^2 в сумму простейших имеет вид

$$\frac{H(x)}{Q^2(x)} = \frac{h(x)}{(x - z_1)^{m_1+1} \cdots (x - z_k)^{m_k+1}} = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^{m_j+1} \frac{\alpha_{j,s}}{(x - z_j)^s}.$$

Заметим, что все коэффициенты $\alpha_{j,1}$ при дробях $(x - z_j)^{-1}$ необходимо равны нулю (в противном случае интеграл даст несократимый логарифм, что исключено требованием “ P – многочлен”). Таким образом, справедливо тождество

$$\frac{H(x)}{Q^2(x)} = \sum_{j=1}^k \sum_{s=2}^{m_j+1} \frac{\alpha_{j,s}}{(x - z_j)^s},$$

из которого вытекает утверждение леммы.

Приведем ряд прямых следствий теоремы 4. В формулировках подразумевается вещественнозначность н. д. R_n , поэтому в определении $Q(x)$ (см. лемму 1) точки z_j необходимо расположены симметрично относительно вещественной оси, а натуральные степени m_j для взаимно сопряженных z_j необходимо равны.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если все полюсы н. д. R_n порядка n вида (1) лежат вне круга $B(S)$, а $L \neq R_n$ – другая вещественнозначная н. д. порядка не выше n , то сумма кратностей нулей разности $L - R_n$ на отрезке S не превосходит $n - 1$. В частности, разность $L - R_n$ имеет на отрезке S не более $n - 1$ различных нулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $Q(x) \neq 0$ при $x \in S$, поэтому из леммы 1 следует, что каждый нуль кратности p разности $L - R_n$ является и нулем кратности p суммы в правой части тождества (7). Однако последняя является полиномом по системе функций (3) и согласно теореме 4 не может иметь на S более $n - 1$ корней с учетом кратностей.

Теорема 5 является лишь переформулировкой следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если все полюсы н. д. R_n порядка n вида (1) лежат вне круга $B(S)$, то сумма кратностей нулей первой производной н. д. R_n на отрезке S не превосходит $n - 1$. В частности, $(R_n)'$ имеет на S не более $n - 1$ различных нулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3 вытекает, что полином $H = P'Q - Q'P$ имеет на S не более $n - 1$ корней с учетом кратностей, если Q – вещественный полином степени n с корнями, лежащими вне круга $B(S)$, а P – другой вещественный полином степени не выше n . Взяв в определении H полином $P = Q'$, придем к тому, что полином $\tilde{H} = Q''Q - (Q')^2$ имеет на S не более $n - 1$ корней с учетом кратностей. Остается заметить, что $\tilde{H}/Q^2 \equiv (Q'/Q)' \equiv (R_n)'$.

СЛЕДСТВИЕ 5 (достаточность альтернанса). *Если f – непрерывная на отрезке S функция, а полюсы н. д. R_n порядка n вида (1) лежат вне круга $B(S)$ и для разности $f - R_n$ на S имеется альтернанс из $n + 1$ точек, то $R_n(x) \equiv R^*(n, f, S; x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для разности $f - R_n$ на отрезке $S = [x_0 - r, x_0 + r]$ существует альтернанс из $n + 1$ точек $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$. Допустим, что существует н. д. L порядка $\leq n$, доставляющая лучшее, нежели R_n , приближение функции f на отрезке S : $\max_S |f - R_n| > \max_S |f - L|$. Тогда в точках

альтернанса имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}[L(t_j) - R_n(t_j)] &\equiv \operatorname{sign}[(L(t_j) - f(t_j)) - (R_n(t_j) - f(t_j))] \\ &= \pm(-1)^j, \quad j = \overline{1, n+1};\end{aligned}$$

в частности, непрерывная на S функция $L - R_n$ меняет знак на каждом из n отрезков $[t_j, t_{j+1}]$, а потому имеет на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ не менее n различных нулей. Отсюда по следствию 3 имеем $L \equiv R_n$. Получили противоречие с тем, что L приближает f лучше.

§ 4. Случай аппроксимации дробями порядка меньше n

В этом параграфе мы докажем теоремы 2, 3. Отметим, что непосредственное применение метода, использовавшегося в §3, существенно усложняется, если порядок аппроксимирующей н. д. меньше n ; мы доказываем теоремы 2, 3 иначе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $k = n$ утверждение теоремы совпадает с утверждением следствия 5 (см. §3). Докажем, что и при $k < n$ альтернанс из $n + 1$ точек гарантирует наилучшее приближение функции f дробью r_k .

Предположим противное: пусть существует н. д. R порядка не выше n , дающая лучшее приближение, т. е. $\|R - f\| = \|r_k - f\| - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — равномерная норма для отрезка S). Введем обозначения

$$R_n(x) = r_k(x) + \frac{n-k}{x+c}, \quad f_n(x) = f(x) + \frac{n-k}{x+c},$$

где $c \in \mathbb{R} \setminus S$, $c > 0$. При любом таком c наипростейшая дробь R_n наилучшим образом приближает функцию f_n . Это вытекает из следствия 5, ибо порядок дроби R_n равен в точности n , все ее полюсы расположены вне круга $B(S)$, а разность $R_n - f_n$ имеет на S альтернанс из $n + 1$ точек ввиду тождества $R_n(x) - f_n(x) \equiv r_k(x) - f(x)$ и наличия такого альтернанса для разности $r_k - f$.

По неравенству треугольника верна следующая цепочка:

$$\begin{aligned}\|R - f_n\| &\leq \|R - f\| + \|f - f_n\| = \|r_k - f\| - \varepsilon + \|f - f_n\| \\ &\leq \|r_k - R_n\| + \|R_n - f_n\| + 2\|f - f_n\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Очевидно, что при $c \rightarrow +\infty$ величины $\|r_k - R_n\|$ и $\|f - f_n\|$ убывают к нулю, следовательно, найдется число $C_0 = C_0(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|r_k - R_n\| + 2\|f - f_n\| < \varepsilon$ при всех $c > C_0$. Итак, для любого $c > C_0$ имеет место неравенство

$$\|R - f_n\| < \|R_n - f_n\|,$$

противоречащее тому, что дробь R_n наилучшим образом приближает функцию f_n . Следовательно, наше допущение было неверным, а значит, действительно, r_k наилучшим образом приближает функцию f . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $k = n$ теорема доказывается от противного так же, как следствие 5. Покажем, что случай $k < n$ легко сводится к случаю $k = n$ по аналогии с доказательством теоремы 2. В самом деле, по

данным r_k и f построим дробь R_n и функцию f_n так, как это было сделано выше. Из условия доказываемой теоремы и тождества $R_n(x) - f_n(x) \equiv r_k(x) - f(x)$ следует, что в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ отрезка S имеют место соотношения $f_n(t_j) - R_n(t_j) = \pm(-1)^j A_j$, $A_j > 0$, $j = \overline{1, n+1}$. Поскольку все полюсы н. д. R_n порядка n лежат вне круга $B(S)$ и теорема уже доказана для дробей порядка n , то для любого c (см. доказательство теоремы 2) верна оценка

$$\delta_n(f_n, S) \geq \mu = \min\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\};$$

здесь и далее через $\delta_n(\tilde{f}, S)$ обозначена величина наименьшего отклонения наипростейших дробей порядка не выше n от функции $\tilde{f}$ на S .

Пусть r^* – н. д. порядка $\leq n$ наилучшего равномерного приближения f на S . Допустим, что $\delta_n(f, S) = \mu - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим через C_1 положительное число такое, что для всех $c > C_1$ верно $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Тогда по допущению имеем

$$\delta_n(f_n, S) \leq \|f_n - r^*\| \leq \|f_n - f\| + \|f - r^*\| = \|f_n - f\| + \delta_n(f, S) < \mu$$

при $c > C_1$. Получили противоречие с тем, что $\delta_n(f_n, S) \geq \mu$. Следовательно, $\delta_n(f, S) \geq \mu$.

§ 5. Необходимость альтернанса. Единственность наилучшего приближения

Докажем оставшуюся часть утверждения теоремы 1. Для простоты запиши будем считать $S = [-1, 1]$ (случай произвольного вещественного отрезка $S = [x_0 - r, x_0 + r]$ сводится к случаю единичного линейным преобразованием $v = (w - x_0)/r$).

Необходимость альтернанса из $n+1$ точек. Пусть полюсы н. д. R_n порядка n наилучшего приближения непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции f лежат вне круга $B([-1, 1])$ и $d = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - R_n(x)|$ – величина наименьшего отклонения.

Допустим, что разность $f - R_n$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ альтернанс лишь из $m \leq n$ точек. Тогда найдутся точки $x_1 = -1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = 1$ такие, что:

$$1) (f - R_n)(x_j) = 0 \text{ для всех } j = \overline{2, m};$$

2) для каждого $j = \overline{1, m}$ разность $f - R_n$ на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ достигает экстремального значения $\pm(-1)^j d$.

Отметим, что на отрезках $[x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{2, m-1}$, экстремум достигается непременно во внутренних точках, а на отрезке $[x_1, x_2]$ (соответственно, $[x_m, x_{m+1}]$) он может быть и в концевой точке x_1 (соответственно, x_{m+1}).

Сначала рассмотрим случай $m = n$. Определим набор из n точек c_j :

$$c_1 = -1 - \varepsilon, \quad c_j = x_j, \quad j = \overline{2, n},$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число такое, что полюсы н. д. R_n лежат вне круга $B(\tilde{S})$, имеющего диаметром отрезок $\tilde{S} = [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Для всех достаточно малых по модулю значений $\tau \in \mathbb{R}$ задача интерполяции n -узловой таблицы

$$\{(c_j, y_j)\}_{j=1}^n, \quad y_1 = R_n(c_1) + \tau, \quad y_j = R_n(c_j), \quad j = \overline{2, n},$$

наипростейшими дробями порядка $\leq n$ имеет единственное решение $L(x; \tau)$, причем порядок дроби L равен n , а ее полюсы лежат вне круга $B(\tilde{S})$. Это вытекает по непрерывности из теоремы 5 (см. § 1), так как при $\tau = 0$ единственным решением интерполяционной задачи является н. д. $R_n(x) \equiv L(x; 0)$.

Далее, по теореме 5 при малых $\tau \neq 0$ графики дробей L и R_n не имеют пересечений на отрезке $\tilde{S}$, помимо узлов $c_2, \dots, c_n$, и все эти нули разности $\Delta(x) = L(x; \cdot) - R_n(x)$ простые. Следовательно, разность $\Delta(x)$, сколь угодно малая по модулю на отрезке $\tilde{S}$ за счет выбора τ , сохраняет знак на каждом из промежутков $[c_1, c_2)$, (c_j, c_{j+1}) , $j = \overline{2, n-1}$, $(c_n, 1 + \varepsilon]$, и этот знак чередуется при переходе от одного промежутка к соседнему. Знак τ можно выбрать так, что $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L(x; \tau)| < d$. Полученное противоречие с оптимальностью дроби R_n приводит к выводу о необходимости существования альтернанса из $n + 1$ точек.

Остается рассмотреть случай $m < n$. Он сведется к предыдущему, если мы дополним набор точек c_j , $j = \overline{1, m}$, определенный так же, как выше, точками $c_{m+1} < \dots < c_n$, взятыми на интервале $(1, 1 + \varepsilon)$. Необходимость альтернанса доказана.

Единственность наилучшего приближения доказывается аналогично следствию 5 (см. § 3) с тем отличием, что если н. д. R_n порядка n , имеющая полюсы вне круга $B(S)$, и некоторая н. д. L порядка $\leq n$ наименее уклоняются от f на S , то существование для разности $f - R_n$ альтернанса из $n + 1$ точек отрезка S (которое только что было доказано) означает, что разность $L - R_n = (L - f) - (R_n - f)$ имеет не менее n нулей на S с учетом кратностей, точнее, сумма количества простых нулей и удвоенного количества кратных не меньше n (ср. [13]). По теореме 5 имеем $L \equiv R_n$. Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Доказательство теоремы 4 разобьем на три части (три случая). В первых двух частях мы докажем, что система (3) удовлетворяет условию Хаара на отрезке S в случаях $k = n$ и $k < n$ соответственно. В третьей части разберем общий случай, а именно выполнение усиленного условия Хаара. Отметим, что в случае $k = n$ условие Хаара было проверено ранее в [14], но мы приводим и это доказательство с учетом тождества (8) как необходимое для полноты изложения.

Выполнение условия Хаара – частный случай теоремы 4 – более удобно доказывать, записав условие в детерминантном виде (при этом фиксированные числа z_j мы называем не точками, а полюсами, в отличие от переменных точек c_i , фигурирующих в формулировке условия Хаара, см. § 1).

ТЕОРЕМА 4'. Пусть каждому из k попарно различных полюсов $z_1, \dots, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ системы функций (3), расположенных симметрично относительно вещественной оси, поставлено в соответствие число $m_j \in \mathbb{N}$, причем $\sum m_j = n$ и взаимно сопряженным z_j соответствуют одинаковые числа m_j . Если все полюсы z_j лежат вне круга $B(S)$, то для любых n попарно различных

точек $c_l \in S$ определитель

$$\tilde{D} = \det((c_l - z_1)^{-2}, \dots, (c_l - z_1)^{-m_1-1}; \dots; (c_l - z_k)^{-2}, \dots, (c_l - z_k)^{-m_k-1})_{l=1}^n$$

отличен от нуля.

Случай 1 (основной): $k = n$. Введем обозначение для наборов точек c_l и полюсов z_j :

$$c = (c_1, \dots, c_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n).$$

Все $m_j = 1$, поэтому система функций (3) принимает вид $\{(x - z_j)^{-2}\}_{j=1}^n$, а условие Хаара принимает вид неравенства

$$D = D(c; z) = \det((c_l - z_j)^{-2})_{l,j=1}^n \neq 0$$

по всем наборам из n различных точек c_l отрезка S . Для доказательства этого неравенства нам потребуется следующее тождество Борхарта (1855 г.), приведенное в монографии [18] о перманентах матриц; *перманент квадратной матрицы* – это матричная функция, вычисляемая по правилу разложения определителя, но с тем отличием, что перед каждым произведением элементов независимо от четности соответствующей перестановки ставится плюс.

ТОЖДЕСТВО БОРХАРТА. Для произвольных непересекающихся наборов c и z комплексных чисел имеем

$$D(c; z) = W(c; z)T(c; z), \quad (8)$$

где W и T – детерминант и перманент матрицы $((c_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ соответственно.

Известна (см. [10, с. 29]) формула разложения определителя $W(c; z)$:

$$W(c; z) = \det((c_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n = \pm \frac{\prod_{n \geq j > l \geq 1} (c_j - c_l)(z_j - z_l)}{g(z_1) \cdots g(z_n)}, \quad (9)$$

где знак перед дробью зависит только от n , а $g(t) = (c_1 - t) \cdots (c_n - t)$. В рассматриваемом случае точки c_l , равно как и полюсы z_j , попарно различны, поэтому сомножитель W в (8) отличен от нуля.

Далее, неравенство $T \neq 0$ устанавливается в следующей лемме 2 и притом для наборов c и z более общего, чем в неравенстве $W \neq 0$, вида. Лемма будет доказана в § 7 (ср. [14]). Тем самым, мы приходим к искомому неравенству $D \neq 0$, выражающему условие Хаара для n различных полюсов.

ЛЕММА 2. Перманент $T(c; z)$ матрицы $((c_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ отличен от нуля для любого набора c точек отрезка S (не обязательно различных) и любого набора z полюсов, расположенных вне круга $B(S)$ симметрично относительно вещественной оси (не обязательно различных).

Случай 2 (общий случай в теореме 4'): $k < n$. Рассмотрим подробно два основных подслучая.

Подслучай 2.1: с вещественным полюсом z_1 сопоставлено число $m = m_1 \geq 2$, а с полюсами $z_2, \dots, z_k$ – числа $m_j = 1$. (Отметим, что количество k всех

различных полюсов здесь равно $n - m + 1$, поскольку $\sum m_j = n$.) Функции системы (3) принимают вид

$$\{(x - z_1)^{-2}, (x - z_1)^{-3}, \dots, (x - z_1)^{-m-1}; (x - z_2)^{-2}; (x - z_3)^{-2}; \dots; (x - z_k)^{-2}\}.$$

Соответственно, определитель из условия Хаара принимает вид

$$D_1 = \det((c_l - z_1)^{-2}, (c_l - z_1)^{-3}, \dots, (c_l - z_1)^{-m-1}; (c_l - z_2)^{-2}; \dots; (c_l - z_k)^{-2})_{l=1}^n.$$

Докажем, что $D_1 \neq 0$ для любых попарно различных точек $c_1, \dots, c_n \in S$.

Возьмем n попарно различных точек $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$, расположенных симметрично относительно вещественной оси и таких, что $v_1 = z_1$, $v_{m+1} = z_2, \dots, v_n = z_k$. Составим из них и точек c_l вспомогательный определитель $D(c; v) = \det((c_l - v_j)^{-2})_{l,j=1}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$. Легко видеть, что

$$D_1 = \mu \lim_{v_m, \dots, v_3, v_2 \rightarrow v_1} \frac{\partial^{(m-1)+\dots+2+1} D(c; v)}{\partial v_m^{m-1} \dots \partial v_3^2 \partial v_2}, \quad \mu^{-1} = \prod_{s=1}^m s! \neq 0.$$

Пользуясь тождеством (8), заменим $D(c; v)$ в этом выражении на $W(c; v)T(c; v)$. Производную этого произведения разложим в сумму по формуле Лейбница. Каждое слагаемое суммы будет иметь множителем некоторую производную определителя $W(c; v)$. Из определения $W(c; v) = \det((c_l - v_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ легко усмотреть, что предельные значения всех возникающих производных детерминанта W , за исключением, быть может, старшей, равны нулю. Обращение в нуль связано с тем, что этими предельными значениями оказываются детерминанты, имеющие по крайней мере одну пару одинаковых столбцов. Таким образом,

$$D_1 = \mu \lim_{v_m, \dots, v_3, v_2 \rightarrow v_1} \frac{\partial^{(m-1)+\dots+2+1} W(c; v)}{\partial v_m^{m-1} \dots \partial v_3^2 \partial v_2} \lim_{v_m, \dots, v_3, v_2 \rightarrow v_1} T(c; v).$$

Однако предел перманента T отличен от нуля по лемме 2, в утверждении которой отмечена возможность совпадения некоторых точек каждого из двух наборов аргументов. Остается доказать, что и предел A производной определителя W ненулевой. Заметим, что этот предел более удобно вычислять в следующем порядке:

$$A = \lim_{v_m \rightarrow v_1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial v_m^{m-1}} \left(\dots \left(\lim_{v_3 \rightarrow v_1} \frac{\partial^2}{\partial v_3^2} \left(\lim_{v_2 \rightarrow v_1} \frac{\partial W(c; v)}{\partial v_2} \right) \right) \dots \right). \quad (10)$$

Из формулы (9) имеем

$$W(c; v) = \frac{v_1 - v_2}{g(v_1)} \prod_{j=3}^n (v_2 - v_j) \prod_{\substack{n \geq j > l \geq 1 \\ l, j \neq 2}} (v_l - v_j) \frac{Y(c)}{g(v_2) \dots g(v_n)},$$

где $Y(c) = \pm \prod_{n \geq j > l \geq 1} (c_j - c_l)$. Находим значение внутренней скобки в предельном равенстве (10):

$$\lim_{v_2 \rightarrow v_1} \frac{\partial W(c; v)}{\partial v_2} = - \left[\frac{v_1 - v_3}{g(v_1)} \right]^2 \prod_{j=4}^n (v_1 - v_j)^2 \prod_{\substack{n \geq j > l \geq 1 \\ l, j \neq 2, \neq 1}} (v_l - v_j) \frac{Y(c)}{g(v_3) \dots g(v_n)} \neq 0.$$

Затем вычисляем предел второй производной найденного выражения по v_3 и т. д. В этом процессе каждое дифференцирование приводит к величине, отличной от нуля, поскольку, как легко заметить, предельное (при $v_l \rightarrow v_1$) значение производной порядка $l - 1$ по v_l берется от функции вида $(v_1 - v_l)^{l-1} Y_1$, где $\lim_{v_l \rightarrow v_1} Y_1 \neq 0$. Следовательно, $A \neq 0$, что и требовалось показать.

Итак, в условиях подслучая 2.1 теорема 4' верна.

Подслучай 2.2: комплексно сопряженным полюсам z_1 и z_2 соответствуют одинаковые числа $m = m_1 = m_2 \geq 2$, а остальным полюсам $z_3, \dots, z_k$ — числа $m_j = 1$. Здесь $k = n - 2m + 2$. По аналогии с предыдущим, мы обозначаем через D_2 определитель из условия Хаара для соответствующей системы функций и рассматриваем вспомогательный определитель $D(c; v)$ с попарно различными точками $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$, расположенными симметрично относительно вещественной оси и такими, что $v_1 = z_1$, $v_{m+1} = z_2$, $v_{2m+1} = z_3$, $v_{2m+2} = z_4$, $\dots$, $v_n = z_k$. Замечаем, что с точностью до ненулевого множителя μ^2 определитель D_2 совпадает с пределом

$$\lim_{\substack{v_m, \dots, v_2 \rightarrow v_1 \\ v_{2m}, \dots, v_{m+2} \rightarrow v_{m+1}}} \frac{\partial^{2[(m-1)+\dots+2+1]} D(c; v)}{\partial v_m^{m-1} \dots \partial v_3^2 \partial v_2 \partial v_{2m}^{m-1} \dots \partial v_{m+3}^2 \partial v_{m+2}},$$

и с помощью формул (8) и (9) и леммы 2 доказываем неравенство $D_2 \neq 0$.

Итак, в условиях подслучая 2.2 теорема 4' также верна. В общем случае 2 утверждение теоремы получается последовательным применением схем, использованных в двух основных подслучаях, к каждому полюсу, которому поставлено в соответствие число $m_j > 1$. Теорема 4' полностью доказана.

Случай 3 (общий в теореме 4). Рассматривается возможность наличия кратных корней полинома по системе функций (3). Достаточно проверить, что отличен от нуля детерминант $\hat{D}$ однородной системы, получаемой относительно коэффициентов $\alpha_{j,s}$ суммы из соотношения (7) в силу условий кратной интерполяции (4). Легко видеть, что $\hat{D}$ равен пределу определенной производной по переменным c_l детерминанта $\tilde{D}$ (см. формулировку теоремы 4'); например, если в условиях (4) узлы $c_1, \dots, c_{n-2}$ простые, а узел c_{n-1} двукратный, то $\hat{D} = \lim_{c_n \rightarrow c_{n-1}} (\tilde{D})'_{c_n}$. По аналогии с предыдущим рассуждением доказывается, что $\hat{D} \neq 0$. Это доказывает теорему 4 (усиленное условие Хаара).

§ 7. Доказательство леммы 2

Здесь мы почти дословно воспроизведем соответствующее доказательство из [14] и, как и в [14], ограничимся рассмотрением случая $S = [-1, 1]$. Через $m = 0, 1, 2, \dots$ обозначим количество тех вещественных z_j , которые меньше -1 (если некоторые z_j совпадают, то мы учитываем каждое).

В случае вещественности всех z_j знаки всех слагаемых разложения T одинаковы и равны $(-1)^m$, поэтому $T \neq 0$ (это наблюдение было сделано в [11]).

Предположим, что среди z_j есть хотя бы одна пара комплексных сопряженных. Перенумеруем z_j так, чтобы сначала шли все пары комплексных сопряженных, а затем все вещественные. Возьмем $n = 2$. В наших предположениях

имеем $z_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$, а числа c_1 и c_2 пробегают отрезок $[-1, 1]$. Вычислим перманент $T = T_2$ непосредственно:

$$T_2 = \frac{1}{c_1 - z_1} \frac{1}{c_2 - z_2} + \frac{1}{c_2 - z_1} \frac{1}{c_1 - z_2} = \frac{2(a - c_2)(a - c_1) + 2b^2}{[(a - c_1)^2 + b^2][(a - c_2)^2 + b^2]}. \quad (11)$$

Поскольку $(a - c)^2 + b^2 > 0$, для выполнения неравенства $T_2 \neq 0$ по всем c_1, c_2 , принадлежащим отрезку $[-1, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{-1 \leq c_1, c_2 \leq 1} [(a - c_2)(a - c_1) + b^2] > 0.$$

Легко видеть, что минимум достигается в точках $c_1 = -c_2 = \pm 1$ и равен $a^2 + b^2 - 1$. Однако в условиях леммы при $S = [-1, 1]$ имеем $a^2 + b^2 > 1$ (точки z_1 и z_2 лежат вне замыкания единичного круга), следовательно, $T_2 > 0$. Итак, при $n = 2$ лемма доказана.

Пусть теперь $n > 2$. Заметим, что по теореме Лапласа (см., например, [24, с. 129]) разложение определителя $W = \det((c_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ можно представить в виде

$$W = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} W_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} (-1)^{1+2+l_1+l_2} \widetilde{W}_{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix},$$

где W_2 и $\widetilde{W}_{n-2}$ — это соответственно минор порядка 2, составленный из элементов матрицы $((c_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$, стоящих на пересечении первого и второго столбцов с l_1 -й и l_2 -й строками, и дополнительный к нему минор порядка $n - 2$. Таким образом, по определению перманента справедливо разложение

$$T = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} T_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \widetilde{T}_{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix},$$

где T_2 и $\widetilde{T}_{n-2}$ — перманенты подматриц, породивших соответственно миноры W_2 и $\widetilde{W}_{n-2}$.

Докажем, что в наших условиях все произведения $T_2 \widetilde{T}_{n-2}$ имеют один и тот же знак $(-1)^m$, а потому вся сумма T отлична от нуля. Действительно, по предыдущему для любых $c_{l_1}, c_{l_2} \in [-1, 1]$ верно

$$T_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_{l_1} - z_1} \frac{1}{c_{l_2} - z_2} + \frac{1}{c_{l_2} - z_1} \frac{1}{c_{l_1} - z_2} > 0,$$

поэтому знак произведения $T_2 \widetilde{T}_{n-2}$ совпадает со знаком $\widetilde{T}_{n-2}$. Если все z_j , кроме z_1 и z_2 , вещественны, то, как мы видели, $\text{sign } \widetilde{T}_{n-2} = (-1)^m$. Если z_3, z_4 — следующая пара комплексных сопряженных полюсов, то к перманенту $\widetilde{T}_{n-2}$ мы применим предыдущее рассуждение. После некоторого числа итераций, на каждой из которых мы выделяем лишь положительные множители, все пары комплексных сопряженных z_j будут исчерпаны и останутся суммы с вещественными z_j , т. е. величины знака $(-1)^m$. Лемма доказана.

Список литературы

1. В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 502–507.
2. О. Н. Косухин, “Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2001, № 4, 54–59; англ. пер.: O. N. Kosukhin, “Approximation properties of the most simple fractions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:4 (2001), 36–40.
3. П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, “Approximation by the simplest fractions on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.
4. В. Ю. Протасов, “Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Approximation by simple partial fractions and the Hilbert transform”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 333–349.
5. В. И. Данченко, “О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 53–66; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Convergence of simple partial fractions in $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Sb. Math.*, **201**:7 (2010), 985–997.
6. И. Р. Каюмов, “Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 87–98; англ. пер.: I. R. Kayumov, “Convergence of series of simple partial fractions in $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Sb. Math.*, **202**:10 (2011), 1493–1504.
7. В. И. Данченко, Е. Н. Кондакова, “Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сб. статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 86–96; англ. пер.: V. I. Danchenko, E. N. Kondakova, “Chebyshev’s alternance in the approximation of constants by simple partial fractions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 80–90.
8. М. А. Комаров, “Примеры, связанные с наилучшим приближением наипростейшими дробями”, *Проблемы матем. анализа*, **65** (2012), 119–131; англ. пер.: M. A. Komarov, “Examples related to best approximation by simple partial fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **184**:4 (2012), 509–523.
9. М. А. Комаров, “О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 28–37; англ. пер.: M. A. Komarov, “An example of non-uniqueness of a simple partial fraction of the best uniform approximation”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **57**:9 (2013), 22–30.
10. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965, 407 с.
11. Я. В. Новак, *Апроксимаційні та інтерполяційні властивості найпростіших дробів*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ИМ НАН Украины, Киев, 2009.
12. В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения”, *Тез. докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам* (Суздаль, 2010), МИАН, М., 2010, 71–72.
13. М. А. Комаров, “К задаче о единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения”, *Проблемы матем. анализа*, **56** (2011), 63–82; англ. пер.: M. A. Komarov, “Uniqueness of a simple partial fraction of best approximation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **175**:3 (2011), 284–308.
14. М. А. Комаров, “О достаточном признаке наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями”, *Проблемы матем. анализа*, **68** (2013), 133–139; англ. пер.: M. A. Komarov, “Sufficient condition for the best uniform approximation by simple partial fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **189**:3 (2013), 482–489.

15. М. А. Комаров, “Критерий наилучшего приближения констант простейшими дробями”, *Матем. заметки*, **93**:2 (2013), 209–215; англ. пер.: М. А. Komarov, “A criterion for the best approximation of constants by simple partial fractions”, *Math. Notes*, **93**:2 (2013), 250–256.
16. М. А. Komarov, “On the analog of Chebyshev theorem for simple partial fractions”, *Комплексный анализ и его приложения* (Петрозаводск, 2014), ПетргУ, Петрозаводск, 2014, 65–69.
17. М. А. Комаров, “Об аналоге условия Хаара для простейших дробей”, *Проблемы матем. анализа*, **80** (2015), 17–22.
18. Х. Минк, *Перманенты*, Мир, М., 1982, 215 с.; пер. с англ.: Н. Minc, *Permanents*, *Encyclopedia Math. Appl.*, **6**, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978, xviii+205 pp.
19. Д. Я. Данченко, *Некоторые вопросы аппроксимации и интерполяции рациональными функциями. Приложение к уравнениям эллиптического типа*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ВГПУ, Владимир, 2001.
20. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973, 551 с.; англ. пер.: М. G. Kreĭn, A. A. Nudel'man, *The Markov moment problem and extremal problems.*, *Transl. Math. Monogr.*, **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977, v+417 pp.
21. Е. Н. Кондакова, “Интерполяция простейшими дробями”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **9**:2 (2009), 30–37.
22. М. А. Комаров, “Критерий разрешимости задачи кратной интерполяции посредством простейших дробей”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:4 (2014), 750–763; англ. пер.: М. А. Komarov, “A criterion for the solvability of the multiple interpolation problem by simple partial fractions”, *Siberian Math. J.*, **55**:4 (2014), 611–621.
23. Н. С. Бахвалов, *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)*, Наука, М., 1973, 631 с.; фр. пер.: N. Bakhvalov, *Méthodes numériques. Analyse, algèbre, équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscow, 1976, 606 pp.
24. А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, Ч. 1: *Основы алгебры*, Физматлит, М., 2000, 271 с.

Михаил Анатольевич Комаров

(Мікнаїл А. Кома́ров)

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: kami9@yandex.ru

Поступило в редакцию

11.06.2014

30.01.2015