Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. И. Шабалин, Гомологии некоторых поверхностей с $p_g = q = 0$, изогенных произведению, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 211–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:47:38

УДК 512.774.46

Т. И. Шабалин

Гомологии некоторых поверхностей с $p_g = q = 0$, изогенных произведению

Рассматриваются четыре семейства поверхностей общего типа с $p_g = q = 0$, являющихся факторами произведения кривых по действию конечной абелевой группы, которые были найдены Бауэром и Катанезе. Мы вычисляем группы целочисленных гомологий этих поверхностей.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: поверхности общего типа, поверхности, изогенные произведению, ложные квадратики, разветвленные накрытия, фундаментальная группа, группы гомологий.

DOI: 10.4213/im8267

§ 1. Введение

Одной из важнейших проблем алгебраической геометрии является классификация алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Напомним, что рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ между многообразиями X и Y – это морфизм $U \rightarrow Y$, определенный на открытом подмножестве $U \subseteq X$. Два многообразия X и Y называются *бirationально эквивалентными*, если между ними существуют два взаимно обратных рациональных отображения.

Пространства сечений $H^0(X, \Omega_X^k)$ пучков алгебраических k -форм являются бирациональными инвариантами многообразия X . Каноническое кольцо $R = \bigoplus H^0(X, nK)$, где K – дивизор, отвечающий линейному расслоению форм старшей степени, также является инвариантом многообразия X . Размерность Кодaira $\kappa(X)$ полагается равной $\text{tr. deg } R - 1$, где $\text{tr. deg } R$ – степень трансцендентности R над $\mathbb{C}$, если R не совпадает с $\mathbb{C}$, и $-\infty$ иначе. Для любого многообразия X имеем $\kappa(X) \leq \dim X$. Например, пусть C – кривая; тогда $\kappa(C) = -\infty$, если $C \cong \mathbb{P}^1$, $\kappa(C) = 0$, если C – эллиптическая кривая, и $\kappa(C) = 1$, если C имеет род $g \geq 2$. Многообразие X относится к общему типу, если $\kappa(X) = \dim X$, иначе – к специальному типу.

Поверхность X называется *минимальной*, если любой бирациональный морфизм $X \rightarrow Y$ является изоморфизмом. Если S бирационально эквивалентна минимальной поверхности X , то X называется *минимальной моделью* S . Минимальная модель всегда существует, но не обязательно единственна. Имеется полная бирациональная классификация поверхностей специального типа, т. е. описаны их минимальные модели и пространства модулей.

Однако вопрос классификации поверхностей общего типа остается открытым. *Геометрическим родом* p_g поверхности S называется число $h^0(S, \Omega_S^2)$, где $h^0 = \dim H^0$, *иррегулярностью* q называется $h^0(S, \Omega_S^1)$. Минимальные поверхности с $p_g = 0$ обязательно имеют $q = 0$ и $1 \leq K^2 \leq 9$ (оценка сверху следует из [1]–[4]), где K^2 – самопересечение канонического дивизора. В случае $K_S^2 = 9$ универсальным накрытием S является шар $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$, и в работах [5]–[7] дана полная классификация таких поверхностей. В случае $K_S^2 = 8$ существует гипотеза [8], что S униформизируется бидиском $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_1$. И. Бауэр, Ф. Катанезе и Ф. Грюневальд [9] (см. также [8]) рассмотрели случай, когда поверхность имеет неразветвленное накрытие произведением кривых. Эти поверхности образуют 18 неприводимых компонент в пространстве модулей. Список таких поверхностей, получающихся как факторы произведения двух кривых по диагональному действию конечной абелевой группы, был дан уже в [10]. Они образуют четыре неприводимых семейства.

Одним из источников интереса к поверхностям с $p_g = q = 0$ являются свойства их производных категорий. Категория $D^b(\text{coh}(S))$ может допускать исключительный набор максимальной длины, ортогональный к которому будет так называемой квазифантомной категорией, т. е. триангулированной категорией, у которой гомологии Хохшильда нулевые, а K_0 является группой кручения. Для четырех семейств, упомянутых ранее, такие наборы были построены в [11]–[13].

Основной результат настоящей работы – вычисление групп гомологий с целочисленными коэффициентами всех поверхностей из этих семейств. В следующем параграфе мы напомним основные факты об этих поверхностях. Последний параграф посвящен вычислению групп гомологий.

Автор признателен С. Галкину, Я. Кононову, В. Куликову, Е. Шиндеру за полезные обсуждения и благодарит своего научного руководителя Д. О. Орлова за его терпение, поддержку и ценные предложения.

§ 2. Поверхности с $p_g = q = 0$, изогенные высшему произведению с абелевой группой

Мы рассматриваем гладкие проективные поверхности над $\mathbb{C}$. Один из способов построения поверхности с $p_g = q = 0$ – взять фактор по действию конечной группы. Поверхность S называется *изогенной высшему произведению* [14], если она допускает конечное неразветвленное накрытие вида $C_1 \times C_2$, где C_1, C_2 – кривые рода ≥ 2 . Как показано в [14], это означает, что S является фактором $(C_1 \times C_2)/G$, где $g(C_i) \geq 2$, G – конечная группа, действующая свободно на $C_1 \times C_2$. Действие называется *смешанным*, если G переставляет две кривые, и *несмешанным*, если G действует на каждой кривой отдельно.

Далее поверхность S всегда будет фактором $(C_1 \times C_2)/G$, где конечная группа G действует на каждой кривой C_i рода ≥ 2 и действие на произведении свободное. Также мы будем предполагать, что для S выполнено $p_g = q = 0$. Поверхность S – разветвленное накрытие $C_1/G \times C_2/G$. Если бы на $C_1/G \times C_2/G$

были ненулевые глобальные формы, их можно было бы поднять на S , поэтому предположение $p_g = q = 0$ означает, что C_i/G изоморфны $\mathbb{P}^1$.

Рассмотрим разветвленное накрытие $p: C \rightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$. Пусть B – локус ветвления $p: B = \{p(x) \mid x \in C, \text{ стабилизатор } x - \text{нетривиальная подгруппа } G\}$. Имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow \pi_1(C \setminus p^{-1}(B)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus B) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Пусть $x_1, \dots, x_r$ – различные точки B , γ_i – простые обходы вокруг x_i . Каждый γ_i отображается в элемент $g_i \in G$. Обозначим порядок g_i через m_i . Орбифолдная фундаментальная группа накрытия p определяется как факторгруппа группы $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus B)$ по нормальной подгруппе, порожденной элементами $\gamma_i^{m_i}$.

В рассматриваемой ситуации пусть $\Pi(i)$ для $i = 1, 2$ – орбифолдная фундаментальная группа накрытия $C_i \rightarrow C_i/G$. Тогда имеют место точные последовательности

$$1 \rightarrow \pi_1(C_i) \rightarrow \Pi(i) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Перемножая две последовательности, получаем

$$1 \rightarrow \pi_1(C_1) \times \pi_2(C_2) \rightarrow \Pi(1) \times \Pi(2) \rightarrow G \times G \rightarrow 1.$$

При этом $\pi_1(S)$ является прообразом в $\Pi(1) \times \Pi(2)$ диагональной подгруппы G в $G \times G$ [14], так что для абелевой G получаем точную последовательность

$$1 \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow \Pi(1) \times \Pi(2) \rightarrow G \rightarrow 1, \quad (1)$$

в которой вторая стрелка является композицией морфизма $\Pi(1) \times \Pi(2) \rightarrow G \times G$ с отображением $G \times G \rightarrow G$, заданным как $(a, b) \mapsto a - b$.

Накрытие $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ определяется набором точек ветвления $x_1, \dots, x_r$ на $\mathbb{P}^1$ и образов $g_i \in G$ обходов вокруг x_i таких, что $g_1 \cdots g_r = 1$ и $g_1, \dots, g_r$ порождают G . Если $\{g_i\}$ – набор генераторов, соответствующий накрытию $C_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, и $\{h_j\}$ соответствуют $C_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, то действие G на $C_1 \times C_2$ будет свободным тогда и только тогда, когда

$$\left(\bigcup \langle g_i \rangle\right) \cap \left(\bigcup \langle h_j \rangle\right) = \{1\},$$

где $\langle g_i \rangle$ – подгруппа, порожденная g_i .

И. Бауэр и Ф. Катанезе классифицировали поверхности с $p_g = q = 0$, изогенные высшему произведению с абелевой группой G [10]. Они нашли все абелевы группы G , допускающие две системы образующих $\{g_i\}$, $\{h_i\}$, как выше. Оказывается, возможны только следующие группы G : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. Вариация положения точек ветвления на факторах C_1/G , C_2/G соответствует вариации поверхности S в семействе. Эти семейства имеют размерности 5, 4, 2 для групп $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ соответственно, а для $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ есть только одна поверхность (см. [15], в [10] ошибочно указано, что их две). В следующем параграфе мы найдем группы гомологий этих поверхностей.

§ 3. Вычисление групп гомологий

Мы хотим найти первые группы гомологий с целочисленными коэффициентами для каждой поверхности S из четырех семейств, описанных в [10]. Все эти поверхности являются факторами $(C_1 \times C_2)/G$ произведения двух кривых C_i по диагональному действию конечной абелевой группы G . Обе кривые – разветвленные накрытия $C_i/G \cong \mathbb{P}^1$. Поскольку $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(S)^{\text{ab}} := \pi_1(S)/[\pi_1(S), \pi_1(S)]$, задача сводится к теоретико-групповому вычислению: по заданным гомоморфизмам $\Pi(i) \rightarrow G$ найти абелианизацию ядра в точной последовательности (1).

Группа $\Pi(1)$ имеет представление $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}, a_1 \cdots a_n \rangle$, где n – число точек ветвления накрытия $C_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, a_j – класс обхода вокруг точки $x_j \in B$, а k_j – порядок стабилизатора каждого прообраза x_j . Число k_j равно порядку образа a_j в группе G . Во всех случаях G является произведением циклических групп одинакового порядка, так что все k_j равны одному числу k . Группа $\Pi(2)$ имеет такое же представление, где генераторы обозначаются $b_1, \dots, b_m$. Мы будем обозначать образующие циклических множителей G через e_i . Опишем гомоморфизмы $\varphi: \Pi(1) \rightarrow G$ и $\psi: \Pi(2) \rightarrow G$. Они общие для всех поверхностей из конкретного семейства.

Случай 1: $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Имеем $k = 2$, $n = 5$, $m = 6$, и гомоморфизм φ задан как

$$a_1 \mapsto e_1, \quad a_2 \mapsto e_2, \quad a_3 \mapsto e_3, \quad a_4 \mapsto e_1, \quad a_5 \mapsto e_2 + e_3.$$

Гомоморфизм ψ есть

$$\begin{aligned} b_1 \mapsto e_1 + e_2, \quad b_2 \mapsto e_1 + e_3, \quad b_3 \mapsto e_1 + e_2 + e_3, \\ b_4 \mapsto e_1 + e_2, \quad b_5 \mapsto e_1 + e_3, \quad b_6 \mapsto e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Случай 2: $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Имеем $k = 2$, $n = m = 5$. Гомоморфизм φ задается как

$$a_1 \mapsto e_1, \quad a_2 \mapsto e_2, \quad a_3 \mapsto e_3, \quad a_4 \mapsto e_4, \quad a_5 \mapsto e_1 + e_2 + e_3 + e_4,$$

а ψ есть

$$b_1 \mapsto e_2 + e_3 + e_4, \quad b_2 \mapsto e_1 + e_3 + e_4, \quad b_3 \mapsto e_1 + e_3, \quad b_4 \mapsto e_2 + e_4, \quad b_5 \mapsto e_3 + e_4.$$

Случай 3: $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Имеем $k = 3$, $n = m = 4$. Гомоморфизм φ задан как

$$a_1 \mapsto e_1, \quad a_2 \mapsto e_2, \quad a_3 \mapsto -e_1, \quad a_4 \mapsto -e_2,$$

а ψ есть

$$b_1 \mapsto e_1 + e_2, \quad b_2 \mapsto e_1 - e_2, \quad b_3 \mapsto -e_1 - e_2, \quad b_4 \mapsto -e_1 + e_2.$$

Случай 4: $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$. Имеем $k = 5$, $n = m = 3$. Гомоморфизм φ задан как

$$a_1 \mapsto e_1, \quad a_2 \mapsto e_2, \quad a_3 \mapsto -e_1 - e_2,$$

а ψ есть

$$b_1 \mapsto e_1 + 2e_2, \quad b_2 \mapsto 3e_1 + 4e_2, \quad b_3 \mapsto e_1 + 4e_2.$$

Введем следующие обозначения: $K = \pi_1(S)$, $F = \Pi(1) \times \Pi(2)$. Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Она индуцирует другую точную последовательность

$$1 \rightarrow [F, F]/[K, K] \rightarrow F/[K, K] \rightarrow F/[F, F] \rightarrow 1. \quad (2)$$

Позже мы покажем, что группа $[F, F]/[K, K]$ является абелевой. Сначала мы вычислим группы $F/[F, F]$, $[F, F]/[K, K]$ и 2-коцикл, соответствующий расширению (2). Тогда расширение

$$1 \rightarrow [F, F]/[K, K] \rightarrow K/[K, K] \rightarrow K/[F, F] \rightarrow 1$$

будет задаваться ограничением 2-коцикла на группу $K/[F, F]$.

Для нас коммутатор будет иметь следующий смысл: $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Коммутатор удовлетворяет двум тождествам:

$$[ab, c] = a[b, c]a^{-1}[a, c], \quad (3)$$

$$[a, bc] = [a, b]b[a, c]b^{-1}. \quad (4)$$

ЛЕММА 3.1. *Имеем $[F, [F, F]] \subseteq [K, K]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $[F, [F, F]]$ порождена элементами вида $[p_1q_1, [p_2q_2, p_3q_3]]$, где p_i – элементы группы $\Pi(1)$, рассматриваемой как подгруппа в F , а $q_i \in \Pi(2)$. Имеем

$$[p_1q_1, [p_2q_2, p_3q_3]] = [p_1, [p_2, p_3]] [q_1, [q_2, q_3]].$$

Поскольку G абелева, то $[p_2, p_3], [q_2, q_3] \in K$. Гомоморфизмы φ, ψ сюръективны, так что существуют $p'_1 \in \Pi(1)$, $q'_1 \in \Pi(2)$ такие, что $p'_1q_1, p_1q'_1 \in K$. Тогда

$$[p_1, [p_2, p_3]] [q_1, [q_2, q_3]] = [p_1q'_1, [p_2, p_3]] [p'_1q_1, [q_2, q_3]] \in [K, K].$$

Лемма доказана.

Следовательно, группа $[F, F]/[K, K]$ абелева. Из тождеств (3), (4) следует, что отображение коммутатора

$$[\cdot, \cdot]: F \times F \rightarrow [F, F]/[K, K]$$

билинейно и кососимметрично. Оно индуцирует сюръективный гомоморфизм

$$\tau: \Lambda^2 F^{\text{ab}} \rightarrow [F, F]/[K, K],$$

переводящий $x \wedge y$ в класс $[x, y]$. Здесь под $\Lambda^2 F^{\text{ab}}$ мы понимаем фактор тензорного произведения $F^{\text{ab}} \otimes F^{\text{ab}}$ в категории абелевых групп по подгруппе, порожденной элементами вида $x \otimes x$.

Пусть $p_1 \in K \cap \Pi(1)$, а $p_2 q_2$ – произвольный элемент F . Тогда существует элемент $q'_2 \in \Pi(2)$ такой, что $p_2 q'_2 \in K$. Имеем

$$\tau(p_1 \wedge p_2 q_2) = \tau(p_1 \wedge p_2) = \tau(p_1 \wedge p_2 q'_2) = 0.$$

Аналогично, если $q_1 \in K \cap \Pi(2)$, то $\tau(q_1 \wedge p_2 q_2) = 0$. Определим отображение

$$\sigma: \Lambda^2 G \rightarrow [F, F]/[K, K]$$

правилом $\sigma(g_1 \wedge g_2) = \tau(p_1 \wedge p_2)$, где $p_i \in \Pi(1)$ – произвольные элементы такие, что $\varphi(p_i) = g_i$. Оно корректно определено согласно изложенному выше. Если $p_1 q_1, p_2 q_2 \in K$, то $\varphi(p_i) = -\psi(q_i)$ и $\tau(p_1 q_1 \wedge p_2 q_2) = 0$, так что $\tau(p_1 \wedge p_2) = -\tau(q_1 \wedge q_2)$. Это значит, что для любых $p, p' \in \Pi(1)$ и $q, q' \in \Pi(2)$ мы имеем $\tau(p \wedge p') = \sigma(\varphi(p) \wedge \varphi(p'))$ и $\tau(q \wedge q') = -\sigma(\psi(q) \wedge \psi(q'))$. Следовательно, образ τ порождается образом σ , т. е. гомоморфизм σ сюръективен.

Применяя тождества (3), (4), получаем равенства в группе $[F, F]/[F, [F, F]]$:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1^k \cdots a_n^k = a_1^k \cdots a_{n-1}^k (a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1})^k \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \prod_{i < j < n} [a_i^{-1}, a_j^{-1}] = \frac{k(k-1)}{2} \prod_{i < j < n} [a_i, a_j]. \end{aligned}$$

Значит, элементы $\frac{k(k-1)}{2} \sum_{i < j < n} \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j)$, $\frac{k(k-1)}{2} \sum_{i < j < m} \psi(b_i) \wedge \psi(b_j)$ лежат в ядре σ . Обозначим через H факторгруппу группы $\Lambda^2 G$ по подгруппе, порожденной этими двумя элементами, индуцированный гомоморфизм $H \rightarrow [F, F]/[K, K]$ будем по-прежнему обозначать через σ .

ЛЕММА 3.2. *Гомоморфизм $\sigma: H \rightarrow [F, F]/[K, K]$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем обратный гомоморфизм $\alpha: [F, F]/[K, K] \rightarrow H$. Мы будем использовать все образующие, кроме последней, для групп $\Pi(1)$, $\Pi(2)$. Пусть Σ_1 – множество $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_{n-1}^{\pm 1}\}$, а $\Sigma_2 = \{b_1^{\pm 1}, \dots, b_{m-1}^{\pm 1}\}$. Каждый элемент $[F, F] = [\Pi(1), \Pi(1)] \times [\Pi(2), \Pi(2)]$ можно представить парой таких слов (u, v) из букв Σ_1, Σ_2 соответственно, что полная степень u по каждой букве a_i делится на k и то же верно относительно степеней v по каждой b_j . Пусть $(u, v) = (x_1 \dots x_c, y_1 \dots y_d)$, где $x_l = a_{i(l)}^{\pm 1}$, $y_l = b_{j(l)}^{\pm 1}$. Положим

$$\alpha(u, v) = \sum_{\substack{r < s \\ i(r) > i(s)}} \varphi(x_r) \wedge \varphi(x_s) - \sum_{\substack{r < s \\ j(r) > j(s)}} \psi(y_r) \wedge \psi(y_s).$$

Если мы добавим подслово xx^{-1} или x^k для $x \in \Sigma_1$ в любое место слова u , значение $\alpha(u, v)$ не изменится. Если мы добавим подслово $(a_1 \dots a_{n-1})^k$, то значение изменится на $\frac{k(k-1)}{2} \sum_{i > j} \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j)$, но эта сумма – нулевой элемент в H . Таким образом, мы показали, что $\alpha(u, v)$ не зависит от выбора слова u , представляющего данный элемент $[\Pi(1), \Pi(1)]$. То же верно и для v .

Для произведения двух пар слов имеем

$$\alpha(uu', vv') = \alpha(u, v) + \alpha(u', v') + R,$$

где R есть сумма

$$\sum \varphi(a_i^{\pm 1}) \wedge \varphi(a_j^{\pm 1}) - \sum \psi(b_r^{\pm 1}) \wedge \psi(b_s^{\pm 1})$$

по всем вхождению букв с индексами i в u , с индексами j в u' , соответственно, с индексами r в v , s в v' такими, что $i > j$ и $r > s$. Поскольку полная степень u, u', v, v' по каждой образующей делится на k , образ R в H нулевой. Значит, α – корректно определенный гомоморфизм $[F, F] \rightarrow H$.

Если (u, v) – пара слов, представляющая элемент $[F, F]$, то

$$\alpha(a_i u a_i^{-1}, v) = \alpha(u, v) + R,$$

где R есть сумма

$$\sum_{\substack{x_j \text{ из } u \\ i > j}} \varphi(a_i) \wedge \varphi(x_j) + \sum_{\substack{x_j \text{ из } u \\ j > i}} \varphi(x_j) \wedge \varphi(a_i^{-1}) = \varphi(a_i) \wedge \varphi(u) = 0.$$

То же верно и для сопряжения образующими $\Pi(2)$. Мы показали, что $\alpha(xux^{-1}) = \alpha(y)$ для любых $x \in F$, $y \in [F, F]$. Следовательно, α является гомоморфизмом $[F, F]/[F, [F, F]] \rightarrow H$.

Из определения α следует, что $\alpha([a_i, a_j]) = \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j)$ и $\alpha([b_i, b_j]) = -\psi(b_i) \wedge \psi(b_j)$. Из тождеств (3), (4) получаем, что для любых $p, p' \in \Pi(1)$ и $q, q' \in \Pi(2)$ верно $\alpha([p, p']) = \varphi(p) \wedge \varphi(p')$ и $\alpha([q, q']) = -\psi(q) \wedge \psi(q')$. Отсюда видно, что α – гомоморфизм $[F, F]/[K, K] \rightarrow H$, обратный к σ . Лемма доказана.

Напомним [16], что расширения произвольной группы G с помощью абелевой группы A , снабженной структурой G -модуля,

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1, \quad (5)$$

параметризуются элементами группы когомологий $H^2(G, A)$. А именно, расширению вида (5) ставится в соответствие нормализованный 2-коцикл $\langle \cdot, \cdot \rangle: G \times G \rightarrow A$, заданный как $\langle g, h \rangle = \gamma(g)\gamma(h)\gamma(gh)^{-1}$, где γ – произвольное сечение отображения $\pi: E \rightarrow G$ такое, что $\gamma(1) = 1$. По определению нормализованный 2-коцикл – это отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle: G \times G \rightarrow A$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\begin{aligned} \langle g, 1 \rangle &= \langle 1, g \rangle = 0, \\ f \cdot \langle g, h \rangle &= \langle fg, h \rangle + \langle f, gh \rangle - \langle f, g \rangle = 0. \end{aligned}$$

По данному 2-коциклу $\langle \cdot, \cdot \rangle$ группу E можно восстановить (с точностью до изоморфизма) следующим образом: как множество, $E = A \times G$, а умножение зададим формулой

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + g \cdot b + \langle g, h \rangle, gh).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.3 [16]. Пусть расширение

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

задается 2-коциклом $\eta \in Z^2(G, A)$. Пусть $f: H \rightarrow G$ – гомоморфизм групп. Тогда расширение

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \times_G H \rightarrow H \rightarrow 1$$

задается обратным образом коцикла $f^*\eta \in Z^2(H, A)$. Здесь действие H на A индуцировано с помощью гомоморфизма f .

В нашей ситуации рассмотрим расширение (2):

$$0 \rightarrow H \rightarrow F/[K, K] \rightarrow F^{\text{ab}} \rightarrow 1.$$

Поскольку $[F, [F, F]] \subseteq [K, K]$, действие F^{ab} сопряжениями на H тривиально. Группа F^{ab} является свободным $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ -модулем с базисом $\{a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{m-1}\}$. Определим сечение γ формулой

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n-1} r'_i b_i\right) = a_1^{r_1} \cdots a_{n-1}^{r_{n-1}} b_1^{r'_1} \cdots b_{m-1}^{r'_{m-1}},$$

где $0 \leq r_i, r'_i \leq k-1$ для всех i . Тогда

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum r_i a_i + \sum r'_i b_i, \sum s_i a_i + \sum s'_i b_i \right\rangle \\ &= \sigma(a_1^{r_1} \cdots a_{n-1}^{r_{n-1}} b_1^{r'_1} \cdots b_{m-1}^{r'_{m-1}} a_1^{s_1} \cdots a_{n-1}^{s_{n-1}} b_1^{s'_1} \cdots b_{m-1}^{s'_{m-1}} b_{m-1}^{-t'_{m-1}} \cdots b_1^{-t'_1} a_{n-1}^{-t_{n-1}} \cdots a_1^{-t_1}), \end{aligned}$$

где t_i равно $r_i + s_i$ либо $r_i + s_i - k$, и аналогично для t'_i . Из определения σ следует, что это равно

$$-\sum_{i < j} r_j s_i \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j) + \sum_{i < j} r'_j s'_i \psi(b_i) \wedge \psi(b_j).$$

В частности, в нашем случае 2-коцикл билинеен.

Пусть задано расширение в категории абелевых групп

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0,$$

а также сюръективный гомоморфизм $\mathbb{Z}^n \rightarrow G$, $e_i \mapsto g_i$, ядро которого порождено элементами $r_j, j \in J$. Тогда определим гомоморфизм $A \oplus \mathbb{Z}^n \rightarrow E$ как тождественный на A и отображающий e_i в $(0, g_i)$. Он корректно определен, поскольку E абелева, и, как нетрудно видеть, сюръективен, и его ядро порождается элементами $(a_j, r_j), j \in J$, где $a_j \in A$ – единственный элемент такой, что (a_j, r_j) отображается в нуль в E .

Мы имеем точную последовательность абелевых групп

$$0 \rightarrow H \rightarrow K^{\text{ab}} \rightarrow K/[F, F] \rightarrow 0.$$

Соответствующий ей 2-коцикл есть ограничение 2-коцикла $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на подгруппу $K/[F, F] \leq F^{\text{ab}}$. Мы будем по-прежнему обозначать его через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Группа $K/[F, F]$ – свободный $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ -модуль (так как во всех наших случаях k простое), следовательно, она является фактором некоторого $\mathbb{Z}^l$ по соотношениям $kc_i = 0$. Поскольку 2-коцикл $\langle \cdot, \cdot \rangle$ билинеен, в группе K^{ab} выполняется

$$(0, c_i)^k = (\langle c_i, c_i \rangle + \cdots + \langle (k-1)c_i, c_i \rangle, kc_i) = \left(\frac{k(k-1)}{2} \langle c_i, c_i \rangle, 0 \right).$$

Значит, чтобы получить группу K^{ab} , нужно добавить к абелевой группе H новые генераторы f_i с соотношениями $kf_i = -\frac{k(k-1)}{2} \langle c_i, c_i \rangle$. Теперь мы сделаем это во всех случаях по очереди.

ТЕОРЕМА 3.4. *Первые группы гомологий наших поверхностей следующие:*

- 1) $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ в случае $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$;
- 2) $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ в случае $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$;
- 3) $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ в случае $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$;
- 4) $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ в случае $G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Группа H – факторгруппа группы $\Lambda^2 G$ по подгруппе, порожденной элементами

$$\sum_{i < j < 5} \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j) = e_2 \wedge e_3, \quad \sum_{i < j < 6} \psi(b_i) \wedge \psi(b_j) = 0.$$

Значит, $H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Выберем базис в $K/[F, F]$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $c_1 = (a_1 + a_4, 0)$, $c_2 = (a_1 + a_2, b_1)$, $c_3 = (a_1 + a_3, b_2)$, $c_4 = (a_1 + a_2 + a_3, b_3)$, $c_5 = (a_1 + a_2, b_4)$, $c_6 = (a_1 + a_3, b_5)$. Тогда группа K^{ab} является фактором $H \oplus \mathbb{Z}^6$ по соотношениям

$$\begin{aligned} 2f_1 &= -\langle c_1, c_1 \rangle = \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_4) = 0, \\ 2f_2 &= e_1 \wedge e_2, \\ 2f_3 &= e_1 \wedge e_3, \\ 2f_4 &= e_1 \wedge (e_2 + e_3) + e_2 \wedge e_3, \\ 2f_5 &= e_1 \wedge e_2, \\ 2f_6 &= e_1 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Элементы в правых частях этих соотношений порождают всю группу H . Таким образом, $K^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

2) Группа H – факторгруппа группы $\Lambda^2 G$ по подгруппе, порожденной элементами

$$\begin{aligned} \sum_{i < j < 4} \varphi(a_i) \wedge \varphi(a_j) &= e_1 \wedge (e_2 + e_3 + e_4) + e_2 \wedge (e_3 + e_4) + e_3 \wedge e_4, \\ \sum_{i < j < 4} \psi(b_i) \wedge \psi(b_j) &= e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

Значит, $H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Выберем базис в $K/[F, F]$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: $c_1 = (a_2 + a_3 + a_4, b_1)$, $c_2 = (a_1 + a_3 + a_4, b_2)$, $c_3 = (a_1 + a_3, b_3)$, $c_4 = (a_2 + a_4, b_4)$. Тогда группа K^{ab} является факторгруппой группы $H \oplus \mathbb{Z}^4$ по соотношениям

$$2f_1 = e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4,$$

$$2f_2 = e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4,$$

$$2f_3 = e_1 \wedge e_3,$$

$$2f_4 = e_2 \wedge e_4.$$

Элементы в правых частях линейно независимы в H . Таким образом, $K^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$.

3), 4) Поскольку k нечетно, число $\frac{k(k-1)}{2}$ делится на k . Значит, H – факторгруппа группы $\Lambda^2 G$ по тривиальным элементам, $H = \Lambda^2 G$, а соотношения для генераторов f_i есть просто $kf_i = 0$. Таким образом, $K^{\text{ab}} \cong \Lambda^2 G \oplus K/[F, F]$. В случае 3) имеем $K^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$. В случае 4) имеем $K^{\text{ab}} \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$.

Список литературы

1. Y. Miyaoka, “On the Chern numbers of surfaces of general type”, *Invent. Math.*, **42** (1977), 225–237.
2. S.-T. Yau, “Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **74**:5 (1977), 1798–1799.
3. S.-T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.
4. Y. Miyaoka, “Algebraic surfaces with positive indices”, *Classification of algebraic and analytic manifolds* (Katata, 1982), *Progr. Math.*, **39**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, 281–301.
5. G. Prasad, S. Yeung, “Fake projective planes”, *Invent. Math.*, **168**:2 (2007), 321–370.
6. G. Prasad, S. Yeung, *Addendum to “Fake projective planes”*, arXiv:0906.4932.
7. D. I. Cartwright, T. Steger, “Enumeration of the 50 fake projective planes”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **348**:1–2 (2010), 11–13.
8. I. Bauer, F. Catanese, R. Pignatelli, “Surfaces of general type with geometric genus zero: a survey”, *Complex and differential geometry*, Springer Proc. Math., **8**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011, 1–48.
9. I. Bauer, F. Catanese, F. Grunewald, “The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves”, *Pure Appl. Math. Q.*, **4**:2 (2008), 547–586.
10. I. Bauer, F. Catanese, “Some new surfaces with $p_g = q = 0$ ”, *The Fano conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, 123–142.
11. S. Galkin, E. Shinder, “Exceptional collections of line bundles on the Beauville surface”, *Adv. in Math.*, **244** (2013), 1033–1050.
12. K.-S. Lee, *Derived categories of surfaces isogenous to a higher product*, arXiv:1303.0541.
13. K.-S. Lee, *Exceptional sequences of maximal length on some surfaces isogenous to a higher product*, arXiv:1311.5839.
14. F. Catanese, “Fibred surfaces, varieties isogenous to a product and related moduli spaces”, *Am. J. of Math.*, **122** (2000), 1–44.

15. I. Bauer, F. Catanese, D. Frapporti, *The fundamental group and torsion group of Beauville surfaces*, [arXiv: 1402.2109](#).
16. C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

ТИМОФЕЙ ИВАНОВИЧ ШАБАЛИН

(TIMOFEI I. SHABALIN)

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, г. Москва

E-mail: shabalin.timofey@gmail.com

Поступило в редакцию

18.06.2014